SUBVARIEDADES CON GEODESICAS PLANAS EN UN ESPACIO DE CURVATURA SECCIONAL CUATERNIONICA CONSTANTE.

Francisco Milán López

Abstract: The planar geodesic submanifolds of a quaternionic space forms are studied. Especially, these submanifolds which are kaehler or quaternionic CR-submanifolds are completely classified.

Clasificación A.M.S. (1985): 53C40.

INTRODUCCION.- Sea $f:M^n \dashrightarrow \bar{M}^m$ una inmersión isométrica de una variedad de Riemann M n-dimensional en una variedad de Riemann $\bar{M}$ m-dimensional, se dice que <u>M es una subvariedad con geodésicas planas de $\bar{M}$</u>, si cualquier geodésica de M, se aplica localmente por f en una subvariedad de dimensión 2 de $\bar{M}$, totalmente geodésica.

Así, por ejemplo, desarrollando el primer embebimiento estándar de los <u>espacios simétricos compactos de rango uno</u> viendo estos como subconjuntos del espacio vectorial de matrices Hermíticas sobre F:

$$FP^m = (A\varepsilon H(m+1,F),\ \text{traza}A=1,\ A^2=A)$$

donde F es R, C, Q o Cay; se prueba, ver (S) que dicho embebimiento:

i) Es minimal en la esfera Euclídea de radio $(m/2(m+1))^{1/2}$ y dimensión $m(m+1)d/2+m-1$, con $d=\dim F$.

ii) Transforma las geodésicas de estos espacios sobre círculos contenidos en subvariedades 2-dimensionales totalmente geodésicas de dicha esfera.

También, ver (N), el <u>embebimiento de Veronese</u> del espacio proyectivo complejo $CP^n(c/2)$ de curvatura seccional holomorfa constante c/2 en el espacio proyectivo complejo de curvatura seccional holomorfa constante c, $CP^m(c)$, donde $m=(1/2)n(n+3)$, aplica las geodésicas de $CP^n(c/2)$ en circulos contenidos en subvariedades 2-dimensionales totalmente geodésicas de $CP^m(c/2)$.

Nosotros en (M) probamos que los espacios simètricos compactos de rango uno y el embebimiento de Veronese son las únicas CR-subvariedades cuaterniónicas y subvariedades kaehler con geodésicas planas de un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES.- Si $f:M^n \dashrightarrow \bar{M}^m$ es una inmersión con geodésicas planas, entonces verifica, ver (H),

$$g(\sigma(X,X),\sigma(X,Y)) = 0$$

para cualesquiera X,Y vectores ortonormales tangentes a M^n, donde σ es la segunda forma fundamental.

En consecuencia f es isotrópica, esto es, ver (O),

$$||\sigma(Y,Y)||^2 = \lambda^2$$

para todo vector unitario Y tangente a M^n, donde λ es una función en M^n.

Cuando la variedad ambiente es un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante $\bar{M}^m(\bar{c})$, probamos en (M), que $X(\lambda^2)=0$, y por tanto la inmersión f es isotrópica constante. Además, demostramos que verifica:

P1) $g(\sigma(Y,Y),J_iY) = 0$, $i=1,2,3$, o bien

P2) $\sigma(Y,Y)\in Sp\{J_1Y,J_2Y,J_3Y\}$

donde los J_i forman una base local de estrusturas casi-hermíticas de $\bar{M}^m(\bar{c})$.

Asimismo, obtenemos la siguiente expresión de la derivada de la segunda forma fundamental:

$$(\nabla_X\sigma)(Y,Z)=-(\bar{c}/4)\Sigma\left(g(J_iX,Y)J_iZ+g(J_iX,Z)J_iY\right)^{\perp}$$

para todo X,Y,Z tangente a M^n. De donde deducimos que si M es una subvariedad totalmente real, kaehler o cuaterniónica, entonces su segunda forma fundamental es paralela.

CLASIFICACION DE CR-SUBVARIEDADES.- En primer lugar probamos que "Si M es una CR-subvariedad cuaterniónica con geodésicas planas de un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante $\bar{M}^m(\bar{c})$. Entonces M es una subvariedad cuaterniónica o totalmente real de $\bar{M}$".

Esto se hace en dos partes:

i) Se prueba que M es un QR-producto.

ii) Se ve que no es propio.

