RESUMEN DE LOS TEMAS 2 Y 3:

MODELO EXPONENCIAL Y PROCESO DE POISSON

1. Introducción

Los sistemas exponenciales se caracterizan por la propiedad de memoria corta. Es decir, la probabilidad de funcionamiento del sistema es independiente del tiempo que el sistema lleve funcionando. La razón de fallo del modelo exponencial es constante. El modelo exponencial se define en términos de un solo parámetro que representa el tiempo medio de fallo y el inverso de la razón de fallo, cuando el origen de tiempos se sitúa en el cero. El número de fallos en estos sistemas se define en términos del proceso de Poisson. La distribución Gamma define los tiempos de espera.

2. Modelo

La densidad de probabilidad y la función de distribución del modelo exponencial uniparamétrico vienen dadas por

$$f_T(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\} = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}, \quad t \geq 0,\ \lambda > 0,\ \theta > 0,$$

$$F_T(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\} = 1 - \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\},$$

donde $1/\theta$ representa la media de la variable aleatoria T, tiempo aleatorio entre fallos. El cálculo de este parámetro se obtiene de forma directa como sigue:

$$ET = \int_0^\infty t f_T(t) dt = \int_0^\infty t\lambda \exp\{-\lambda t\}\, dt = \frac{1}{\lambda} = \theta.$$

A continuación se resumen las principales características de esta distribución:

- **Mediana**:
$$T_{\text{MED}} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$
- **Moda**:
$$T_{\text{MOD}} = 0.$$
- **Desviación Estándar**:
$$\sigma_T = \frac{1}{\lambda} = \theta.$$

- **Función de Realizabilidad**:

$$R(t) = \exp\{-\lambda t\} = \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}.$$

- **Fiabilidad Condicional**:

$$P\left[T > t + T | T > T\right] = \frac{R(t+T)}{R(T)} = \frac{\exp\{-\lambda(t+T)\}}{\exp\{-\lambda T\}} = \exp\{-\lambda t\}.$$

  Nota. La probabilidad de que el sistema siga funcionando durante t unidades temporales, dado que ha funcionado un intervalo de longitud T, coincide con la probabilidad de que el sistema funcione durante un intervalo de tiempo de longitud t.

- Tiempo transcurrido para una fiabilidad dada del sistema (percentiles de la distribución de fallo):

$$T_R = T_p = R(T_R) = 1 - p = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(R(T_R)\right) = \theta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right).$$

- Cálculo de la razón de fallo exponencial:

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \frac{\lambda \exp\{-\lambda t\}}{\exp\{-\lambda t\}}\lambda = \text{Constante}.$$

3. Proceso de recuento de fallos: Proceso de Poisson

Proceso de recuento: Se define un proceso de recuento como un proceso estocástico $\{N(t) : \ t \geq 0\}$ entero-valuado cuyas componentes aleatorias contabilizan el número de sucesos aleatorios ocurridos en un intervalo de tiempo. Específicamente, si $N(0) = 0$, entonces $N(t) - N(0) = N(t)$ representa el número de sucesos aleatorios ocurridos en el intervalo $[0, t]$. Análogamente, $N(t) - N(s)$, con $s < t$, contabiliza el número de sucesos aleatorios ocurridos en el intervalo $[s, t]$.

Proceso con incrementos independientes: Un proceso de recuento se dice que posee incrementos independientes si las variables aleatorias que contabilizan el número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

Proceso con incrementos homogéneos o estacionarios: Un proceso de recuento se dice que posee incrementos estacionarios si la distribución del incremento del proceso que contabiliza el número de sucesos aleatorios ocurridos en un intervalo de tiempo depende sólo de la longitud de dicho intervalo y no depende de su localización.

Proceso de Poisson: Un proceso de recuento $\{N(t) : \ t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de Poisson con parámetro λ si satisface:

(i) $N(0) = 0$.

(ii) Posee incrementos independientes.

(iii) El número de sucesos en cualquier intervalo de longitud t se distribuye según una Poisson con media λt, es decir, para cualquier $s, t \geq 0$,

$$P\left[N(t+s) - N(s) = n\right] = \exp\left\{-\lambda t\right\} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \ n = 0, 1, \ldots$$

A partir de la identidad anterior se tiene que el proceso de Poisson posee incrementos estacionarios y, además, el número medio de sucesos ocurridos en un intervalo de longitud t es λt. Por tanto, el parámetro λ se llama razón del proceso (número de sucesos por unidad de tiempo).

Para comprobar que un proceso de recuento es un proceso de Poisson se han de verificar las tres condiciones anteriores; sin embargo, la condición (iii) no es fácil de verificar directamente. Por tanto, se introduce una definición alternativa que permite verificar de forma más sencilla que un proceso de recuento dado es un proceso de Poisson.

Definición 1 *Un proceso de recuento* $\{N(t) : \ t \geq 0\}$ *se dice ser un proceso de Poisson si satisface:*

(i) $N(0) = 0$.

(ii) El proceso posee incrementos independientes y estacionarios.

(iii) $P\left[N(h) = 1\right] = \lambda h + \mathcal{O}(h)$, *donde*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(h)}{h} = 0.$$

En sistemas de fiabilidad exponenciales, el proceso de recuento que contabiliza el número de fallos ocurridos en un intervalo de tiempo dado es un proceso de Poisson.

4. Tiempos de espera: Distribución de Erlang

En un sistema exponencial los tiempos aleatorios entre fallos son independientes e idénticamente distribuidos según una exponencial. Es decir, las variables aleatorias T_i $i = 1, \ldots, n$, que representan el tiempo transcurrido entre el fallo $i-1$ y el fallo i, $i = 1, \ldots, n$, respectivamente, se distribuyen independientemente e idénticamente según una exponencial con parámetro λ. Por tanto, la variable aleatoria

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

que representa el tiempo transcurrido hasta que se produce el fallo n se distribuye según una distribución de Erlang con parámetros n y λ. Su función de densidad de probabilidad viene dada entonces por

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda \exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases},$$

siendo $\Gamma(n) = (n-1)!$. Los parámetros λ y n están asociados a la escala y la forma, respectivamente.

Las características esenciales de esta distribución son:

- **Media**

$$ES_n = \frac{n}{\lambda}$$

- **Moda**

$$S_n^{\text{MOD}} = \frac{n-1}{\lambda}$$

- **Varianza**

$$\sigma_{S_n} = \frac{n}{\lambda^2}$$

- **Simetría**

$$\gamma_1 = \frac{2}{(n)^{1/2}}$$

- **Kurtosis**

$$\gamma_2 = \frac{6}{n}.$$