¿Cómo citar?: Montero. R (2013): *Variables no estacionarias y cointegración.* Documentos de Trabajo en Economía Aplicada. Universidad de Granada. España

Variables no estacionarias y cointegración

Roberto Montero Granados

Universidad de Granada
Marzo, 2013

RESUMEN.

La econometría de series temporales se encuentra con un problema al medir las relaciones entre aquellas variables que tienen una tendencia temporal. Este problema puede llegar a que se consideren significativas relaciones completamente espurias.

Cuando, en lugar de series estacionarias, se utilizan datos de panel el problema también puede surgir.

Las variables que tienen una tendencia temporal definida se denominan "no estacionarias". Las estimaciones de regresiones con variables no estacionarias son espurias salvo que estas estén cointegradas. Dos variables no estacionarias cointegradas son aquellas cuyos residuos son estacionarios. Si los residuos son estacionarios las estimaciones de variables no estacionarias son superconsistentes.

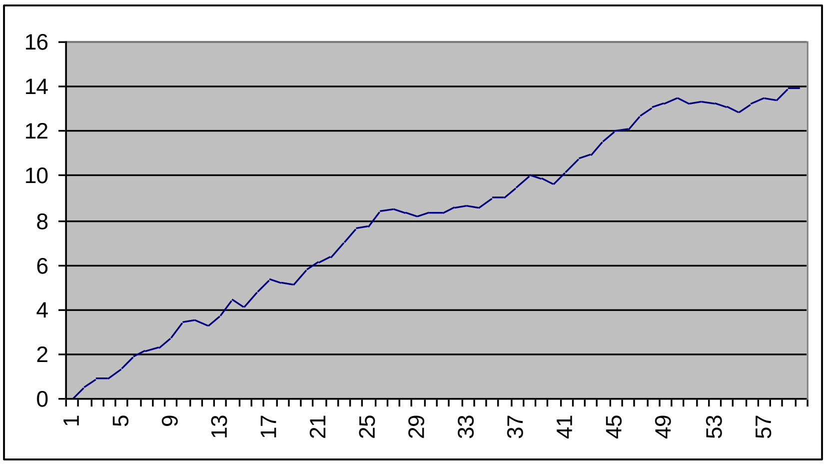
INTRODUCCIÓN A LAS SERIES NO ESTACIONARIAS

Una serie es estacionaria cuando su valor medio es estable. Por el contrario es no estacionaria cuando sistemáticamente crece o disminuye en el tiempo.

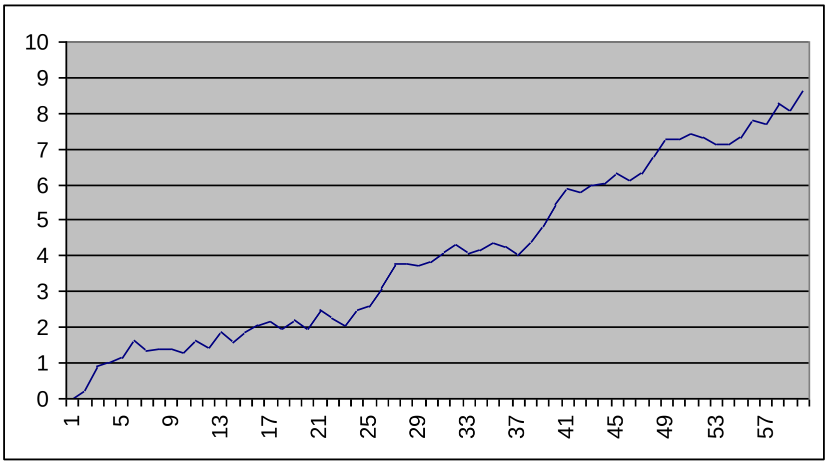
Intuitivamente podemos entender que las relaciones entre variables no estacionarias pueden estar sesgadas y, sin embargo, tener errores estándar muy bajos y ajuste (R^2) muy altos. Por ejemplo el número de libros editados en España ha crecido en los últimos 20 años y la estatura media también. Una regresión de una sobre otra es posible que arroje resultados significativos y un buen ajuste, sin embargo la relación entre ambas no es directa, en este caso estaríamos ante lo que se denomina una regresión espuria (Granger Newbold, 1974). En otras ocasiones podemos no conocer si dos variables no estacionarias tienes relación la una sobre la otra (Por ejemplo salud y descentralización) o que, teniendo alguna relación, en qué grado la relación entre ambas es correcta o espuria (por ejemplo crecimiento económico y crecimiento de la cantidad de dinero).

