Capítulo 4

Capítulo 4. Teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss

4.1 La categoría. El Teorema de Baire

4.1.1 Definiciones.
Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

(a) *A es **denso en ninguna parte** o **diseminado** si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.*
(b) *A es **de primera categoría** en X si es la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte o, equivalentemente, si está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de X, cada uno de los cuales tiene interior vacío en X.*
(c) *A es **de segunda categoría** en X si no es de primera categoría en X.*

Es importante resaltar el carácter relativo de los conceptos anteriores: $\mathbb{R}$ es un conjunto de primera categoría en $\mathbb{C}$ (de hecho, es denso en ninguna parte), pero veremos enseguida que es de segunda categoría en sí mismo. Es fácil ver que si X es un espacio topológico, Y es un subconjunto de X en el que consideramos la topología inducida y A es un conjunto de primera categoría en Y, entonces A es de primera categoría en X.

*Por último, se dice que un espacio topológico X es un **espacio de Baire** si todo abierto no vacío de X es de segunda categoría en X. Es fácil ver que ello equivale a que la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos en X sea densa en X o a que la unión de cualquier sucesión de subconjuntos cerrados con interior vacío tenga interior vacío.*

4.1.2 Teorema (de la categoría de Baire)**.**
Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire. Todo espacio topológico de Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.

4.1.3 Corolario.
Sea X un espacio de Banach. Entonces la dimensión algebraica de X es finita o infinita no numerable.

4.1.4 Corolario.
Sea D_+ el conjunto de las funciones f de $C[a,b]$ que tienen derivada por la derecha finita en algún punto de $[a,b[$. Entonces D_+ es de primera categoría en $C[a,b]$. Como consecuencia, existe una función $f \in C[a,b]$ cuya derivada por la derecha es infinita en todo punto de $[a,b[$.

4.1.5 Corolario.
El conjunto de las funciones de $C^\infty[0,1]$ que no son analíticas en ningún punto de $[0,1]$ es de segunda categoría (en particular, no vacío).

4.2 El Teorema de la aplicación abierta. Enunciados equivalentes

4.2.1 Teorema de la aplicación abierta

4.2.1 Proposición.
Sean X e Y espacios normados y T una aplicación lineal de X en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) *T es abierta.*
- (ii) *Existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_Y \subseteq T(B_X)$.*
- (iii) *Existe $M > 0$ de forma que para cada $y \in Y$ se puede encontrar $x \in X$ con $T(x) = y$, $\|x\| \leqslant M\|y\|$.*
- (iv) *Para toda sucesión convergente a cero (y_n) en Y, existe una sucesión convergente a cero (x_n) en X de forma que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

4.2.2 Lema.
Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

4.2.3 Lema.
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta. Como consecuencia, T es sobreyectiva e Y es completo.

Sin más que unir los dos resultados anteriores, se obtiene:

4.2.4 Proposición.
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $T(X) = Y$, T es abierta e Y es completo.

La condición más natural, aunque no obligatoria, para que $T(X)$ sea de segunda categoría en Y, es que T sea sobreyectiva e Y sea completo. Resumiendo toda la información, obtenemos:

4.2.5 Teorema (de la aplicación abierta)**.**
Si X e Y son espacios de Banach, entonces toda aplicación lineal y continua de X sobre Y es abierta.

4.2.6 Corolario (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach)**.**
Si X e Y son espacios de Banach, entonces toda aplicación sobreyectiva $T \in L(X,Y)$ induce un isomorfismo $\widetilde{T}$ de $X/\ker T$ sobre Y, dado por

$$\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x) \qquad (x + \ker T \in X/\ker T).$$

4.2.7 Corolario (Banach-Mazur, 1933)**.**
Si X es un espacio de Banach separable, existe una aplicación lineal, continua y abierta de ℓ_1 sobre X. Equivalentemente, todo espacio de Banach separable es isomorfo al cociente de ℓ_1 por un subespacio cerrado.

4.2.8 Corolario.
El conjunto de las sucesiones de coeficientes de Fourier de funciones de $L_1(\mathbb{T})$ es un conjunto de primera categoría en $c_0^{\mathbb{Z}}$.

