# RESUMEN DEL TEMA 4:

# INFERENCIA SOBRE EL MODELO EXPONENCIAL

## 1. Introducción

En este tema se considera la estimación puntual y por intervalos de confianza del modelo exponencial uniparamétrico.

Se estudian dos tipos de inferencia, respectivamente asociados a las siguientes situaciones. Para un tamaño inicial de muestra de $n$ unidades,

- *Inferencia tipo I*: Se observa el número de unidades de la muestra que han fallado en un intervalo de tiempo de longitud $S$.
- *Inferencia tipo II*: Se observa el sistema hasta que $r$ unidades de la muestra fallan, siendo $r \leq n$.

Las características de la distribución del modelo uniparamétrico exponencial se estimarán a partir de la estimación del parámetro $\theta$ que define el tiempo medio de fallo, o, equivalentemente, a partir de la estimación de la razón de fallo del modelo. La fiabilidad del sistema en un instante de tiempo dado, el tiempo transcurrido para una proporción de fallos y el número medio de fallos ocurridos en un intervalo de tiempo dado son cantidades de interés que serán aproximadas en términos del estimador del parámetro $\theta$.

## 2. Estimación puntual

Se obtienen estimaciones puntuales del parámetro $\theta$, tiempo medio de vida, bajo diferentes escenarios que determinan el modelo de observación de la secuencia de unidades que fallan, así como el tipo de inferencia.

*Sin Reemplazamiento*

En el siguiente desarrollo se supone que las unidades o items que fallan no se reparan ni reemplazan.

Sean $t_i,\ i = 1, \ldots, n$, los tiempos aleatorios de fallo de cada una de las unidades $u_i,\ i = 1, \ldots, n$, de la muestra considerada. La función de verosimilitud se define mediante la siguiente ecuación:

- *Inferencia tipo I*

$$L = C \prod_{i=1}^{r} f_T(t_i)(1 - F_T(t_0))^{n-r},$$

  siendo $r$ el número de unidades que fallan durante el periodo de tiempo $t_0$ que se observa la muestra.

- *Inferencia tipo II*

$$L = C \prod_{i=1}^{r} f_T(t_i)(1 - F_T(t_r))^{n-r},$$

siendo $t_r$ el tiempo transcurrido hasta que se produce el $r$-ésimo fallo.

A partir de las ecuaciones anteriores, derivando respecto a $\theta = \frac{1}{\lambda}$ el $\ln L$ e igualando a cero, se obtiene

- *Inferencia tipo I*

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_0}{r}.$$

Este estimador es sesgado para muestras pequeñas; sin embargo, asintóticamente presenta todas las buenas propiedades, que seguidamente se indican, del estimador de $\theta$ calculado bajo la Inferencia tipo II.

- *Inferencia tipo II*

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r}{r}.$$

Este estimador es insesgado y de mínima varianza. Además su varianza es igual a la cota de Cramér-Rao.

Nótese que puesto que $\theta$ es un parámetro de escala, el mejor estimador invariante de $\theta$ bajo completitud viene dado por

$$\widetilde{\theta} = \frac{r\hat{\theta}}{r+1},$$

siendo $\hat{\theta}$ el estimador de máxima verosimilitud de $\theta$.

*Con Reemplazamiento*

En la derivación de los siguientes estimadores se supone que las unidades o items que fallan se reemplazan o reparan. El estimador de máxima verosimilitud de $\theta$ viene dado por:

- *Inferencia tipo I*

$$\hat{\theta} = \frac{nt_0}{r} = \frac{t_r}{r},$$

siendo $t_0$ el tiempo de observación del sistema y $n$ el número de unidades que componen la muestra, o tamaño inicial del test.

**Nota 1** *Para este modelo el número de fallos observados define una variable aleatoria $K$ satisfaciendo*

$$P[K = r] = \frac{1}{r!}\left(\frac{t_r}{\theta}\right)^r \exp\left\{-\frac{t_r}{\theta}\right\}.$$

- *Inferencia tipo II*

$$\hat{\theta} = \frac{nt_r}{r},$$

donde, en este caso, $t_r$ indica el tiempo transcurrido hasta que $r$ unidades de la muestra fallan y $r$ es el número de fallos prefijado para determinar la duración del test de vida o tiempo de observación de la muestra.