Ejemplos de funciones que son no estacionarias son:

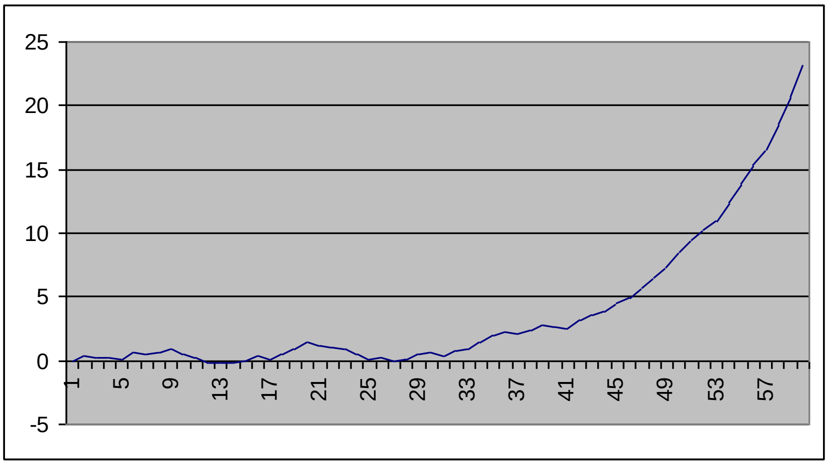
$y_t = y_{t-1} + u_t$ donde: $u_t \sim N(a,s^2)$. Este es un ejemplo de paseo aleatorio.



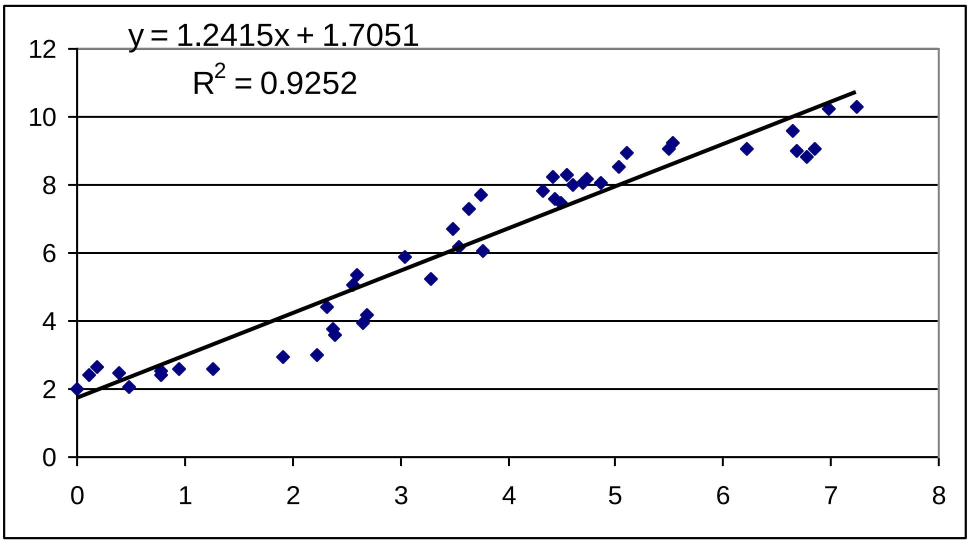
$y_t = a_o + y_{t-1} + u_t$ donde: $u_t \sim N(0,s^2)$; a_o es la que recoge la tasa de crecimiento medio.



$y_t = a_o \cdot y_{t-1} + u_t$ donde: $u_t \sim N(0,s^2)$;



Por ejemplo el siguiente gráfico muestra la representación gráfica de la relación entre dos paseos aleatorios



Tanto la variable *x* como *y* se han generado aleatoriamente con una perturbación N(0.2, 0.08), pero aparentemente tienen un alto grado de correlación que, sin embargo, es completamente espuria.