4.2.2 Teorema de los isomorfismos de Banach

4.2.9 Definición.
*Si X e Y son espacios normados, un **homomorfismo** de X en Y es una aplicación lineal y continua T de X en Y que es abierta cuando se considera como aplicación de X sobre $T(X)$. Si además T es inyectiva (resp. sobreyectiva) decimos que T es un **monomorfismo** (resp. **epimorfismo**). Notemos que un isomorfismo no es más que un homomorfismo biyectivo.*

4.2.10 Corolario (Teorema de los isomorfismos de Banach)**.**
Toda biyección lineal y continua entre dos espacios de Banach es un isomorfismo. Equivalentemente, si X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas y comparables en X (esto es, tales que existe $M > 0$ con $\|\cdot\|_1 \leqslant M\|\cdot\|_2$), entonces dichas normas son equivalentes.

4.2.11 Ejemplos. (a) *En cualquier espacio vectorial de dimensión infinita pueden definirse dos normas comparables no equivalentes; por supuesto, alguna de ellas no será completa.* De hecho, si X es un espacio vectorial de dimensión infinita, ya vimos que siempre existen dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en X no equivalentes. Si dichas normas son comparables, hemos acabado. Si no lo son, definiendo

$$\|x\|_3 = \|x\|_1 + \|x\|_2 \qquad (x \in X),$$

se obtiene una nueva norma en X que es comparable con $\|\cdot\|_1$ y con $\|\cdot\|_2$, pero no puede ser equivalente a ninguna de ellas.

(b) *En cualquier espacio de Banach de dimensión infinita $(X, \|\cdot\|)$ puede definirse otra norma completa no equivalente a la de partida.* En efecto, basta tomar $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal discontinuo, un elemento $u \in X$ con $f(u) = 1$, considerar la aplicación $F : X \longrightarrow X$ dada por

$$F(x) = x - 2f(x)u \qquad (x \in X)$$

y observar que F es biyectiva, con $F^{-1} = F$, y que F es discontinua. Entonces, definiendo

$$|||x||| = \|F(x)\| \qquad (x \in X),$$

se obtiene una norma completa en X, que no puede ser equivalente a $\|\cdot\|$ por ser F discontinua.

4.2.12 Corolario (Teorema del homomorfismo de Banach).
Sean X e Y espacios de Banach. Entonces, $T \in L(X,Y)$ es un homomorfismo si, y sólo si, $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y.

4.2.13 Ejemplo.
Notamos $Y = C[a,b]$ y fijamos tres funciones $y_0, y_1, y_2 \in Y$. Para $y \in Y$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, consideremos la ecuación diferencial

$$y_0\, x'' + y_1\, x' + y_2\, x = y$$

y el problema de valores iniciales

$$x(a) = \alpha, \qquad x'(a) = \beta.$$

Las soluciones de un tal problema pertenecen al espacio $X = C^2[a,b]$ de las funciones de clase C^2 en $[a,b]$, que es un espacio de Banach para la norma definida por

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty \qquad (x \in X).$$

La aplicación $T : X \longrightarrow Y \times \mathbb{K}^2$ definida por

$$T(x) = \big(y_0 x'' + y_1 x' + y_2 x,\ x(a),\ x'(a)\big) \qquad (x \in X)$$

es claramente lineal y continua. El que nuestro problema de valores iniciales tenga solución única para cada terna $(y, \alpha, \beta) \in Y \times \mathbb{K}^2$, equivale a que T sea biyectiva. Si tal cosa ocurre, el Teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que, automáticamente, la solución x depende de manera continua de los valores iniciales $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y del dato $y \in Y$. Esta dependencia continua ofrece una cierta garantía de que los métodos de perturbación para aproximar la solución del problema son válidos. Evidentemente pueden idearse esquemas muy variados y problemas muy diversos en los que un razonamiento de este tipo es aplicable.

4.2.3 Teorema de la gráfica cerrada

Por **gráfica** de una aplicación f entre dos espacios topológicos X e Y entendemos el conjunto

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \ :\ y = f(x)\}$$

y decimos que f tiene **gráfica cerrada** si $G(f)$ es cerrado en $X \times Y$ (considerando, desde luego, la topología producto).

Con sólo que el espacio de llegada sea Hausdorff, toda función continua tiene gráfica cerrada; podemos poner, por el contrario, ejemplos sencillos de funciones reales de variable real, con gráfica cerrada y no continuas. A saber, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene gráfica cerrada pero no es continua. Sin embargo, como consecuencia inmediata del Teorema de los isomorfismos de Banach, vemos que no es posible encontrar tal ejemplo entre las aplicaciones lineales entre espacios de Banach:

4.2.14 Teorema (de la gráfica cerrada para espacios de Banach).
Si X e Y son espacios de Banach, toda aplicación lineal con gráfica cerrada de X en Y es continua.

4.2.15 Corolario.
Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal y biyectiva. Si T tiene gráfica cerrada, entonces es un isomorfismo.

