

Integrales múltiples

Ejercicio 1

Calcular las siguientes integrales.

- a) $\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x}^{y=\pi x} \frac{1}{y^2+1} dy dx$
- b) $\int_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \int_{x=-\sqrt{4-2y^2}}^{x=\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$
- c) $\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=2y}^{x=2} \cos(x^2) dx dy$
- d) $\int_{x=0}^{x=8} \int_{y=\sqrt[3]{x}}^{y=2} \frac{1}{y^4+1} dy dx$
- e) $\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=1}^{y=e^x} dy dx$

Ejercicio 2

Calcular las integrales

- a) $\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=x}^{y=2} y^2 \operatorname{sen}(xy) dx dy,$
- b) $\int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=x}^{y=\pi} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} dy dx,$
- c) $\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} x^2 e^{xy} dx dy,$
- d) $\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dx dy.$

Ejercicio 3

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, calcular su integral en los siguientes casos:

- a) $f(x, y) = 1$ siendo A la región limitada por $y^2 = x^3$, $y = x$.
- b) $f(x, y) = x^2$ siendo A la región limitada por $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$, $x = 8$.
- c) $f(x, y) = x$ siendo A el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
- d) $f(x, y) = x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0, 2)$ y $(2, 0)$ y la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1.
- e) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

Ejercicio 4

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, calcular su integral en los siguientes casos:

- a) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.
- b) $f(x, y) = xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x$, $x = 1$.
- c) $f(x, y) = xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el eje OX .
- d) $f(x, y) = 4 - y^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x$ y $y^2 = 8 - 2x$.
- e) $f(x, y) = e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y = x$, $x = 2$ y el eje x .

Ejercicio 5

Calcular los siguientes volúmenes:

- a) Volumen del sólido limitado superiormente por $z = x + y$ e inferiormente por el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
- b) Volumen del sólido comprendido por el paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el disco unidad.
- c) Volumen del sólido limitado superiormente por $z = 4 - y^2 - \frac{1}{4}x^2$ e inferiormente por el disco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.

Ejercicio 6

Sea D el conjunto delimitado por $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$. Utilizar el cambio de variable $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 + y^2$ para calcular $\int_D xy \, d(x, y)$.

Ejercicio 7

Utilizar el cambio a coordenadas polares para calcular las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

- a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \bar{B}((0, 0), 1)$
- b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$
- c) $f(x, y) = y$, $A = \{(x, y) \in B((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}) : y \geq 0\}$
- d) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \bar{B}((1, 0), 1)$
- e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

Ejercicio 8

Calcúlese la integral de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) $f(x, y) = E(x + y)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$
- b) $f(x, y) = x$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$
- c) $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$
- d) $f(x, y) = e^{x/y}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 \leq x \leq y^2\}$
- e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- f) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2), x \geq 0\}$

Ejercicio 9

Calcúlese la integral de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
- b) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$
- c) $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$
- d) $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$

Ejercicio 10

Calcúlese la integral de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) $f(x, y, z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$
- b) $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$
- c) $f(x, y, z) = z^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$
- d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\}$

Ejercicio 11

Calcular el volumen del conjunto A en cada uno de los siguientes casos:

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - y^2, 0 \leq x \leq 6\}$
 b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, 0 \leq z \leq 9 - x\}$
 c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$

Ejercicio 12

Calcular el volumen del conjunto A en cada uno de los siguientes casos:

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$
 b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\}$
 c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$
 d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2y\}$