

El Modelo de Rasch aplicado a la medición multidimensional de la pobreza en España: bienaventurados los que tienen tele, aunque no coman carne.

Nuria Badenes Plá
Universidad Complutense y Fundación Acción Familiar
nbadenpla@ccee.ucm.es

ABSTRACT

La consideración de la pobreza como fenómeno que se manifiesta no exclusivamente a través de una sola dimensión -como la carencia de renta- ha sido asumida en la literatura como forma habitual de aproximación a su medición. Entre los distintos enfoques usados en la medición de la pobreza manifestada en dimensiones diversas, se puede utilizar el Modelo de Rasch. El presente trabajo corrobora que los datos de los hogares españoles de la Encuesta de Condiciones de Vida de 2004 permiten un ajuste a este modelo. Se ofrecen estimaciones de los parámetros de severidad y posición para una selección de seis ítems que incluyen privación de bienes materiales (televisión, lavadora, teléfono e inodoro), imposibilidad de adquirir alimentos básicos para una dieta equilibrada, o incapacidad del hogar para hacer frente a imprevistos.

Clasificación JEL: I32, C01

Palabras clave: Medición de la pobreza, Modelo de Rasch

1. Introducción.

La Literatura referente al estudio de la pobreza ha evolucionado enormemente en los últimos años para incorporar las distintas corrientes ideológicas que señalan que el desarrollo y la pobreza no se deben exclusivamente a un factor. Ni siquiera desdoblado factores económicos se es capaz de abarcar la multidimensionalidad del fenómeno: son además necesarias consideraciones sociales, culturales, incluso de libertad. Al tiempo que se define la pobreza como un problema generado por múltiples factores procedentes de múltiples campos, es necesario contar con metodologías que sean capaces de medir este concepto cada vez más complejo. La medición de la pobreza se ha nutrido de métodos que previamente se habían aplicado a otros campos para ser capaz de abarcar la multidimensionalidad mencionada y se han adaptado de manera exitosa. Ejemplos de aplicaciones empíricas para medir la pobreza en términos multidimensionales se hallan en Kakwani y Silber (2007) utilizando diferentes metodologías: Teoría de la Información, Conjuntos Difusos, Modelo de Rasch, Análisis Factorial y Cluster, Análisis de Correspondencias Múltiples, Modelos MIMIC (Modelos de causas e indicadores múltiples), Análisis de Frontera (DEA y FDH), Modelos econométricos de variable latente.

De todas estas técnicas que aunque no son nuevas en Economía si es novedosa su aplicación a la medición de la pobreza, se ha escogido el Modelo de Rasch para realizar un ejercicio de medición con datos españoles de la Encuesta de Condiciones de Vida.

El trabajo se organiza como sigue: tras esta introducción, el segundo apartado describe el modelo de Rasch y la interpretación de sus supuestos. El tercer apartado explica en qué términos debe adaptarse al interpretación del modelo cuando se aplica a la medición de la pobreza. En el cuarto apartado se presentan los resultados, y el quinto las conclusiones.

2. El modelo de Rasch.

El modelo de Rasch se utiliza para medir un fenómeno latente, no observable directamente, a partir de una serie de puntuaciones obtenidas para distintos ítems por diferentes individuos. Se aplicó por primera vez para la medición de la inteligencia de los soldados daneses y ha sido utilizado de manera muy extensa en Psicometría, para medir inteligencia, capacidades y rasgos personales no observables directamente (lo que se considera variable latente), a partir de las respuestas de los individuos ante distintas preguntas formuladas en un test (ítems). El modelo se ha utilizado para medir resultados educativos (Masters and Keeves (1999)) y otros fenómenos en ámbito económico. Por citar algunos ejemplos, ha sido aplicado a la medición de la calidad de los servicios educativos en el nivel universitario (Salini *et al* (2003)) la calidad de los servicios turísticos (Santos (1999)), la calidad recaudatoria de impuestos en distintas ubicaciones (Álvarez *et al* (1997)), la calidad de los clientes que solicitan créditos en el sistema bancario (Masters, (1982)), y también a la medición de la pobreza (Fusco y Dickes, (2007)). Esta última aplicación es la que se desarrolla en este artículo.

