

TEMA 2: Inspección estadística por atributos

- 1 Introducción: Inspección estadística de lotes.
- 2 Planes de muestreo simple por atributos.
- 3 Planes de muestreo doble, múltiple y secuencial.
- 4 Planes de muestreo de conformidad sensible a los lotes.
- 5 Norma militar 105D.
- 6 Planes de muestreo de Dodge-Romig.

1. Introducción

La inspección de materias primas y productos elaborados o semielaborados es una parte importante del control de calidad. Una aplicación adecuada de las técnicas de muestreo reduce en parte las deficiencias que crean la necesidad del empleo de otros métodos estadísticos para el control de la calidad, aunque hay que tener en cuenta que la inspección de muestras no es una forma activa de mejora de la calidad. Con frecuencia no sólo se inspeccionan materias primas y productos elaborados o semielaborados sino que se suele inspeccionar las unidades producidas en diferentes etapas de la cadena productiva. Según se comentó en el tema anterior hay tres posibles actuaciones en la revisión de lotes de unidades producidas. La primera consiste en aceptar el lote sin inspeccionarlo. La segunda en realizar una inspección 100 %, reemplazando las unidades defectuosas. Finalmente, la tercera consiste en realizar la inspección de una muestra o inspección estadística del lote. Las ventajas de la inspección estadística frente a la inspección 100 % son de tipo económico (se disminuyen los costos de inspección) y de tipo práctico (se producen menos desperfectos por manipulación de productos, se necesita menos personal para realizarla, y se puede aplicar a unidades que se destruyen al ser inspeccionadas). Los inconvenientes son la existencia de un cierto riesgo de rechazar lotes de buena calidad o de aceptar lotes de mala calidad, así como la obtención de menos información que con la inspección total.

- Un plan de inspección estadística se define en términos de tres parámetros: El tamaño del lote N , el tamaño muestral n , y el criterio de aceptación-rechazo c .
- Un esquema de inspección es un conjunto de planes de inspección en los que se especifica el tamaño de los lotes, el tamaño muestral y el criterio para aceptarlos o rechazarlos.

- Un sistema de inspección se constituye a partir de un conjunto de esquemas de inspección.

Los planes de inspección de muestras se clasifican en planes por atributos y planes por variables según que la característica de la calidad estudiada sea cualitativa o numérica. La inspección estadística no es estática sino dinámica, evoluciona según la experiencia que se adquiere con las unidades inspeccionadas. Más concretamente, se suele comenzar con un plan de muestreo por atributos cuando no se tiene conocimiento previo o experiencia sobre el proceso. Posteriormente si se posee más información sobre la característica de la calidad estudiada se puede pasar a un muestreo por variables. Cuando se adquiere un nivel de calidad se puede efectuar una reducción del tamaño muestral, e incluso se puede optar por un muestreo por lotes salteados, o finalmente por la no inspección.

Los planes de inspección por muestreo son un intermedio entre la inspección 100 % y la no inspección. De dichos planes hay que destacar los siguientes aspectos:

- El propósito de la inspección por muestreo es juzgar los lotes, no estimar su calidad.
- La inspección estadística no produce una mejora de la calidad.

En resumen la inspección por muestreo permite verificar si las especificaciones se cumplen pero no permite mejorar la calidad o prevenir errores.

La conformación de los lotes puede influir en la eficacia de la inspección por muestreo. Así se tiene que son deseables las siguientes características: La homogeneidad, tamaños grandes son preferibles a tamaños pequeños, los lotes deben adecuarse a los sistemas de manipulación que se utilizan en las instalaciones del proveedor y del consumidor. El esquema de muestreo aleatorio utilizado también influirá en la eficacia de los planes de muestreo.

