SUPERFICIES AFINES CON CURVATURA MEDIA AFIN CONSTANTE

FRANCISCO MILAN LOPEZ

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

A mis padres y hermano

A Margarita y mi hija

Mi gratitud al Director de esta memoria, Profesor Dr. D. Antonio Martínez López.

Tesis doctoral dirigida por el Profesor Dr. D. Antonio Martínez López, Profesor Titular del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada. Fue leída el 22 de Marzo de 1991, ante el Tribunal formado por los profesores: Francisco Gómez Ruiz, Udo Simon, Antonio Ros Mulero, Jose Mª Ancochea Bermudez y Florentino García Santos. Obtuvo la calificación de Apto "cum laude" por unanimidad.

INDICE

CAPITULO III

SUPERFICIES AFINES CON CURVATURA MEDIA AFIN
Y CURVATURA AFIN DE GAUSS CONSTANTES

CAPITULO IV

SUPERFICIES AFINES CONVEXAS CON CURVATURA MEDIA AFIN CONSTANTE

INTRODUCCION

La Geometría Diferencial Afín se desarrolla a principios de siglo como una teoría de invariantes respecto al grupo unimodular afín, siendo, en este sentido, especialmente investigadas las hipersuperficies inmersas en el espacio afín real.

Si bien el primero en tratar esta teoría fue Tzitzèica, quien, usando invariantes Euclídeos, introdujo, en [T], una nueva clase de superficies a las que llamó S-superficies, es en 1916 cuando Blaschke y su escuela empiezan a investigar sistemáticamente la geometría que proporcionan los invariantes respecto al grupo unimodular afín de una superficie inmersa en el espacio afín real 3-dimensional $\mathcal{A}^3$.

Blaschke introduce, en [B], la noción de **"normal afín"** a una superficie no degenerada M inmersa en $\mathcal{A}^3$ e interpreta este como un campo de vectores transversales a M tal que su dirección, en cada punto de la superficie, viene dada por el vector velocidad (en el punto) de la curva que determinan los centros de gravedad de las secciones que forma M con los planos paralelos al plano tangente a M en dicho punto. En consecuencia, hiperboloides y elipsoides de $\mathcal{A}^3$ verifican que su vector de posición respecto a un punto fijo de $\mathcal{A}^3$ es paralelo a la correspondiente dirección del normal afín, y en un paraboloide de $\mathcal{A}^3$, la dirección del normal afín es siempre constante.

La noción de normal afín se utilizó en orden a introducir los invariantes afines más significativos de esta teoría. Concretamente, si denotamos por ξ el normal afín de una superficie, no degenerada M de $\mathcal{A}^3$, entonces la segunda forma fundamental de la inmersión asociada a ξ define sobre M un tensor 2-covariante y simétrico, no degenerado, h, al que se llama **métrica afín** de M y cuya curvatura de Gauss, κ, se denomina **curvatura afín de Gauss** de la superficie. Asímismo, el endomorfismo de Weingarten S asociado al normal afín (**endomorfismo afín de Weingarten**) proporciona otros dos importantes invariantes afines, que son: la **curvatura media afín** H, $H = \frac{1}{2}\text{traza}S$, y la **curvatura afín de Gauss-Kronecker** T, $T = \det S$.

El estudio que Blaschke inició de estos invariantes afines, le llevó a definir e investigar diferentes clases de **superficies afines**, esto es, superficies no degeneradas de $\mathcal{A}^3$ con la estructura inducida por el normal afín, ver [B]. Sin duda, las superficies afines más básicas que fueron estudiadas son las denominadas esferas afines (o S-superficies introducidas por Tzitzèica).

Blaschke definió una **esfera afín** como una superficie afín cuyas rectas "normales afines" verifican que todas son paralelas (caso de esferas afines **impropias**) o todas pasan por un punto fijo de $\mathcal{A}^3$ llamado **centro** (caso de esferas afines **propias**). En consecuencia, una esfera afín está caracterizada por tener endomorfismo afín de Weingarten proporcional a la identidad, $S = HI$, y por tanto las esferas afines se corresponden "afínmente" con el concepto euclídeo de superficie umbilical.

A parte de las cuádricas citadas anteriormente (elipsoides, hiperboloides y paraboloides), existen, sorprendentemente, numerosos ejemplos de esferas afines (ver [C4], [S1]), que hacen que su estudio sea uno de los de mayor interés en Geometría Diferencial Afín. Digamos a este respecto que aunque la clasificación de las esferas afines es hoy en día un problema aún sin resolver, se conocen sin embargo interesantes soluciones parciales al problema.

En este sentido, los primeros resultados, propios de la Teoría global de estas superficies, fueron ya obtenidos por Blaschke quien probó que

"Todo ovaloide inmerso en $\mathcal{A}^3$ como una esfera afín es un elipsoide".

Este resultado (ver [B] y [C4]), permite caracterizar a los elipsoides como las únicas esferas afines convexas y completas (métrica afín definida positiva y completa) que tienen curvatura media afín positiva.

En [C4] Calabi investigó desde un punto de vista global, el caso de esferas afines convexas con curvatura media afín negativa, y planteó para su clasificación la siguiente conjetura:

"Cada esfera afín convexa completa con curvatura media afín negativa es asintótica a la frontera de un cono convexo con vértice en el centro.

Recíprocamente, cada cono convexo determina una esfera afín con $H < 0$*, asintótica a la frontera del cono y unívocamente determinada por el valor de su curvatura media afín".*

Recientemente se ha podido probar que esta conjetura es cierta (ver los trabajos de Cheng-Yau [CY1], Gigena [Gi], Li [L1] y Sasaki [Sa]).

Asímismo, el caso de esferas afines con curvatura media afín nula fue investigado por Jörgens en [J], quien usando tecnicas de variable compleja probó que

"Toda esfera afín impropia convexa y completa es un paraboloide elíptico".