4.2.16 Corolario.
Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión (x_n) en X convergente a 0 y tal que $(Tx_n) \longrightarrow y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces, T es continua.

4.2.17 Ejemplo.
Sea $Y = C[0,1]$ y $X = C^1[0,1]$, el subespacio de Y formado por las funciones de clase 1 en $[0,1]$. Definimos $T : X \longrightarrow Y$ definida por

$$T(f) = f' \qquad (f \in X).$$

Entonces, T es una aplicación lineal que tiene gráfica cerrada (Teorema de convergencia uniforme y derivación). Sin embargo, T no es continua. En efecto, consideremos la sucesión de elementos de X,

$$f_n(t) = t^n \qquad (t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$

y observemos que

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{y} \quad \|Tf_n\|_\infty = \|f_n{}'\|_\infty = n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

lo que prueba que T no es continua.

4.2.18 Corolario.
Sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $C(K)$. Supongamos que la convergencia en la norma $\|\cdot\|$ implica la convergencia puntual. Entonces dicha norma es equivalente a la norma del máximo en $C(K)$.

4.2.19 Corolario.
Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \longrightarrow H$ una aplicación lineal. Supongamos que existe $S : H \longrightarrow H$ lineal verificando que

$$(Tx|y) = (x|Sy) \qquad (x, y \in H),$$

entonces $T \in L(H)$.

4.3 El Teorema de Banach-Steinhaus

4.3.1 Teorema (Principio de acotación uniforme en espacios de Banach)**.**
Sea X un espacio de Banach, $\{Y_i : i \in I\}$ una familia de espacios normados y, para cada $i \in I$, sea $T_i \in L(X, Y_i)$. Supongamos que la familia $\{T_i : i \in I\}$ está puntualmente acotada, esto es,

$$\text{para cada } x \in X, \quad \text{existe } M_x > 0 \quad : \quad \|T_i(x)\| \leqslant M_x \quad (i \in I).$$

Entonces, $\{T_i : i \in I\}$ está uniformemente acotada en la bola unidad de X, equivalentemente,

$$\text{existe } M > 0 \quad : \quad \|T_i\| \leqslant M \quad (i \in I).$$

4.3.2 Corolario (Teorema de Banach-Steinhaus para espacios de Banach)**.**
Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y A un subconjunto de $L(X,Y)$. Entonces, son equivalentes:

(i) *A está acotado en norma, esto es, existe $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para cualesquiera $x \in X$, $T \in A$.*

(ii) *A está uniformemente acotado en cada subconjunto acotado de X, esto es, si $B \subset X$ es un conjunto acotado, entonces $\sup\{\|T(x)\| \,:\, x \in B,\, T \in A\} < \infty$.*

(iii) *A está puntualmente acotado, esto es, para cada $x \in X$ el conjunto $\{T(x) \,:\, T \in A\}$ está acotado en la norma de X.*

4.3.3 Corolario.
Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Entonces, son equivalentes:

(i) *A está acotado en la norma de X.*

(ii) *Para cada $f \in X^*$, el conjunto de escalares $\{f(a) \,:\, a \in A\}$ está acotado.*

4.3.4 Corolario.
Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto de X^*. Entonces, son equivalentes:

(i) *A está acotado en la norma de X^*.*

(ii) *Para cada $x \in X$, el conjunto de escalares $\{f(x) \,:\, f \in A\}$ está acotado.*

4.3.5 Corolario (Teorema de cierre de Steinhaus)**.**
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y (T_n) una sucesión de elementos de $L(X,Y)$ que converge puntualmente en X. Definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad (x \in X)$$

se tiene que $T \in L(X,Y)$.

4.3.6 Corolario.
Sea $y \in K^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares; las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *$y \in \ell_1$.*

(ii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{k\geqslant 1} x(k)y(k)$ es absolutamente convergente.*

(iii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{k\geqslant 1} x(k)y(k)$ es convergente.*

(iv) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{k\geqslant 1} x(k)y(k)$ tiene sumas parciales acotadas.*

4.3.7 Teorema.
Sea X un espacio de Banach, Y y Z espacios normados y $T : X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Equivalen:

(i) *Existe $M \geqslant 0$ tal que $\|T(x,y)\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$.*

(ii) *T es continua en $X \times Y$ (considerando, claro está, la topología producto).*

(iii) *T es separadamente continua, esto es, para cualesquiera $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, las aplicaciones lineales*

$$y \longmapsto T(x_0,y) \quad (y \in Y), \qquad x \longmapsto T(x,y_0) \quad (x \in X)$$

son continuas.