2. Planes de muestreo simple por atributos

En los planes de muestreo simple se toma una decisión respecto a la aceptación o rechazo de los lotes a partir de la información proporcionada por una muestra del lote. Estos planes se definen pues a partir de tres parámetros el tamaño del lote N , del tamaño de muestra n y el criterio de aceptación-rechazo c . Específicamente, tras observar la muestra extraída de tamaño n , se contabiliza el número de defectos d . Si $d \leq c$ se acepta el lote, en caso contrario se rechaza. La curva operativa de un plan, curva CO, determina el poder discriminatorio de un plan. En dicha curva se representa la probabilidad de aceptación P_a del lote frente a la fracción de defectuosos p . Para N suficientemente grande, la distribución del número de artículos defectuosos d en una muestra aleatoria de tamaño n se define mediante una distribución binomial de parámetros n y p . Por tanto,

$$P_a = P[d \leq c] = \sum_{d=0}^c \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d}.$$

Ejemplo. Para un plan de muestreo con $n = 89$ y $c = 2$, la probabilidad de aceptación de un lote con proporción de defectuosos $p = 0,01$ es

$$P_a = P[d \leq 2] = \sum_{d=0}^2 \frac{89!}{d!(89-d)!} 0,01^d (1 - 0,01)^{89-d} = 0,9397.$$

Con este plan, se rechazarían 6 lotes de 100 cuando la proporción de defectos es de un 1 %.

Para tamaño del lote N finito, la distribución del número de unidades defectuosas en una muestra de tamaño n viene dada por una hipergeométrica. En este caso, para un plan con tamaño muestral n y criterio de aceptación c , la probabilidad de aceptación viene dada por

$$P_a = P[X \leq c] = \sum_{i=0}^c \frac{\frac{N_1!}{i!(N_1-i)!} \frac{N_2!}{(n-i)!(N_2-n+i)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}},$$

donde $N = N_1 + N_2$ representa el tamaño del lote, N_1 el número de unidades defectuosas del lote, N_2 el número de unidades conformes del lote.

CO ideal. La curva CO de un plan que discrimine perfectamente sería constantemente igual a uno para proporciones de defectuosos que representen un nivel de calidad aceptable y constantemente igual a cero para proporciones de defectuosos que presenten un nivel de calidad rechazable. Por tanto, presenta una caída vertical que permite aceptar y rechazar con probabilidad uno lotes de buena y mala calidad, respectivamente. La definición de un plan con curva CO ideal es imposible. Dicha curva estaría asociada, por ejemplo, a una inspección 100 % sin errores. Sin embargo, se puede obtener una aproximación a la curva CO ideal considerando:

- Un aumento del tamaño muestral n y del criterio de aceptación c proporcional.
- La disminución del criterio de aceptación para un tamaño muestral fijo
- Para $c = 0$, el aumento del tamaño muestral n y del tamaño del lote N .

Se suelen especificar dos puntos de la curva CO dados por la probabilidad de aceptación del nivel de calidad aceptable (NCA) y el nivel de calidad rechazable (NCR). El NCA representa el punto crítico para lotes de buena calidad. Asimismo el NCR representa el punto crítico para lotes que se consideran de mala calidad. Un plan que discrimine bien aceptará con alta probabilidad (próxima a uno) lotes con proporción de defectuosos inferior o igual al NCA y rechazará con probabilidad próxima a uno lotes con proporción de defectuosos superior al NCR.

2.1. Inspección con rectificación

Los programas de inspección por muestreo suelen requerir una acción correctiva cuando se rechazan lotes. Si los artículos defectuosos encontrados se reemplazan por artículos conformes se tiene que la calidad de los lotes de salida p_1 supera a la calidad de entrada p_0 . Estos programas de muestreo reciben el nombre de ‘programas de inspección rectificadora’ ($p_1 < p_0$). El muestreo con rectificación se aplica fundamentalmente en la inspección por recepción cuando los productos están semielaborados. Es decir, cuando se requiere una determinada calidad media en un determinado momento o paso del proceso de producción.

En los planes con rectificación, la calidad media de salida (CMS) viene dada por

$$CMS = \frac{P_a(N - n)p}{N}.$$

En la curva CMS se representa la calidad media de salida frente a la calidad de entrada p . Esta curva presenta un máximo, límite de calidad media de salida (LCMS), para calidades intermedias de entrada. Este comportamiento de la curva se debe a que los lotes con buena calidad de entrada presentarán una buena calidad de salida y los lotes con mala calidad de entrada presentarán una buena calidad de salida al aplicar el muestreo con rectificación.

