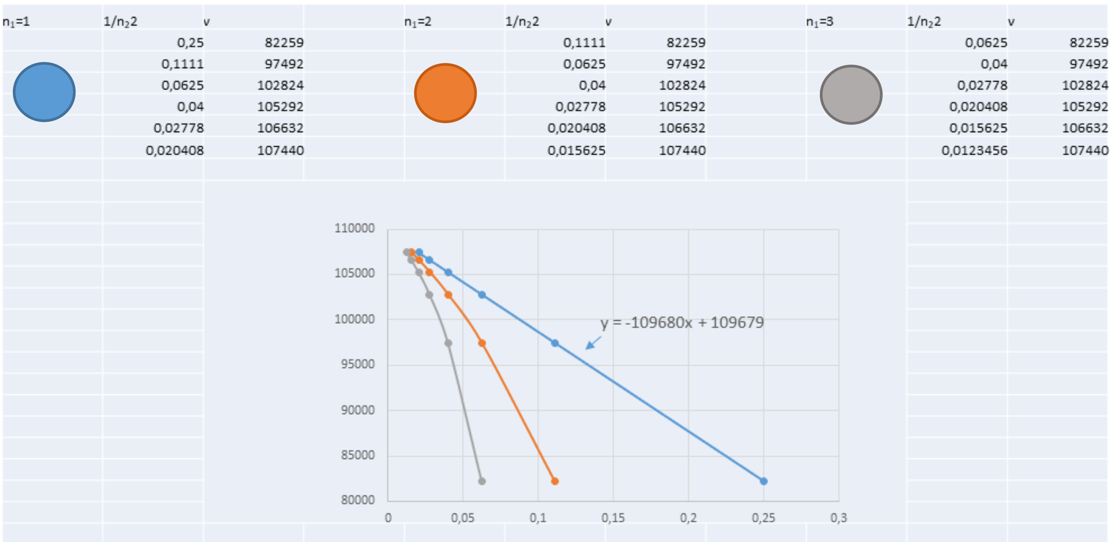
RELACIÓN 2 DE PROBLEMAS – TEMA 3 – La corteza

1. El espectro de emisión del hidrógeno posee líneas a los números de ondas siguientes correspondientes a la misma serie: 82259, 97492, 102824, 105292, 106632, 107440 cm^{-1}. Determina: a) la serie a la que pertenecen las líneas, b) la constante de Rydberg del hidrógeno, y c) el potencial de ionización del estado inferior.

a) El número de ondas de cada transición corresponde a una diferencia entre niveles de energía en el átomo donde el nivel inferior es común a todas las transiciones, y podemos abreviar como T_1 $(=\frac{-R_H}{n_1^2})$. Así, se tiene: $\bar{\upsilon} = T_1 - \frac{R_H}{n_2^2}$

Así, una representación de los números de ondas de las líneas de la serie frente a $\frac{1}{n_2^2}$ debe dar una línea recta de pendiente $-R_H$ y ordenada en el origen T_1. Como n_2 depende de n_1, hemos de trazar diferentes rectas a diferentes valores de n_1 para ver con cuál de estos valores hay una mejor correlación. De aquí se sigue que solo en el caso de n_1 = 1 los datos siguen una recta, lo que indica que las líneas corresponden a la **serie de Lyman**.



n_1=1	$1/n_2$2	v
	0,25	82259
	0,1111	97492
	0,0625	102824
	0,04	105292
	0,02778	106632
	0,020408	107440

n_1=2	$1/n_2$2	v
	0,1111	82259
	0,0625	97492
	0,04	102824
	0,02778	105292
	0,020408	106632
	0,015625	107440

n_1=3	$1/n_2$2	v
	0,0625	82259
	0,04	97492
	0,02778	102824
	0,020408	105292
	0,015625	106632
	0,0123456	107440

b) Técnicamente, R_H sale de la pendiente de la recta, resultando en 109680 cm^{-1}.

c) El potencial de ionización del nivel inferior corresponde a la energía del término T_1. Por tanto, $E = h\nu = hcT_1 = 6.62607 \times 10^{-34}$ J·s · 2.99792×10^{8} $m \cdot s^{-1}$ · $(-10968000$ $m^{-1})$ = -2.17873×10^{-18} J
Que en eV resulta ser: -2.17873×10^{-18} J · 6.242×10^{18} $eV \cdot J^{-1}$ = −13.6 eV

2. Se conoce que una serie de líneas espectrales provenientes de una estrella, con longitudes de onda de 516.85, 415.42, 366.16 y 337.53 nm, corresponden a transiciones hasta n_1 = 5 de un elemento de carácter hidrogenoide (un solo electrón en la corteza). Determina de qué elemento se trata.

