Tema 1. Números reales y complejos. Funciones elementales

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Números reales

Números reales. Operaciones

Denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales

Suma de números reales

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Conmutativa $a + b = b + a$

Elemento neutro existe $0 \in \mathbb{R}$ que verifica $a + 0 = a$ para cada $a \in \mathbb{R}$

Elemento opuesto dado $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ que verifica $a + (-a) = 0$

Producto de números reales

Asociativa $a(bc) = (ab)c$

Conmutativa $ab = ba$

Elemento neutro existe $1 \in \mathbb{R}$ que verifica $a1 = a$ para cada $a \in \mathbb{R}$

Elemento inverso dado $a \in \mathbb{R}$ **no nulo** existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ que verifica $aa^{-1} = 1$

Números reales. Operaciones

Propiedad distributiva

$a(b+c) = ab + ac$ ($\mathbb{R}$ con la suma y el producto es un cuerpo)

Orden de los números reales

Existe una relación de orden ($\leqslant$) con las siguientes propiedades:

- **Reflexiva** $a \leqslant a$
- **Antisimétrica** Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$
- **Transitiva** Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$
- **Orden total** Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \leqslant b$ ó $b \leqslant a$

Relación con las operaciones

- Si $a \leqslant b$, entonces $a + c \leqslant b + c \ \forall c \in \mathbb{R}$
- Si $a \leqslant b$ y $0 \leqslant c$, entonces $ac \leqslant bc$ (si $c \leqslant 0$ entonces $bc \leqslant ac$)

Valor absoluto y distancia entre números reales

Valor absoluto

Se define el valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ por

$$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

- $|a| \geqslant 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$ y $|a| = 0 \iff a = 0$
- Si $b \geqslant 0$, entonces $|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$
- |ab|=|a||b|
- $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$ $\quad \Big(\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|\Big)$

Valor absoluto y distancia entre números reales

Distancia entre números reales

Definimos la distancia entre dos números reales a y b por $|a-b|$

Ejemplo

¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad $|x-1| \leqslant 3$?

Ejemplo

¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad $|x-3| < |x-1|$?

Conjuntos destacados en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} : \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}$$

Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$\begin{array}{cc}
[a, b] & [a, +\infty[\\
]a, b] &]a, +\infty[\\
[a, b[&]-\infty, b] \\
]a, b[&]-\infty, b[\\
\{a\} &]-\infty, \infty[= \mathbb{R}
\end{array}$$

Axioma del supremo

Definiciones

Sean $A \subset \mathbb{R}$

- $a_0 \in \mathbb{R}$ es el máximo de A si $a_0 \in A$ y $a \leqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- $a_0 \in \mathbb{R}$ es el mínimo de A si $a_0 \in A$ y $a \geqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- $a_0 \in \mathbb{R}$ es una cota superior o mayorante de A si $a \leqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- $a_0 \in \mathbb{R}$ es una cota inferior o minorante de A si $a \geqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- Si A está acotado superiormente llamamos supremo de A a la menor de sus cotas superiores
- Si A está acotado inferiormente llamamos ínfimo de A a la mayor de sus cotas inferiores
- Si A está acotado inferior y superiormente diremos que está acotado

Ejemplos

Calcular, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los conjuntos $[0, 1]$, $[1, 2[$ y $\mathbb{N}$

Axioma del supremo

Axioma del supremo

Todo subconjunto de números reales acotado superiormente tiene supremo

Proposición (relación entre supremo y máximo)

Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y $x \in \mathbb{R}$ el supremo de A. Se verifican:

- Si $x \in A$, entonces A tiene máximo y $x = \text{máx}(A)$
- Si $x \notin A$, entonces A no tiene máximo

Hay conjuntos acotados que no tienen máximo ni mínimo

Funciones reales de variable real

Función real de variable real

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$, una función real de variable real es una aplicación de A en $\mathbb{R}$. Esto es, una regla de asignación que a cada elemento de A le hace corresponder un único número real. Al conjunto A se le llama dominio de la función.

