Problemas. Variables Aleatorias. Modelos de Probabilidad

Ejemplos resueltos y propuestos

Variables Aleatorias Discretas

Una variable aleatoria discreta X de valores $x_1, x_2, ..., x_k$ con función de probabilidad $\{x_i, p_i\}_{i=1,...,k}$ con $p_i = P(X = x_i)$ y cumpliéndose que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ tiene esperanza y varianza dadas por $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = 1$ $Var(X) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - E(X))^2 p_i$

Con función de distribución de probabilidad

$F(x_j) = P(X \leq x_j)$

Ejemplos resueltos variables aleatorias

Ejemplo 1. Variable Aleatoria

Una variable aleatoria X puede tomar los valores 30,40,50 y 60 con probabilidades 0.4,0.2,0.1 y 0.3. Represente en una tabla la función de probabilidad, $P(X = x)$, y la función de distribución de probabilidad, $F(X) = P(X \leq x)$, y determine las siguientes probabilidades.

1. $P(X \leq 25)$
2. $P(X \geq 60)$
3. $P(X < 40)$
4. $P(X > 40)$
5. $P(30 \leq X \leq 60)$

6. $P(30 \leq X < 60)$

7. $P(30 < X \leq 60)$

8. $P(30 < X < 60)$

Obtenga la esperanza y varianza de X

Solución Ejemplo 1

Distribución de probabilidad de X

X	$P(X = x)$
30	0.4
40	0.2
50	0.1
60	0.3

Función de distribución de probabilidad de X

X	$F(x) = P(X \leq x)$
30	0.4
40	0.6
50	0.7
60	1.0

1. $P(X \leq 25) = 0$

2. $P(X \geq 60) = P(X = 60) = 0{,}3$

3. $P(X < 40) = P(X = 30) = 0{,}4$

4. $P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - F(40) = 0{,}4$

5. $P(30 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X < 30) = F(60) - 0 = 1$

6. $P(30 \leq X < 60) = P(X \leq 50) - P(X < 30) = F(50) - 0 = 0{,}7$

7. $P(30 < X \leq 60) = F(60) - F(30) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

8. $P(30 < X < 60) = F(50) - F(30) = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$

Cálculo de la Esperanza matemática, $E(X)$

X	$P(X=x)$	$xP(X=x)$
30	0.4	12
40	0.2	8
50	0.1	5
60	0.3	18

$E(X) = \Sigma_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = 12 + 8 + 5 + 18 = 43$

Cálculo de la varianza y desviación típica

X	**P(X=x)**	$xP(X=x)$	$x^2P(X=x)$
30	0.4	12	360
40	0.2	8	320
50	0.1	5	250
60	0.3	18	1080
	1	**45**	**2010**

$V(X) = \Sigma_{i=1}^{k} x_i^2 P(X = x_i) - E(X)^2 = 2010 - 43^2 = 161$
$\sigma = \sqrt{161} = 12{,}69$