A diferencia de los resultados globales, el estudio local de las esferas afines ha necesitado siempre de alguna suposición adicional sobre un determinado invariante afín. Citamos a este respecto los resultados de Kurose [K] y Li-Penn [LP] para el caso convexo, quienes, independientemente prueban:

"Sea $x:M \longrightarrow \mathcal{A}^3$ *una esfera afín convexa con curvatura afín de Gauss constante. Entonces M está en una cuádrica o es afinmente equivalente a la superficie dada por* $x^1x^2x^3 = 1$*".*

De igual forma, el caso no convexo, esto es, esferas afines con métrica afín indefinida ha sido investigado por Magid-Ryan, en [MR], para el caso de esferas afines llanas, y recientemente por Simon [S1], quien extendiendo los resultados de Radon [R] y Magid-Ryan [MR], prueba que el siguiente cuadro de esferas afines con curvatura afín de Gauss constante está completo.

Esferas afines en $\mathcal{A}^3$ con curvatura afín de Gauss constante.

	METRICA DEFINIDA (POSITIVA)			METRICA INDEFINIDA		
	$K > 0$	$K = 0$	$K < 0$	$K > 0$	$K = 0$	$K < 0$
H>0	Elípsoide $x^2+y^2+z^2=1$	------	------	superficie reglada (1)	-------	-------
H=0	------	paraboloide elíptico $z=x^2+y^2$	------	-------	$z=xy+\phi(y)$	-------
H<0	------	$xyz=1$	hiperboloide de dos hojas $x^2-y^2-z^2=1$	-------	$z(x^2+y^2)=1$	superficie reglada(1)

De entre todos los resultados para esferas afines mencionados anteriormente conviene reflexionar sobre dos de ellos:

El primero, es el resultado de Jörgens para esferas afines impropias, ya que éste incide de forma directa en una nueva clase de superficies afines, que son las de curvatura media afín nula y surgen (ver [C1], [VV]) como "puntos críticos" del funcional area afín. Esta nueva clase de superficies es conocida como **superficies Afines-Maximales**, porque su segunda variación del area afín es para el caso de superficies convexas siempre negativa (ver [C1]).

(1) $x(u,v) = uf(v) + f'(v)$

En este contexto, uno puede ver el resultado de Jörgens como una solución parcial al problema más general de determinar las superficies afines-maximales convexas con métrica afín completa, conocido como **Problema Afín de Bernstein**, y que establece

"Toda superficie afín convexa con $H \equiv 0$ *y métrica afín completa es un paraboloide elíptico".*

El todavía abierto problema afín de Bernstein, la necesidad de estudiar el signo de la segunda variación del area afín para una superficie afín-maximal no convexa (ver [VV]), así como otros muchos problemas que ya han sido planteados en esta clase de superficies (ver [C3], [L2]) hacen de las superficies afines-maximales una de las lineas de investigación más atractivas en el campo de la Geometría Diferencial Afín.

El segundo de los resultados mencionados para esferas afines y sobre el que llamamos la atención es la clasificación local de las esferas afines con curvatura afín de Gauss constante. En este sentido resaltamos también que dicho resultado puede verse como una solución parcial al problema más general de determinar las superficies afines con curvatura afín de Gauss constante.

Las dos puntualizaciones realizadas anteriormente han sido a grandes rasgos el origen de la memoria que se presenta, donde distribuidos por capítulos se investiga:

o) El signo de la segunda variación del area afín de una superficie afín-maximal no convexa.

o) Las superficies afines con curvatura afín de Gauss y curvatura media afín constantes.

o) El problema global de determinar las superficies afines convexas, completas con curvatura media afín constante.

En el primer Capítulo se dan los conceptos y resultados básicos de la teoría de superficies afines, y se describen algunos de los principales ejemplos de superficies afines que serán caracterizados más tarde. Conviene destacar, en este sentido, la familia de las **superficies afines homogéneas**, clasificadas por Guggenheimer en [G], (ver también [N2] y [NS]), las cuales son orbitas bajo la acción de un subgrupo del grupo unimodular afín. Por tanto, las superficies de esta familia se caracterizan por tener todos sus invariantes afines constantes.

El segundo Capítulo se dedica al estudio de las superficies afines-maximales. Como ya se ha indicado, una superficie afín-maximal es punto crítico del funcional área afín y en el caso convexo se sabe también que la segunda variación de su área afín es negativa.

Sin embargo, Verstraelen y Vrancken prueban, en [VV], que la segunda variación del área afín del helicoide no tiene signo. Esta situación sugiere investigar la segunda variación de una superficie afín-maximal con métrica afín indefinida.

La clase más conocida de superficies afines con métrica afín indefinida y curvatura media afín nula, es sin duda la que forman las superficies regladas con métrica afín llana. En esta linea, Blaschke probó, en [B], que localmente y bajo la suposición de analiticidad, esta clase de superficies afines forman una familia 3-paramétrica $\mathfrak{B} = \{M(V_1,V_2,V_3): V_1,V_2,V_3$ funciones de u$\}$, donde $M(V_1,V_2,V_3)$ está dada por $x(u,v) = (x_1,x_2,x_3)$ con

$$x_1 = -vV_2 + \int (V_2V_3' - V_3V_2')du,$$

$$x_2 = vV_1 + \int (V_3V_1' - V_1V_3')du,$$

$$x_3 = \int (V_1V_2' - V_2V_1')du.$$

Nosotros iniciamos este Capítulo dando una familia 2-paramétrica de superficies afines-maximales regladas $\mathfrak{F} = \{M(\beta,\gamma)\colon \beta,\ \gamma$ funciones reales $C^{\infty}\}$, donde $M(\beta,\gamma) = x(\mathbb{R}^2)$ está dada por

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} u\ f_1(v) + g_1(v) \\ u\ f_2(v) + g_2(v) \\ v \end{pmatrix}$$

con f_1, f_2 soluciones de $y'' + \beta(v)\ y = 0$ verificando $f_1\ f_2' - f_1'\ f_2 = -1$, y g_1, g_2 funciones reales C^{∞} tales que $g_i'' = \gamma(v)\ f_i$, $i=1,2$.

A continuación clasificamos las superficies afines-maximales con métrica afín indefinida llana. Concretamente, sin suponer la condición de analiticidad, probamos que localmente nuestra familia $\mathfrak{F}$ coincide con la familia $\mathfrak{B}$ de Blaschke.