Ejemplos

1. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $f(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$
2. $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $g(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$
3. $h\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
   $h(x) = x \qquad (x \in [0,1])$
4. $r\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Función real de variable real

Imagen de una función

- Llamamos imagen de la función $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ al conjunto dado por $f(A) = Im(f) = \{f(x)\colon x \in A\}$
- Si $C \subset A$ llamamos imagen de C por f al conjunto $f(C) = \{f(x)\colon x \in C\}$
- La gráfica de f es el conjunto $Gr(f) = \{(x, f(x))\colon x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$

Operaciones con funciones

Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f, g \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$

Suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in A)$

Producto $(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad (x \in A)$

Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (x \in A$ tal que $g(x) \neq 0)$

Composición de funciones

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de modo que $f(A) \subset B$. Definimos la composición de f con g por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in A)$$

Inversa de una función

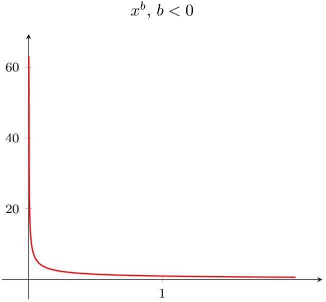
Decimos que $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene inversa si existe una función, que denotaremos por $f^{-1} \colon f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando

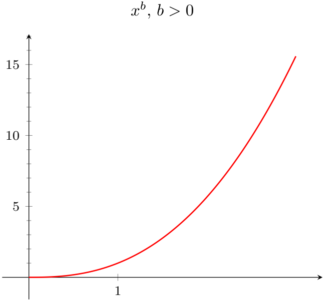
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \qquad \forall y \in f(A)$$

Funciones elementales

Funciones elementales

- Funciones polinómicas
  $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
- Funciones racionales
  $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \colon q(x) = 0\}$
- Funciones potenciales
  $f \colon]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$ fijo



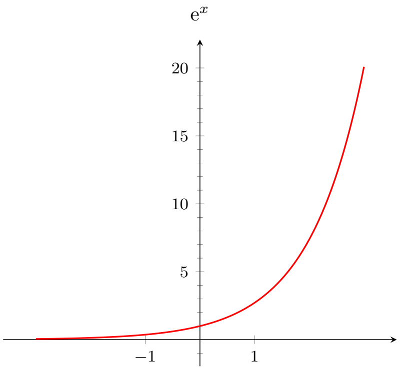


Funciones elementales

- Función exponencial

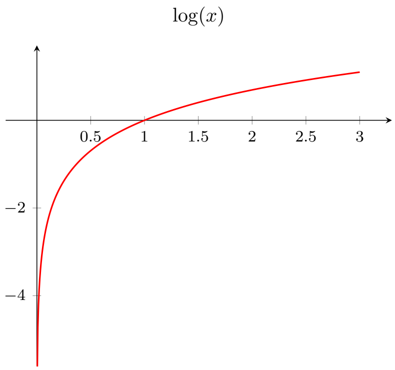
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = e^x$

  - Es estrictamente creciente
  - Biyectiva, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.
  - $e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$



Funciones elementales

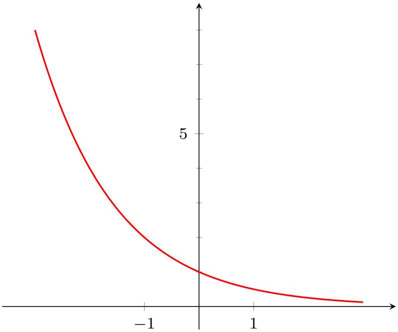
- Función logaritmo
  $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R} \qquad f(x)=\log(x)$
  - Es la inversa de la exponencial:
    $e^{\log(x)}=x\ \forall\, x\in\mathbb{R}^+$
    $\log(e^x)=x\ \forall\, x\in\mathbb{R}$
  - Es estrictamente creciente
  - Biyectiva, $f(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}$
  - $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$ $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^+$
  - $\log\left(\frac{x}{y}\right)=\log(x)-\log(y)$ $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^+$
  - $\log(x^y)=y\log(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^+, y\in\mathbb{R}$



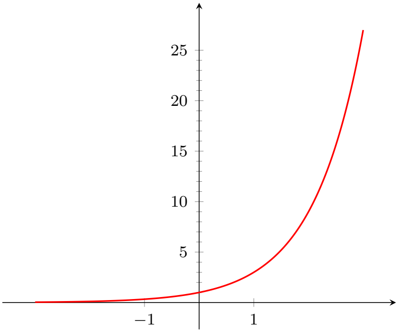
Funciones elementales

- Función exponencial de base $a \neq 1,\ a > 0$
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \log(a)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$a^x,\ a < 1$