Ejemplos propuestos variables aleatorias

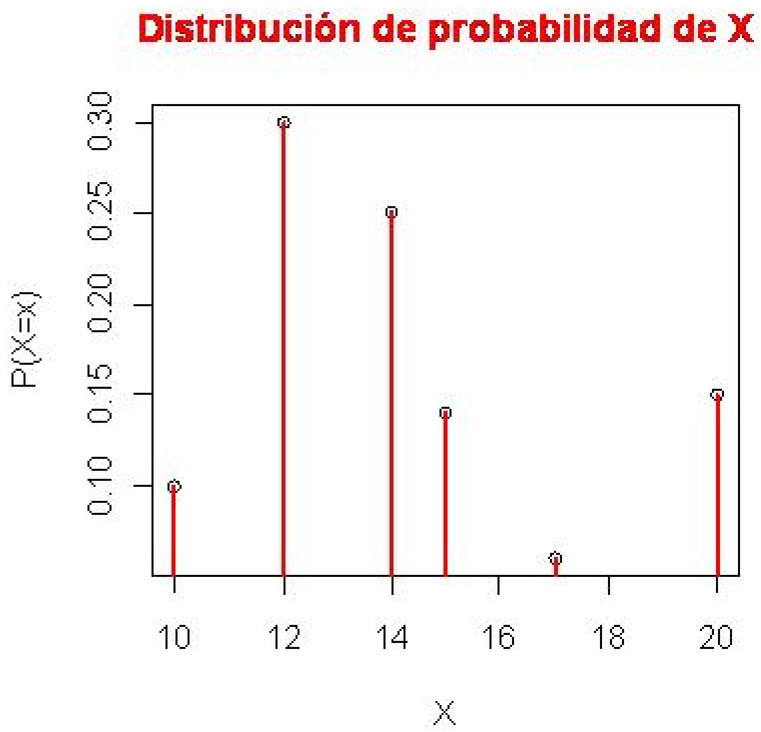
Ejemplo 1

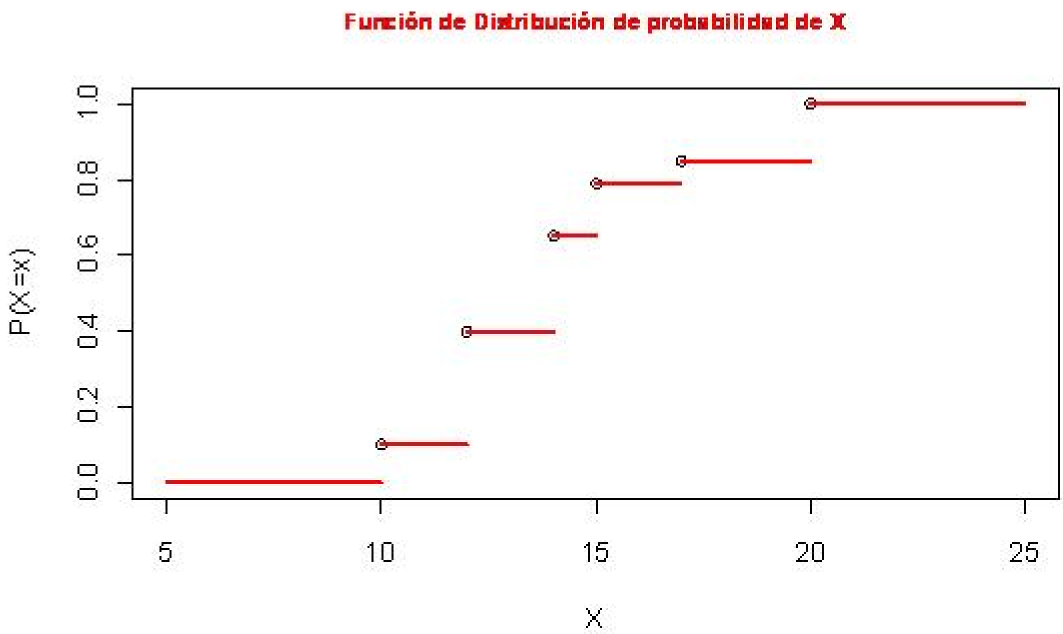
Con la variable aleatoria X, cuya función de probabilidad viene dada en la tabla siguiente

X	P(X)
10	0.1
12	0.3
14	0.25
15	0.14
17	
20	0.15

1. Determine la esperanza y varianza
2. Determine la función de distribución de probabilidad

3. Determine $F(33), F(14{,}5), F(3), P(10{,}5 < X \leq 17{,}5)$


Distribución de probabilidad de X
P(X=x)
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
10
12
14
16
18
20
X


Función de Distribución de probabilidad de X
P(X=x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20
25
X

Ejemplo 2

Un trabajador recibirá un premio de 3000, 2000 o 1000 euros, según el tiempo que tarde en realizar un trabajo en menos de 10 horas, entre 10 y 15 horas y más de 15 horas, respectivamente. La probabilidad de realizar el trabajo en cada uno de estos casos es de 0.1, 0.4 y 0.5.

1. Determine la esperanza y la función de probabilidad de la variable aleatoria X=premio recibido.

2. Defina una nueva variable aleatoria,Y, con valor 1 si tarda menos de 10 horas y valor 0, en caso contrario. Obtenga distribución de probabilidad, esperanza y varianza

Variables aleatorias discretas con modelos estándar

Variable Binomial

Variable X discreta definida como el recuento de éxitos entre un número, n, de pruebas:

$$X \rightarrow B(n,p)$$

con función de probabilidad definida por

$$P(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{(n-k)}$$

con

$$p = P(éxito) \ y \ q = 1 - p = P(fracaso)$$

Ejemplos resueltos Variable Binomial

Ejemplo 1

En una Facultad el 35 % de los alumnos realiza algún deporte. Se ha obtenido una muestra de 10 alumnos de dicha Facultad

1. ¿Qué modelo sigue la variable $X =$ nº de alumnos que realiza algún deporte entre los 10 seleccionados[1]?.

