Ejemplos Resueltos Tema 4

2012

1. Intervalo de Confianza para la Media μ (con σ conocida)

Dada una muestra de tamaño n, para un nivel de confianza 1-α y la desviación típica de la población σ, el Intervalo de Confiaza se determina mediante:

$$(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Nota Importante: En la bibliografía existente es corriente usar la notación z_α para indicar el cuantil de orden $1-\alpha$, es decir, el subíndice indica el área que queda a la derecha del cuantil en el gráfico del modelo de probabilidad. También la usaremos aquí.

Ejemplo de intervalo de confianza para la media, μ con σ conocida

Se desea estimar con un nivel de confianza del 95 % la talla media de los hombres de 18 o más años de un país. Suponiendo que la desviación típica de las tallas en la población vale 4, obtenga el intervalo de confianza con una muestra de n=15 hombres seleccionados al azar, cuyas alturas son:

167 167 168 168 168 169 171 172 173 175 175 175 177 182 195

Es necesario determinar la media de la muestra, $\overline{X}$, y los valores de los cuantiles, $z_{\frac{\alpha}{2}}$, en la distribución normal. En el modelo normal, el cuantil de orden 0.975 lo notamos con $z_{0,025} = 1{,}96$ y el de orden 0.025 se nota con $z_{0,975} = -1{,}96$, o bien podemos cambiar el signo al cuantil de orden 0.975, que es lo que hacemos cuando la distribución es simétrica (caso normal y caso t de Student), $-z_{0,025} = -1{,}96$. La media se obtiene mediante:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{N}$$

La distribución de los datos en la muestra y la correspondiente columna de cálculo para la media se muestran en la tabla para cálculo de la media.

Tallas	Freq	TallasxFreq
167	2	334
168	3	504
169	1	169
171	1	171
172	1	172
173	1	173
175	3	525
177	1	177
182	1	182
195	1	195
	15	2602

Sustituyendo los datos en la expresión del intervalo tenemos:

$$(173{,}47 - 1{,}96 \times 1{,}03, 173{,}47 + 1{,}96 \times 1{,}03)$$

$$(\ 171.45\ ,\ 175.49)$$

Tenemos una confianza del 95 % de que la talla media, μ , en el país esté comprendida entre 171.45 y 175.49.

Intervalo de confianza para la media a un nivel de confianza del 80 %

Lo único que varía respecto del intervalo anteriormente calculado es el valor de z, dado que ya hemos calculado el valor de la media 173.47 y conocemos la desviación típica de la población (4).

Es necesario determinar los cuantiles, $z_{\frac{\alpha}{2}}$, en la distribución normal. Éstos son $z_{0,1} = 1{,}28$ y $z_{0,9} = -1{,}28$

Sustituyendo los datos en la expresión del intervalo tenemos:

$$(173{,}47 - 1{,}28 \times 1{,}03\ , 173{,}47 + 1{,}28 \times 1{,}03)$$

$$(\ 172.15\ ,\ 174.79)$$

Lo interpretamos diciendo que tenemos una confianza del 80 % de que la talla media, μ, en el país esté comprendida entre 172.15 y 174.79.

Obtención del tamaño de muestra, n, necesario para no superar una determinada cota de error

La cota de error o error de muestreo viene dado por la expresión siguiente:

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Supongamos que con los datos anteriores y con un nivel de confianza del 99 % (es decir, casi con seguridad) deseamos estimar la talla media poblacional, de modo que la cota de error cometida no sea mayor a medio centímetro. Determine de qué tamaño debe ser la muestra seleccionada de hombres.

Despejando n de la expresión anterior tenemos:

$$n = \frac{(z_{\alpha/2} \times \sigma)^2}{Error^2}$$

Por tanto, necesitamos determinar el cuantil de orden 0.995 de la normal. Cuyo valor es 2.58. El resto, lo conocemos.

Sustituyendo en la expresión anterior de n, tenemos

$$n = \frac{(2{,}58 \times 4)^2}{0{,}5^2} = 424{,}63$$

Necesitamos, por tanto, un tamaño de muestra de 425 hombres

2. Intervalo de confianza para la media μ con σ desconocida

Supongamos que se desconoce la desviación típica de las tallas en la población del ejemplo anterior. En este caso es necesario estimar la desviación típica de la población con los datos de la muestra. El intervalo de confianza viene dado por:

$$(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\ , \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

donde t es el correspondiente cuantil en la distribución t de Student con n-1 grados de libertad y s es la cuasidesviación típica de la muestra:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{X})^2 n_i}{n-1}} = \sqrt{\frac{Var(X)n}{n-1}}$$

Tallas	Freq	TallasxFreq	Tallas2xFreq
167	2	334	55778
168	3	504	84672
169	1	169	28561
171	1	171	29241
172	1	172	29584
173	1	173	29929
175	3	525	91875
177	1	177	31329
182	1	182	33124
195	1	195	38025
	15	2602	452118

La varianza en la muestra, Var(X)=50.52, es igual al cociente 452118 / 15 menos el cuadrado de la media 173.47. El valor de la cuasivarianza, s^2, se obtiene multiplicando Var(X) por $\frac{n}{n-1}$.

$$s^2 = 50{,}52 \times \frac{15}{14} = 54{,}12$$

Y la cuasideviación típica de la muestra, $s = \sqrt{s^2}$, es igual a 7.36

Es necesario determinar los cuantiles, $t_{\frac{\alpha}{2}}$, en la distribución t_{n-1} de Student. Para un nivel de confianza $1-\alpha = 0{,}95$, los valores de los cuantiles en la distribución t_{14} son $t_{\alpha/2} = -2{,}145$ y $t_{1-\alpha/2} = 2{,}145$.