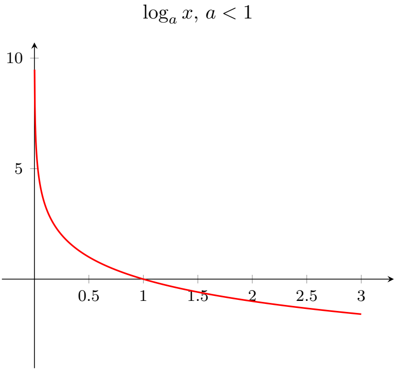
$a^x,\ a > 1$

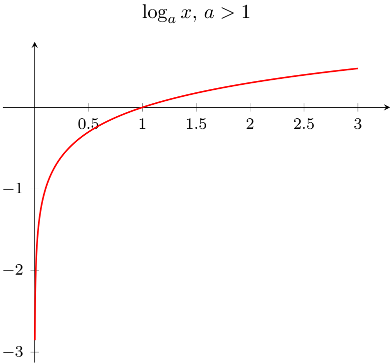


Funciones elementales

- Función logaritmo de base $a \neq 1$, $a > 0$

  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

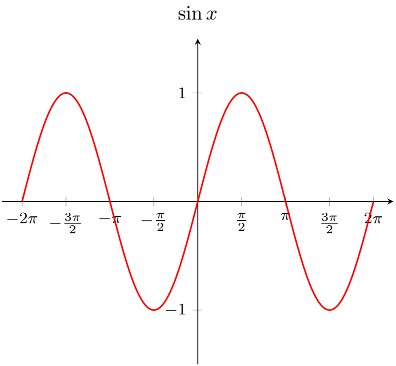


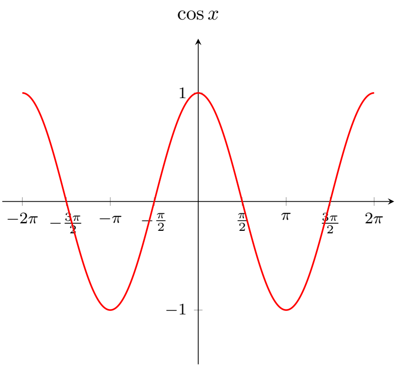


Funciones trigonométricas

- Función seno
  $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  - Es impar y 2π periódica
  - Es una biyección estrictamente creciente de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$

- Función coseno
  $\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  - Es par y 2π periódica
  - Es una biyección estrictamente decreciente de $[0, \pi]$ en $[-1, 1]$





Funciones trigonométricas

- $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$ y $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$
- Fórmula fundamental de trigonometría: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
  $\cos(x+\pi) = -\cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Fórmulas de adición:
  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Ángulo doble:
  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Funciones trigonométricas

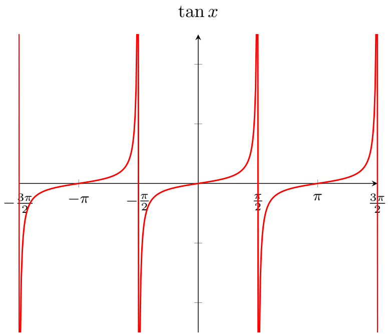
- **Función tangente**

  $\tan\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ donde

  $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$

  $$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \forall x \in A$$

  - Es impar y π periódica
  - Es una biyección estrictamente creciente de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ en $\mathbb{R}$



Funciones trigonométricas

- **Función secante**

  $\sec\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \right\}$

  $$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in A$$

- **Función cosecante**

  $\operatorname{cosec}\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $B = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \colon\ k \in \mathbb{Z} \}$

  $$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \forall x \in B$$

- **Función cotangente**

  $\operatorname{cotan}\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$

  $$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \forall x \in B$$

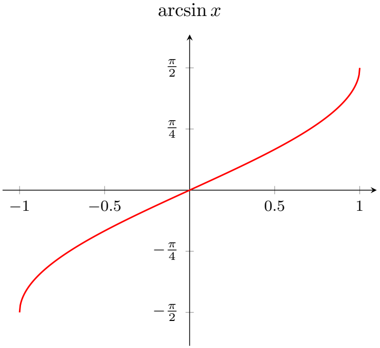
Inversas de funciones trigonométricas

- Función arcoseno

  $\operatorname{arc\,sen}\colon [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  Inversa de la restricción del seno al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

  $$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1], \qquad \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(y)) = y \quad \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



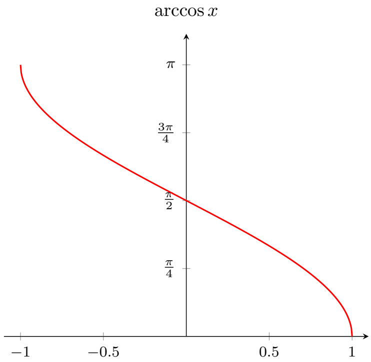
Inversas de funciones trigonométricas

- **Función arcocoseno**

  $\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

  Inversa de la restricción del coseno al intervalo $[0,\pi]$:

  $$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1], \qquad \arccos(\cos(y)) = y \quad \forall y \in [0,\pi]$$