Esta nueva forma de ver las superficies regladas con métrica afín indefinida llana, permite estudiar la segunda variación del área afín de una superficie afín-maximal reglada. A este respecto, se da el concepto de **indice de una superfice** $M(\beta,\gamma)$, $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))$, y vemos su relación con el signo de la segunda variación del área afín. Concretamente obtenemos el siguiente resultado:

PROPOSICION II.4.1.- *La segunda variación del área afín, bajo todas las deformaciones en la dirección normal afín, de $M(\beta,\gamma)$ tiene signo si y sólo si $ind(M(\beta,\gamma)) = 0$.*

Como el helicoide está en la familia 1-paramétrica $M(1,\gamma)$ y en la Proposición II.4.3 probamos $\mathrm{Ind}(M(1,\gamma)) = \infty$, el resultado de Verstraelen y Vrancken se obtiene como corolario.

Finalmente, damos una interpretación geométrica del indice de $M(\beta,\gamma)$ a partir del número de vueltas, $W(f) = W(f_1,f_2)$, alrededor del origen de la curva generatriz de $M(\beta,\gamma)$, lo que nos permitirá conocer el signo de la segunda variación del área afín viendo la forma de la superficie. Así probamos:

TEOREMA II.4.5.- *Sea $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función parte entera de un número real, esto es la función definida por $E(v)=k$, donde k es un entero tal que $v \in [k,k+1[$. Si $Ind(M(\beta,\gamma)) < \infty$, entonces*

$$W(f) = E\left(\frac{Ind(M(\beta,\gamma))}{2}\right).$$

El Capítulo tercero está dedicado a la clasificación local de las superficies afines con curvatura media afín H y curvatura afín de Gauss κ constantes.

Estos dos invariantes afines están relacionados por el Teorema afín egregium: $\kappa = H + J$, donde $J = \frac{1}{2}h(K,K)$ es denominado **invariante Pick de la** superficie y por K se denota el tensor diferencia entre la conexión afín inducida y la conexión de Levi-Civita para la métrica afín.

Es conocido, (ver [Be], [NP1]), que el tensor K es identicamente nulo si y sólo si la superficie afín está en una cuádrica. En particular, uno obtiene la misma conclusión si el invariante Pick es identicamente nulo y la métrica afín es definida.

Para el caso de superficies afines con métrica afín indefinida, $J = 0$ no lleva a cuádricas, pensar por ejemplo en las superficies $M(\beta,\gamma)$ de la familia $\mathfrak{F}$ descrita anteriormente.

En este caso, cuando la métrica afín es indefinida, nosotros, extendiendo algunos resultados de Blaschke y Radon (ver [B] y [R]), probamos que si el invariante Pick es nulo y la curvatura media afín es constante entonces la superficie afín está en una determinada familia de **superficies regladas**.

Finalmente, si la curvatura media afín y la curvatura afín de Gauss son constantes, $\kappa \neq H$, demostramos que $\kappa = \frac{1}{3}H$ o la curvatura afín de

Gauss-Kronecker es constante. Entonces, de forma directa o usando algunos resultados conocidos (ver [S1], [V]), concluimos que $\kappa = \frac{1}{3}H$ o la superficie afín está en una esfera afín llana.

Así, teniendo en cuenta la clasificación local de las esferas afines con curvatura afín de Gauss constante y lo expuesto anteriormente, obtenemos los siguientes resultados:

TEOREMA III.2.3.- *Sea M una superficie afín convexa con curvatura media afín, H, y curvatura afín de Gauss, κ, constantes. Entonces* $\kappa = \frac{1}{3}H$ *ó M se queda en una cuádrica ó en la imagen afín de la superficie* $Q(c,2) = \{(x^1,x^2,x^3):\ x^1x^2x^3=c\}$ *para alguna constante* $c > 0$.

TEOREMA III.2.4.- *Sea M una superficie afín no convexa con curvatura media afín H y curvatura afín de Gauss κ constantes. Entonces* $\kappa = \frac{1}{3}H$ *ó M está en la imagen afín de la superficie* $((x^1)^2 + (x^2)^2)x^3 = cte. > 0$ *ó en la superficie reglada* $x(u,v) = uf(v) + g(v)$ *donde* $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *son funciones* C^∞ *verificando* $det(f,g',f') = 1$ *y* $det(f,f',f'') = H$. *En particular, si* $H = 0$ *M está en una superficie reglada de la forma* $M(\beta,\gamma)$ *dada en II.2.*

Observamos en estos resultados que queda abierto el problema de determinar las superficies afines con $\kappa = \frac{1}{3}H = \text{constante} \neq 0$. A este respecto, es conocido, (ver [G], [V]), que las superficies afines homogéneas dadas por los grafos

$$x(u,v) = (u,v,\tfrac{1}{2}(u^2+v^{-2/3})),\quad v > 0,\qquad \text{(métrica afín definida)}$$

$$x(u,v) = (u,v,\tfrac{1}{8}(u^2-v^{-2/3})),\quad v > 0,\qquad \text{(métrica afín indefinida)}$$

se caracterizan localmente, salvo transformaciones afines, por tener $\kappa = \frac{1}{3}H = \text{constante} \neq 0$ y curvatura afín de Gauss-Kronecker constante.

Globalmente, estudiando el Laplaciano de la curvatura afín de Gauss-Kronecker, cuando la métrica afín es definida, podemos obtener el siguiente resultado:

"Una superficie afín convexa y completa, con $\kappa = \frac{1}{3}H$ = constante ≠ 0 *tiene curvatura afín de Gauss-Kronecker no negativa, y por tanto* $0 \le T \le H^2$*".*

Usando los resultados expuestos anteriormente, tenemos que el siguiente cuadro de superficies afines con curvatura media afín H constante y curvatura afín de Gauss κ constante está completo.

