COCIENTES PRIMOS DE ÁLGEBRAS DE LIE Y SISTEMAS DE JORDAN

JOSÉ A. ANQUELA, TERESA CORTÉS, ESTHER GARCÍA, AND MIGUEL A. GÓMEZ LOZANO

Abstract. We show that, unlike alternative algebras, prime quotients of a nondegenerate Jordan system or a Lie algebra need not be nondegenerate, even if the original Jordan system is primitive, or the Lie algebra is strongly prime, both with nonzero simple hearts. For Jordan systems and Lie algebras directly linked to associative systems, we prove that semiprime quotients are necessarily nondegenerate.

Introducción

Un resultado clásico en teoría de anillos asociativos es: para un anillo asociativo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es un anillo semiprimo.
(2) R no posee ideales por la izquierda no nulos nilpotentes.
(3) R no posee ideales por la derecha no nulos nilpotentes.
(4) Si $x \in R$ verifica $xRx = \{0\}$, entonces $x = 0$.

No obstante, cuando salimos del mundo asociativo, incluso en el mundo alternativo, estas equivalencias no son ciertas. Así, si A es un álgebra alternativa, el carácter semiprimo, carecer de ideales nilpotentes no nulos, no es equivalente a ser no degenerada, es decir, no poseer divisores absolutos de cero no nulos (elementos $x \in A$ tales que $xAx = 0$). No obstante, en [5], Beidar, Mikhalev y Shestakov demostraron que si A es un álgebra alternativa no degenerada e I es un ideal de A tal que el cociente A/I es semiprimo, entonces A/I es no degenerado, lo cual es una extensión del resultado de Kleinfeld [14, Ch. 9, Sect. 2, Th. 5]. Obsérvese que este resultado demuestra que existen álgebras alternativa libres degeneradas.

En este trabajo estudiamos si un resultado análogo al de [5] es también cierto en el contexto de las álgebras de Lie o de los sistemas (álgebras, pares y sistemas triples) de Jordan.

1. Preliminares

1.1. Vamos a trabajar con sistemas asociativos, sistemas de Jordan (álgebras, pares y sistemas triples) y álgebras de Lie sobre un anillo de escalares arbitrario Φ (cf. [8, 9, 10, 11, 12]).

— Dada un álgebra de Jordan J, sus productos serán denotados por x^2, U_xy, para $x, y \in J$. Estos productos son cuadráticos en x y lineales en y con linealizaciones $x \circ y$, $U_{x,z}y = \{x, y, z\} = V_{x,y}z$, respectivamente.

— Dado un par de Jordan $V = (V^+, V^-)$, escribiremos sus productos $Q_xy \in V^\varepsilon$, $x \in V^\varepsilon$, $y \in V^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm$, con linealizaciones $Q_{x,z}y = \{x, y, z\} = D_{x,y}z$.

— Dado un sistema triple de Jordan T, escribiremos sus productos $P_x y$, $x, y \in T$, con linealizaciones $P_{x,z} y = \{x, y, z\} = L_{x,y} z$.

— Dada un álgebra de Lie L, el producto (bilineal) de dos elementos $x, y \in L$ será denotado por $[x, y]$. La aplicación adjunta $\mathrm{ad}_x : L \longrightarrow L$ está definida por $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$.

1.2. Un álgebra de Jordan da lugar a un sistema triple de Jordan simplemente olvidando la operación cuadrado, y tomando $P := U$. Si duplicamos cualquier sistema triple de Jordan T, $V(T) := (T, T)$ con producto $Q := P$ es un par de Jordan. Por último, si partimos de un par de Jordan $V = (V^+, V^-)$, $T(V) := V^+ \oplus V^-$ con producto $P_{x^+ \oplus x^-}(y^+ \oplus y^-) = Q_{x^+} y^- \oplus Q_{x^-} y^+$ es un sistema triple de Jordan (cf. [11, 1.13, 1.14]).

1.3. Un sistema asociativo R da lugar a un sistema de Jordan $R^{(+)}$, llamado su *simetrización*: con la misma estructura de Φ-módulo, definimos el mismo cuadrado y producto cuadrático $U_x y = xyx$, con $x, y \in R$ en el caso de álgebras, $P_x y = xyx$ en el caso de sistemas triples, y $Q_{x^\sigma} y^{-\sigma} = x^\sigma y^{-\sigma} x^\sigma$, $\sigma = \pm$ en el caso de pares, en donde la yuxtaposición denota el producto asociativo de R.

Dado un álgebra asociativa R, podemos construir un álgebra de Lie $R^{(-)}$, llamada su *antisimetrización*, quedándonos con la misma estructura de Φ-módulo y definiendo el nuevo producto por $[x, y] = xy - yx$.