Algunas propuestas iniciales para solucionar este problema (Granger,Newbold 1977) fueron: ser más exigente con las *t* para la significación de las estimaciones o convertir las series en estacionarias mediante ajustes tendenciales, mediante ajustes con los residuos, vectores autoregresivos, etc. Sin embargo la primera solución es absurda (ya que las *t* crecen con las observaciones de la muestra) y la segunda es insatisfactoria porque puede ser arbitraria y hace perder información de las variables. Por ello los mayores esfuerzos posteriores se han dedicado a intentar determinar los límites dentro de los cuales una regresión es correcta o espuria.

Se dice de una serie temporal x_t que es estacionaria si

$E(x_t) = cte \quad \forall\, t$
$Var\,(x_t) = cte \quad \forall\, t$
$Cov\,(x_t\, x_{t-k}) = cte \quad \forall\, t \;\forall\, k$

PROCEDIMIENTO DE ESTIMACIÓN ANTE SERIES TEMPORALES ESTACIONARIAS

El algoritmo de estimación es:

a) si las series son estacionarias
Se estima por los procedimientos habituales (MCO o GLM)

b) si las series son no estacionarias de orden distinto:
Formalmente se dice que la serie temporal y_t tiene raíz de orden *d* ($y_t \sim I(d)$) cuando y_t se transforma en una serie estacionaria al ser diferenciada *d* veces. Es decir si no existe relación entre el incremento de cada valor y el inmediato anterior la serie es estacionaria (I(0)), si existe dicha relación y esta es proporcional a lo largo de la

serie se dice que la serie tiene raíz unitaria (I(1)). Si la relación no es constante a lo largo de la serie la raíz será de orden 2, 3 o más.

Si las series son no estacionarias de orden distinto entre sí, **NO puede estimarse la relación** entre ambas.

c) si las series son no estacionarias del mismo orden pero no están cointegradas.

NO puede estimarse la relación entre ambas porque la regresión es espuria. Se puede intentar estacionalizar las series (mediante alguna operación, logaritmos o diferencias o ratios con otras variables) o hacer una regresión por primeras diferencias (el resultado nos indicará si la correlación existe o no.

d) si las series son no estacionarias pero están cointegradas

Se puede pasar la regresión habitual (MCO GLM) para estimar los efectos a largo plazo y el modelo de corrección de errores para estimar los efectos a corto plazo.

El método de Engle y Granger tiene tres fases: a) estimación de la estacionariedad de las series; b) pruebas de cointegración y c) método de corrección de errores.

I) Pruebas de estacionariedad

a) visual (wntestb *var* y ac *var*)

Observar, en gráficas si la variable crece/decrece monótonamente, si los shocks son persistentes o por el contrario no se puede establecer un patrón de comportamiento definitivo. Visualizar el correlograma, el periodograma, etc. Estas pruebas no formales no son definitivas.

El correlograma es una representación de la función de autocorrelación

$$\rho_k = \frac{cov(x_t, x_{t+k})}{\sqrt{var(x_t) var(x_{t+k})}}; \forall k = 1, \ldots m$$

Un correlograma que desciende lentamente es típico de variables no estacionarias. Un correlograma que desciende rápidamente o cuasialeatorio es típico de variables estacionarias.

b) Dickey-Fuller (Dickey-Fuller, 1979, 1984; Said-Dickey 1984)

Todos los test anteriores tienen el problema de que pueden confundir una verdadera serie no estacionaria con una serie estacionaria con una tendencia temporal. El test de Dickey Fuller puede discriminar entre ambos efectos

La prueba Dickey-Fuller aumentada (dfuller *var*) es un test exigente. Tiene la ventaja de que la hipótesis nula no es si la serie es o no ruido blanco, sino si tiene una raíz unitaria.

por lo que el test puede realizarse en tres versiones sin intercepto ni tendencia o con alguna de las dos. PERO ES ACONSEJABLE HACERLO SIEMPRE UTILIZANDO LA TENDENCIA, PARA CORREGIR ESTE EFECTO SI EXISTE.