Superficies afines con curvatura media afín y curvatura afín de Gauss constantes

	METRICA DEFINIDA (POSITIVA)			METRICA INDEFINIDA		
	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
H>0	Elípsoide $x^2+y^2+z^2=1$	------	------	$\kappa=H/3$, o superficie reglada (1)	-------	-------
H=0	------	paraboloide elíptico $z=x^2+y^2$	------	-------	superficie reglada (1) $M(\beta,\gamma)$	-------
H<0	------	xyz=1	$\kappa=H/3$, o hiperboloide de dos hojas $x^2-y^2-z^2=1$	-------	$z(x^2+y^2)=1$	$\kappa=H/3$, o superficie reglada(1)

Finalmente, en el cuarto Capítulo se considera uno de los problemas abiertos más interesantes en Geometría Diferencial Afín, se trata, (ver [S2]), de la clasificación de todas las superficies afines convexas M, con métrica afín completa y curvatura media afín H constante en $\mathcal{A}^3$.

No obstante, el caso compacto fue resuelto por Blaschke, en [B], quien obtuvo el siguiente resultado:

"Cada ovaloide en $\mathcal{A}^3$ *con curvatura media afín constante es un elipsoide".*

---

(1) $x(u,v)=uf(v)+g(v)$, $\det(f,g',f')=1$, $\det(f,f',f'')=H$

Y como consecuencia uno obtiene la misma conclusión, (ver también [S3]), para superficies afines convexas, completas, con curvatura media afín constante positiva.

Como ya se ha indicado, el problema para superficies afines-maximales, esto es, $H \equiv 0$ en M, se llama Problema Afín de Bernstein, y hemos de decir que la completitud de la métrica afín es fundamental, ya que localmente se pueden construir superficies afines-maximales convexas a partir de cualquier terna de funciones armónicas, (ver [L3], [C3]), sin embargo, globalmente sólo se conoce el paraboloide elíptico, por lo que se justifica la conjetura sobre su caracterización, (ver [Ch]).

Esta conjetura ha sido resuelta parcialmente con hipótesis adicionales sobre M, tales como la de esfera afín, (ver [C2], [CY1], [J], [P]), la de grafo global, (ver [C1]), o condiciones sobre la aplicación conormal o la aplicación de Gauss, (ver [C3], [L2], [L3]).

Cuando la curvatura media afín es constante negativa existen algunos resultados que caracterizan el hiperboloide y la superficie $Q(1,2) = \{(x^1,x^2,x^3)\in\mathcal{A}^3 \ / \ x^1x^2x^3=1\}$, como las únicas esferas afines convexas, completas, con $H < 0$ que cumplen alguna condición adicional sobre su invariante Pick, (ver [LP], [K]).

En este Capítulo obtenemos el siguiente resultado de clasificación:

TEOREMA IV.2.1.- *Sea M una superficie afín convexa, con métrica afín completa y curvatura media afín constante. Suponemos para* $B^2 = H^2 - T$ *que:*

(I) $J - cB^2 \geq d$, *para algunos números reales c y d,* $c > \frac{2}{5}$,

(II) $3J\kappa + 2HB \geq 0$.

Entonces M es una de las siguientes superficies:

i) un elípsoide,

ii) un paraboloide elíptico,

iii) un hiperboloide,

iv) una imagen afín de la superficie $Q(e,2) = \{(x^1,x^2,x^3) \ / \ x^1x^2x^3=e=cte.\}$

Teniendo en cuenta el Teorema egregium afín: $\kappa = H + J$, obtenemos las siguientes consecuencias del Teorema IV.2.1:

IV.1.- Una superficie afín convexa, afín completa, con curvatura media afín constante positiva tiene $\kappa \geq H > 0$, por tanto, usando el Teorema de Bonnet, es compacta y las hipótesis (I) y (II) del Teorema IV.2.1 se verificaran siempre en este caso. Así, el resultado de Blaschke para los ovaloides es un Corolario del Teorema IV.2.1.

IV.2.- Si M es una superficie afín-maximal, entonces la hipótesis (II) del Teorema IV.2.1 no supone ninguna restricción y obtenemos la siguiente solución parcial del Problema Afín de Bernstein, (ver [MM2]).

COROLARIO IV.2.3.- *Toda superficie afín-maximal convexa, afín completa, con $\kappa + cT$ acotado inferiormente ($T = \det S$), para algún número real $c > \frac{2}{5}$, es un paraboloide elíptico.*

En particular:

COROLARIO IV.2.4.- *Si la curvatura afín de Gauss-Kronecker de una superficie afín-maximal convexa y completa M, está acotada inferiormente. Entonces M es un paraboloide elíptico.*

Además, combinando el Corolario IV.2.4 con el Teorema A de [L4] se sigue (ver también Teorema B de [L4]):

> *"Si M es una superficie afín-maximal, dada por el grafo de una función convexa definida en todo $\mathbb{R}^2$ y con curvatura afín de Gauss Kronecker acotada inferiormente, entonces M es un paraboloide elíptico".*

IV.3.- Para el caso de superficies afines con curvatura media afín constante negativa, no suponemos que M es esfera afín ($B^2 \equiv 0$ sobre M, ver [S4]), no obstante necesitamos ciertas condiciones de crecimiento para B^2 (expresiones (I) y (II)), para obtener la siguiente caracterización de Q(e,2).

COROLARIO IV.2.5.- *Sea M una superficie afín convexa, afín completa y con curvatura media afín constante negativa. Si $3\kappa \geq 2B$ y la curvatura afín de Gauss-Kronecker está acotada inferiormente. Entonces M es una imagen afín de la esfera afín $Q(e,2)$.*

CAPITULO I

PRELIMINARES

I. 1. SUPERFICIES AFINES

Sea $\mathcal{A}^3$ el espacio afín real de dimensión 3, con elemento de volumen, Det, dado por el determinante y conexión afín llana usual D.