El modelo de Rasch es un modelo en el sentido literal de la palabra, ya que representa el ideal con el que se debería contar para que los datos midan bien el fenómeno que queremos caracterizar. Por ello, no trataremos simplemente de comprobar si los datos con los que contamos se ajustan al modelo, sino de buscar cuáles son los datos que se ajustan al mismo. Los datos con los que se cuenta para explicar el fenómeno latente son

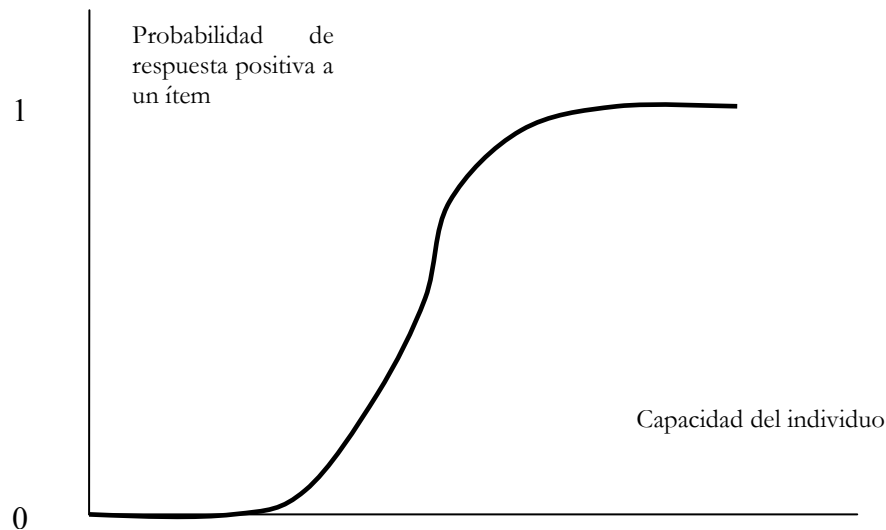
dicotómicos, como por ejemplo, las respuestas a una pregunta pueden ser acertadas o erróneas (1 ó 0), pero realmente se pretende caracterizar un fenómeno que presenta diferentes intensidades (mayor o menor inteligencia). La probabilidad de que un individuo responda correctamente a una pregunta en particular depende no solo de su inteligencia, también de lo difícil que sea la pregunta. Por ello, hay dos parámetros que intervienen en la explicación del fenómeno latente: parámetro de habilidad (de cada individuo) y parámetro de dificultad (de cada ítem o pregunta).

En términos matemáticos, la caracterización del fenómeno latente vendrá determinada por las respuestas que los distintos individuos (n) aportan a los distintos ítems (i), y la probabilidad de un resultado positivo ($x_{ni}=1$) (por ejemplo, una respuesta correcta) viene dada por:

$$P[x_{ni} = 1] = \frac{e^{\beta_n - \delta_i}}{1 + e^{\beta_n - \delta_i}} \quad [1]$$

En la expresión [1], el parámetro de habilidad de cada individuo se representa por β_n y el parámetro de dificultad de cada ítem, por α_i . El modelo de Rasch es un caso particular de los llamados “Modelos de Respuesta o Estructura Latente”, que asumen que cuando un ítem mide determinada habilidad o fenómeno, las respuestas a dicho ítem deben presentar una Curva Característica de Respuesta (En la literatura se conoce como ICC, Item Characteristic Curve). Su forma habitual se representa a continuación en el Gráfico 1, donde en el eje de ordenadas se muestra la probabilidad de obtener un valor positivo en la repuesta a un ítem de terminado, y en abscisas, la capacidad de individuo.

Gráfico 1. Forma de la Curva Característica de Respuesta a un ítem



Estas ICC pueden describirse conforme a tres parámetros, -como se presenta en Traub y Lam, (1985)- que son discriminación, dificultad y mínimo valor.