Para ello se usan las caracterizaciones de Barros, Chen y Urbano (BCU), y las propiedades de isotropía, P1 y P2.

Como toda subvariedad cuaterniónica es totalmente geodésica, la clasificación de CR-subvariedades cuaterniónicas se reduce a clasificar subvariedades totalmente reales con geodésicas planas de un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante $\bar{M}^m(\bar{c})$, que verifiquen P1 o P2.

Por ser la segunda forma fundamental paralela, aplicando un resultado de reducción de Tsukada (T), existe una subvariedad totalmente geodésica N, completa de $\bar{M}^m(\bar{c})$ tal que $f(M)$ está en N. Además, por ser M totalmente real y verificarse P1 y P2, N es un espacio proyectivo real o un espacio hiperbólico real con curvatura seccional $\bar{c}/4$. Entonces aplicando los resultados de Sakamoto (S), obtenemos lo siguiente:

TEOREMA.(M).- Sea M^n una CR-subvariedad cuaterniónica con geodésicas planas de un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante $\bar{M}(\bar{c})$, $\bar{c}\neq 0$. Entonces:

i) M es una subvariedad totalmente geodésica de $\bar{M}$, o bien

ii) $\bar{c}>0$ y M es un espacio simétrico compacto de rango uno, además, la inmersión es congruente a $\psi o g$, donde g es una inmersión plena en $RP^m(\bar{c}/4)$ y $\psi: RP^m(\bar{c}/4) \dashrightarrow QP^m(\bar{c})$ es totalmente geodésica.

CLASIFICACION DE SUBVARIEDADES KAEHLER.- Si M es una subvariedad kaehler con geodésicas planas de un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante $\bar{M}$, entonces tiene segunda forma fundamental paralela, y de nuevo por el resultado de reducción de Tsukada (T), existe una subvariedad totalmente geodésicas N completa de $\bar{M}$ tal que f(M) está en N; además, por ser M una subvariedad kaehler y verificar P1 y P2, N es un espacio proyectivo complejo o un espacio hiperbólico complejo con curvatura seccional holomorfa $\bar{c}$. Entonces aplicando los resultados de Pak (P) obtenemos lo siguiente:

TEOREMA.(M).- Sea M^n una subvariedad Kaehler, con geodésicas planas de un espacio de curvatura seccional cuaterniónica constante $\bar{M}^m(\bar{c})$, $\bar{c}\neq 0$. Entonces:

i) M es una subvariedad totalmente geodésica de $\bar{M}$, o

ii) $\bar{c}>0$ y M^n es isométrica a $CP^k(\bar{c}/2)$; además, la inmersión es congruente a $\psi o g$, donde g es el embebimiento de Veronese y ψ es el embebimiento standar de $CP^m(\bar{c})$ en $QP^m(\bar{c})$.

BIBLIOGRAFIA

(BCU) M. BARROS, B.Y. CHEN and F. URBANO, "Quaternion CR-submanifolds of quaternion manifolds", Kodai Math. J. 4(1981) 399-417.

(H) S. L. HONG, "Isometric immersions of manifolds whiht plane geodesics into Euclidean space", J. Diff. Geometry 8(1973), 259-278.

(M) F. MILAN, "Subvariedades con geodesicas planas", Tesis de Licenciatura. Universidad de Granada, 1987.

(N) K. NOMIZU, "A characterization of the Veronese varieties", Nagoya Math. J. 60(1976), 181-188.

(O) B. O'NEILL, "Isotropic and kaehler immersions"; Canad. J. Math. 17(1965), 905-915.

(P) J. S. PAK, "Planer geodesic submanifolds in complex space forms"; Kodai Math. J. 1(1978), 187-196.

(S) K. SAKAMOTO, "Planer geodesic immersions"; Tohoku Math. J. 29(1977), 25-56.

(T) K. TSUKADA, "Parallel submanifolds in a quaternion projective space into spheres"; Osaka J. Math. 22(1985), 187-241.

(*) J. S. PAK and T. K. KANG, "Planar geodesic submanifold in a quaternionic projective space", Geometriae Dedicata 26(1988), 139 155.

Francisco Milán López
Dpto. de Matemática Aplicada
Univ. de Granada
Col.Univ. de Almería, ESPAÑA