1.4. Un *divisor absoluto de cero* en un sistema de Jordan J es un $x \in J$ tal que $U_x = 0$ (resp. $P_x = 0$ o $Q_x = 0$), mientras que en un álgebra de Lie L es un elemento $x \in L$ tal que $\mathrm{ad}_x^2 = 0$. Un sistema de Jordan o álgebra de Lie se dice que es *no degenerado* si el único divisor absoluto de cero que posee es el cero. Un sistema de Jordan o álgebra de Lie se dice que es semiprima (resp. prima) si el único ideal nilpotente es el nulo (resp. no contiene ideales ortogonales no nulos).

2. Contraejemplos

2.1. Si consideramos la Φ-álgebra asociativa libre $\mathrm{FAss}_{alg}[\mathrm{X}]$ sobre un conjunto X, la Φ-subálgebra de Jordan de $\mathrm{FAss}_{alg}[\mathrm{X}]$ generada por X es la Φ-álgebra de Jordan libre especial sobre X, denotada $\mathrm{FSJ}_{alg}[\mathrm{X}]$. Es más, cuando Φ es un cuerpo, $\mathrm{FSJ}_{alg}[\mathrm{X}]$ es fuertemente prima. Por tanto, el ejemplo dado en [13], de un álgebra de Jordan especial prima y degenerada sobre un cuerpo de característica cero, produce un primer contraejemplo al análogo buscado, ya que es cociente del álgebra de Jordan libre especial fuertemente prima $\mathrm{FSJ}_{alg}[\mathrm{X}]$. Los funtores dados en (1.2), junto con la transferencias de regularidades demostradas en [1], producen ejemplos de un par de Jordan o un sistema triple de Jordan fuertemente primo sobre un cuerpo de característica cero con cocientes primos y degenerados.

2.2. Siguiendo esta misma filosofía, en el mundo Lie podemos encontrar contraejemplos al resultado dado en [5] para el mundo alternativo. Sea X un conjunto y $\mathrm{FLie}_{alg}[\mathrm{X}]$ el álgebra de Lie libre sobre X. Como consecuencia del teorema de Poincare-Birkhoff-Witt (cf. [8, Cor. 17.3 B], [9, Cor. 1, p. 160]), si estamos trabajando en álgebras sobre cuerpos, $\mathrm{FLie}_{alg}[\mathrm{X}]$ es isomorfa a la subálgebra de Lie generada por X en $\mathrm{FAss}_{alg}[\mathrm{X}]$, lo que implica que, si X es infinito, es un álgebra de Lie fuertemente prima. Por tanto, si partimos del álgebra de Jordan prima y degenerada dada en [13] sobre un cuerpo de característica cero, el par de Jordan $V = (J, J)$ es primo y degenerado, por lo que el álgebra de Lie $\mathrm{TKK}(V)$ es un álgebra de Lie prima y degenerada sobre un cuerpo de característica cero (cf. [7, 1.2, 2.2, 2.6]), que es cociente del álgebra de Lie libre fuertemente prima $\mathrm{FLie}_{alg}[\mathrm{X}]$.

2.3. Es más, en [4] podemos encontrar un álgebra (par o triple) de Jordan primitivo con corazón no nulo que posee cocientes primos y degenerados, mientras que en [2] se muestran ejemplos de álgebras de Lie fuertemente primas con corazón no nulo y cocientes primos degenerados.

3. Sistemas de Jordan o Lie asociados con sistemas asociativos

En esta sección vamos a ver que, a pesar de lo anterior, un resultado análogo al dado en [5] para álgebras alternativas es cierto para estructuras Jordan o Lie que están próximas a las asociativas.

Definición 3.1. Sea R un sistema asociativo (álgebra, pair, o sistema triple) con involución $*$, $H_0 := H_0(R,*)$ un subespacio amplio de R, y B un $*$-ideal de R.

— Si R es un álgebra, definimos

$$K(B,H_0)=\left\{b+b^*+\sum_i \lambda_i b_i b_i^* + \sum_j b_j h_j b_j^* \mid b,b_i,b_j\in B, h_j\in H_0, \lambda_i\in\Phi\right\},$$

que es un ideal de H_0 contenido en $B\cap H_0$ [3, 2.2].

— Si $R=(R^+,R^-)$ es un par, definimos

$$K(B^\sigma,H_0)=\left\{b+b^*+\sum_i b_i h_i b_i^* \mid b,b_i\in B^\sigma, h_i\in H_0^{-\sigma}\right\},$$

que es un semi-ideal de H_0 contenido en $B^\sigma\cap H_0^\sigma$, $\sigma=\pm$ [3, 3.1] Denotaremos por $K(B,H_0)=(K(B^+,H_0),K(B^-,H_0))$.