La discriminación viene representada por la pendiente de la curva, e indica la tasa de cambio en la probabilidad de éxito a medida que aumenta la puntuación en el atributo latente (o dicho en otros términos, el cambio en la probabilidad de dar una respuesta correcta a medida que se incrementa el elemento latente, por ejemplo la inteligencia).

La dificultad es el punto en la escala latente en el cual la curva indica que el 50% de los individuos dan una respuesta correcta al ítem. En el caso de valores dicotómicos la situación de un ítem en la escala corresponde con la situación en la que los individuos presentan una probabilidad de éxito de 0.5. Normalmente, lo que ocurrirá es que la probabilidad de responder correctamente una pregunta que presenta dificultad inferior a la situación de una persona, es mayor de 0.5, y al contrario, responder una pregunta de mayor dificultad que su posición como individuo presentará una probabilidad inferior al 0.5. Cuando las respuestas de un individuo se ordenan conforme a su dificultad, se espera un patrón tipo Guttman, lo que significa que si se ha contestado correctamente a una pregunta determinada, se habrá contestado también correctamente a todas las anteriores (ya que están ordenadas por orden de dificultad, y so por tanto, más sencillas).

El mínimo valor de la curva marca el acierto por adivinación -cuando hablamos en términos de respuestas a un conjunto de preguntas- y ocurre cuando se obtiene una respuesta correcta por mera casualidad, incluso en ausencia de inteligencia.

Los modelos de respuesta al ítem entre los que se encuentra el modelo de Rasch surgen para paliar una serie de deficiencias que surgen en los modelos de la Teoría clásica del Test, y que pueden resumirse en el hecho de que estos modelos suponen que todas las diferencias en respuestas de los individuos a un test son debidas exclusivamente a la capacidad de los individuos, considerándose constantes todas las demás fuentes potenciales de variación en las respuestas (incluyendo la dificultad). Además, los modelos clásicos presentan problemas en cuanto a la fiabilidad de los tests, y giran en torno al test en su conjunto, en lugar de considerar separadamente cada uno de los ítems que lo forma. El modelo de Rasch, al igual que otros modelos enmarcados en la Teoría de Respuesta al Ítem parten de una serie de hipótesis referentes a los datos que se utilizan en la medición del fenómeno latente: monotonidad, independencia local y unidimensionalidad.

La monotonidad en el fenómeno latente establece que la probabilidad de dar respuesta correcta a un ítem es una función no decreciente del fenómeno latente. O lo que es lo mismo, cuanto más elevada es la posición de un individuo en el fenómeno latente (por ejemplo, más inteligente) mayor es la probabilidad de responder correctamente a los ítems.

La independencia local quiere decir que dada la capacidad de un individuo, la probabilidad de dar respuesta a un ítem determinado es independiente localmente de los demás ítems utilizados. Estadísticamente esto significa que la probabilidad de respuesta positiva de un individuo a un conjunto de ítems es igual al producto de las probabilidades marginales de que responda positivamente a cada uno de ellos. Por tanto, la relación estadística entre los ítems desaparece si se fija un valor determinado de capacidad latente (o se logra independencia local)

La unidimensionalidad establece que existe un factor único que explica las respuestas de los individuos a los ítems, una única dimensión o variable latente que se pretende

cuantificar a partir de las respuestas a los ítems. En el mundo real, es realmente complicado que solamente un factor sea el causante de las respuestas, por lo que se pueden dar también modelos multidimensionales, en los que son necesarias varias dimensiones para explicar las respuestas de los individuos.

Estas dos últimas características están relacionadas ya que si se fija un valor latente determinado y los ítems a parecen relacionados, será porque cuentan con varias dimensiones latentes en común. Así, cuando se dé independencia local, se cumplirá unidimensionalidad. Sin embargo, puede ocurrir que el modelo sea multidimensional y aún así se cumpla independencia local.

Cuando se cumplen las tres hipótesis que acabamos de explicar, el modelo de Rasch presenta otras dos características, denominadas “Suficiencia de la puntuación en el fenómeno latente” y “Objetividad específica”. Véase Fusco y Dickes (2007).