Otra magnitud que determina el diseño de planes de muestreo con rectificación es la inspección total media por lote (ITM). Para $p = 0$, no se rechaza ningún lote y el número de unidades inspeccionadas sería igual al tamaño muestral n . Para $p = 1$, todos los artículos del lote son defectuosos, se requiere entonces una inspección 100 % y el número de unidades inspeccionadas sería igual al tamaño N del lote. Para $0 < p < 1$ el número medio de inspección por lote estaría entre n y N . Supongamos $p \in (0, 1)$, entonces

$$ITM = n + (1 - P_a)(N - n).$$

Para un plan de muestreo con n y c fijados, se incrementa el ITM cuando se incrementa el tamaño N del lote. En el diseño de planes de muestreo, generalmente se especifica un LCMS y un valor mínimo del ITM para un nivel de calidad particular. Dicho nivel de calidad se determina por el nivel de calidad más probable de los lotes que llegan. En las tablas de Dodge-Romig se proporcionan planes de muestreo que minimizan el ITM para un LCMS y un nivel de calidad del proceso p especificados. Se suelen también diseñar planes de muestreo que proporcionan una protección de los lotes, minimizando el ITM, para un nivel de calidad del proceso p .

3. Planes de muestreo doble, múltiple y secuencial

Existen diferentes extensiones de los planes de muestreo simple entre ellas se encuentran los planes de muestreo doble, múltiple y secuencial. Un plan de muestreo doble se define en términos de cuatro parámetros:

- El tamaño n_1 de la primera muestra.
- El número de aceptación c_1 de la primera muestra.
- El tamaño n_2 de la segunda muestra.
- El número de aceptación c_2 para ambas muestras combinadas.

Tras observar el número de defectos d_1 de la primera muestra, se tomará una decisión si $d_1 \leq c_1$ (aceptar) o bien, $d_1 > c_2$ (rechazar). En caso contrario, se extrae una segunda muestra y se observa el número de defectos d_2 . Si $d_1 + d_2 \leq c_2$ se acepta el lote y se rechaza cuando $d_1 + d_2 > c_2$.

Con el muestreo doble se reduce el costo de inspección cuando se toma una decisión en la primera muestra, cuyo tamaño es inferior al tamaño requerido en el muestreo simple para obtener la misma protección. En el caso en que se inspeccione la segunda muestra se obtiene una reducción del costo de inspección cuando la segunda muestra no se inspecciona completamente. Es decir, si el número de defectos acumulados de la primera y segunda muestra supera el criterio de aceptación de la segunda etapa, entonces se rechaza el lote y no se continua la inspección. A este tipo de muestreo se le llama muestreo doble con reducción.

Para estudiar el poder discriminatorio de un plan de muestreo doble se consideran dos tipos de curvas operativas.

Las curvas CO suplementarias. Se consideran dos tipos de curvas: La curva CO_A de aceptación que representa la probabilidad de aceptación en la primera muestra frente a la calidad del lote (fracción de defectuosos). La curva CO_R de rechazo que representa la probabilidad de rechazo en la segunda muestra frente a la calidad del lote.

La curva CO primaria. En esta curva se representa la probabilidad de aceptación en las muestras combinadas frente a la calidad del lote. Es decir, se representa

$$P_a = P_a^I + P_a^{II}$$

frente a la fracción de defectuosos o calidad del lote, donde P_a^I representa la probabilidad de aceptación en la primera muestra y P_a^{II} representa la probabilidad de aceptación en la segunda muestra.

Ejemplo. Para un plan de muestreo doble con parámetros $n_1 = 50$; $c_1 = 1$; $n_2 = 100$; $c_2 = 3$, calcular la probabilidad de aceptación de un lote cuya fracción de defectuosos es $p = 0,05$. La probabilidad de aceptación en la primera etapa viene dada por

$$P_a^I = \sum_{d_1=0}^1 \frac{50!}{d_1!(50-d_1)!} p^{d_1} (1-p)^{50-d_1}, \quad (1)$$

para $p = 0,05$, se obtiene entonces

$$P_a^I = \sum_{d_1=0}^1 \frac{50!}{d_1!(50-d_1)!} 0,05^{d_1} 0,95^{50-d_1} = 0,279. \quad (2)$$

Cuando $c_1 < d_1 \leq c_2$ se extrae una segunda muestra. En particular, $d_1 = 2$ ó 3 .