La fórmula de Rydberg para un elemento hidrogenoide se puede escribir como:

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad con \;\; n_1 < n_2$$

Donde Z es el número atómico. Sabemos que R_H = 109677.6 cm^{-1}, y que n_1 = 5. Se trataría de despejar Z en función de n_2 e ir sustituyendo los números de onda correspondientes. Para ello, primero transformamos las longitudes de onda iniciales en número de ondas, obteniendo, respectivamente, los siguientes valores: 19348.0, 24072.0, 27310.5 y 29627.0 cm^{-1}. Ahora, despejamos Z, obteniendo:

$$Z = \sqrt{\frac{\bar{\upsilon}}{\frac{R_H}{25} - \frac{R_H}{n_2^2}}}$$

La primera línea es la de más baja energía, por lo que corresponde con el valor de n_2 más cercano a 5. Probamos primero con $n_2 = 6$ y $\bar{\upsilon} = 19348.0 \rightarrow Z = 3.8$. No es un número entero. Probamos ahora con $n_2 = 7$ y $\bar{\upsilon} = 19348.0 \rightarrow Z = 3.0$.

Por tanto, la primera línea corresponde a la transición desde $n_2 = 7$ hasta $n_1 = 5$ del átomo de litio (Z = 3). De forma análoga, el resto de líneas se ajustan a las transiciones 8 → 5, 9 → 5 y 10 → 5 para Z = 3. El elemento es, por tanto, el litio.

3. Determina: a) la longitud de onda asociada a un electrón que se mueve con una velocidad 50% de la que tiene la luz; b) Si toda su energía cinética se transformara súbitamente en un fotón ¿cuál sería la longitud de onda de ese fotón?; c) la longitud de onda asociada a un coche de 1000 Kg moviéndose a 120 Km/h.

a) Según la hipótesis de De Broglie, la longitud de onda de una partícula con impulso p se puede escribir como: $\lambda = \frac{h}{p}$, y dado que las partículas subatómicas se mueven a velocidades muy altas, se puede tener en cuenta para ellas el factor de Lorentz (corrección relativista para la masa). Así:

$$\lambda = \frac{6.62607 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}}{9.10938 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg} \cdot 0.5 \cdot 2.99792 \times 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{6.62607 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}}{1.57670 \times 10^{-22} \mathrm{Kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4.20249\ \times 10^{-12}\ m = 0.042\ \text{Å}$$

b) Su energía cinética será, por tanto: $E_c = \frac{1}{2} m_r v^2 = \frac{1}{2} p v$

$$E_c = 9.10938 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg} \cdot (0.5 \cdot 2.99792 \times 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2.36340 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}$$

Si toda esa energía se transformara en un fotón, tendría una frecuencia derivada de la siguiente igualdad:

$$E = h\upsilon$$

De donde, su longitud de onda sería:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.62607 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \cdot 2.99792 \times 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2.36340 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}} = 8.40502 \times 10^{-12}\ \mathrm{m} = 0.084\ \text{Å}$$

c) Como en el primer apartado, $\lambda = \frac{h}{p}$. En este caso, no es necesario realizar ninguna corrección relativista, por lo que:

$$\lambda = \frac{6.62607 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}}{10^{3}\ \mathrm{Kg} \cdot 3.33333 \times 10^{1} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.98782\ \times 10^{-38}\ m = 1.98782\ \times 10^{-28}\ \text{Å}$$

Es tan extraordinariamente pequeña que, macroscópicamente, no se observa ningún movimiento ondulatorio.