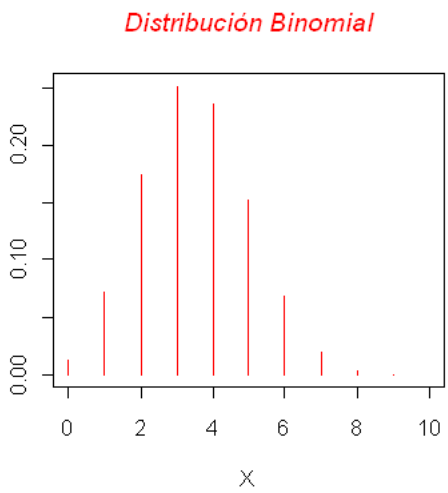
[1] Recuento de éxitos entre las n pruebas

2. Esperanza y varianza de la variable.
3. Probabilidad de que más de 2 realicen algún deporte.
4. Probabilidad de que entre 2 y 8 inclusive, realicen algún deporte.
5. Probabilidad de que menos de la mitad realice algún deporte.

Solución ejemplo 1 Binomial

1. La variable definida sigue un modelo binomial de parámetros n=10 y p=0.35.

$$X \to B(10,\ 0{,}35)$$



2. La Esperanza y varianza de la variable definida vienen dadas por:

$$E(X) = np = 10 \cdot 0{,}35 = 3{,}5$$
$$V(X) = npq = 10 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 2{,}275$$

3. Probabilidad de que más de 2 realicen algún deporte.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}2616 = 0{,}7384$$

4. Probabilidad de que entre 2 y 8 inclusive, realicen algún deporte.

$$P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 1) = 0{,}9995 - 0{,}860 = 0{,}9135$$

5. Probabilidad de que menos de la mitad realice algún deporte.

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0{,}7515$$

Ejemplo 2 Binomial ahora con p=0.3

Este ejemplo es similar al anterior, se ha modificado sólo la probabilidad de éxito a p=0.3.

1. La variable definida sigue un modelo binomial de parámetros n=10 y p=0.3.

$$X \to B(10,\ 0{,}3)$$

2. La Esperanza y varianza de la variable definida vienen dadas por:

$$E(X) = np = 10 \cdot 0{,}3 = 3$$
$$V(X) = npq = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 2{,}1$$

3. Probabilidad de que más de 2 realicen algún deporte.

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}3828 = 0{,}6172$$

4. Probabilidad de que entre 2 y 8 inclusive, realicen algún deporte.

$$P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 1) = 0{,}9999 - 0{,}1493 = 0{,}8506$$

5. Probabilidad de que menos de la mitad realice algún deporte.

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0{,}8497$$

Ejemplos propuestos variable binomial

Ejemplo 1

El 20 % de los trabajadores de una empresa irá a la huelga. Se seleccionan 5 trabajadores de dicha empresa. Obtenga

1. El modelo de probabilidad que sigue la variable X="Número de asistentes a la huelga entre los 5 seleccionados"
2. Probabilidad de que al menos tres vayan a la huelga
3. Probabilidad de que todos vayan a la huelga
4. Probabilidad de que no vaya ninguno

Ejemplo 2

Siete de cada diez estudiantes aprueba el primer parcial de una asignatura. Se seleccionan 8 estudiantes al azar. Obtenga las probabilidades que se especifican a continuación e indique qué modelo de probabilidad define para obtenerlas.

1. Probabilidad[2] de que exactamente 2 suspendan entre los 8 seleccionados.
2. Probabilidad de que todos aprueben.
3. Probabilidad de que 3 o más aprueben.

Variable Poisson

Variable X discreta definida como el recuento de éxitos por unidad de espacio continuo:

X$\rightarrow P(\lambda)$

[2]Haga el cálculo de este apartado manualmente y mirando en la tabla

con $\lambda =$ "*nº medio de éxitos por unidad de espacio continuo*" y función de probabilidad definida por

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Ejemplos resueltos de variables Poisson

Ejemplo 1 modelo Poisson

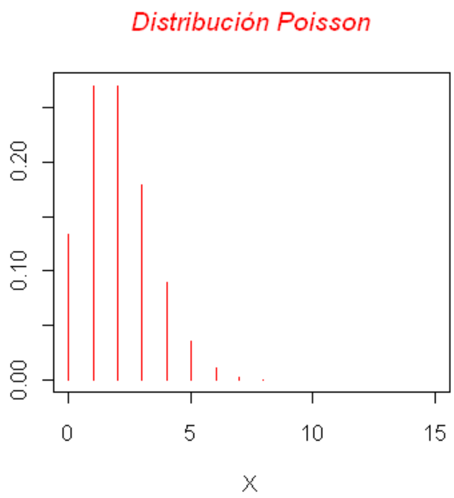
El número medio de accidentes ocurridos en un planta petrolera es de 2 accidentes en 2 meses[3].