$$dx_t = r\, x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} b\, dx_{t-i} + u_t$$

$$dx_t = a_o + r\, x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} b\, dx_{t-i} + u_t$$

$$dx_t = a_o + r\, x_{t-1} + a_1 t + \sum_{i=1}^{p} b\, dx_{t-i} + u_t$$

donde $dx_t = x_t - x_{t-1}$, y, en los tres casos, pasamos el test H_o: $r = 0$ contra H_1: $r \neq 0$. Si no puede rechazarse la nula (p-valor > 0.05) la serie es no estacionaria y tiene raíz 1 (I(1)) si se rechaza la nula (p-valor<0.05) la serie es estacionaria y tiene una raíz 0 (I(0)). Es importante notar que el estadístico de contraste para la *r* no son la *t* usual sino que Dickey-Fuller (1979) y MacKinnon (1994) mediante simulaciones de Montecarlo, construyeron unas tablas especiales en las que la *t* es superior.

El término $\sum_{i=1}^{p} b\, dx_{t-i}$ (que es la única diferencia respecto a la Dickey-Fuller normal) se incluye para recoger y corregir la autocorrelación serial de los errores. Un problema es ahora el de determinar el número de retardos (p) apropiados. Según Verbeek, si es demasiado grande o demasiado pequeño puede provocar que series no estacionarias aparezcan como estacionarias. Normalmente probar incluyendo con 4-7 retardos es suficiente. Phillips-Perron recomiendan $p = \left| 4 \cdot \left(\frac{N}{100}\right)^{2/9} \right|$, que arroja una cifra entre 3 y 6 cuando N oscila entre 30 y 1000 observaciones.

Otra alternativa es el tests t de Dickey–Fuller modificado (conocido como test DF-GLS) propuesto por Elliott, Rothenberg, and Stock (1996). (dfgls *var* en Stata que dice que es más fuerte que el anterior) que incluye automáticamente una tendencia y tiene la especificación:

$$dx_t = a_o + r\, x_{t-1} + a_1 t + \sum_{i=1}^{p} b\, dx_{t-i} + u_t$$

Sus resultados son similares al Dickey-Fuller aumentado con tendencia. Aunque no son exactamente iguales. El output de Stata de este test incluye los resultados con distintos retardos (normalmente desde 0 a 10-12)

b) Otros test interesantes son B de Bartlett (wntestb *var*), Q de Pormateau (wntestq *var*; también conocido como test Ljung-Box)y Z de Phillips-Perron (pperron *var*)

La especificación de los dos primeros es:

$$B = \max_{1 \le k \le q} \sqrt{\frac{n}{2}} \left| \hat{F}_k - \frac{k}{q} \right|$$

donde F_k es función del periodograma acumulado de la serie definido en términos de la función de densidad espectral y:

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \right) \sim \chi_m^2$$

En ambos casos las hipótesis del test son:

H_o: (p-valor >0.05) la serie es White noise = estacionaria
H_1: (p-valor < 0.05) La serie es Random walk = no estacionaria.

El tercero (Phillips y Perron, 1988) calcula dos parámetros Z_p y Z_τ, que son:

$$Z_\rho = n(\hat{\rho}_n - 1) - \frac{1}{2} \frac{n^2 \hat{\sigma}^2}{s_n^2} \left(\hat{\lambda}_n^2 - \hat{\gamma}_{0,n} \right)$$

$$Z_\tau = \sqrt{\frac{\hat{\gamma}_{0,n}}{\hat{\lambda}_n^2}} \frac{\hat{\rho}_n - 1}{\hat{\sigma}^2} - \frac{1}{2} \left(\hat{\lambda}_n^2 - \hat{\gamma}_{0,n} \right) \frac{1}{\hat{\lambda}_n} \frac{n\hat{\sigma}}{s_n}$$

Sus valores críticos y la significación se basan en la misma t modificada del test Dickey-Fuller. Este test tiene dos ventajas sobre los anteriores:

a) H_o consiste en que las serie es integrada de orden 1. Es decir con un p valor < 0.05 se rechaza la nula, lo que indica que la serie no es I(1)

b) También se pueden introducir rezagos (lags) en el test.

Serie estacionaria, ruido blanco (withe noise) y raiz nula (I(0)) y por otra parte serie no estacionaria, camino aleatorio (ramdom walk) y raíz unitaria (I(1)) no son exactamente sinónimos entre sí, pero se suelen utilizar en la literatura como tales.

