PROBLEMAS SOBRE LA ECUACIÓN DE YANG-BAXTER

FERRAN CEDÓ

Abstract. This is a survey about some open problems on set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation and related algebraic structures.

Introducción

Sean X un conjunto no vacío y $r\colon X^2 \to X^2$ una aplicación, denotando $r(x,y)$ por $r(x,y) = (\sigma_x(y), \gamma_y(x))$. Se dice que (X,r) es una solución conjuntista, involutiva, no degenerada por la derecha, de la ecuación de Yang-Baxter si se cumplen las propiedades siguientes:

(1) $r^2 = \mathrm{id}_{X^2}$,
(2) $\sigma_x \in \mathrm{Sym}_X$, para todo $x \in X$,
(3) $r_1r_2r_1 = r_2r_1r_2$, donde $r_1 = r \times \mathrm{id}_X\colon X^3 \to X^3$ y $r_2 = \mathrm{id}_X \times r\colon X^3 \to X^3$.

Si además se cumple:

(2') $\gamma_x \in \mathrm{Sym}_X$, para todo $x \in X$,

decimos que (X,r) es no degenerada (por los dos lados).

Sea (X,r) una solución conjuntista, involutiva, no degenerada, de la ecuación de Yang-Baxter. El grupo $G(X,r)$ presentado con conjunto de generadores X y relaciones:

$$xy = \sigma_x(y)\gamma_y(x),$$

para todo $x,y \in X$, se llama grupo de estructura de (X,r), y Etingof, Shedler y Soloviev en [3] demostraron que es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Z}^X \rtimes \mathrm{Sym}_X$ de la forma

$$\{(a, \phi(a)) \mid a \in \mathbb{Z}^X\},$$

donde $\mathbb{Z}^X$ denota el grupo abeliano libre con base X y ϕ es una aplicación de $\mathbb{Z}^X$ a Sym_X tal que $\phi(x) = \sigma_x$ para todo $x \in X$.

El subgrupo de permutaciones $\mathcal{G}(X,r) \subseteq \mathrm{Sym}_X$ generado por $\{\sigma_x \mid x \in X\}$ claramente es una imagen homomórfica de $G(X,r)$. En [3] se demuestra que si X es finito, entonces $G(X,r)$ es resoluble, y por tanto $\mathcal{G}(X,r)$ es resoluble y finito. Además en [6] se demuestra que si X es finito entonces $G(X,r)$ es libre de torsión.

En [3] se introduce la relación binaria $\sim$ de retracción sobre X con respecto a r definida por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } \sigma_x = \sigma_y,$$

para $x,y \in X$. Es claro que $\sim$ es de equivalencia e induce una solución conjuntista, involutiva, no degenerada, de la ecuación de Yang-Baxter $(X/\sim, \tilde{r})$, con

$$\tilde{r}([x],[y]) = ([\sigma_x(y)], [\gamma_y(x)]),$$

donde $[x]$ denota la clase de $x \in X$ en el conjunto cociente $X/\sim$. Esta solución se dice que es la retracción de (X,r) y la denotamos por $\mathrm{Ret}(X,r)$. Definimos $\mathrm{Ret}^0(X,r)=(X,r)$ y, para $n>0$, $\mathrm{Ret}^n(X,r)=\mathrm{Ret}(\mathrm{Ret}^{n-1}(X,r))$. Si existe un entero no negativo m tal que $\mathrm{Ret}^m(X,r)$ es la solución trivial (sobre un conjunto de un elemento), entonces se dice que (X,r) es una solución multipermutación. En este caso, si m es el menor posible con $\mathrm{Ret}^m(X,r)$ trivial, decimos que (X,r) tiene nivel de multipermutación m y escribimos $\mathrm{mpl}(X,r)=m$.

Se dice que la solución (X,r) es libre de cuadrados si $\sigma_x(x)=x$ para todo $x\in X$.

Un avance importante en el estudio de esta tipo de soluciones es el siguiente resultado de Rump.

Teorema 0.1. *(Rump* [8, Theorem 1]*) Sea X un conjunto finito con $|X|>1$. Si (X,r) es una solución conjuntista, involutiva, no degenerada y libre de cuadrados de la ecuación de Yang-Baxter, entonces X tiene al menos dos órbitas bajo la acción de $\mathcal{G}(X,r)$.*

Una de las consecuencias de este resultado es el siguiente:

Corolario 0.2. *(*[7, Proposition 4.2]*) Sea X un conjunto finito no vacío. Si (X,r) es una solución conjuntista, involutiva, no degenerada y libre de cuadrados de la ecuación de Yang-Baxter, entonces $G(X,r)$ es poli-$\mathbb{Z}$.*

1. Problemas y Conjeturas

Sea (X,r) una solución conjuntista, involutiva, no degenerada de la ecuación de Yang-Baxter.