1. ¿Qué modelo sigue la variable número de accidentes ocurridos en la planta por 2 meses?.
2. Probabilidad de que haya más de 2 accidentes en 2 meses.
3. Probabilidad de que haya entre 2 y 8 inclusive, en 2 meses.
4. Probabilidad de que haya más de 2 accidentes en 1 mes.

Solución ejemplo 1 Poisson

1. La variable definida sigue un modelo Poisson de parámetro $\lambda = 2$.

$$X \to P(2)$$



[3]Recuento de éxitos por unidad de espacio continuo

2. Probabilidad de que haya más de 2 accidentes en 2 meses.

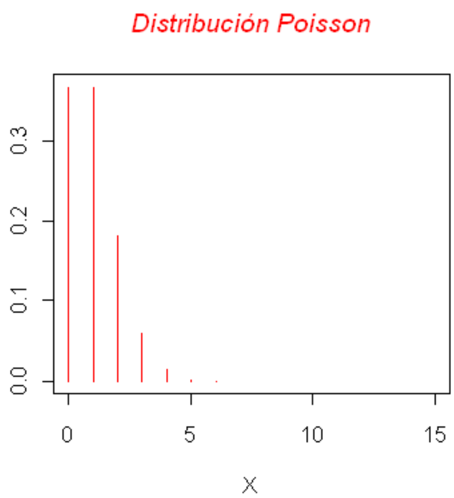
$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$$

3. Probabilidad de que haya entre 2 y 8 inclusive, en 2 meses.

$$P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 1) = 0{,}9998 - 0{,}4060 = 0{,}5938$$

4. Probabilidad de que haya más de 2 accidentes en 1 mes. La variable Y definida [4] sigue un modelo Poisson de parámetro $\lambda = 1$.

$$Y \rightarrow P(1)$$



$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803$$

Ejemplos propuestos de modelos Poisson

Ejemplo 1 Poisson

El número medio de robos con violencia que se registra en una barrio marginal es de 4 al mes. Determine las siguientes probabilidades indicando el modelo de probabilidad en que se basa.

[4] Si a dos meses corresponde una esperanza igual a 2 accidentes, a la mitad de tiempo (un mes) corresponde la mitad de la esperanza

1. Probabilidad de que en un mes determinado no haya ningún robo de este tipo.
2. Probabilidad de que haya al menos uno en un mes dado.
3. Probabilidad de que haya entre 2 y 6, inclusive en un mes dado.
4. Probabilidad de que haya más de dos en 15 días.

Ejemplo 2 Poisson

Suponiendo que las denuncias que realizan los trabajadores de cierta empresa a la Inspección de Trabajo siguen un modelo Poisson de media 1.5 al año, obtenga las siguientes probabilidades

1. Probabilidad de que en un año determinado la empresa no sea denunciada.
2. Probabilidad de que en un año dado se produzcan más de 4 denuncias
3. Probabilidad de que en el primer cuatrimestre del año se produzcan dos o más denuncias.

Variables Aleatorias Continuas

Variable Normal

Variable X continua definida en toda la recta real:

$$X \to N(\mu, \sigma)$$

Con media y desviación típica dadas por μ y σ , respectivamente. Con función de densidad definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2 \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Ejemplos resueltos. Modelo Normal

Ejemplo 1 Variable Normal

El valor (en miles) de las ventas mensuales realizadas en una Editorial sigue un modelo normal de media igual a 200 y desviación típica igual a 40