Todos los test descritos son ineficientes en el caso de cambio estructural (Perron, 1989). Es decir una serie estacionaria con cambio estructural puede aparecer como no estacionaria y viceversa.

II) Pruebas de Cointegración

Supongamos que dos variables temporales x_t e y_t son estacionarias de orden 1 (es decir son *I(1)*) (si son estacionarias en otros ordenes (*I(2)*, *I(3)*...) o en dos órdenes distintos el problema se complica). Se dice que dichas variables están cointegradas cuando puede practicarse una regresión lineal o no lineal del siguiente tenor:

$$y_t = a + bx_t + u_t$$

que generalmente tendrá un buen ajuste. Pero donde debe suceder que los residuos, es decir $u_t = - a + y_t + bx_t$ sea *I(0)*. Es decir, requisitos para definir la cointegración son:

a) que dos variables sean estacionarias de orden 1
b) que exista una combinación lineal de ambas que sea estacionaria de orden 0

Cuando ambas condiciones se cumplen se dice que las variables están cointegradas. Cointegración significa que existe una relación, a largo plazo, entre las variables. En definitiva, si x_t e y_t están cointegradas significa que, aunque crezcan en el tiempo *(t),* lo hacen de una forma completamente acompasada, de forma que el error entre ambas no crece. Es decir, si en la regresión,

$$y = a + bx + u$$

$\hat{u}$ es estacionaria (I(0)) entonces $\hat{b}$ no sólo es consistente sino superconsistente (es decir la estimación converge a su valor real de forma inversamente proporcional al número de observaciones, en lugar de la raíz cuadrada del número de observaciones que es el caso de las variables estacionarias (Engle, Granger, 1987)). En definitiva probar la cointegración entre dos variables I(1) es igual que probar la estacionariedad de los recursos.

Para testar la cointegración sólo hay que estimar los residuos del modelo de regresión y pasar la prueba de Dickey-Fuller aumentada (dfuller *var*) a los residuos estimados ($\hat{u}$). Si se cumple la H_o entonces x_t e y_t están cointegradas y $\hat{b}$ es **superconsistente**.

III) Modelo de corrección de errores.

Como una extensión del modelo, si las variables están cointegradas se pueden utilizar los residuos para corregir los errores y estimar también los efectos a corto plazo de *depvar* sobre *indepvar*. El modelo a estimar se denomina de corrección de errores y su especificación es:

$$y_t - y_{t-1} = \beta\,(x_t - x_{t-1}) + \gamma\,(y_{t-1} - a - b\,x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Donde $\gamma\ (y_{t-1} - a - b\ x_{t-1}) = \gamma\ (u_{t-1})$ es el mecanismo de corrección en que forzosamente $\gamma<0$, $\hat{b}$ es la influencia, a largo plazo de x sobre y, y $\hat{\beta}$ es la estimación de la influencia, a corto plazo de x sobre y. El modelo también suele escribirse:

$$\Delta y_t = \beta\,(\Delta x_t) + \gamma\,(u_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Bibliografía

Dickey, DA. Fuller, WA. (1979): “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427–431.

Elliott, G., T. J. Rothenberg, and J. H. Stock. (1996): “Efficient tests for an autoregressive unit root”. *Econometrica* 64, pp. 813–836.

Engle, R. Granger, W. (1987): “Cointegration and error correction representation, estimation and testing”. Econometrica # 55. Págs 251-276.

Granger ,C. Newbold, P. (1974): “Spurious regressions in econometrics”. Journal of econometrics # 2. Págs 111-120.

Granger, C. Newbold. P.(1977): "Identification of two-way causal models," *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol III. pp. 337-360

MacKinnon, JG. (1994): “Aproximate asympotic distribution functions for unit-root and cointegration test”. *journal of Bussines and Economics Statistics*. vol 12. pp. 167-176.

Perron, P. (1990): "Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean," *Journal of Business & Economic Statistics, American Statistical Association*, vol. 8(2), pp. 153-162.

Phillips PCB y Perron P (1988): “Testing for a unit root in times series regresion”. *Biometrika*, 75, 335-346.

Said, E. Dickey, DA. (1984): "Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order", *Biometrika*, 71, pp. 599–607.