4. El espectro de emisión del sodio presenta una línea amarilla de longitud de onda igual a 588.9 nm. Determina: a) la diferencia de energía entre los dos estados energéticos del átomo de sodio entre los que se produce dicha transición; b) la energía necesaria para excitar entre esos dos estados a 23.0 mg de sodio (peso atómico = 23.0); c) si una radiación de 200.0 nm es capaz de ionizar al sodio, sabiendo que la primera energía de ionización del sodio es 495.8 kJ/mol.

a) Según el tercer postulado de Bohr:

$$\Delta\mathrm{E} = \mathrm{h}\nu = \frac{\mathrm{hc}}{\lambda} = \frac{6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\ \cdot\ 2.998\times10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{588.9\times10^{-9}\ \mathrm{m}} = 3.373\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

b) Primero determinamos la energía necesaria por gramo de sodio:

$$3.373\times10^{-19}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{átomo}}\cdot6.022\times10^{23}\frac{\acute{a}tomos}{mol}\cdot\frac{1}{23.0\ \frac{g}{mol}} = 8.83\times10^{3}\frac{J}{g}$$

$$\text{Para 23 mg: } 8.83\times10^{3}\frac{J}{g}\cdot23.0\times10^{-3}\ g = 203\ J$$

c) La energía de ionización por átomo de sodio será:

$$E_{at} = \frac{495.8\times10^{3}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}}{6.022\times10^{23}\ \frac{\acute{a}tomos}{mol}} = 8.233\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Mientras que la energía de la radiación de 300 nm según Planck es:

$$\mathrm{E} = \mathrm{h}\nu = \frac{\mathrm{hc}}{\lambda} = \frac{6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\ \cdot\ 2.998\times10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{200.0\times10^{-9}\ \mathrm{m}} = 9.932\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Como es superior a la energía de ionización, la respuesta sería sí.

5. Se acelera un electrón en reposo sometiéndolo a una diferencia de potencial de 1 V. Determina: a) su velocidad tras la aplicación de la diferencia de potencial. b) suponiendo que su masa se conoce con exactitud y que se conoce la velocidad con una precisión del 1% ¿Con qué precisión podremos determinar simultáneamente su posición? c) si se quiere estimar la posición del electrón con una precisión de 0.1 Å, ¿con qué precisión se podría saber el valor del impulso lineal? d) Compárese el resultado con el de una bala de cañón de 10 Kg de peso que se mueve a una velocidad de 200 m/s cuya posición se conoce con una precisión de 1 mm.

a) La energía cinética que adquiere una carga sometido a una diferencia de potencial es q · ΔV:

$$E_c = 1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{C}\cdot1\ \mathrm{V} = \frac{1}{2}\cdot9.1094\ \times\ 10^{-31}\ \mathrm{Kg}\ \cdot\ v^2$$

$$v = 5.9310\ \times10^{5}\ m/s$$

Con este valor de velocidad no es necesario tener en cuenta el factor de Lorentz para considerar una masa relativista para el electrón (puedes comprobarlo).

b) El principio de incertidumbre (o de indeterminación) de Heisenberg establece que:

$$\Delta p\cdot\Delta x \geq h/4\pi$$

Si la velocidad se conoce con una precisión de un 1%, significa que $\Delta v = 5.9310\times10^{3}$ m/s, de forma que $\Delta p = m\cdot\Delta v = 9.1094\times10^{-31}$ Kg $\cdot$ 5.9310×10^{3} m/s $= 5.4028\times10^{-27}$ Kg m s^{-1}.