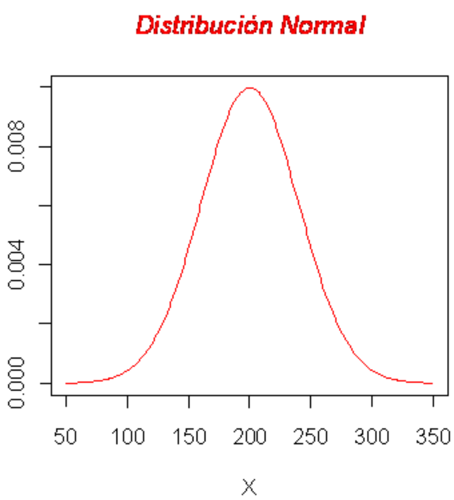
X$\rightarrow N(200, 40)$

1. Probabilidad de que la ventas de un mes sean superiores 300.
2. Probabilidad de que las ventas de un mes se encuentren entre 160 y 240.
3. Probabilidad de que las ventas de un mes no superen a 150.
4. Probabilidad de que las ventas de un mes superen 3000.

Solución ejemplo 1 modelo normal

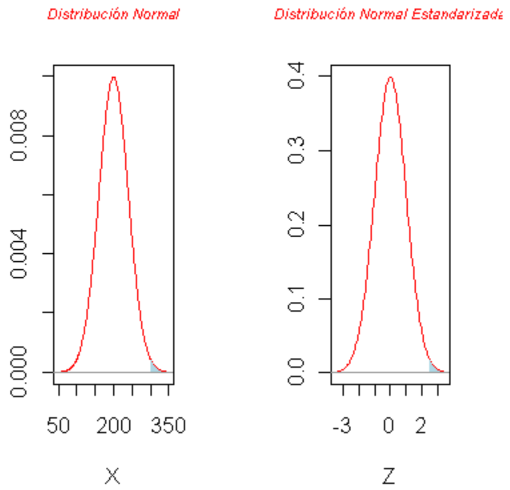
La variable sigue un modelo normal

X$\rightarrow N(200, 40)$



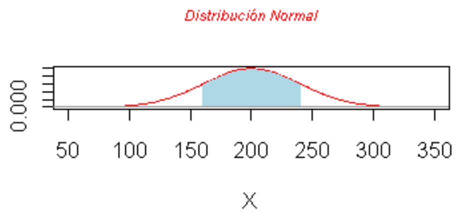
1. Probabilidad de que la ventas de un mes sean superiores 300.

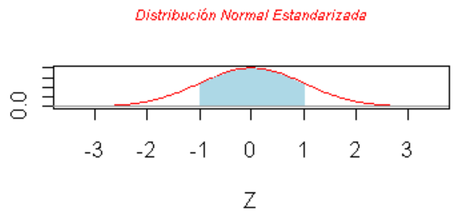
$$P(X > 300) = 1 - P(X \leq 300) = 1 - P(\frac{X - 200}{40} < \frac{300 - 200}{40})$$
$$= 1 - P(Z < 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$



2. Probabilidad de que las ventas de un mes se encuentren entre 160 y 240.

$$P(160 < X < 240) = P(\frac{160 - 200}{40} < Z < \frac{240 - 200}{40})$$
$$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$$



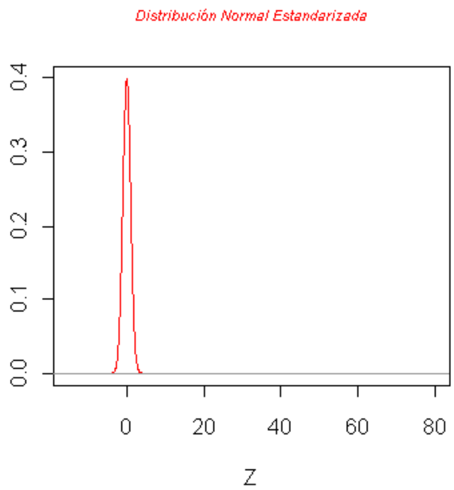


3. Probabilidad de que las ventas de un mes no lleguen a 150.

$$P(X < 150) = P(Z < \frac{150 - 200}{40} = P(Z < -1{,}25) = 0{,}1056$$

4. Probabilidad de que las ventas de un mes superen 3000[5].

$$P(X > 3000) = P(Z > \frac{3000 - 200}{40} = P(Z > 70) = 0$$



Ejemplos propuestos Variable Normal

Ejemplo 1 Normal

Las puntuaciones en un test obtenidas por un grupo de opositores se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 5. Determine

1. Probabilidad de tener una puntuación menor a 20 puntos.
2. Probabilidad de tener entre 28 y 40 puntos
3. Probabilidad de tener más de 40 puntos
4. Probabilidad de tener menos de 5 puntos

