

TEMA 5: Gráficos de Control por Atributos

- 1 Gráfico de control para la fracción de unidades defectuosas
- 2 Gráfico de control para el número medio de disconformidades por unidad
 - Selección del tamaño muestral
- 3 Clasificación de disconformidades y función de deméritos

1. Gráfico de control para la fracción de unidades defectuosas

Se considera una muestra de tamaño n de unidades obtenidas del proceso de fabricación. Se denota por p la probabilidad de que una unidad sea defectuosa, siendo p la fracción de defectuosos que indica la calidad de la producción. Entonces, se considera el estadístico

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

donde X_i vale uno si la unidad i es defectuosa y vale cero en caso contrario. Es decir, X_i , $i = 1, \dots, n$, se distribuyen según Bernoulli independientes con parámetro p . Se tiene entonces

$$EW = p \quad \sigma_W = \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2},$$

donde σ_W denota la desviación típica de W . Por tanto, el gráfico de control para la fracción de unidades defectuosas viene dado por los límites de control:

- Límite Superior de Control (*LSC*)

$$p + 3 \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2}.$$

- Límite Inferior de Control (*LIC*)

$$p - 3 \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2}.$$

Para p desconocido, se considera la siguiente estimación de p , calculada a partir de la extracción de m muestras piloto:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n X_i^j}{nm},$$

donde X_i^j toma el valor uno si la unidad i de la muestra piloto j es defectuosa y vale cero en caso contrario. Los límites de prueba vienen dados entonces por

$$\bar{p} \pm 3 \left(\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n} \right)^{1/2}.$$

Si cada una de las m muestras piloto presenta un valor muestral del estadístico W dentro de los límites anteriores, entonces se tiene que el proceso parte de una situación controlada y que, por tanto, los límites de prueba calculados son adecuados para la producción actual y futura. En caso contrario, se recalculan los límites de prueba a partir de las muestras que quedan tras eliminar las muestras que dieron valores del estadístico fuera de los límites de control.

Cuando los tamaños muestrales de las m muestras piloto son diferentes, n_j , $j = 1, \dots, m$, entonces $\bar{p}$ se calcula como sigue:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} X_i^j}{\sum_{j=1}^m n_j}$$

y los límites de prueba vienen dados por

$$\bar{p} \pm 3 \left(\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n_i} \right)^{1/2}.$$

Una alternativa a los límites variables cuando los tamaños muestrales de las m muestras piloto son desiguales consiste en considerar los límites

$$\bar{p} \pm 3 \left(\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{\bar{n}} \right)^{1/2},$$

siendo

$$\bar{n} = \frac{\sum_{j=1}^m n_j}{m}.$$

En ocasiones se considera el diagrama estandarizado que se define a partir de

$$Z_j = \frac{W_j - p}{\left(\frac{p(1-p)}{n_j} \right)^{1/2}}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Función característica de operación. Representa el poder discriminatorio del diagrama para controlar si el proceso se desvía del valor nominal p_0 considerado. Se define en términos de la probabilidad β de error de tipo II:

$$\begin{aligned} \beta &= P[W < LSC|p] - P[W \leq LIC|p] \\ &= P \left[\sum_{i=1}^n X_i \leq nLSC|p \right] - P \left[\sum_{i=1}^n X_i \leq nLIC|p \right] \end{aligned}$$

para diferentes valores reales de p , donde $\sum_{i=1}^n X_i$ se distribuye según una Binomial con parámetros n y p .

Nota. El diagrama para el número de unidades defectuosas se diseña de forma similar al diagrama anterior, considerando el estadístico nW .

2. Gráfico de control para el número medio de disconformidades por unidad

Este tipo de diagramas se utiliza para controlar la calidad de unidades ‘grandes’ o piezas ‘grandes’ de la producción. Bajo las hipótesis

(H.1.) el número de posibles disconformidades de una unidad es infinito,

(H.2.) la probabilidad de ocurrencia de disconformidad es constante,

la variable aleatoria X que contabiliza el número de disconformidades en una unidad sigue una distribución de Poisson. Denotando por c el número medio de disconformidades por unidad (parámetro que define la distribución de X), los límites de control del diagrama para el número medio de disconformidades por unidad vienen dados por

$$c \pm 3(c)^{1/2}, \quad (1)$$

cuando c es conocido. Para c desconocido, se consideran m unidades piloto y se aproxima c mediante el estimador

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i^u}{m},$$

donde X_i^u representa el número de disconformidades en la unidad i de las m unidades piloto extraídas.

Se puede considerar un análisis adicional basado en los siguientes criterios:

- Análisis del tipo de disconformidades y de su frecuencia.
- Relación entre el tipo de defecto y el tipo de piezas que componen una unidad.
- Estudio de fuentes de disconformidades y de su interrelaciones.
- Diagrama de concentración de defectos. Se utiliza para analizar si las disconformidades se localizan en el mismo área del producto.