**Nota 2** *A partir de las estimaciones anteriores de $\theta$ se obtienen las correspondientes estimaciones de la función de fiabilidad en un instante dado, así como del tiempo transcurrido para una proporción de fallos (ver Tema 2).*

# 3. Estimación por intervalos de confianza

*Sin reemplazamiento.* Se considera primero que las unidades que fallan no se reemplazan.

- *Inferencia tipo I.* Las cotas de confianza para $\theta$ se definen en este caso a partir de las cotas de confianza para la función de fiabilidad evaluada en el intante $t_0$, que indica la duración del test. Es decir, se prueba que

$$1 - v_{1-\alpha}(r+1, n-r) = v_\alpha(n-r, r+1)$$

proporciona una cota inferior de confianza para $R(t_0)$ al nivel $1-\alpha$, donde $v_{1-\alpha}(r+1, n-r)$ denota el percentil $100(1-\alpha)$ de la distribución Beta con parámetros $r+1$ y $1-r$. Es decir, una cota inferior de confianza para $R(t_0)$ viene dada por el percentil $100\alpha$ de la distribución Beta con parámetros $n-r$ y $r+1$.

- *Inferencia tipo II.* Se considera el estadístico

$$\frac{2r\hat{\theta}}{\theta},$$

que se distribuye según una Chi Cuadrado con $2r$ grados de libertad. Por tanto, el intervalo de confianza para $\theta$ al nivel de confianza $1-\alpha$ viene dado por

$$\left[\frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r)}, \frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{\alpha/2}(2r)}\right],$$

donde $\chi^2_\gamma(k)$ representa el percentil $100\gamma$ de la Chi Cuadrado con $k$ grados de libertad. La estimación por intervalos de confianza de la función de fiabilidad y del tiempo transcurrido para una proporción de fallos se obtiene en términos de las cotas de confianza anteriores utilizando las identidades derivadas en el Tema 2.

*Intervalos de predicción*

Se supone que se han observados los tiempos de fallo de $k$ unidades, con $k < r$, y se pretende predecir el tiempo que ha de transcurrir hasta que se produzca el fallo $r$ o hasta que termine el test de vida.

Se considera el estadístico

$$W = \frac{t_r - t_k}{S_k} = \frac{t_r - t_k}{\sum_{i=1}^{k} t_i + (n-k)t_k}.$$

Denotando $t_\gamma$ al percentil $100\gamma$ de la distribución de $W$, se tiene la siguiente cota superior de confianza para $t_r$ :

$$P\left[t_r < t_k + t_\gamma S_k\right] = \gamma.$$

En particular, para $k = r - 1$, la variable aleatoria

$$(r-1)(n-r+1)W$$

sigue una distribución F de Snedecor con 2 y $2r-2$ grados de libertad. En este caso las cotas de confianza para el intervalo de predicción se pueden obtener directamente.

En este apartado se calculan estimaciones por intervalos de confianza del parámetro $\theta$ bajo los diferentes tipos de inferencia considerados en el apartado anterior

*Con Reemplazamiento.* Seguidamente se considera el cálculo de cotas de confianza cuando las unidades que fallan son reemplazadas.

- *Inferencia tipo I.* Se prueba que una cota superior de confianza para $\theta$ al nivel $1-\alpha$ viene dada por

  $$\frac{2nt_0}{\chi^2_\alpha(2r)}.$$

  y una cota inferior al nivel $1-\alpha$ viene dada por

  $$\frac{2nt_0}{\chi^2_{1-\alpha}(2r+2)}.$$

  Se puede definir entonces el intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ dado por

  $$\left[\frac{2nt_0}{\chi^2_{1-\alpha}(2r+2)}, \frac{2nt_0}{\chi^2_\alpha(2r)}\right].$$

- *Inferencia tipo II.* En este caso la variable aleatoria

  $$\frac{2nt_r}{\theta}$$

  sigue una Chi Cuadrado con $2r$ grados de libertad. Análogamente a los casos anteriores, se obtiene el cálculo de cotas e intervalos de confianza para $\theta$ en términos de estadístico anterior.