Por tanto, $\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6.6261\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{4\pi\cdot5.4028\times10^{-27}\ \mathrm{Kg\ m\ s^{-1}}} = 9.7595\times10^{-9}\ m = 97.595\ \text{Å}$

Podríamos calcular simultáneamente su posición con una indeterminación cercana a los 100 Å. Dicho de otra forma: no es posible la determinación simultánea de la posición y la velocidad.

c) Si ahora Δx = 0.1 Å, entonces:

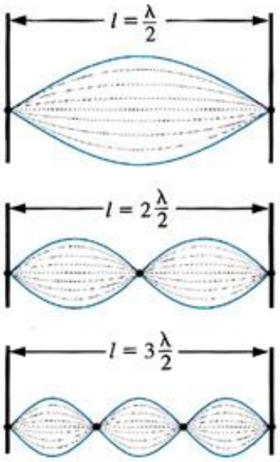
$$\Delta p = m\Delta v \rightarrow m\Delta v\Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \rightarrow \Delta v \geq \frac{h}{4\pi m\Delta x} = \frac{6.6261\ \times\ 10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}}{4\pi\ \cdot\ 9.10938\ \times\ 10^{-31}\ \mathrm{Kg}\ \cdot\ 10^{-11}\ \mathrm{m}} = 5.7884 \times 10^{5}\ m/s$$

La incertidumbre es del orden de su velocidad. Dicho de otra forma: no es posible la determinación simultánea de la posición y la velocidad.

d) Ahora, $\Delta v \geq \frac{h}{4\pi m\Delta x} = \frac{6.6261 \times 10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}}{4\pi \cdot 10\ \mathrm{Kg} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 5.2729 \times 10^{-33}\ Kg \cdot m/s$

Dicho de otra forma: puedo conocer su velocidad con total precisión.

6. En el modelo de la partícula en una caja (monodimensional de longitud L), ¿cuál sería la longitud de onda y la energía del tercer sobretono si la caja tiene una longitud de 1 Å?



En este modelo, se puede deducir fácilmente que $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ por lo que $\lambda = \frac{2L}{n}$. Dado que el tercer sobretono implica que n = 4, se tiene que:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 10^{-10}\ m}{4} = 0.5\ \text{Å} = 0.05\ nm = 50\ pm$$

Por otro lado:

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8m_eL^2} \rightarrow E_4 = \frac{16 \cdot (6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s})^2}{8 \cdot 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg} \cdot (1.00 \times 10^{-10}\ \mathrm{m})^2} = 9.65 \times 10^{-17}\ \mathrm{J}$$

7. En una primera aproximación, puede suponerse que un electrón en un orbital de tipo π, se comporta según el modelo de una partícula en una caja, cuya longitud L es la del enlace entre átomos conectados. Asumiendo que para la molécula de eteno (etileno, C_2H_4) la longitud del enlace es 1.34 Å, determina: a) la frecuencia de la radiación electromagnética necesaria para pasar un electrón π desde su estado fundamental (n = 1) hasta el primer estado excitado (n = 2); y b) la longitud de onda de dicho electrón en el primer estado excitado (n = 2).

a) De la solución de la ecuación de ondas (ecuación de Schrödinger) de la partícula en una caja, para el caso de un electrón, se sabe que:

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8m_eL^2}$$

De donde, la diferencia de energía entre diferentes niveles puede escribirse como:

$$E_{n_2} - E_{n_1} = \Delta E = (n_2^2 - n_1^2)\frac{h^2}{8m_eL^2}$$

En este caso, entonces: $\Delta E = \frac{3h^2}{8m_eL^2} = h\upsilon \rightarrow \upsilon = \frac{3h}{8m_eL^2} = \frac{3 \cdot 6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}}{8 \cdot 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg} \cdot (1.34 \times 10^{-10}\ \mathrm{m})^2} = 1.52 \times 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$

Lo que corresponde a radiación UV. Experimentalmente, la energía de esa transición tiene una longitud de onda de 165 nm = 1.65×10^{-7} m. Dado que $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$, entonces $\upsilon = \frac{3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{1.65 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 1.82 \times 10^{15}\ \mathrm{s^{-1}}$. Este resultado es bastante similar al que se obtiene de suponer que el electrón en un enlace π sigue el modelo de una partícula en una caja.

b) Del problema anterior, sabemos ya que, para n = 2, λ = L. Por tanto, la longitud de onda del electrón en el primer estado excitado (no confundir con la longitud de onda de la radiación necesaria para cambiar de nivel de energía, que sería el apartado a de este mismo problema), siguiendo el modelo de partícula en una caja monodimensional, será la misma que la longitud del enlace: 1.34 Å.