

Tema 1: La geometría euclídea

Geometrías no euclídeas

17 de febrero de 2009

1 Axiomas de Euclides

1. Euclides de Alejandría vivió hacia el año 300 A.C.

2. Definiciones intuitivas de punto, recta, plano, ángulo, distancia, triángulo, circunferencia...

3. Definiciones de Euclides

(I) Un **punto** es lo que no tiene parte.

(II) Una **línea** es una longitud sin grosor.

(III) Los extremos de una línea son puntos.

(IV) Una (**línea**) **recta** es una línea que no se desvía.

4. Nociones comunes

(I) Si dos objetos son iguales a un tercero, son iguales entre sí.

(II) Si se añaden objetos iguales a dos objetos iguales, los totales siguen siendo iguales.

(III) Si se restan objetos iguales a dos objetos iguales, los totales siguen siendo iguales.

(IV) Dos objetos que coincidan con un tercero son iguales el uno al otro.

(V) El total es mayor que la parte.

5. Postulados de Euclides

(I) Dados dos puntos, hay una (única) recta que pasa por ellos.

(II) Un segmento recto siempre se puede prolongar un poco.

(III) Dado un punto y una distancia (no cero), hay una circunferencia de centro dicho punto y radio la distancia dada.

(IV) Todos los ángulos rectos son iguales.

(V) Postulado de las paralelas.

6. Euclides asume implícitamente otros enunciados. Por ejemplo:

(I) Dadas dos rectas distintas en el plano, si se prolongan lo suficiente, se cortan en un único punto o no se cortan nunca.

(II) Las rectas se *pintan* de manera *continua*, sin *agujeros*.

(III) Dados $A, B, C \in l$ se dice que B está entre A y C si $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Axioma de Arquímedes Si $A, B, C \in l$ y B está entre A y C , existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{AB} + \overbrace{AB}^{n \text{ veces}} \geq \overline{AC}$.

(IV) Principio de superposición Dos figuras son iguales si al superponerlas coinciden.

(V) Dos triángulos son iguales si: (a) los lados son iguales (b) tienen dos lados iguales y el ángulo que forman dichos lados es igual.

Algunas consecuencias de los axiomas

1. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.
2. Dada una recta l , y un punto $P \in l$, existe una única recta perpendicular r a l tal que $P \in r$.
3. Dados A, B dos puntos, existe M punto medio del segmento AB .
4. Dada una recta l y un punto P exterior a l , existe una única recta r perpendicular a l tal que $P \in r$.
5. Dada una recta l y un punto P exterior a l , existe una recta paralela a l y que pase por P . Ojo con la unicidad.
6. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Un ángulo exterior es siempre mayor estricto que los dos ángulos interiores no adyacentes.
7. Sean m, n, l tres rectas tales que l corta a m y a n . Si los ángulos a un mismo lado suman π , entonces m y n son paralelas.

Consecuencias del V Postulado de Euclides

1. El V Postulado de Euclides es el recíproco del punto anterior.
2. El paralelismo es transitivo: Si $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$, entonces $l_1 \parallel l_3$.
3. Dada una recta l y un punto P exterior a l , existe una única recta paralela a l y que pase por P . Recíprocamente, esta propiedad implica el V Postulado de Euclides.
4. La suma de los ángulos de un triángulo es π .
5. Si la suma de los ángulos de cualquier triángulo es π , se verifica el V Postulado de Euclides.

2 Los axiomas de Hilbert

Un plano es un conjunto de puntos. Los puntos se agrupan en subconjuntos llamados rectas. Entre subconjuntos adecuados se pueden definir relaciones de congruencia.

I. Axiomas de incidencia.

- I.1. Para cada dos puntos A y B , existe una recta que los contiene.
- I.2. Para cada dos puntos A y B , existe como mucho una recta que los contiene.
- I.3. En cada recta existen al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no están en una misma recta (no alineados).
- I.4. Dados tres puntos distintos no alineados, existe uno y sólo un plano que los contiene.

II. Axiomas de orden.

- II.1. Si un punto B está entre un punto A y un punto C , entonces A , B y C son tres puntos distintos de una misma recta, y B también está entre C y A .
- II.2. Para cada dos puntos distintos A y C , existe al menos un punto B en la recta AC tal que C está entre A y B .
- II.3. Dados tres puntos en una recta, no más de uno está entre los otros dos.

Definición: El segmento \overline{AB} es el conjunto de todos los puntos que están entre A y B . Los puntos A y B se denominan extremos del segmento.

- II.4. Axioma de Pasch Dados tres puntos distintos A , B y C y una recta m en el plano tal que $A, B, C \notin m$, si la recta m corta al segmento AB , entonces m o bien corta al segmento AC o bien corta al segmento BC .

Definición: La semirrecta \overrightarrow{AB} es el conjunto de puntos formado por el segmento \overline{AB} y todos los puntos C de la recta AB tales que B está entre A y C . Se dice que A es el origen de la semirrecta.

Un punto A en una recta m divide a m en dos semirrectas tales que dos puntos están en la misma semirrecta si, y sólo si, A no está entre ellos.