Para entender qué quiere decir suficiencia de la puntuación es necesario calcular previamente la puntuación. Esta se define como la suma de todos los valores (coincidente con todos los valores igual a 1 en las respuestas, ya que las posibles respuestas son ceros o unos) para todos los ítems considerados. En un test de preguntas la puntuación sería el número de respuestas acertadas en total. Si se cumplen las tres hipótesis anteriormente mencionadas sucede que hay suficiencia de la puntuación, es decir, esta puntuación contiene toda la información estadísticamente relevante para estimar el parámetro de habilidad de un individuo, dados unos parámetros sobre el ítem. La objetividad específica significa por un lado, que la comparación entre personas no se altera si se utilizan diferentes ítems, y por otro lado, que el uso de otras personas no altera la estructura de ítems que se ha obtenido. Esto quiere decir que con el modelo de Rasch se logra una medida objetiva del fenómeno de estudio, independiente de la herramienta que lo mide, y superando así las dificultades apuntadas para los modelos de la Teoría Clásica del Test.

3. La medición de la pobreza multidimensional y el modelo de Rasch.

La aplicación empírica del modelo de Rasch a la medición de la pobreza como fenómeno multidimensional podría parecer contradictoria, dado que se acaba de presentar la unidimensionalidad como una de las hipótesis del modelo, sin embargo, no es así. Cada vez más la literatura referente a la medición de la pobreza pone de manifiesto que se trata de un fenómeno multidimensional, y que no puede caracterizarse exclusivamente como una carencia de renta por debajo de determinada línea de pobreza. Esta idea ha cuajado también entre los organismos encargados de denunciar la pobreza y hacerle frente, como muestra la declaración de los Objetivos de Desarrollo de Milenio de las Naciones Unidas. La consideración multidimensional de la pobreza en términos de que existe más de una dimensión cuando se mide algo más que la pobreza monetaria (Towsend, 1979) y la visión multidimensional de Dickes (1989) están en cierto modo relacionadas. Dickes considera que la pobreza es un continuo en el que se pueden categorizar individuos u hogares de acuerdo con la privación que sufren en distintos aspectos de la vida no necesariamente monetarios como salud, educación, condiciones de la vivienda que constituirían diferentes ítems. Estos ítems referidos a privación pueden referirse a un solo dominio, en cuyo caso la pobreza se considera un fenómeno unidimensional, (que se manifiesta en diferentes ítems de privación). Cuando no hay un solo dominio explicado por los diferentes ítems, nos encontramos ante una pobreza multidimensional, también

manifestada en diferentes ítems, pero que pueden agruparse en dimensiones homogéneas.

Una vez que se han presentado las características del modelo de Rasch, se matizarán algunas interpretaciones cuando se aplica a la medición de la pobreza. Cuando el modelo de Rasch se aplica en el campo de la Psicometría, se pretende medir la capacidad de los individuos a través de diferentes preguntas. Esta capacidad representa un fenómeno “positivo” sea inteligencia o cualquier otra habilidad de los individuos. Es por ello que el parámetro referido a los individuos se denomina de “habilidad”. Cuando lo que se mide es la pobreza, los ítems son distintas privaciones a las que se ve sometido el hogar o el individuo, y cuanto mayor es la puntuación obtenida en los ítems, más privado está el hogar, y por tanto mayor pobreza latente subyace. En aras de otorgar una interpretación correcta al parámetro referido a los individuos (u hogares), éste se denomina de “severidad” cuando el fenómeno latente es la pobreza. Nótese que este cambio de fenómeno no implica que la monotonidad se incumpla: al igual que mayor acumulación de respuestas correctas denota mayor inteligencia, mayor acumulación de privaciones denota más pobreza.

En cuanto al parámetro de dificultad, la terminología puede mantenerse (si bien se puede encontrar referencias a este término en medición de la pobreza como parámetro de posición), pero la interpretación con respecto a la medición de otros fenómenos psicométricos es la inversa. Cuando se mide la inteligencia a partir de las respuestas dadas a las diferentes preguntas, aquéllos que logran dar respuesta correcta a los ítems más difíciles, son los más inteligentes. Cuanto más difícil es el ítem, responder positivamente indica mayor valor del fenómeno latente.