(I) Caso $d_1 = 2$, entonces $d_2 = 0$ ó 1 .

$$\begin{aligned}
 P[d_1 = 2, d_2 \leq 1] &= P[d_1 = 2]P[d_2 \leq 1] \\
 &= \frac{50!}{2!48!}(0,05)^2(0,95)^{48} \sum_{d_2=0}^1 \frac{100!}{d_2!(100-d_2)!} (0,05)^{d_2} (0,95)^{100-d_2} \\
 &= (0,261)(0,037) = 0,009.
 \end{aligned} \tag{3}$$

(II) Caso $d_1 = 3$, entonces $d_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
 P[d_1 = 3, d_2 = 0] &= P[d_1 = 3]P[d_2 = 0] \\
 &= \frac{50!}{3!47!}(0,05)^3(0,95)^{47+100} = (0,220)(0,0059) = 0,001.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente se tiene a partir de (3) y (4)

$$P_a^{II} = P[d_1 = 2, d_2 \leq 1] + P[d_1 = 3, d_2 = 0] = 0,009 + 0,001 = 0,010. \tag{5}$$

Por tanto, a partir de (2) y (5),

$$P_a = P_a^I + P_a^{II} = 0,279 + 0,010.$$

3.1. Número medio muestral

En el muestreo simple el tamaño muestral es constante. En cambio en el muestreo doble el tamaño muestral depende de si se toma o no se toma una decisión en la primera etapa y de si la segunda muestra se inspecciona totalmente o se practica el muestreo doble con reducción. En el cálculo del tamaño muestral medio (NMM) distinguiremos entonces dos casos dependiendo de que se realice o no una inspección completa de la segunda muestra.

(i) Inspección completa de la segunda muestra. En este caso se tiene

$$NMM = n_1 P_1 + (n_1 + n_2)(1 - P_1), \tag{6}$$

donde P_1 representa la probabilidad de tomar una decisión respecto al lote con la información de la primera muestra. Es decir,

$$P_1 = P[\text{aceptar el lote en la primera muestra}] + P[\text{rechazar el lote en la primera muestra}].$$

Evalando (6) para diferentes valores de la fracción de defectuosos se obtiene la curva NMM para un plan de muestreo doble con inspección completa.

(ii) Muestreo doble con inspección reducida. Consiste en detener la inspección en la segunda muestra cuando el número de defectuosos observados en ambas muestras supera el

criterio de aceptación de la segunda muestra. La fórmula del NMM en el plan de muestreo doble, con reducción en la segunda muestra, es

$$NMM = n_1 + \sum_{j=c_1+1}^{c_2} P(n_1, j) \left[n_2 P(n_2, c_2 - j) + \frac{c_2 - j + 1}{p} P(n_2 + 1, c_2 - j + 2) \right],$$

donde $P(n_1, j)$ representa la probabilidad de observar j unidades defectuosas en una muestra de tamaño n_1 , $P(n_2, c_2 - j)$ representa la probabilidad de observar $c_2 - j$ unidades defectuosas en una muestra de tamaño n_2 . Similarmente, $P(n_2 + 1, c_2 - j + 2)$ denota la probabilidad de observar $c_2 - j + 2$ unidades defectuosas en una muestra de tamaño $n_2 + 1$.

La curva del NMM que corresponde al muestreo doble con reducción está por debajo de la recta horizontal del muestreo simple. En cambio, para el muestreo doble con inspección completa, la curva NMM está por debajo de la recta horizontal que representa el NMM del muestreo simple para lotes de muy mala o muy buena calidad. Para lotes de calidad intermedia, la curva NMM del muestreo doble con inspección completa está por encima de la recta horizontal que representa el NMM del muestreo simple.

