Tema 2

Resolución de Ecuaciones No Lineales

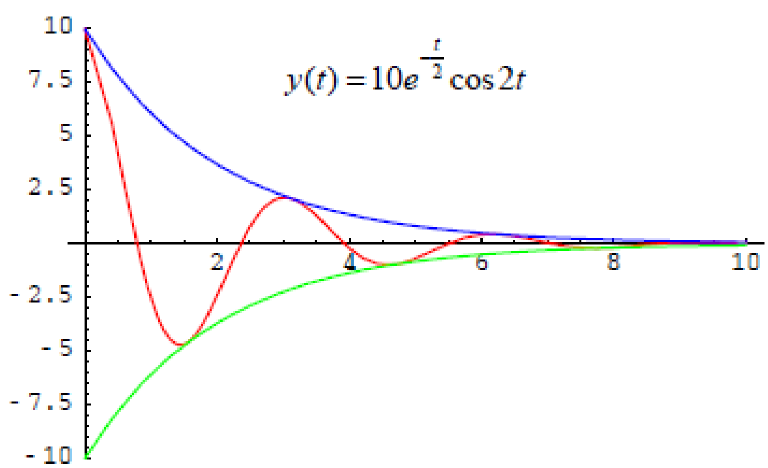
Índice

1 Introducción

Problema: *Oscilación amortiguada de una estructura*

Supongamos que la oscilación de una estructura, dotada de un sistema de amortiguación, ante un movimiento oscilatorio, viene dada por la función

$$y(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t.$$



¿En qué instante t la posición de la estructura es $y(t) = 4$?

Se trata de resolver la ecuación

$$10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\cos 2t = 4.$$

de incógnita t.

Este problema es imposible de resolver por medios analíticos sencillos.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideraremos la **ecuación en una variable**

$$f(x) = 0.$$

Definición 1 *El número $s \in \Omega$ se dice una* ***solución de la ecuación*** *si se verifica que $f(s) = 0$, es decir, si s es una raíz de la función f.*

2 Método de Bisección

2.1 Algoritmo del método de Bisección

El método de Bisección para la resoluci0́on de la ecuación $f(x) = 0$ se basa en el Teorema de Bolzano que nos asegura la existencia de, al menos, una raíz de una función $f(x)$ en un cierto intervalo $[a, b]$, bajo ciertas condiciones.

Teorema de Bolzano *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *tal que* $f(a)f(b) < 0$*. Entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

Supongamos que $f(x)$ es continua y cambia de signo en los extremos de $[a, b]$. Basándonos en el anterior teorema, podemos aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ dividiendo el intervalo inicial en dos subintervalos iguales y eligiendo aquel en el que $f(x)$ cambia de signo. Después se repite el proceso hasta que se verifique algún criterio de parada.

Algoritmo del Método de Bisección

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots$, hacer:
   - $m_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$
   - Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$.

Ejemplo

Resolver mediante al algoritmo de bisección la ecuación

$$\mathrm{e}^x - x = 0$$

en $[0, 1]$.

n	$a_n(+)$	$b_n(-)$	m_n	sgn $f(m_n)$
0	0	1	0.5	+
1	0.5	1	0.75	−
2	0.5	0.75	0.625	−
3	0.5	0.625	0.5625	+
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	0.566407	0.570313	0.568360	−
9	0.566407	0.568360	0.567384	−
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2.2 Análisis del Método de Bisección

Cálculo previo del número de interaciones

Recordemos que

Se define el **error absoluto** de una aproximación s' respecto del valor exacto s como

$$e = |s' - s|.$$

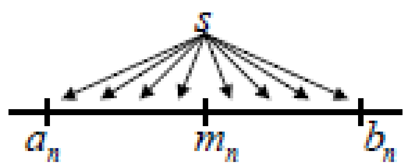
Para garantizar que el error del Método de Bisección sea menor o igual que un cierto valor de tolerancia ε se aplica el siguiente resultado:

Teorema1 (Error absoluto máximo del Método de Bisección)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$ y $f(s) = 0$, para algún $s \in (a, b)$. Sea $\{m_n\}_{n=0,1,\ldots}$ la sucesión de aproximaciones de s obtenidas mediante el Método de Bisección y $e_n = |s - m_n|$, para $n = 0, 1, \ldots$. Entonces

$$\boxed{e_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.}$$

Esquema de Demostración



$$
\begin{aligned}
e_n = \quad & |m_n - s| \leq m_n - a_n = b_n - m_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \\
& \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \ldots = \\
& \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).
\end{aligned}
$$

Luego

$$e_n \leq \frac{b.a}{2^{n+1}}.$$

$\square$

Por tanto, para garantizar que $e_n < \varepsilon$, se debe verificar que

$$\boxed{n \geq \frac{log\dfrac{b-a}{\varepsilon}}{log 2} - 1.}$$

Ejemplo: *Resolución aproximada del problema de la oscilación amortiguada de una estructura*

Se trata de resolver la ecuación

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t - 4 = 0.$$

Supongamos que deseamos que $e_n \leq \varepsilon = 10^{-3}$. Como $f(0) = 6 > 0$ y $f(1) = -6.524 < 0$ entonces podemos tomar $[a, b] = [0, 1]$.

El número de iteraciones que debemos realizar para asegurar la tolerancia de error considerada es:

$$n \geq \frac{log \frac{1}{10^{-3}}}{log 2} - 1 \approx 8.966,$$

es decir, $\mathbf{n = 9}$.

n	$a_n(+)$	$b_n(-)$	m_n	sgn $f(m_n)$
0	0	1	0.5	+
1	0.5	1	0.75	−
2	0.5	0.75	0.625	−
3	0.5	0.625	0.5625	−
4	0.5	0.5625	0.5313	−
5	0.5	0.5313	0.5157	−
6	0.5	0.5157	0.5079	+
7	0.5079	0.5157	0.5118	+
8	0.5118	0.5157	0.5138	−
9	0.5118	0.5138	$\boxed{0.5128}$	

3 Método de Regula-Falsi

3.1 Algoritmo del Método de Regula-Falsi

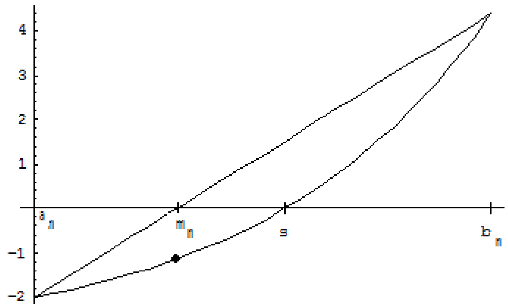
Se trata de realizar un **refinamiento** del Método de de Bisección, eligiendo la aproxiamción m a distancias de a y b proporcionales a $f(a)$ y $f(b)$.

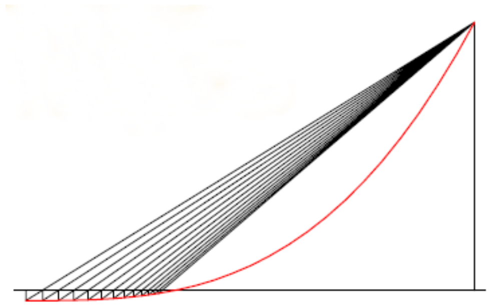
La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - 1}{b - a},$$

de donde se tiene que el corte con el eje OX es, haciendo $x = 0$ y despejando y, el valor

$$\boxed{m = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.}$$





Se verifica que:

- m_n converge más rápidamente a s que en el Método de Bisección.
- Un extremo es fijo.
- La amplitud de los intervalos no tiene a cero.
- No admite acotación del error.