— Si R es un sistema triple, definimos

$$K(B,H_0)=\left\{b+b^*+\sum_i b_i h_i b_i^* \mid b,b_i,\in B, h_i\in H_0\right\},$$

que es un semi-ideal de H_0 contenido en $B\cap H_0$ [3, 2.2].

Teorema 3.2. *Si R es un sistema asociativo con involución $*$, $H_0 := H_0(R,*)$ es un subespacio amplio de R, y P es un ideal semiprimo (resp. primo) de H_0, entonces existe un $*$- ideal semiprimo (resp. primo) I de R tal que $P = I\cap H_0$. Es más, I es el mayor $*$-ideal de R tal que $K(I,H_0)\subseteq P$. Más aún, P es un ideal no degenerado (resp. fuertemente primo) de H_0.*

Corolario 3.3. *Si R es un sistema asociativo y P es un ideal semiprimo (resp. primo) de $R^{(+)}$, entonces P es un ideal semiprimo (resp. primo) de R y, por tanto, P es un ideal no degenerado de $R^{(+)}$.*

Observemos que con estos dos resultados no sólo hemos demostrado que para los sistemas de Jordan no degenerados $R^{(+)}$ y $H_0(R,*)$ cualquier cociente semiprimo es no degenerado, sino que hemos caracterizado los ideales semiprimos de estos sistemas a partir de ideales semiprimos del sistema asociativo.

Teorema 3.4. *Sea R un álgebra asociativa y P un ideal semiprimo de $R^{(-)}$ y sea I un ideal de R maximal entre los contenidos en P. Entonces I es un ideal semiprimo de R, $P = Z(R/I)$ y, por tanto, P es un ideal no degenerado de $R^{(-)}$.*

En el mundo Lie no es cierto, en general, que los ideales semiprimos provengan de ideales asociativos semiprimos: si consideramos R el álgebra de matrices 4 por 4 con la involución trasposición, tenemos que $L = K(R, *)$ es un álgebra de Lie que es suma directa de dos álgebras simples, por lo que cualesquiera de estas álgebras es un ideal fuertemente primo de L que no tiene relación posible con los ideales de R, ya que ésta es simple (cf. [6]). No obstante si que podemos decir algo en este caso.

Teorema 3.5. *Sea $(R, *)$ un álgebra asociativa con involución $*$-prima tal que R no es un orden central en un álgebra de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ con $\mathbb{F}$ un cuerpo y $n \leq 4$. Entonces todo ideal semiprimo (resp. primo) de $K(R, *)$ es no degenerado (resp. fuertemente primo).*

References

[1] J. A. Anquela, T. Cortés, "Local and Subquotient Inheritance of Simplicity in Jordan Systems", *J. Algebra* **240** (2001) 680-704.
[2] J. A. Anquela, T. Cortés, "Imbedding Lie Algebras in Strongly Prime Algebras", *Comm. Algebra* (en prensa).
[3] J. A. Anquela, T. Cortés, E. García, "Herstein's Theorems and Simplicity of Hermitian Jordan Systems", *J. Algebra*, **246** (2001) 193-214.
[4] J. A. Anquela, T. Cortés, K. McCrimmon, "Imbedding Jordan Systems in Primitive Systems" (en preparación).
[5] K. I. Beidar, A. V. Mikhalev, "The Structure of Nondegenerate Alternative Algebras", *J. Soviet. Math.* **47** (1989) 2525-2536.
[6] T. S. Erickson, The Lie Structure in Prime Rings with involution Journal of Algebra **21**, (1972) 523-534.
[7] E. García, "Tits-Kantor-Koecher Algebras of Strongly Prime Hermitian Jordan Pairs", *J. Algebra* **277** (2004) 559-571.
[8] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1980.
[9] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, Inc., New York, 1979.
[10] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 39, Providence, 1968.
[11] O. Loos, *Jordan Pairs*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 460, Springer-Verlag, New York, 1975.
[12] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer-Verlag, New York, 2004.
[13] S. V. Pchelintsev, "Prime Algebras and Absolute Zero Divisors" *Math. USSR Izvestiya* **28** (1) (1987) 79-98.
[14] Rings that are nearly associative, by K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov and A. I. Shirshov, translated by Harry F. Smith, Academic Press, New York, 1982, xi + 371 pp.

Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo, C/ Calvo Sotelo s/n, 33007 Oviedo, Spain
E-mail address: `anque@orion.ciencias.uniovi.es;cortes@orion.ciencias.uniovi.es`

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, Spain
E-mail address: `esther.garcia@urjc.es`

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, 29071 Málaga
E-mail address: `miggl@uma.es`