Sea M una superficie conexa y orientable inmersa en $\mathcal{A}^3$. El problema natural de inducir a partir de (D,Det) una estructura equiafín $(\overline{\nabla},\theta)$ en M, esto es, una conexión afín libre de torsión $\overline{\nabla}$ y un elemento de volumen θ paralelo respecto $\overline{\nabla}$, fue resuelto por Nomizu de la siguiente forma (ver [N1]):

Dado η campo de vectores transversal en M, las fórmulas de Gauss y Weingarten de la inmersión asociadas a η están dadas por

$$D_XY = \overline{\nabla}^{\eta}_XY + h^{\eta}(X,Y)\eta,$$

$$D_X\eta = -S^{\eta}X + \tau^{\eta}(X)\eta,$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores tangentes a M ($X,Y \in TM$). Es inmediato probar que $\overline{\nabla}^{\eta}$, S^{η}, τ^{η} y h^{η} son, respectivamente, una conexión afín libre de torsión, un campo de tensores (1,1), una 1-forma y una forma bilineal simétrica sobre M.

Se dice que M es **no degenerada** si h^η es no degenerada; es fácil ver que este concepto no depende de la elección del transversal.

Sobre M, se consideran el elemento de volumen inducido por Det, θ^η, y el elemento de volumen υ^η asociado a la métrica h^η, esto es,

$$\theta^\eta(X,Y) = \det(X,Y,\eta)$$

$$\upsilon^\eta(X,Y) = \left(\left|h^\eta(X,X)h^\eta(Y,Y)-h^\eta(X,Y)^2\right|\right)^{1/2}$$

para cualesquiera $X,Y\in TM$.

Se puede comprobar que

$$\overline{\nabla}^\eta_X\theta^\eta = \tau^\eta(X)\theta^\eta \qquad X\in TM,$$

y por tanto, la estructura inducida $(\overline{\nabla}^\eta,\theta^\eta)$ es equiafín si y sólo si $\tau^\eta=0$.

En este sentido, Nomizu, [N1], probó el siguiente resultado.

TEOREMA I.1.1.- *Sea M una superficie no degenerada en $\mathcal{A}^3$. Entonces existe un único campo de vectores transversal ξ tal que*

i) $\tau^\xi = 0$

ii) $\theta^\xi = \upsilon^\xi$.

El único campo de vectores transversal ξ del Teorema I.1.1 se llama **normal afín** y viene determinado a partir de las siguientes condiciones,

(I.1.1) $$D_XY = \overline{\nabla}_XY + h(X,Y)\xi, \qquad D_X\xi = -SX$$

(I.1.2) $$\det(X,Y,\xi) = \left(\left|h(X,X)h(Y,Y)-h(X,Y)^2\right|\right)^{1/2}$$

para cualesquiera $X,Y\in TM$. Donde por $\overline{\nabla}$, S y h se denotan los correspondientes $\overline{\nabla}^\xi$, S^ξ y h^ξ asociados al normal afín. A $\overline{\nabla}$, S y h se les denomina **conexión afín inducida**, **operador afín de Weingarten** y **métrica afín**, respectivamente.

DEFINICION I.1.2.- Una superficie no degenerada en $\mathcal{A}^3$, dotada de la estructura equiafín inducida por el normal afín se llama **superficie afín**.

Usando (I.1.1), las ecuaciones fundamentales de una superficie afín en $\mathcal{A}^3$ están dadas por:

Ecuación de Gauss

(I.1.3) $$R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY \qquad X,Y,Z\in TM,$$

donde R es el tensor curvatura asociado a $\overline{\nabla}$.

Ecuación de Codazzi para h

(I.1.4) $$(\overline{\nabla}h)(X,Y,Z) = (\overline{\nabla}h)(Y,X,Z) \qquad X,Y,Z\in TM.$$

Ecuación de Codazzi para S

(I.1.5) $$(\overline{\nabla}S)(X,Y) = (\overline{\nabla}S)(Y,X) \qquad X,Y\in TM.$$

Ecuación de Ricci

(I.1.6) $$h(SX,Y) = h(X,SY) \qquad X,Y\in TM.$$

De (I.1.4), $\overline{\nabla}h$ es una forma trilineal simétrica llamada **forma cúbica** para M.

Si el operador afín de Weingarten satisface $S = \lambda I$, para una función $\lambda \neq 0$, donde I es el operador identidad, se dice que M es una **esfera afín propia**.

Es inmediato de (I.1.1) y (I.1.5) que si $S = \lambda I$, $\lambda \neq 0$, entonces λ es una función constante y en este caso todas las rectas desde los puntos de M en la direción de ξ se intersecan en un punto llamado **centro**.

En el caso en que $S = 0$, los normales afines en cada punto son paralelos y M se dice que es una **esfera afín impropia**.

Se define la **curvatura media afín** de M por

(I.1.7) $$H = \frac{1}{2} \text{ traza } S$$

y la **curvatura afín de Gauss-Kronecker** por

(I.1.8) $$T = \det S.$$

Si denotamos por $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita para la métrica afín h y por K el tensor diferencia entre $\overline{\nabla}$ y $\tilde{\nabla}$, esto es,

(I.1.9) $$K(X,Y) = K_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_X Y \qquad X,Y \in TM,$$

entonces, de (I.1.2) y (I.1.9) se sigue la denominada condición de apolaridad para K,

(I.1.10) $$\text{traza } K_X = 0 \qquad X \in TM.$$

Además, es fácil ver que

(I.1.11) $$h(K(X,Y),Z) = -\frac{1}{2}(\overline{\nabla} h)(X,Y,Z) \qquad X,Y,Z \in TM,$$

y por tanto, la forma cúbica $\overline{\nabla} h$ es identicamente nula si y sólo si la conexión inducida $\overline{\nabla}$ coincide con la conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ para la métrica afín.