Definición: Si A , B y C son tres puntos no alineados, el sistema formado por los tres segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , junto con los extremos A , B y C se denomina triángulo $\triangle ABC$. Los segmentos se denominan lados y los tres puntos, vértices.

III. Axiomas de congruencia.

- III.1. Si A y B son dos puntos de una recta m , A' es un punto de otra recta m' (no necesariamente distinta de m), existe un único punto B' en cada semirrecta de origen A' en m' tal que el segmento $\overline{A'B'}$ es congruente con el segmento \overline{AB} ($\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$).
- III.2. Si los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ son congruentes a un mismo segmento \overline{AB} , entonces los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ son congruentes entre sí.
- III.3. En la recta m , sean \overline{AB} y \overline{BC} dos segmentos cuyo único punto común es B . En la misma u otra recta m' , sean $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ dos segmentos en las mismas condiciones. Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ entonces $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Definición: Se llama ángulo a la región del plano delimitada por un punto A (llamado vértice) y dos semirrectas (llamadas lados) de origen A . Si B y C son un punto de cada una de las semirrectas, se habla del ángulo $\angle BAC$ o bien del ángulo $\angle CAB$.

- III.4. Si $\angle BAC$ es un ángulo cuyos lados no coinciden y $\overrightarrow{A'B'}$ es una semirrecta, existe una única semirrecta $\overrightarrow{A'C'}$ a cada lado de la recta $A'B'$ tal que $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Cada ángulo es congruente a sí mismo.

Definición: Si $\triangle ABC$ es un triángulo, los tres ángulos $\angle BAC$, $\angle CBA$ y $\angle ACB$ se llaman los ángulos del triángulo. El ángulo $\angle BAC$ se dice que está entre los lados \overline{AB} y \overline{AC} del triángulo.

- III.5. Si dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo entre ellos de un segundo triángulo, entonces cada uno de los restantes ángulos del primer triángulo es congruente con el correspondiente ángulo del segundo triángulo.

IV. Axioma de Euclides. (Versión de Playfair) Sean m una recta y A un punto exterior a m . Existe una única recta l que pasa por A y que no corta a la recta m .

V. Axiomas de continuidad.

V.1 Axioma de Arquímedes Si \overline{AB} y \overline{CD} son segmentos de una misma recta, existe un número natural n tal que el segmento de longitud $n\overline{CD}$, que empiece en A y vaya hacia B contiene al punto B .

V.2 Completitud No existe ninguna extensión en el plano que siga verificando todos los axiomas anteriores.

3 Los axiomas de Birkhoff

Elementos y relaciones indefinidos:

1. Puntos A, B, \dots
2. Conjuntos de puntos llamados *rectas*, m, n, \dots
3. Distancia entre dos puntos $d(A, B)$, que es un número real no negativo tal que $d(A, B) = d(B, A)$.
4. Ángulo formado por tres puntos distintos y ordenados O, A, B ; la cantidad $\angle AOB$ es un número real (módulo 2π). El punto O es el vértice del ángulo.

Postulado I: Dada una recta m , existe una biyección $\chi_m : m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera dos puntos A y B de m , $|\chi_m(A) - \chi_m(B)| = d(A, B)$.

Definiciones:

1. Un punto B está entre A y C ($A \neq C$) si $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.
2. Los puntos A y C , junto con todos los puntos que están entre A y C forman el *segmento* \overline{AC} .
3. Si A, B y C son tres puntos distintos, los tres segmentos \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} forman el triángulo $\triangle ABC$ de lados los segmentos anteriores y vértices los puntos. Si A, B y C están en la misma recta, se dice $\triangle ABC$ es degenerado.

Postulado II: Por dos puntos distintos pasa una única recta.

Definiciones:

1. Dos rectas distintas se dicen *paralelas* si no se cortan en ningún punto.
2. Una recta es paralela a sí misma.

Postulado III: El conjunto de las semirrectas de origen O se puede poner en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números reales (mod 2π),

$$a : \{\text{Semirrectas de origen } O\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mod } 2\pi,$$

de manera que si A y B (distintos de O) son puntos de las semirrectas m y n de origen O , respectivamente, entonces la cantidad $a_n - a_m \pmod{2\pi} = \angle AOB$. Además, si el punto B (de la semirrecta n) varía en una recta r que no pasa por O , el número a_n también varía continuamente.

Definiciones:

1. Se dice que dos semirrectas m y n de origen O forman un ángulo llano si $\angle mOn \equiv \pi$.
2. Se dice que dos semirrectas m y n de origen O forman un ángulo recto si $\angle mOn \equiv \pm\pi/2$, en cuyo caso también se dice que m y n son perpendiculares.

Postulado IV: Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ y una constante $k > 0$, si se cumple $d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$ y $\angle B'A'C' = \pm\angle BAC$, entonces también se cumple $d(B', C') = kd(B, C)$, $\angle C'B'A' = \pm\angle CBA$ y $\angle A'B'C' = \pm\angle ABC$.

Definiciones:

1. Dos figuras geométricas se dicen *semejantes* si existe una biyección entre los puntos de ambas tal que todas las correspondientes distancias están en la misma proporción $k > 0$ y los correspondientes ángulos son iguales en valor absoluto.
2. Dos figuras geométricas se dicen *iguales* o *congruentes* si son semejantes para $k = 1$.