

RESUMEN DEL TEMA 3:

MODELO WEIBULL

1. Introducción

El modelo Weibull generaliza al modelo exponencial. Su razón de fallo es monótona. Este modelo depende de tres parámetros, que definen la razón de fallo:

- El parámetro umbral
- El parámetro de forma
- El parámetro de escala

El parámetro umbral o parámetro de localización indica el origen de tiempos. El parámetro de forma se define en términos del exponente de la función potencial que determina la razón de fallo del modelo. En términos de este parámetro se definirá la monotonía de la razón de fallo. Más concretamente, la razón de fallo es monótona creciente o monótona decreciente dependiendo de que el parámetro de forma sea superior o inferior a la unidad, respectivamente. El inverso del parámetro de escala define la razón de fallo del modelo exponencial, cuando el modelo Weibull se particulariza a este caso (parámetro de forma igual a la unidad). Puesto que está definido en términos de tres parámetros, proporciona una gran flexibilidad en la representación de comportamientos de una gran variedad de sistemas de fallo. La implementación de métodos de inferencia es más compleja que en el modelo exponencial. En el caso en que el parámetro umbral o de localización coincida con el instante cero se tiene el modelo Weibull biparamétrico.

2. Modelo

En esta sección se resumen las principales características o propiedades estadísticas que definen el modelo Weibull biparamétrico.

- Densidad de probabilidad y función de distribución:

$$f_T(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \right\}$$

$$F_T(t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \right\}$$

siendo $t \geq 0$, $\beta > 0$ y $\eta > 0$, denotando η el parámetro de escala y β el parámetro de forma.

- **Media:**

$$ET = \eta \Gamma \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right),$$

denotando por Γ a la función Gamma.

- **Mediana:**

$$T_{\text{MED}} = \eta \ln(2)^{1/\beta}.$$

- **Moda:**

$$T_{\text{MOD}} = \eta \left(1 - \frac{1}{\beta} \right)^{1/\beta}.$$

- **Desviación Estándar:**

$$\sigma_T = \eta \left(\Gamma \left(\frac{2}{\beta} + 1 \right) - \Gamma \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

- **Función de Fiabilidad:**

$$R(t) = \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \right\}.$$

- **Fiabilidad Condicional:**

$$\begin{aligned} P[T > t + T | T > T] &= \frac{R(t + T)}{R(T)} = \frac{\exp \left\{ - \left(\frac{t+T}{\eta} \right)^\beta \right\}}{\exp \left\{ - \left(\frac{T}{\eta} \right)^\beta \right\}} \\ &= \exp \left\{ - \left[\left(\frac{t+T}{\eta} \right)^\beta - \left(\frac{T}{\eta} \right)^\beta \right] \right\}. \end{aligned}$$

- **Tiempo Transcurrido para una Fiabilidad o Proporción de Fallos p Especificadas:**

$$T_R = T_p = R(T_R) = 1 - p = \eta (-\ln(R(T_R)))^{1/\beta} = \eta \left(\ln \left(\frac{1}{1-p} \right) \right)^{1/\beta}.$$

- **Razón de fallo:**

$$h(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}.$$