Para el muestreo doble con rectificación, la calidad media de salida viene dada por

$$CMS = \frac{[P_a^I(N - n_1) + P_a^{II}(N - n_1 - n_2)] p}{N},$$

donde p representa, como antes, la fracción de defectuosos de entrada. La inspección total media (ITM) viene dada por

$$ITM = n_1 P_a^I + (n_1 + n_2) P_a^{II} + N(1 - P_a).$$

3.2. Planes de muestreo múltiple

Para un muestreo múltiple con n etapas, se utilizará la información de n muestras para tomar una decisión. Se considera un número de aceptación a_i y de rechazo r_i en la etapa i , para $i = 1, \dots, n - 1$. En la etapa n , se toma una decisión considerando un único valor de aceptación-rechazo c_n .

Metodología. Se extrae una primera muestra y se observa el número de defectos d_1 . Si $d_1 \leq a_1$, entonces se acepta el lote, en cambio, si $d_1 > r_1$ se rechaza el lote. Finalmente, si $a_1 < d_1 \leq r_1$ se extrae una segunda muestra. En general en la etapa i , para $i = 1, \dots, n - 1$, se extrae una muestra de tamaño n_i , se observa el número de defectos d_i . Si $\sum_{k=1}^i d_k \leq a_i$, entonces se acepta el lote, en cambio, si $\sum_{k=1}^i d_k > r_i$ se rechaza el lote. Si $a_i < \sum_{k=1}^i d_k \leq r_i$ se extrae la muestra $i + 1$. En la etapa n se acepta el lote si

$$\sum_{k=1}^n d_k \leq c_n$$

y se rechaza en caso contrario.

La curva CO de estos planes se define como extensión de la curva CO del muestreo doble, considerando en el cálculo de la probabilidad de aceptación la probabilidad de aceptación en las n etapas. La curva del NMM también se calcula de forma similar a la del muestreo doble. En general, el tamaño muestral de cada etapa es inferior al tamaño de muestra del muestreo simple con la misma protección.

3.3. Planes de muestreo secuencial

Se basa en la extracción de una secuencia de muestras hasta que los resultados del muestreo indican la parada. Esto ocurre cuando el número de unidades defectuosas acumuladas supera los límites definidos por las rectas de aceptación y rechazo. Si no se han cruzado los límites de aceptación y rechazo en ninguna etapa, la parada se produce cuando el número de artículos inspeccionados es igual a tres veces el número de artículos empleados en el muestreo simple correspondiente. Se distinguen dos tipos de muestreo secuencial: El muestreo grupal y el muestreo elemento por elemento, respectivamente asociados a la selección de tamaños muestrales superiores o iguales a uno en cada etapa. A continuación se describe el muestreo elemento por elemento basado en la prueba de razón de probabilidades secuenciales (PRPS) desarrollada por Wald (1947).

El plan se determina especificando dos puntos, $(p_1, 1 - \alpha)$ y (p_2, β) . Los orígenes y la pendiente (común) de las rectas de aceptación y rechazo se definen entonces como sigue:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{\log\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{k} & h_2 &= \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}{k} \\ s &= \frac{\log\left(\frac{(1-p_1)}{(1-p_2)}\right)}{k} & k &= \log\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

donde $-h_1$ define el origen de la recta de aceptación, h_2 define el origen de la recta de rechazo y s define la pendiente común. Es decir, las rectas de aceptación y rechazo vienen respectivamente dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_A &= -h_1 + sn \\ y_R &= h_2 + sn, \end{aligned} \quad (8)$$

siendo n el tamaño muestral acumulado de la etapa considerada. Pueden obtenerse ordenadas de las rectas de aceptación y rechazo que no tengan sentido. Por ejemplo, valores de aceptación o rechazo negativos (en las primeras etapas) y valores de aceptación o rechazo que superan el tamaño muestral.

Ejemplo. Se consideran los puntos $(p_1 = 0,01, \alpha = 0,05)$ y $(p_2 = 0,06, \beta = 0,1)$. Calcular las ecuaciones que definen las rectas de aceptación y rechazo del plan de muestreo

secuencial. Determinar si el muestreo se detiene cuando el tamaño muestral es $n = 45$ y el número de defectos observados es $d = 4$.