En este sentido, un resultado clásico debido a Pick y Berwald (ver [Be], [NP1]) es:

TEOREMA I.1.3.- *Una superficie afín en $\mathbb{A}^3$ tiene forma cúbica idénticamente nula si y sólo si está en una cuádrica.*

De (I.1.3) y (I.1.9) se sigue también, que el tensor curvatura $\tilde{R}$ para la métrica afín está dado por

(I.1.12) $$\tilde{R}(X,Y)Z = \frac{1}{2}\left\{h(Y,Z)SX-h(X,Z)SY+h(SY,Z)X-h(SX,Z)Y\right\} - [K_X,K_Y]Z$$

para cualesquiera $X,Y,Z\in TM$, y por consiguiente, la curvatura de Gauss, κ, para la métrica afín h (esto es, la **curvatura afín de Gauss**) verifica

(I.1.13) $$\kappa\, h(Y,Z) = H\, h(Y,Z) + \text{traza}\, K_Z K_Y.$$

Así, definiendo el **invariante Pick** de M por $J = \frac{1}{2}h(K,K)$, se tiene el Teorema egregium afín

(I.1.14) $$\kappa = H + J.$$

Denotemos por $< \ , \ >$ el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, se define el **conormal afín** de M como la aplicación $N:M \longrightarrow \mathbb{A}^3$ verificando

(I.1.15) $$<N,\xi> = 1 \qquad <N,X> = 0 \qquad \text{para todo } X\in TM.$$

Usando (I.1.1) y (I.1.15) se obtiene

(I.1.16) $$<N_*(Y),\xi> = 0 \qquad <N_*(Y),X> = - h(X,Y) \qquad X,Y\in TM,$$

y como h es no degenerada se sigue que N es una inmersión.

Por (I.1.1), (I.1.9), (I.1.15) y (I.1.16) se tiene también

$$D_X N_*(Y) = N_*(\tilde{\nabla}_X Y - K_X Y) - h(Y,SX)N \qquad X,Y\in TM. \tag{I.1.17}$$

I. 2. EJEMPLOS DE SUPERFICIES AFINES

2.1.-Inmersión grafo.

Sea $f(u,v)$ una función sobre un dominio U de $\mathbb{R}^2$, se considera la superficie M_f dada por el grafo de f, esto es,

$$M_f = \{\ x(u,v) = (u,v,f(u,v))\ /\ (u,v)\in U\ \}.$$

Entonces

$$x_u = (1,0,f_u) \qquad x_v = (0,1,f_v) \tag{I.2.1}$$

generan el espacio tangente a M_f en $x(u,v)$ y

$$x_{uu} = f_{uu}\,\eta, \quad x_{uv} = f_{uv}\,\eta, \quad x_{vv} = f_{vv}\,\eta \tag{I.2.2}$$

donde $\eta = (0,0,1)$ es un campo transversal a M_f. Así, el normal afín de M_f será de la forma

$$\xi = Z + \varphi\,\eta, \qquad Z\in TM, \qquad \varphi > 0. \tag{I.2.3}$$

Usando (I.1.1), (I.2.2) y (I.2.3), se sigue que la métrica afín h viene dada por

$$h(x_u,x_u) = \varphi^{-1}f_{uu}, \quad h(x_u,x_v) = \varphi^{-1}f_{uv}, \quad h(x_v,x_v) = \varphi^{-1}f_{vv} \tag{I.2.4}$$

y M_f es no degenerada si y sólo si $f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2$ no se anula en U.

Si por ∇ denotamos el Gradiente y por Δ el Laplaciano de la métrica afín h, entonces, de (I.1.1), (I.1.2), (I.2.2), (I.2.3) y (I.2.4),

$$\varphi = |f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2|^{1/4}$$

$$(\text{I.2.5}) \qquad Z = -\varphi^{-1}\nabla\varphi$$

$$SX = -\overline{\nabla}_X Z - h(X,Z)Z, \qquad X\in TM,$$

y por (I.1.7), (I.1.9), (I.1.10) y (I.2.5),

$$(\text{I.2.6}) \qquad \Delta\varphi^{-1} = -2H\,\varphi^{-1}.$$

Además, usando (I.1.15), (I.2.1) y (I.2.3), el conormal afín de M_f está dado por

$$(\text{I.2.7}) \qquad N = \varphi^{-1}\, x_u \wedge x_v = \varphi^{-1}(-f_u,-f_v,1).$$

De (I.2.5) se sigue que si φ es constante entonces M_f es una esfera afín impropia. En este sentido, Jörgens [J] probó el siguiente resultado:

TEOREMA I.2.1.- *Si M es una superficie afín dada por el grafo de una función $f(u,v)$ definida en todo $\mathbb{R}^2$ tal que $f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2$ es una constante positiva, entonces M es un paraboloide elíptico.*

2.2.-Superficies homogéneas.

DEFINICION I.2.2.- Una superficie afín se llama **homogénea** si es la orbita bajo la acción de un subgrupo del grupo unimodular de las transformaciones afines de $\mathbb{R}^3$.

Las superficies homogéneas están clasificadas (ver capítulo 12 de [G], [N2], [NS]). Estas superficies tienen todos sus invariantes afines constantes, en particular, su curvatura afín de Gauss, su curvatura media afín, su curvatura afín de Gauss-Kronecker y su invariante Pick son constantes.

Como ejemplos de superficies homogéneas se tienen:

2.2.1.- **Las cuádricas**, que salvo transformaciones afines son:

i) Elípsoide $\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2 = c^2,\ c > 0.$

ii) Hiperboloide de una hoja $\qquad x_1^2+x_2^2-x_3^2 = c^2.$

iii) Hiperboloide de dos hojas $\qquad x_1^2+x_2^2-x_3^2 = -c^2.$

iv) Paraboloide elíptico $\qquad x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2).$

v) Paraboloide hiperbólico $\qquad x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2).$

Como por el Teorema I.1.3 tienen forma cúbica nula, usando (I.1.3), (I.1.11), (I.1.13) y (I.1.14) se obtiene que toda cuádrica es una esfera afín con $S = H\, I$, $J = 0$ y $\kappa = H$.

Además un cálculo directo da que $H = c^{-3/2}$ en i), $H = \pm\, c^{-3/2}$ en ii), $H = -\, c^{-3/2}$ en iii), $H = 0$ en iv) y $H = 0$ en v).