En cambio, cuando lo que se mide es la pobreza, aquellos que responden positivamente cuando se les pregunta si están privados de un ítem muy difícil (por ejemplo ir de vacaciones a las Bahamas) no demuestran con ello ser lo más pobres. Es la respuesta positiva a la privación de los ítems más fáciles, aquellos que representan necesidades básicas como alimento o refugio, los que denotan una pobreza mayor. En este caso, cuanto más fácil es el ítem, responder positivamente indica mayor valor del fenómeno latente.

4. Aplicación a los datos de la ECV 2004.

Los datos utilizados en este trabajo proceden de la Encuesta de Condiciones de Vida del año 2004. Esta encuesta sustituye al antiguo Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE) y contiene información detallada que permite, según la propia declaración del INE *“el estudio de la pobreza y desigualdad, el seguimiento de la cohesión social (...) el estudio de las necesidades de la población y del impacto de las políticas sociales y económicas sobre los hogares y las personas (...)”*.

Para el análisis multidimensional de la pobreza en España mediante el modelo de Rasch, nos centramos en la información de los hogares (en lugar de las personas que los componen) y extraemos información a partir de una serie de variables que denotan la privación del hogar. Las variables escogidas para caracterizar la medición de la pobreza son de carácter variado, e incluyen tanto privación referida a determinados electrodomésticos (automóvil, lavadora, televisión, ordenador) como otro tipo de necesidades más perentorias (posibilidad de comer carne o pescado cada semana o contar con agua caliente en el hogar). Se han considerado además las condiciones del hogar (si cuenta con humedades, podredumbres, o goteras). También se han incluidos dos variables que hacen referencia a dificultades económicas en el hogar, en particular si se

cuenta con capacidad para afrontar imprevistos en el hogar y la dificultad para llegar a fin de mes autodeclarada. De todas las variables consideradas a priori, solamente seis resultan relevante para el análisis del modelo de Rasch, y su contenido se explica en la Tabla 1.

Tabla 1. Contenido de las variables (ítems) utilizadas en el análisis

Variable	Porcentaje de hogares privados
Ítem1: Televisión	0.35819
Ítem2: Lavadora	0.55357
Ítem3: Inodoro	0.56128
Ítem4: Teléfono	1.17226
Ítem5: Carne/pescado cada 2 días	2.55441
Ítem6: Imprevistos	38.97064

Nota: la ECV cuenta con información de 15.355 hogares en 2004.

Por conveniencias metodológicas, las variables están codificadas de manera que un valor unitario implica privación, y nulo, ausencia de privación. Según se deriva de los datos de la Tabla 1, un 0,36% de los hogares no puede adquirir una televisión (no consideramos aquellos hogares que no la tienen por decisión propia). Existe un 0,55% de hogares que no cuentan con lavadora, un 0,56% de hogares sin inodoro con agua corriente en el interior del hogar y para su uso exclusivo. La carencia de teléfono se presenta en un 1,17% de los hogares. Un 2,55% de los hogares no se pueden permitir comer carne o pescado cada dos días (o el equivalente vegetariano), y por último, hay un 38,97% de hogares que no es capaz de hacer frente a gastos imprevistos.

Es interesante conocer cuál es la distribución de puntuaciones para los hogares de la muestra respecto a los seis ítems objeto de análisis. Un 60,29% (9.195 hogares) no sufre privación alguna, un 36,01% (5.492 hogares) presenta privación en un ítem. Son 473 los hogares privados en 2 ítems, lo que representa el 3,10%, hay 72 hogares privados de 3 ítems (0,47%), 14 hogares se ven privados de 4 ítems (0,09) y 3 hogares de 5 ítems (0,02%), mientras que solamente 2 hogares (0,01%) de la muestra presentan una privación total, con respecto a los 6 ítems considerados.

5. Resultados

En primer lugar procedemos a estimar los parámetros de dificultad, referidos a cada uno de los ítems, que se detallan en la Tabla 2.