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza, tenemos:

$$(173{,}47 - 2{,}14 \times 1{,}03\ , 173{,}47 + 2{,}14 \times 1{,}03)$$

$$(\ 169.39\ ,\ 177.54)$$

Y decimos que tenemos una confianza del 95 % de que la talla media, μ, en el país esté comprendida entre 169.39 y 177.54.

3. Intervalo de confianza para la varianza σ^2

El intervalo de confianza para la varianza viene dado por

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\ , \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$$

donde $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ son los cuantiles de orden $1-\alpha/2$ y $\alpha/2$, respectivamente, en un modelo Chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.

Ejemplo de Intervalo de confianza para la varianza σ^2

Para construir el intervalo de confianza para la varianza de la población necesitamos la cuasivarianza de la muestra (s^2) y los cuantiles de orden $\alpha/2$ y $1-\alpha/2$ en un modelo χ^2_{n-1}.

Usando los datos de apartados anteriores, construiremos un intervalo de confianza para la varianza de las tallas masculinas de adultos en el país donde se ha extraído la muestra, a un nivel de confianza del 90 %.

La cuasivarianza en la muestra se obtuvo en apartados anteriores $s^2 = 54{,}12$. Por tanto, solo es necesario determinar los cuantiles en el modelo χ^2_{14}

Los valores de los cuantiles son $\chi^2_{0,05} = 6{,}58$ y $\chi^2_{0,95} = 23{,}8$. Por tanto, sustituyendo en la expresión del intervalo

$$(\frac{14 \times 54{,}12}{23{,}8}\ ,\ \frac{14 \times 54{,}12}{6{,}58})$$

$$(31{,}86\ ,\ 115{,}25)$$

Tenemos una confianza del 90 % de que la varianza en la población esté comprendida entre 31,86 y 115,25.

4. Intervalo de confianza para la proporción

El intervalo de confianza viene dado por:

$$(p - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p \times q}{n}}\ , p + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p \times q}{n}})$$

donde p es la probabilidad del éxito y q=1-p es la probabilidad del fracaso en la muestra.

Ejemplo de Intervalo de confianza para la proporción

En una muestra de 105 comercios seleccionados al azar de una zona, se observa que 27 de ellos han tenido pérdidas en este mes. Obtenga un intervalo de confianza para la proporción de comercios en la zona con pérdidas, a un nivel de confianza a) del 80 % y a un nivel de confianza b) del 90 %.

Para determinar el intervalo necesitamos conocer la proporción en la muestra, p, de comercios con pérdidas:

$$p = \frac{Total\ éxitos}{n} = \frac{27}{105} = 0{,}26$$
$$q = 1 - p = 0{,}74$$

4.0.1. Intervalo de Confianza al 80 %

Para el intervalo de confianza a un nivel del 80 %, el cuantil $z_{\alpha/2} = 1{,}28$. Sustituyendo en la expresión del intervalo:

$$(0{,}26 - 1{,}28 \times \sqrt{\frac{0{,}26 \times 0{,}74}{105}}\ , 0{,}26 + 1{,}28 \times \sqrt{\frac{0{,}26 \times 0{,}74}{105}})$$

El intervalo tiene una cota de error igual a 1.28 $\times \sqrt{\frac{0{,}26 \times 0{,}74}{105}} = 0{,}05$

$$(0{,}26 - 0{,}05\ , 0{,}26 + 0{,}05)$$

$$(0{,}21\ , 0{,}31)$$

Se tiene una confianza del 80 % de que la proporción de comercios con pérdidas en la zona estudiada esté comprendida entre 0.21 y 0.31.

Intervalo de confianza al 90 %

Para el intervalo de confianza a un nivel del 90 %, el cuantil $z_{\alpha/2} = 1{,}64$. Sustituyendo en la expresión del intervalo:

$$(0{,}26 - 1{,}64 \times \sqrt{\frac{0{,}26 \times 0{,}74}{105}}\ , 0{,}26 + 1{,}64 \times \sqrt{\frac{0{,}26 \times 0{,}74}{105}})$$

El intervalo tiene una cota de error igual a 0.07

$$(0{,}26 - 0{,}07\ , 0{,}26 + 0{,}07)$$

$$(0{,}19\ , 0{,}33)$$

Se tiene una confianza del 90 % de que la proporción de comercios con pérdidas en la zona estudiada esté comprendida entre 0.19 y 0.33.

Obtención del tamaño de muestra necesario para no superar un error determinado

$$Error = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p \times q}{n}}$$

Por tanto, despejando de la expresión anterior el valor de n obtenemos el tamaño necesario. En la práctica, suele usarse, por defecto, el valor p=q=0.5, lo que supone mayor garantía para no superar la cota de error, al nivel de confianza dado. Aquí lo haremos así:

$$n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \times p \times q}{Error^2} = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \times 0{,}25}{Error^2}$$

Determine el tamaño de muestra necesario para que la cota de error no supere el 1 %, con una confianza del 80 %.

Sustituyendo en la expresión anterior de n, obtenemos:

$$n = \frac{(1{,}28)^2 \times 0{,}25}{0{,}01^2} = 4096$$

El tamaño necesario de la muestra es al menos igual a 4096 comercios de la zona en estudio.