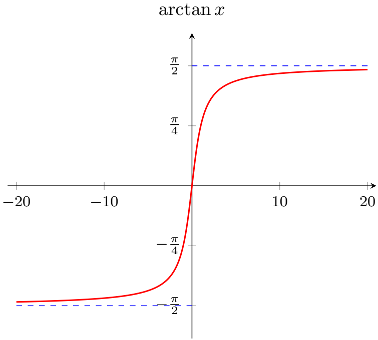
Inversas de funciones trigonométricas

- **Función arcotangente**

  $\arctan\colon \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

  Inversa de la restricción de la tangente al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

  $\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan(\tan(y)) = y \quad \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



Funciones hiperbólicas

- Seno hiperbólico

$$\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

- Coseno hiperbólico

$$\cosh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

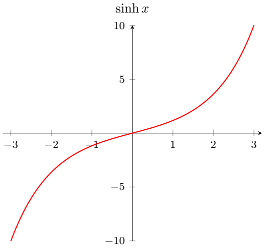
$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$$

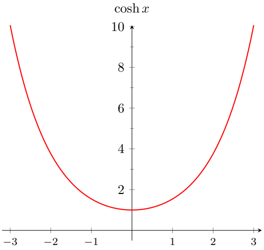
- Tangente hiperbólica

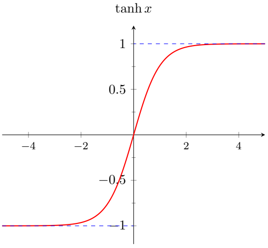
$$\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

$$\tanh(\mathbb{R}) =]-1, 1[$$







Números Complejos

Números complejos. Operaciones

El cuerpo $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \colon a,b \in \mathbb{R}\}$$

- Suma: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \qquad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$
- Producto: $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \qquad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2$ con la operación suma es un grupo abeliano
- El producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Elemento neutro: $(a,b)(1,0) = (a,b) \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
- Elemento inverso: $(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \qquad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Con estas dos operaciones tenemos el cuerpo de los números complejos, que se denota por $\mathbb{C}$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Inclusión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Dado $x \in \mathbb{R}$ identificamos $x \equiv (x, 0)$ con lo que tenemos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
En particular $1 \equiv (1, 0)$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Consideramos la base usual de $\mathbb{R}^2$: $(1, 0) \equiv 1$ y $(0, 1) \stackrel{def}{=} i$

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

Cada número complejo z se escribe de manera única como $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

- a es la parte real de z: $a = \mathrm{Re}(z)$
- b es la parte imaginaria de z: $b = \mathrm{Im}(z)$

Operaciones con parte real e imaginaria

Suma

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

Producto

Basta tener en cuenta que $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$

$$(a+bi)(c+di)=ac+ad\,i+bc\,i+bd\,i^2=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$

★ $i^{-1}=-i$

Ejemplos

- $(5+2i)-(4-2i)+3$
- $(3+2i)(4-i)$

Conjugado de un número complejo

Complejo conjugado

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definimos su conjugado por $\overline{z} = a - ib$

Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

Módulo de un número complejo

Módulo

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definimos su módulo por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades

- $|z| \geqslant 0$ y se tiene $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|zw| = |z||w|$
- $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w|$ (desigualdad triangular)
- $z\overline{z} = |z|^2 \rightsquigarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

Ejemplo

Calcula $\dfrac{1+i}{2-i}$

Forma polar (módulo-fase) de un número complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$ no nulo se puede encontrar $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Argumento

Decimos que θ es un argumento del número complejo z

- Si θ_1 y θ_2 son argumentos de z entonces $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$
- Por tanto, conocido un argumento los conocemos todos
- Para cada $z \in \mathbb{C}$ no nulo existe un único argumento en el intervalo semiabierto $]-\pi, \pi]$ al que llamamos argumento principal de z y denotamos por $\arg z$

Forma polar: Al número complejo de módulo ρ y argumento θ se le suele representar ρ_θ.

Cálculo del argumento principal

$z = a + bi \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ \theta = \arg(z)$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Escribir $1 + i$ en forma polar

Interpretación geométrica del producto complejo

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ no nulos y $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ argumentos de z y w respectivamente

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$
$$w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Entonces $\theta + \varphi$ es un argumento de zw

- Dado $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ la aplicación $z \mapsto uz$ es el giro de ángulo $\theta = \arg u$
- Dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la aplicación $z \mapsto \lambda z$ es la homotecia de razón λ
- Por tanto, dado $w \in \mathbb{C}$ no nulo, la aplicación $z \mapsto wz$ es la composición de la homotecia de razón $\lambda = |w|$ y el giro de ángulo $\theta = \arg w$

Fórmula de De Moivre

Dado $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene $z^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\big)$