2.1. Selección del tamaño muestral

En el análisis de disconformidades por unidad, se puede considerar en lugar de una muestra de tamaño uno una muestra de tamaño n . Se contemplan entonces dos alternativas en el enfoque del estudio:

- (i) Considerar una nueva unidad de tamaño n veces la unidad de inspección anterior.
- (ii) Considerar el número de disconformidades en un conjunto de n unidades de inspección.

En el caso (i), el diagrama para el número medio de disconformidades se construiría considerando los límites de control

$$nc \pm 3(nc)^{1/2},$$

si c es conocido, y

$$n\bar{c} \pm 3(n\bar{c})^{1/2},$$

si c es desconocido.

En el caso (ii), se considera una muestra de tamaño n de unidades de inspección y se calcula

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^u}{n},$$

siendo, como antes, X_i^u el número de disconformidades en la unidad i de inspección. Se tiene entonces

$$EW = c \quad \sigma_W = \left(\frac{c}{n}\right)^{1/2}.$$

Cuando c es conocido, el diagrama de control viene dado por los límites

$$c \pm 3\left(\frac{c}{n}\right)^{1/2}.$$

Si c es desconocido, los límites de prueba vienen dados por

$$\bar{c} \pm 3\left(\frac{\bar{c}}{n}\right)^{1/2},$$

siendo

$$\bar{c} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n X_i^{u,j}}{nm},$$

donde $X_i^{u,j}$ representa el número de disconformidades de la unidad i de la muestra piloto j . En algunos casos, dependiendo del tipo de disconformidades, el modelo de Poisson no es adecuado y se utilizan otros modelos. Cuando el tamaño muestral de las muestras piloto es variable, los límites de prueba se calculan en términos de la aproximación

$$\tilde{c} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n X_i^{u,j}}{\sum_{j=1}^m n_j}$$

y vienen dados por

$$\tilde{c} \pm 3\left(\frac{\tilde{c}}{n_j}\right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, m,$$

en el caso de límites variables. En el caso de límites constantes, se tiene

$$\tilde{c} \pm 3\left(\frac{\tilde{c}}{\bar{n}}\right)^{1/2},$$

donde

$$\bar{n} = \frac{\sum_{j=1}^m n_j}{m}.$$

3. Clasificación de disconformidades y función de deméritos

En el estudio del número de defectos por unidad se suele realizar una clasificación de dichos defectos, asociando a cada tipo de defecto un peso según su importancia. Consideramos la siguiente clasificación:

- Defectos de tipo A. Son defectos muy graves, cuya reparación no es posible y que pueden ocasionar lesiones personales o materiales.
- Defectos de tipo B. Son defectos graves que reducen la duración de las piezas o unidades e incrementan los costos de mantenimiento.
- Defectos de tipo C. Son defectos moderadamente importantes que están relacionados con el acabado, presentación o calidad del trabajo.
- Defectos de tipo D. Son defectos poco importantes, cuya ocurrencia no modifica sustancialmente la calidad del producto.

Se definen entonces las variables aleatorias:

- X_A que indica el número de disconformidades de tipo A.
- X_B que indica el número de disconformidades de tipo B.
- X_C que indica el número de disconformidades de tipo C.
- X_D que indica el número de disconformidades de tipo D.

La función de deméritos viene dada por

$$F_{DE} = 100X_A + 50X_B + 10X_C + X_D,$$

donde se han considerado los pesos más usuales en la definición de dicha función cuando se considera una clasificación del tipo anterior. Si se considera una muestra de n unidades de inspección, entonces el número de deméritos por unidad es

$$U = \frac{F_{DE}^T}{n},$$

donde

$$F_{DE}^T = F_{DE}^{u_1} + \cdots + F_{DE}^{u_n},$$

siendo $F_{DE}^{u_i}$, $i = 1, \dots, n$, la función de deméritos evaluada en la unidad i .

Suponiendo que X_A , X_B , X_C y X_D se distribuyen independientemente según una distribución de Poisson con parámetro c_A , c_B , c_C , y c_D , respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} EU &= 100c_A + 50c_B + 10c_C + c_D \\ \sigma_U &= \left(\frac{100^2c_A + 50^2c_B + 10^2c_C + c_D}{n} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por tanto, los límites de control vienen dados por

$$100c_A + 50c_B + 10c_C + c_D \pm 3 \left(\frac{100^2c_A + 50^2c_B + 10^2c_C + c_D}{n} \right)^{1/2},$$

en el caso en que los parámetros c_A , c_B , c_C , y c_D son conocidos. Cuando dichos parámetros son desconocidos se estiman a partir de la extracción de m muestras piloto, considerando la fracción media muestral de disconformidades de cada tipo.