

RESUMEN DEL TEMA 5:

INFERENCIA SOBRE EL MODELO WEIBULL BI-PARAMÉTRICO

1. Introducción

En este tema se estudia la estimación puntual y por intervalos de confianza para el modelo Weibull biparamétrico, es decir, para el modelo Weibull cuando el parámetro de localización se hace nulo. Existen diferentes métodos para la obtención de estimadores puntuales adecuados para los parámetros de forma y escala. Entre otros se encuentran:

- La resolución iterativa de las ecuaciones de estimación por máxima verosimilitud.
- Técnicas de estimación lineal.

En particular, se estudiará en este tema la definición de estimadores lineales de funciones de los parámetros de forma y escala. Dichas funciones se determinan a partir de la distribución asintótica de la variable aleatoria $\ln(T)$, que viene dada por

$$F_X(x) = 1 - \exp \left[\exp \left(\frac{x - \eta}{\xi} \right) \right] = G \left(\frac{x - \eta}{\xi} \right), \quad \xi > 0,$$

donde $\eta = \ln \delta$ define el parámetro de localización para la distribución de la variable transformada a partir del parámetro de escala del modelo original y $\xi = 1/\beta$ define el parámetro de escala del modelo transformado a partir del parámetro de forma del modelo original.

2. Estimación puntual

Se consideran los siguientes estimadores lineales para los parámetros del modelo transformado:

(i) *Muestras de tamaño $n, r \in [2, 13]$*

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= \sum_{i=1}^r A(n, r, i) X_i \\ \tilde{\xi} &= \sum_{i=1}^r C(n, r, i) X_i \\ \tilde{X}_p &= \tilde{\eta} + \tilde{\xi} \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-p} \right) \right],\end{aligned}$$

siendo $X_i = \ln T_i$. El estimador $\tilde{X}_p$ proporciona una aproximación del percentil $100p$ de la distribución de X . Los pesos $A(n, r, i); C(n, r, i)$, $i = 1, \dots, r$ están tabulados para los diferentes valores de n y r indicados (ver Tabla 5.3 del Apéndice).

- (ii) *Muestras de tamaño* $n = 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55$ y 60

$$\xi^{**} = \frac{\sum_{i=1}^r |X_r - X_i|}{nk_{r,n}},$$

valores apropiados de $k_{r,n}$ son generados mediante la aplicación de métodos de Monte Carlo (ver Tabla 5.11 del Apéndice). Se obtienen mejoras basadas en la reducción del error cuadrático medio asociado; por ejemplo,

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi^{**}}{1 + l_{r,n}},$$

donde $l_{r,n} = \frac{\text{Var}_{\xi^{**}}}{\xi^2}$ (se halla tabulada para diferentes valores de n y r en Tabla 5.11 del Apéndice).

- (iii) *Otros tamaños muestrales.* Se consideran estimadores definidos mediante sumas ponderadas de las estimaciones lineales obtenidas en submuestras de tamaños entre dos y trece, calculando en cada submuestra los estimadores dados en (i). Las ponderaciones se definen en términos de los inversos de los errores cuadráticos medios asociados a cada estimador y se normalizan por la suma de todos los pesos. En general se define mediante este método de las submuestras una estimación lineal para una combinación lineal de los parámetros de localización y escala del modelo transformado.

3. Estimación por intervalos de confianza

Se obtiene a partir de los siguientes estadísticos y aproximaciones de sus distribuciones:

- *Muestras de tamaño entre moderado y grande.* Para n grande y $r/n \leq 1/2$, la media y varianza de

$$\frac{nk_{r,n}\xi^{**}}{\xi}$$

son aproximadamente iguales a $nk_{r,n}$. Por tanto, se puede utilizar como aproximación de la distribución de

$$\frac{2nk_{r,n}\xi^{**}}{\xi}$$

la distribución Chi Cuadrado con $2nk_{r,n}$ grados de libertad.

- *Considerando el método de las submuestras.* Para $j = 1, \dots, k$, denotando por $\tilde{\xi}_j$ la estimación lineal (definida en (i)) del parámetro ξ calculada en la submuestra j , se tiene que

$$2 \sum_{j=1}^k C_j^{-1} \frac{\tilde{\xi}_j}{\xi}$$

se distribuye según una Chi Cuadrado con $2 \sum_{j=1}^k C_j^{-1}$ grados de libertad, donde C_j se define en términos del error cuadrático medio asociado a $\tilde{\xi}_j$.

Se obtienen aproximaciones de los percentiles de la distribución transformada que permiten calcular aproximaciones del parámetro de localización η y, por tanto, del parámetro de escala δ del modelo original, a partir de las estimaciones obtenidas para el parámetro de forma transformado ξ .