Luego el algoritmo es el siguiente

Algoritmo del Método de Regula-Falsi

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$
2. Para $n = 0, 1, \ldots$, hacer:
   - $m_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$
   - Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, tomar $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$; en caso contrario, tomar $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$.

4 Método de la secante

Se trata de un método iterativo en el que, en cada paso, se calcula una aproximación de la solución en lugar de un intervalo que la contiene.

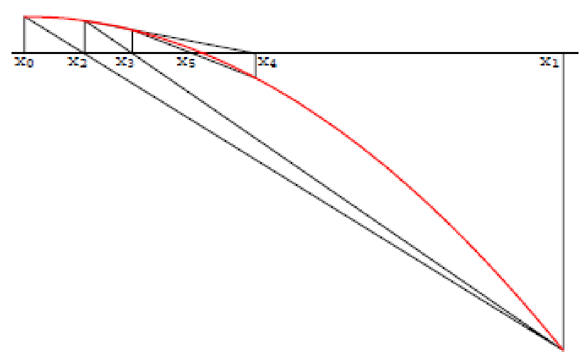
Se parte de $x_0 = a$ y $x_1 = b$ y se calcula, iterativamente para cada $n \geq 1$, la intersección de la secante que une los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1})$ y $(x_n, f(x_n))$ con el eje de abscisa, obteniéndose la abscisa

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.}$$

Por tanto el algoritmo es el siguiente:

Algoritmo del Método de la Secante

1. $x_0 = a$, $x_1 = b$
2. Para $n = 1, 2 \ldots$, hacer $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$



Ejemplo

Calculemos mediante 5 pasos del método de la secante una aproximacin de la solución del problema de la oscilación amortiguada de una estructura.

Se trataba de calcular la solución de la ecuación

$$f(t) = 10\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \cos 2t - 4 = 0.$$

Tomando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, se obtiene la siguiente sucesión de aproximaciones:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0.479078 \\
x_3 &= 0.517905 \\
x_4 &= 0.513640 \\
x_5 &= 0.513652,
\end{aligned}$$

con lo cual podemos afirmar que una aproximación con cuatro decimales exactas de la solución es 0.5126.

5 Método de Newton-Raphson

Se trata de llevar el límite el método de la secante y, por tanto, en cada iteración n, considerar la recta tangente a $f(x)$ en $(x_n, f(x_n))$ y tomar como siguiente aproximación x_{n+1} la intersección de dicha tangente con el eje de abscisas. Por tanto, teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangete a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ es

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

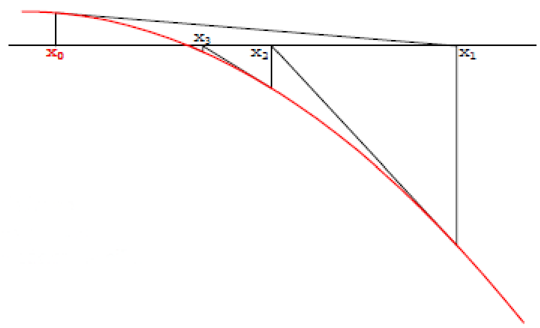
se tiene que

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.}$$

Luego el algoritmo del Método de Newton-Raphson es

Algoritmo del Método de Newton-Raphson

1. Dado x_0
2. Para $n = 1, 2 \ldots$, hacer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



Observaciones sobre el Método de Newton-Raphson

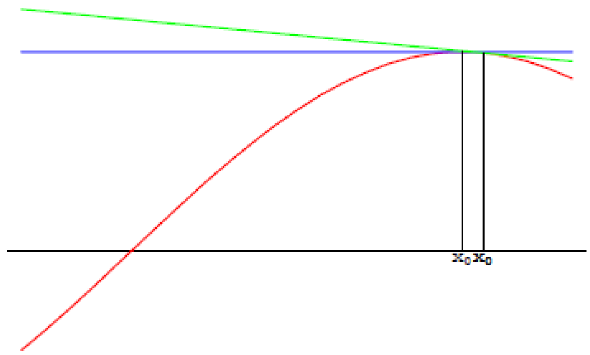
- Es el más rápido
- Requiere que $f'(s) \neq 0$
- Elegir x_0 puede ser delicado
- La acotación del error es complikcada
- El criterio de parada más usual es la repetición de cifras.