2.2.2.- **Los grafos** M_{f_1}, M_{f_2}, donde

$$f_1(u,v) = \frac{1}{2}(u^2+v^{-2/3}), \qquad v > 0,$$
$$f_2(u,v) = \frac{1}{8}(u^2-v^{-2/3}), \qquad v > 0. \tag{I.2.8}$$

Por (I.2.3), (I.2.4), (I.2.5) y (I.2.8), se tiene que para $M_{f_1} = \{x(u,v) = (u,v,f_1(u,v)) \;/\; u\in\mathbb{R},\ v>0\}$

$$h(x_u,x_u) = c^{-1}v^{2/3}, \qquad h(x_u,x_v) = 0, \qquad h(x_v,x_v) = \frac{5}{9}c^{-1}v^{-2}$$
$$\xi = (0,\frac{6}{5}cv,\frac{3}{5}cv^{-2/3}), \qquad c = \left(\frac{5}{9}\right)^{1/4} \tag{I.2.9}$$

Usando ahora (I.1.1), (I.1.9), (I.2.8) y (I.2.9), se sigue también que,

$$Sx_u = 0, \quad Sx_v = -\frac{6}{5}c\, x_v,$$

$$\overline{\nabla}_{x_u} x_u = -\frac{6}{5}v^{5/3}\, x_v, \quad \overline{\nabla}_{x_u} x_v = 0, \quad \overline{\nabla}_{x_v} x_v = -\frac{2}{3}v^{-1}\, x_v,$$

$$K(x_u, x_u) = -\frac{3}{5}v^{5/3}\, x_v, \quad K(x_u, x_v) = -\frac{1}{3}v^{-1}\, x_u, \tag{I.2.10}$$

$$K(x_v, x_v) = -\frac{1}{3}v^{-1}\, x_v.$$

y por (I.1.7), (I.1.8), (I.1.13), (I.1.14) y (I.2.10)

$$H = -\frac{3}{5}c, \quad T = 0, \quad J = \frac{2}{5}c, \quad \kappa = -\frac{1}{5}c = \frac{1}{3}H. \tag{I.2.11}$$

De (I.2.10) es claro que M_{f_1} no es una esfera afín.

Analogamente para el grafo de $f_2(u,v)$ se puede obtener que M_{f_2} no es una esfera afín y que $\kappa = \frac{1}{3}H$.

2.2.3.- **Esferas afines llanas, no cuádricas,** que salvo movimientos afines son:

i) $Q(c,2) := \{(x_1,x_2,x_3) \,/\, x_1x_2x_3=c\}$, tiene $H = -3^{-3/4}c^{-1/2}$ y $\kappa = 0$,

ii) $(x_1^2+x_2^2)x_3 = c$, que verifica $H = -3^{-3/4}2^{1/2}c^{-1/2}$ y $\kappa = 0$,

iii) Superficie de Cayley, $x_3 = x_1x_2 - \frac{1}{3}x_2^3$, que cumple $H = 0 = \kappa$.

iv) $x_3 = x_1x_2 + \ln(x_2)$, $x_2 > 0$, con $H = 0 = \kappa$.

OBSERVACION

I.1.-Existen otras esferas afines impropias llanas, no homogéneas, que pueden considerarse superficies de Cayley generalizadas y están dadas como el grafo: $x_3 = x_1x_2 + \phi(x_2)$, donde ϕ es cualquier función diferenciable en la variable x_2.

I.3 OTRAS PROPIEDADES DE LAS SUPERFICIES AFINES

Sea M una superficie afín en $\mathcal{A}^3$ y p un punto fijo de $\mathcal{A}^3$, para cualquier punto $x \in M$ el vector x-p se puede escribir

(I.3.1) $$x-p = Z_x + \rho(x)\xi_x$$

donde $Z_x \in T_xM$ y $\rho(x) \in \mathbb{R}$. La función $\rho: M \longrightarrow \mathbb{R}$ se denomina **distancia afín** de M al punto p. Usando (I.1.1), (I.1.7), (I.1.9), (I.1.10) y (I.3.1) se obtiene

(I.3.2) $$Z = -\nabla\rho, \quad \bar{\nabla}_X Z = X + \rho SX, \quad X \in TM,$$
$$\Delta\rho = -2(1+H\rho),$$

y es inmediato, de (I.3.1) y (I.3.2), que M es una esfera afín propia de centro p si y sólo si la distancia afín de M a p es constante, $\rho = -H^{-1}$.

Usando el Teorema de Stokes (ver [KN]) y (I.3.2) uno obtiene el siguiente resultado (ver [Ch]).

PROPOSICION I.3.1.- *No existen superficies afines compactas con curvatura media afín identicamente cero.*

Además, de (I.1.7), (I.1.9), de la condición de apolaridad (I.1.10) y de las ecuaciones de estructura (I.1.1) y (I.1.17) se sigue

(I.3.3) $$\Delta x = 2\xi$$
$$\Delta N = -2HN.$$

DEFINICION I.3.2.- Una superficie afín se llama (localmente fuertemente) **convexa** si su métrica afín es definida positiva.

Como una condición necesaria para que $\Delta u = \lambda u$ tenga solución no nula en una variedad de Riemann compacta es que $\lambda < 0$ en algún punto, de (I.3.3) se concluye el siguiente resultado (ver [CY1]).

PROPOSICION I.3.3.- *No existen superficies afines convexas, compactas con curvatura media afín no positiva.*

Además, del Teorema I.2.1, de la Proposición I.3.1, y usando (I.1.14), (I.2.3), (I.2.5) y (I.2.6) se sigue (ver [C1])

PROPOSICION I.3.4.- *Si* M *es una superficie afín completa, dada por el grafo de una función convexa definida en todo* $\mathbb{R}^2$, *con* $H \equiv 0$, *entonces* M *es un paraboloide elíptico.*

Sea M una superficie afín convexa. Cerca de cada punto $x \in M$ se considera la intersección de M con planos paralelos al tangente en el punto, entonces los centros de gravedad de estas intersecciones definen una curva diferenciable cuya dirección tangente en el punto es la dirección del normal afín en x. Concretamente, se tiene la siguiente interpretación geométrica del normal afín dada por Blaschke [B] (ver también [CY1]).