$$\begin{aligned} k &= \log \left(\frac{(0,06)(0,99)}{(0,01)(0,94)} \right) = 0,80066 \\ h_1 &= \frac{\log \left(\frac{0,95}{0,10} \right)}{0,80066} = 1,22 \\ h_2 &= \frac{\log \left(\frac{0,90}{0,05} \right)}{0,80066} = 1,57 \\ s &= \log \left(\frac{0,99}{0,94} \right) = 0,028. \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} y_A &= -1,22 + 0,028n \\ y_R &= 1,57 + 0,028n, \end{aligned}$$

por tanto, para $n = 45$

$$\begin{aligned} y_A(45) &= 0,04 \sim 0 \\ y_R(45) &= 2,83 \sim 3, \end{aligned}$$

donde $\sim$ denota la aproximación por el entero más próximo. Por tanto, para $n = 45$ se detiene el muestreo secuencial cuando se han observado cuatro unidades defectuosas.

4. Planes de muestreo de conformidad sensible a los lotes

Estos planes de muestreo se aplican cuando se realiza una inspección de acuerdo a una protección de los lotes. Por ejemplo, cuando se realiza un muestreo para inspeccionar características que están relacionadas con la seguridad. El procedimiento es el siguiente:

- (i) Se determina el tamaño N del lote.
- (ii) Se especifica el PDTL, es decir, el plan debe proteger este nivel de calidad.
- (iii) Se calcula el número de unidades defectuosas D del lote dadas por el PDTL.
- (iv) Se utilizan la tabla 10-6 del apéndice para calcular la fracción de muestreo f que hay que inspeccionar para el D calculado.

(v) El plan determinado se define por los parámetros

$$c = 0 \quad n = fN.$$

Ejemplo. Se considera $N = 100$ y $PDTL = 0,10$, entonces $D = 10$, y la fracción f de muestreo correspondiente, según Tabla 10-6 del Apéndice, es $f = 0,21$, por tanto, el tamaño muestral viene dado por $n = 0,21(100) = 21$.

5. Norma militar 105D

Es un sistema de muestreo por atributos que consiste en un conjunto de planes de muestreo que pueden ser simples, dobles o múltiples. Para un NCA, un nivel de inspección especificados y un tamaño muestral dado, la MIL STD 105D proporciona un plan de muestreo que se aplica mientras que el proveedor produce un artículo con el NCA especificado. Con esta norma se proporciona un procedimiento para alternar entre la inspección 100 %, normal y reducida:

Si se está realizando una inspección normal, se cambia a inspección 100 %, cuando cinco lotes consecutivos resultan rechazados con la inspección normal. Si posteriormente se aceptan cinco lotes consecutivos, entonces se vuelve a la inspección normal.

Si la inspección vigente es la inspección normal, se establecerá la inspección reducida cuando se cumplan las siguientes condiciones:

- De los 20 lotes precedentes, ninguno ha sido rechazado con la inspección normal.
- El número total de artículos defectuosos en las muestras de los 10 lotes precedentes es inferior o igual al número establecido por la tabla 10-17 del Apéndice.
- La producción es estable, es decir, no se presentan problemas tales como averías, escasez de material u otros inconvenientes.
- La autoridad responsable del muestreo considera conveniente la inspección reducida.

También se establecen las normas para pasar de inspección reducida a normal y para detener la inspección.

En general, el procedimiento establecido por esta norma se resume en los siguientes pasos:

1. Elegir un NCA.
2. Seleccionar el nivel de inspección.
3. Determinar el tamaño del lote.

4. Hallar la letra código del tamaño de la muestra adecuado (ver Tabla 10-7 del apéndice).
5. Determinar el tipo adecuado de plan de muestreo que se va a utilizar (simple, doble o múltiple).
6. Determinar los parámetros del plan.
7. Determinar los planes de inspección normal y reducida para su uso cuando sea necesario.

6. Planes de muestreo de Dodge-Romig

Los planes de Dodge-Romig se diseñan para un PDDL especificado. Este tipo de planes se suelen aplicar cuando se realiza una revisión de materiales críticos para desarrollar una actividad. En estos casos el interés reside en determinar cuando serán rechazables. Cuando se aplica el muestreo con rectificación se consideran dos tipos de planes:

- Dado un LCMS, se minimiza la ITM para una proporción de defectuosos p especificada.
- Dado un PDDL, se minimiza la ITM para una proporción de defectuosos media.

Con este tipo de planes también se puede establecer una estimación de la calidad media del proceso.