Ejemplos A continuación presentamos la solución aproximada de algunas ecuaciones con el método:

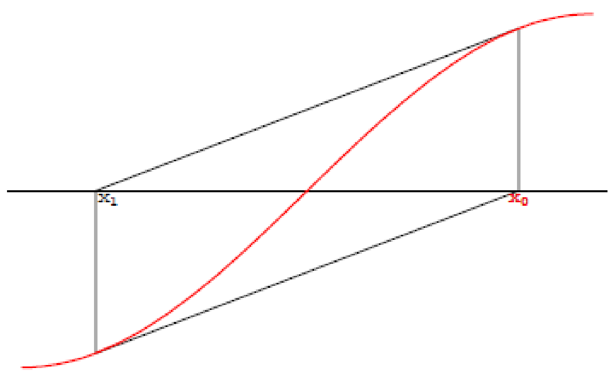
Ecuación	$x^2 - 5 = 0$	$\frac{1}{x} - 7 = 0$	$\frac{4}{x^2+1} - 3 = 0$
Iteración $x_{n+1} =$	$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$	$2x_n - 7x_n^2$	$\frac{1+6x^2-3x^4}{8x}$
Resultados	$x_0 = 2.5$ $x_1 = 2.250000000$ $x_2 = 2.236111111$ $x_3 = 2.236067978$ $x_4 = 2.236067977$	$x_0 = 0.1$ $x_1 = 0.1300000000$ $x_2 = 0.1417000000$ $x_3 = 0.1428477700$ $x_4 = 0.1428571422$ $x_5 = 0.1428571429$	$x_0 = 2.18$ $x_1 = -2.192747550$ $x_2 = 2.252073680$ $x_3 = -2.538745859$ $x_4 = 4.182754570$ $x_5 = -24.27521722$ $x_6 = 5346.182113$ $x_7 = -5.7301 \times 10^{10}$

¿Qué ha ocurrido en el tercer caso?

Obviamente se ha presentado un caso de divergencia:



También se podría haber presentado un caso de oscilación como el siguiendo gráfico indica:



6 Métodos Iterativos

Se trata de transformar la ecuación $f(x) = 0$ (cálculo de una raíz de la función $f(x)$) en una ecuación del tipo $x = g(x)$ (cálculo de un punto fijo de la función $g(x)$) de forma que sean equivalentes, es decir, tengan la misma solución.

Ejemplo (Método de Newton-Raphson)

Si $f(x)$ es una función de clase C^1 y s una raíz ($f(s) = 0$) tal que $f'(s) \neq 0$, entonces, resolver $f(x) = 0$ es un problema equivalente a calcular un punto fijo de la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ya que $f(s) = 0$ si y sólo si $g(s) = s$, como se puede comprobar fácilmente.

6.1 Algoritmo de los métodos iterativos

Los métodos iterativos se basan en el cálculo de un punto fijo para una cierta función $g(x)$. El siguiente resultado determina condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo para $g(x)$.

Teorema del punto fijo *Sea* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable verificando:*

- $g([a, b]) \subseteq (a, b)$,
- $\max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

Entonces existe un único $s \in [a, b]$ *tal que* $g(s) = s$ *y, además, para todo* $x_0 \in [a, b]$*, la sucesión* $\{x_n\}$ *generada por la iteración* $x_{n+1} = g(x_n)$ *converge a* s*.*

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que se verifican las condiciones del Teorema de Bolzano. En consecuencia, existe un $s \in (a, b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a, b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$, entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (s, t)$ tal que $g(t) - g(s) = g'(c)(t - s)$, es decir, $g'(c) = 1$, lo que contradice la segunda condición.