[5]Observe que toda la masa de probabilidad queda a la izquierda. Más allá de 70 la probabilidad es nula

Ejemplo 2 Normal

La duración en días de ciertos componentes mecánicos de una planta industrial sigue un modelo $N(250, 55)$. Obtenga

1. Probabilidad de que no duren más de 200 días
2. Probabilidad de que a lo sumo dure 200 días
3. Probabilidad de que superen los 500 días de duración
4. Proporción de componentes que duran entre 250 ± 110

Aproximación de binomial a Normal

Ejemplo 1 Aproximación de variable binomial a un modelo normal

En una Ciudad el 13 % de los ciudadanos acude a un mitin. Se ha obtenido una muestra de 250 ciudadanos de dicha ciudad

1. Qué modelo sigue la variable $X =$ º de ciudadanos que acude al mitin entre los 250 seleccionados[6].
2. Esperanza y varianza de la variable.
3. Probabilidad de que más de 20 asista al mitin.
4. Probabilidad de que entre 20 y 80 inclusive, asista al mitin.
5. Probabilidad de que menos de la mitad acuda al mitin.

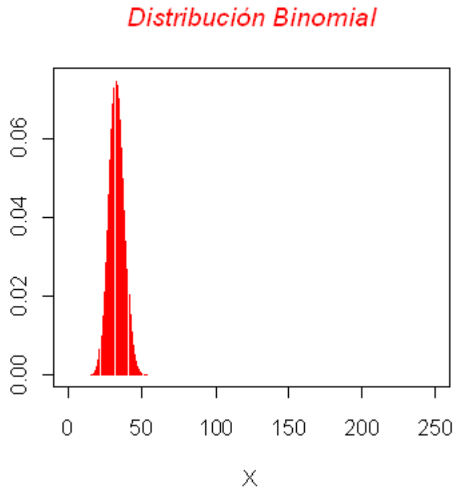
Solución ejemplo aproximación Binomial a Normal

a) La variable definida sigue un modelo binomial[7] de parámetros n=250 y p=0.13.

$$X \to B(250,\ 0{,}13)$$

[6] Cuando p (probabilidad de éxito) está entre 0.1 y 0.9, y el tamaño de muestra es suficientemente grande (n mayor que 30) se pueden obtener buenas aproximaciones del modelo binomial a un modelo normal

[7] Observe el gráfico binomial que se comporta como un modelo normal, con prácticamente casi toda la masa de probabilidad a la izquierda de 50



b) La Esperanza y varianza de la variable definida vienen dadas por:

$$E(X) = np = 250 \cdot 0{,}13 = 32{,}5$$
$$V(X) = npq = 250 \cdot 0{,}13 \cdot 0{,}87 = 28{,}275$$

c) Probabilidad de que más de 20 asistan al mitin.
Aproximando el modelo binomial a una normal con parámetros:

$$\mu = E(X) = 32{,}5$$
$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{28{,}275} = 5{,}32$$
$$X \to N(32{,}5,\ 5{,}32)$$

Es necesario realizar la corrección por continuidad[8] (asignando a cada valor entero el intervalo de amplitud 1, obtenido restando y sumando 1/2). En binomial:

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) =$$

En normal corregido por continuidad:

$$\approx 1 - P(X \leq 20{,}5) = 1 - P(Z < \frac{20{,}5 - 32{,}5}{5{,}32}) =$$

$$= 1 - P(Z < -2{,}26) = 1 - 0{,}0119 = 0{,}9881$$

[8]En intervalos con desigualdades no estrictas, siempre se resta al extremo inferior 0.5 y se suma al superior 0.5

d) Probabilidad de que entre 20 y 80 inclusive, asista al mitin. En modelo binomial

$$P(20 \leq X \leq 80) = P(X \leq 80) - P(X \leq 19) =$$

En aproximación al modelo normal

$$\approx P(X \leq 80{,}5) - P(X \leq 19{,}5) =$$

$$P(Z < 9{,}03) - P(Z < -2{,}44) = 1 - 0{,}0073 = 0{,}9927$$

e) Probabilidad de que menos de la mitad acuda al mitin.

$$P(X < 125) = P(X \leq 124) \approx P(X < 124{,}5) =$$

$$= P(Z < \frac{124{,}5 - 32{,}5}{5{,}32}) = P(Z < 17{,}30) = 1$$