Conjetura 1. ([4]) *Si X es finito y (X,r) es libre de cuadrados, entonces (X,r) es una solución multipermutación.*

En [1] se demuestra que la conjetura es cierta si $\mathcal{G}(X,r)$ es abeliano.

Esta conjetura es equivalente a la siguiente, que tiene un enunciado muy elemental.

Conjetura 1'. *Sean $X=\{1,2,\dots,n\}$ y $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n\in S_n$ tales que*

(i) *$\sigma_x(x)=x$ para todo $x\in X$,*

(ii) *$\sigma_x\sigma_{\sigma_x^{-1}(y)}=\sigma_y\sigma_{\sigma_y^{-1}(x)}$ para todo $x,y\in X$.*

Entonces existen dos elementos distintos $x,y\in X$ tales que $\sigma_x=\sigma_y$.

En un artículo muy reciente [5] Gateva-Ivanova y Cameron obtienen la siguiente relación entre la longitud de la serie derivada de $G(X,r)$ y $\mathrm{mpl}(G,r)$ cuando (X,r) es una solución multipermutación libre de cuadrados.

Teorema 1.1. *(*[5, Theorem 6.10]*) Si (X,r) es una solución multipermutación libre de cuadrados, entonces $G(X,r)$ es resoluble y la longitud de su serie derivada es menor o igual a $\mathrm{mpl}(G,r)$.*

En el mismo artículo plantean el siguiente problema.

Problema 1. ([5]) *Dado un entero positivo m, ¿existe alguna solución multipermutación (X,r) de nivel m libre de cuadrados, con X finito y $\mathcal{G}(X,r)$ abeliano?*

Recientemente junto con Eric Jespers y Jan Okniński hemos contestado afirmativamente esta pregunta.

En [5] hay otros muchos problemas abiertos interesantes.

Hemos visto antes que si X es finito entonces $\mathcal{G}(X,r)$ es resoluble. En [2] planteamos el problema siguiente.

Problema 2. ([2]) *Sea G un grupo finito resoluble. ¿Existe alguna solución conjuntista, involutiva, no degenerada (X,r) de la ecuación de Yang-Baxter tal que $G \cong \mathcal{G}(X,r)$?*

En [2] se obtienen algunos resultados que apoyan una respuesta afirmativa de esta pregunta. Por ejemplo, se demuestra que existe una solución conjuntista, involutiva, no degenerada (X,r) de la ecuación de Yang-Baxter tal que X es finito y G es isomorfo a un subgrupo de $\mathcal{G}(X,r)$.

Para grupos abelianos la respuesta es afirmativa. De hecho la respuesta es afirmativa si G es nilpotente de clase ≤ 2.

No se conoce la respuesta para grupos nilpotentes de clase 3 (o mayor).

References

[1] F. Cedó, E. Jespers and J. Okniński, Retractability of the set theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, Adv. Math. 224 (2010), 2472–2484.
[2] F. Cedó, E. Jespers and Á. del Río, Involutive Yang-Baxter groups, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 2541–2558.
[3] P. Etingof, T. Schedler and A. Soloviev, Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation, Duke Math. J. 100 (1999), 169–209.
[4] T. Gateva-Ivanova, A combinatorial approach to the set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, J. Math. Phys. 45 (2004), 3828–3858.
[5] T. Gateva-Ivanova and P. Cameron, Multipermutation solutions of the Yang-Baxter equation, Comm. Math. Phys. 309 (2012), 583–621.
[6] T. Gateva-Ivanova and M. Van den Bergh, Semigroups of I-type, J. Algebra 206 (1998), 97–112.
[7] E. Jespers and J. Okniński, Monoids and Group of I-Type, Algebr. Represent. Theory 8 (2005), 709-729.
[8] W. Rump, A decomposition theorem for square-free unitary solutions of the quantum Yang-Baxter equation, Adv. Math. 193 (2005), 40–55.

Universitat Autònoma de Barcelona
E-mail address: cedo@mat.uab.cat