Sea ahora $\{x_n\}$ la sucesión generada a partir de $x_0 \in [a,b]$ mediante la iteración $x_{n+1} = g(x_n$, para $m \geq 0$, y sea $L = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

Se verifica entonces que

$$\begin{aligned} e_n &= |x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(x)|e_{n-1} \\ &\leq Le_{n-1} \leq L^2 e_{n-2} \leq \cdots \leq L^n e_0. \end{aligned}$$

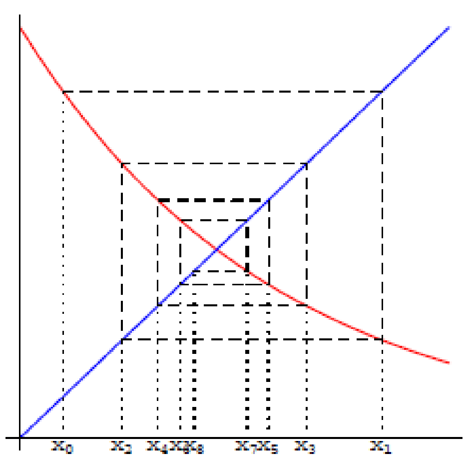
□

Algoritmo de un Método Iterativo

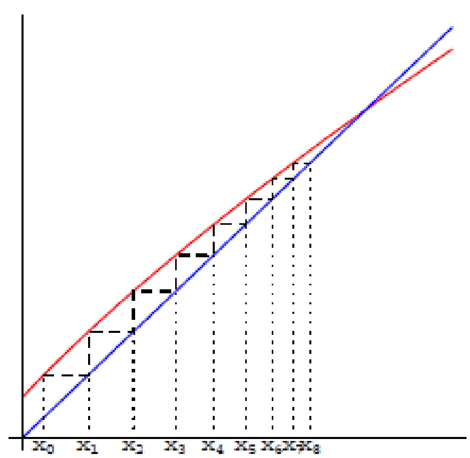
1. Dado $x_0 \in [a,b]$
2. Para $n = 1, 2 \ldots$, hacer $x_{n+1} = g(x_n)$

6.2 Interpretación gráfica de los métodos iterativos

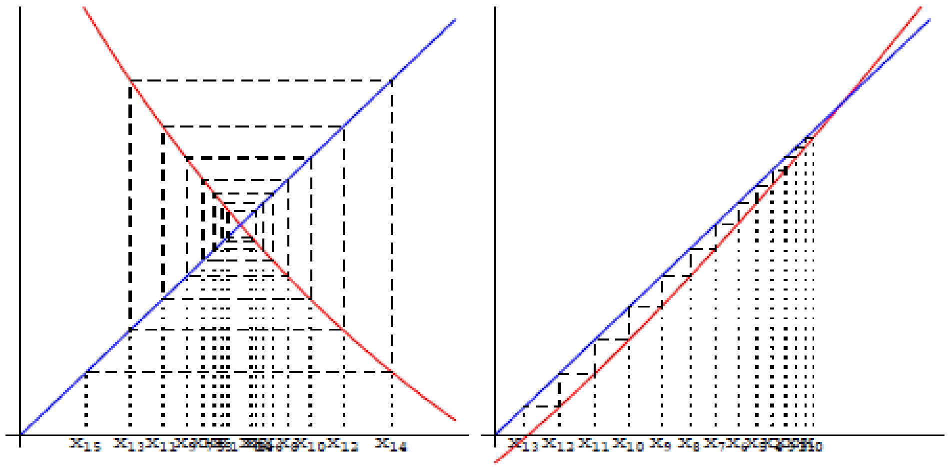
Seún sea $g(x)$ y se elija x_0, los métodos iterativos pueden ser convergentes o divergentes y, en ambos casos pueden variar en forma espiral o en escalera, como se indican en los siguientes gráficos.