Tabla 2. Estimación de los parámetros de severidad (dificultad)

Ítems	Parámetro dificultad	Error estándar	R1c	Grados libertad	p-valor	Outfit	Infit	U
Item1	6.77	0.16946	24.406	2	0.0000	-1.755	-0.915	-1.316
Item2	6.28	0.14623	29.713	2	0.0000	-2.055	-1.138	-1.456
Item3	6.26	0.14517	34.408	2	0.0000	2.896	0.940	1.842
Item4	5.43	0.11920	7.777	2	0.0205	-0.362	0.259	0.010
Item5	4.50	0.10195	4.280	2	0.1177	-0.579	0.213	1.741
Item6	0.00	-	9.130	2	0.0104	0.829	0.025	1.574
Test R1c	R1c= 50.495			10	0.0000			
Test LR Andersen	Z= 51.482			10	0.0000			

Nota: el parámetro de dificultad del ítem6 se fuerza a tomar valor nulo

Por simplicidad de interpretación de los resultados se fuerza a que el parámetro del ítem6 tome valor nulo. Ello significa que es el ítem con respecto al cual es más fácil hallarse privado, ya que el resto de parámetros son positivos. El mayor parámetro de dificultad o severidad, aparece ligado al ítem1, que representa imposibilidad de adquirir una televisión. Ello significa no que una televisión sea un bien de lujo, sino que al ser un bien de consumo tan extendido, estar privado de ella implica una situación de mucha pobreza. En términos coloquiales diríamos “este hogar es tan pobre que no puede ni comprar una televisión”. El segundo y tercer valor en orden decreciente para el parámetros de severidad están vinculados a los ítems 2 (6.28) e ítem 3 (6.26) que se refieren a carencia de lavadora e inodoro dentro del hogar. Los parámetros de dificultad son prácticamente iguales. Sigue un valor de 5.43 para el ítem 4, que implica imposibilidad de adquirir un teléfono. Con un valor de 4.50 se estima el parámetro de dificultad vinculado al ítem 5, que se refiere a la imposibilidad de mantener una dieta proteica suficiente. Contrariamente a los que pueda guiar la intuición, no es más pobre aquél que no puede comer carne o pescado, sino, aquél que no puede adquirir una televisión.

La validez de los parámetros de dificultad estimados individualmente viene corroborada por varios test: todos los p-valores indican una significatividad superior al 99% excepto para el ítem5. Por otro lado, todos los valores del test U de Moolenaar se mantienen muy por debajo de los valores críticos de +3 y -3. Los valores de los índices infit y outfit se mantienen dentro de los márgenes razonables (+/-2), excepto para el índice outfit en el ítem3. Los índices infit y outfit son estadísticos basados en los residuos (diferencia entre el valor observado de las variables y la probabilidad predicha de observar un valor unitario en dicha variable). Estos indicadores siguen aproximadamente una distribución normal, por tanto valores absolutos superiores a 2 sugieren que el modelo no ajusta especialmente bien, es decir que existen respuestas por exceso o defecto que son inusuales para una variable en particular.

El test de Andersen (Andersen, 1973) permite el contraste entre la hipótesis nula de que la estimación de los parámetros de dificultad es la misma independientemente del valor de la pobreza (fenómeno latente). En realidad lo que se está comprobando es que se cumpla la objetividad específica. El valor χ^2 del estadístico obtenido por la fórmula para nuestros datos es de 51,482 y como ($\chi^2_{10} = 29,59$, $p=0,001$) se acepta la hipótesis nula¹. Aunque no se presente aquí por razones de espacio, también se ha comprobado la objetividad específica aplicando el test de Hausman a la muestra de hogares separada por dos grupos según la puntuación obtenida (para puntuaciones inferiores y mayores o iguales a tres, y para puntuaciones menores y mayores o iguales a 5), obteniéndose igualdad en los parámetros de severidad independientemente de la puntuación del grupo.

