IDEALES INTERNOS JORDAN DE LOS ELEMENTOS ANTISIMÉTRICOS DE UN ANILLO SIMPLE CON ZÓCALO

JOSE BROX, ANTONIO FERNÁNDEZ LÓPEZ

Abstract. In this work we characterize the Jordan inner ideals of the skew elements of an associative, simple algebra with involution and nonzero socle, in terms of their geometric model as the continuous, finite-rank linear operators of a self-dual vector space with involution over a skew field, and describe them as the set of skew-symmetric traces of the product of a right ideal R with a left ideal, which is either its conjugate R^* or a minimal left ideal living inside R^*.

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto, dirigido por el profesor Antonio Fernández López, cuyo objetivo es determinar los ideales internos abelianos del álgebra de Lie de los elementos antisimétricos de un álgebra asociativa prima centralmente cerrada con involución. En esta exposición nos ocuparemos del caso más clásico, el de un álgebra asociativa con involución que es simple y contiene ideales por la derecha minimales.

Sea A un anillo simple con zócalo no nulo, con involución $*$ y característica distinta de 2. Sea $\mathcal{K} := \mathrm{Skew}(A, *)$ el conjunto de sus elementos antisimétricos (*i.e.*, tales que $a^* = -a$). Aunque $\mathcal{K}$ no es cerrado para el producto asociativo, sí que lo es para el operador cuadrático de Jordan $P_a b := aba$, pues $(aba)^* = a^*b^*a^* = -aba$. Definimos un ideal interno Jordan de $\mathcal{K}$ como aquel conjunto I cuyos elementos absorben a $\mathcal{K}$ bajo dicho operador ($P_a(\mathcal{K}) \subseteq I$ para todo $a \in I$). En esta charla utilizaremos técnicas geométricas para describir todo ideal interno Jordan I de $\mathcal{K}$ como el conjunto de las trazas antisimétricas de un ideal por la derecha de A multiplicado por un ideal por la izquierda, que es o bien su conjugado o bien un ideal minimal contenido en su conjugado ($I = \kappa(RL)$ con $L = R^*$ o $L \leq R^*$ minimal).

1. Modelo geométrico de los elementos antisimétricos

El anillo A puede modelarse geométricamente como el conjunto $F_X(X)$ de las aplicaciones lineales y continuas de rango finito de un espacio vectorial con producto escalar no degenerado sobre un anillo de división con involución $(X, \Delta, <\,,>)$, donde $<\,,>$ es o bien antihermítico o bien simétrico (en cuyo caso Δ es un cuerpo y su involución la identidad); la involución de los elementos de $A \cong F_X(X)$ viene dada por la transposición de aplicaciones lineales: recordemos que una aplicación $a \in \mathrm{End}X$ es continua si existe otra aplicación $a^* \in \mathrm{End}X$ (que resulta ser única) tal que $\langle ax, y\rangle = \langle x, a^*y\rangle$ para todo par de vectores

Key words and phrases. Anillo simple, involución, ideal interno, elementos antisimétricos.

$x, y \in X$. A su vez, $F_X(X)$ puede describirse completamente en términos del operador $x^*y : X \to X, x^*y(v) := \langle v, x\rangle y$, específicamente como el conjunto de sumas finitas de este tipo de aplicación lineal: $F_X(X) = \{\sum x_i^* y_i \mid x_i, y_i \in X\} \equiv X^*X$. Si definimos la tra za antisimétrica de una aplicación a como $\kappa(a) := a - a^*$, vemos que $\kappa(a) \in \mathcal{K}$ porque $\kappa(a)^* = a^* - a = -\kappa(a)$. En estos términos se obtiene que $\mathcal{K} = \kappa(X^*X) = \{\sum \kappa(x_i^* y_i) \mid x_i, y_i \in X\}$.

2. Clasificación de los ideales internos Jordan

A la luz de este modelo geométrico podemos clasificar todos los ideales internos Jordan de $\mathcal{K}$, teniendo en cuenta si el producto escalar es antihermítico o simétrico. Asociado a todo ideal interno Jordan I encontramos su *rango* $V(I)$, la unión de las imágenes de todas las aplicaciones lineales de I sobre X ($V(I) := \{ax \mid a \in I, x \in X\}$), que resulta ser un subespacio vectorial de X. Se demuestra lo siguiente:

(1) Si $<,>$ es antihermítico, entonces todo ideal interno Jordan I de $\mathcal{K}$ es de la forma $\kappa(V^*V) = \mathrm{Skew}(V^*V)$, donde se tiene que $V \leq X$ es $V = V(I)$.
(2) Si $<,>$ es simétrico, entonces existen dos tipos de ideals internos Jordan:
   a) Ideales de la forma $\kappa(V^*V)$ con $V = V(I)$.
   b) Ideales de la forma $\kappa(v^*V)$, destacando un vector $v \in V = V(I)$.

Se demuestra además que dados los subespacios $V_1, V_2, W_1, W_2 \subseteq X$ se tiene que $(V_1^*W_1)(V_2^*W_2) = V_2^*W_1$ siempre que $\langle V_1, W_2\rangle \neq 0$, lo que lleva a que $V^*W = (X^*W)(V^*X)$. Es cuestión de cálculo directo ver que $R := X^*W$ y $L := V^*X$ son, respectivamente, un ideal por la derecha y otro por la izquierda de $F_X(X)$, y puesto que $(x^*y)^* = \pm y^*x$ (en función de si el producto escalar es simétrico o antihermítico, respectivamente), se obtiene que $W^*X = R^*$, por lo que si I es de la forma $\mathrm{Skew}(V^*V)$ entonces $I = \mathrm{Skew}((X^*V)(V^*X)) = \mathrm{Skew}(RR^*)$, mientras que si I es de la forma $\kappa(v^*V)$ entonces $I = \kappa((X^*V)(v^*V)) = \kappa(RL)$ con $L = v^*V \subseteq R^*$ minimal.

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga (Spain)
E-mail address: brox@agt.cie.uma.es