Convergencia oscilante o en espiral



Convergencia monótona o en escalera



Divergencia oscilante o en espiral   Divergencia monótona o en escalera

6.3 Convergencia de los métodos iterativos

Definición 2 *Se define el orden de convergencia de una sucesión* $\{x_n\}$ *hacia un valor* s *como aquel número real* $p \geq 1$ *tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{m+1}}{e_n^p} = \lambda \neq 0, \infty.$$

Se deduce que si $\{x_n\} \to s$ *con orden de convergenia* $p \leq 1$ *entonces*

$$d_{n+1} \approx \lambda e_n^p, \quad n \to +\infty.$$

Algunos órdenes de convergencia de los métodos estudiados son los siguientes:

Método	Orden
Bisección	1 (lineal)
Secante	$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ (superlineal)
Newton-Raphson	2 (cuadrático)

Teorema de Convergencia Local *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en un entorno del punto fijo s. Si $|g'(s)| < 1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que en el intervalo $[s - \delta, s + \delta]$ se dan las condiciones del teorema del punto fijo.*

Demostración Basta tomar L tal que $|g'(s)| < L < 1$ y $\delta > 0$ tal que $|g'(x)| \leq L$, para todo $x \in [s - \delta, s + \delta]$. □

Teorema de Convergencia Cuadrática *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en un entorno del punto fijo s. Si $|g'(s) = 0$, entonces la convergencia $\{x_n\} \to s$ es al menos cuadrática.*

Demostración Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| \\ &= |g'(s)(x_n - s) + \frac{1}{2}g''(c_n)(x_n - s)^2| \\ & 0 + \frac{1}{2}g''(c_n)e_n^2; \end{aligned}$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}|g''(c_n)| = \frac{1}{2}|g''(s)| \neq \infty.$$

□

6.4 Convergencia global del método de Newton-Raphson

Teorema de Convergencia LOCAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^2 *en un entorno de* s *tal que* $f(s) = 0$ *y* $f'(s) \neq 0$*. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $x_0 \in [s - \delta, s + \delta]$*, la sucesión del método de Newton-Raphson converge a* s*. Además, si* f *es de clase* $C^3[a, b]$*, la convergencia es al menos cuadrática.*

Teorema de Convergencia GLOBAL para el Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a, b]$ *verificando*

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0$, *para* $x \in [a, b]$,
3. $f''(x)f''(y) \geq 0$, *para todo* $x, y \in [a, b]$,
4. $\max\left\{\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|}\right\} \leq b - a.$

Entonces existe un único $s \in [a, b]$ *tal que* $f(s) = 0$ *y, para todo* $x_0 \in [a, b]$*, la sucesión del método de Newton-Raphson converge a* s*. Además, si* $f \in C^3[a, b]$ *la convergencia es al menos cuadrática*

Demostración Por [1.], aplicando el Teoreme de Bolzeno, existe al menos una raíz s para $f(x)$; y por [2.], aplicando el Teorema de Rolle, la raíz s es única.

Asimismo, por [2.] y [3.], f' y f'' conserva su signo en [a,b].

Supongamos que $f'(x) > 0$ y $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$ (en el resto de los casos se razona análogamente).

Tomando $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ se tiene que $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f''(x))^2}$, y por ser $f(x)$ creciente, se verifica que $g(x)$ es decreciente en $[a, s]$ y creciente en $[s, a]$. Entonces

- si $x \in [a, s]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(a) = b$ por [4.], luego $g(x) \in [s, b]$;
- si $x \in [s, b]$, $s = g(s) \leq g(x) \leq g(b) = b$ po definición de g, luego $g(x) \in [s, b]$.

Por tanto, para todo $x_0 \in [a, b]$, la sucesión del método de Newton-Raphson $\{x_n\} \subset [s, b]$.

Además $x_{n+‘1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$, luego la sucexsión es estrictamente creciente y acotada. En consecuencia tiene límite, es decir, existe $s' \in [s, b]$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} = s'$.