Los parámetros de posición (o habilidad) que se refieren a cada uno de los individuos, se presentan en la Tabla 3. La estimación se presenta por grupos en función de la puntuación obtenida en cuanto a privaciones. El parámetro es continuamente creciente desde un valor de -1.094 para el grupo de hogares que no sufre de ninguna privación hasta el grupo en que la privación es total, que ostenta un parámetro de 8.529

¹ El estadístico Z sigue una χ^2 de 10 grados de libertad (6-1) parámetros por (3-1) grupos en lo que se divide la población para realizar la estimación de forma separada.

Tabla 3. estimación de los parámetros de posición (o habilidad)

Grupo	Puntuación	Parámetro posición	Error estándar	Frecuencia	Puntuación esperada	Ll
0	0	-1.094	5.968	9195	0.26	
1	1	2.884	2.662	5492	1.27	-665.0586
2	2	4.551	0.723	473	2.20	-575.1574
3	3	5.480	0.469	72	3.07	-197.7516
	4	6.284	0.454	14	3.94	
	5	7.148	0.688	3	4.79	
4	6	8.529	2.612	2	5.60	

6. Conclusión.

El análisis de los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida referida a hogares españoles en el año 2004 ha permitido corroborar que pobreza se puede caracterizar como un fenómeno unidimensional (se produce al ajuste al modelo de Rasch) si bien es un fenómeno que se manifiesta en forma de privaciones diversas, que tienen que ver con la ausencia de determinados electrodomésticos, pero también con la imposibilidad de adquirir alimentos para mantener una dieta equilibrada en el hogar o el hacer frente a imprevistos. Los seis ítems utilizados en el análisis se han ordenado conforme a los valores de los parámetros de severidad, resultando que la ausencia de electrodomésticos como la televisión o el teléfono marcan una severidad superior a la incapacidad de adquirir alimentos básicos. Además los seis ítems utilizados en el análisis dan lugar a una escala de pobreza, tal y como muestran los parámetros de posición de manera que los grupos más pobres son efectivamente los más privados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, P., Blanco, M.A. & Guerrero, M.M., (1997). “Modelo de Rasch: medida de aspectos cualitativos”. Actas de las V Jornadas de la Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas en la Economía y la Empresa, (ASEPUMA), pp 17 – 28. Málaga, (España).
- Andersen, E.B. (1973). “A goodness of fit test for the Rasch model”. *Psychometrika*, 38, 1, 123-140.
- Fusco, A. and P. Dickes (2007) “The Rasch Model and the Multidimensional Poverty Measurement” pp 49-62, in *Quantitative Approaches to Multidimensional Poverty Measurement*. Palgrave Macmillan.
- Hardouin, J.B (2007). “Rasch analysis: Estimation and tests with raschtest”. *The Stata Journal* 7, Number 1, pp. 1–23.
- Kakwani, N and J. Silber (2007) *Quantitative Approaches to Multidimensional Poverty Measurement*. Palgrave Macmillan.
- Masters, G.N. (1982). “A Rasch model for partial credit scoring”. *Psychometrika*, 47, 149–174.
- Masters, G. N. and Keeves, J.P. Eds. (1999) *Advances in Measurement in Educational Research and Assessment*. USA: Elsevier Science
- Prieto, G y A. Delgado (2003) “Análisis de un test mediante el modelo de Rasch”. *Psicotema*. Vol 15, pp 94-100.
- Rasch, G. (1981). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhagen, Danish Institute for Educational Research)
- Salini, S, G. Nicolini, and F. De Battisti, (2003) “The Rasch Model to Measure Service Quality”. UNIMI Economics Working Paper No. 27. 2003.
- Sánchez Rivero, M. Mimeo. “Introducción a la teoría de respuesta al ítem, una herramienta para el análisis de variables latentes: aplicación a la medición de la calidad de vida de la infancia”
- Santos Arrebola, J.L (1999) *Satisfacción del turista en el destino Marbella. Medida y análisis mediante el modelo Rasch*. Centro de ediciones de la Diputación de Málaga. Málaga
- Traub, R.E. y Lam, Y.R. (1985). “Latent structure and item sampling models for testing”. *Annual Review of Psychology*, 36, pp 19-48.