Finalmente, tomando límite en $x_{n+1} = g(x_n)$, se llega a que $s' = g(s')$ y, por la unicidad del punto fijo s, concluimos que $s = s'$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = s$. $\square$

6.5 Aplicación del teorema de convergencia global

Problema: *Calcular la raíz positiva de c*

Se trata de hallar la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - c = 0$. Veamos si se verifican las cuatro condiciones del teorema de convergencia tomando $0 < a < b$ tales que $a^2 < c < b^2$

1. $f(a)f(b) = (a^2 - c)(b^2 - c) < 0$.
2. $f'(x) = 2x > 0$, para todo $x \in [a, b]$.
3. $f''(x) = 2 \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$.
4. $\dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|} = \dfrac{b^2 - c}{2b} \leq \dfrac{b^2 - a^2}{2b} = \dfrac{(b+a)(b-a)}{2b} \leq b - a$, luego se verifica esta hipótesis.

En conclusión, el método de Newton-Raphson aplicado a $f(x) = x^2 - c$ en un intervalo $0 < a < b$, con $a^2 < c < b^2$, converge a la raíz positiva de c.

7 Aceleración de la convergencia

7.1 Método de Aitken

Teorema de aceleración de Aitken

Sea $\{x_n\} \to s$ *al menos linealmente. Se define*

$$\widehat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

Entonces $\{\widehat{x}_n\} \to s$ *más rápidamente en el sentido*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\widehat{e}_n}{e_n} = 0,$$

siendo $\widehat{e}_n = \widehat{x}_n - s$ *y* $e_n = x_n - s$.

Demostración Supongamos que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = k_n$ con $\lim\limits_{n \to +\infty} k_n = \lambda$ y $|\lambda| < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\widehat{e}_n = \widehat{x}_n - s = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} - s = \\
&x_n - s - \frac{((x_{n+1} - s) - (x_n - s))^2}{(x_{n+2} - s) - 2(x_{n+1} - s) + (x_n - s)} = e_n - \frac{(e_{n+1} - e_n)^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} = \\
&e_n - \frac{e_n^2(k_n - 1)^2}{e_n(k_{n+1}k_n - 2k_n + 1)} = e_n \frac{k_n(k_{n+1} - k_n)}{k_{n+1}k_n - 2k_n + 1},
\end{aligned}$$

luego $\dfrac{\widehat{e}_n}{e_n} \to 0$. □

7.2 Método de Steffensen

Dado x_0, consideremos el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$. Sean x_1 y x_2 las dos primeras aproximaciones.

Definimos

$$x_0'' = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0},$$

Y, en general, para cada $n >= 0$, se define

$$\begin{aligned}
x_0^{(n+1)} &= x_n'' \\
x_1^{(n+1)} &= g(x_0^{(n+1)}), \\
x_2^{(n+1)} &= g(x_1^{(n+1)}), \\
x_{n+1}'' &= x_0^{(n+1)} - \frac{(x_1^{(n+1)} - x_0^{(n+1)})^2}{x_2^{(n+1)} - 2x_1^{(n+1)} + x_0^{(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Entonces $\{x_n''\} \to s$ más rápidamente que los anteriores métodos. El método así definido se denomina **método de Steffensen**.

Ejemplo La siguiente tabla muestra las sucesiones de aproximaciones obtenidas mediante el método de iteración funcional $x_{n+1} = g(x_n)$, el método de aceleración de Aitken y el de superaceleración de Steffensen.

En concreto se considera $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ y $x_0 = 0.5$ (que tiene convergencia lineal):

Normal	Aitken	Steffensen
0.5		
0.606530660		
0.545239212	0.567623876	0.567623876
0.579703095	0.567298989	
0.560064628	0.567193142	
0.571172149	0.567159364	0.567143314
0.564862947	0.567148453	
0.568438048	0.567144952	
0.566409453	0.567143825	0.567143290