PROPOSICION I.3.5.- *Sea* f *una función convexa definida en un entorno del origen* $0 \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $f \geq 0$ *y* $f(0)=0$. *Sea* $y(t)$ *el centro de gravedad de* $\{y \in \mathbb{R}^2 : f(y) \leq t\}$. *Entonces la dirección del normal afín del grafo de* f *en el origen es la dirección tangente de la curva* $\gamma(t)=(y(t),t)$ *en* 0.

Demostración.- El resultado es evidente si el grafo de f es parte de una esfera. En general, se puede suponer, tras una transformación afín, que el normal afín del grafo en 0 es paralelo a la dirección x_3 y que $f_{uu}(0) = f_{vv}(0) = c > 0$, $f_{uv}(0) = 0$, con todo esto se tendra que la esfera con centro $(0,0,c^{-1})$ y radio c^{-1} tiene un contacto de segundo orden con el grafo de f en 0, y de (I.1.15), (I.2.5) y (I.2.7) se sigue que el normal afín del grafo en 0 es $(0,0,c^{1/2})$. Por tanto coincide con el normal afín de la esfera. Como la esfera y el grafo tienen un contacto de segundo orden en el origen y el resultado es valido en la esfera, también será valido para el grafo de f en el origen, lo que concluye la demostración.

CAPITULO II

FORMULAS DE VARIACION AFIN. SUPERFICIES AFINES-MAXIMALES.

Como ya se indicó en la Introducción, este Capítulo se dedica al estudio de la segunda fórmula de variación de una superficie afín-maximal con métrica afín indefinida, (en el caso convexo Calabi prueba, en [C1], que es negativa).

En este sentido, construimos una familia biparamétrica de superficies afines-maximales regladas $M(\beta,\gamma)$, y probamos que, localmente, toda superficie afín-maximal con métrica afín indefinida llana es afinmente equivalente a $M(\beta,\gamma)$ para algunas funciones C^{∞} β y γ.

Esta caracterización nos permite obtener algunos resultados sobre la segunda fórmula de variación de una superficie afín-maximal reglada, así como su interpretación geométrica a partir del número de vueltas alrededor del origen de la curva generatriz de la superficie.

II.1 ALGUNOS RESULTADOS BASICOS

Sea I un dominio acotado de $\mathbb{R}$ y sea $\beta:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces el operador

(II.1.1) $$L_\beta := \frac{d}{dv^2} + \beta,$$

actuando sobre las funciones que se anulan en el borde de I, ∂I, tiene un espectro discreto:

$$\lambda_1(I) < \lambda_2(I) <\ldots<\lambda_k(I)<\ldots \longrightarrow \infty.$$

Al número k tal que $\lambda_k(I) < 0 \le \lambda_{k+1}(I)$ se le llama **índice de L_β para I** y lo denotaremos por $\mathrm{ind}(L_\beta, I)$.

Asociado a L_β se tiene la forma cuadrática:

(II.1.2) $$Q_\beta(\phi,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \left\{\left(\phi'\right)^2 - \beta\,\phi^2\right\} dv,$$

donde ϕ es una función con soporte compacto en un dominio acotado de $\mathbb{R}$.

Es conocido que los valores propios, $\lambda_k(I)$, están dados por

(II.1.3) $$\lambda_k(I) = \min\left\{Q_\beta(\phi,\phi) \;\middle|\; \int_I \phi^2 dv=1,\ \int_I \phi\ \varphi_j(I)dv=0,\ j=1,\ldots,k-1\right\},$$

donde $\varphi_j(I)$ es una función propia de L_β asociada a $\lambda_j(I)$, $j=1,\ldots,k-1$, esto es,

$$L_\beta\varphi_j(I) + \lambda_j(I)\varphi_j(I) = 0.$$

Además, si I e I' son dominios acotados de $\mathbb{R}$, $I \subset I'$, entonces las funciones C^∞ con soporte compacto en I también lo son en I', y por (II.1.3) se tiene que $\mathrm{ind}(L_\beta, I) \le \mathrm{ind}(L_\beta, I')$.

DEFINICION II.1.1.- Se define el **índice de L_β**, que denotaremos por $\mathrm{ind}(L_\beta)$, como el limite de los índices de L_β para una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de dominios acotados de $\mathbb{R}$, tales que

$$I_n \subseteq I_{n+1} \text{ para todo } n\in\mathbb{N} \quad \text{y} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \mathbb{R}.$$

La teoría de Sturm (ver [CL]) permite obtener para operadores de la forma (II.1.1) el siguiente resultado:

TEOREMA II.1.2 (Comparación de Sturm).- *Sean w_1, w_2 soluciones no triviales de las ecuaciones $w_1'' + \beta_1(v)w_1 = 0$, $w_2'' + \beta_2(v)w_2 = 0$, con $\beta_2 \geq \beta_1$. Entonces entre dos ceros consecutivos de w_1 la función w_2 tiene un cero, salvo que $\beta_1 = \beta_2$ y w_2 sea un multiplo por una constante de w_1.*

Este resultado posibilita el poder mejorar en este caso el Teorema nodal para operadores de Schrödinger. Concretamente se tiene (ver [CH]).

TEOREMA II.1.3 (de dominios Nodales).- *Sea $\varphi_n(I)$ una función propia del operador L_β asociada al valor propio $\lambda_n(I)$, para un determinado dominio acotado I de $\mathbb{R}$. Entonces*

$$n = \textit{número de componentes conexas de } I - (\varphi_n^{-1}(0) \cap I).$$

Consideramos ahora una superficie afín $x:M \longrightarrow \mathcal{A}^3$ con normal afín ξ y elemento de volumen θ, esto es,

$$\theta(X,Y)=\det(X,Y,\xi)=(X,Y,\xi), \qquad X,\ Y \in TM.$$

Si ψ es una función C^∞ en M con soporte en un dominio compacto Ω de M ($\psi\in C_0^\infty(M)$), entonces para $t\in\mathbb{R}$ suficientemente pequeño,

$$x_t:M \longrightarrow \mathcal{A}^3, \qquad x_t = x + t\psi\xi$$

es también una superficie afín. A x_t se llama **deformación en la dirección normal afín** de x.

Si Θ_t es el elemento de volumen inducido por x_t sobre M, se define el área afín de $x_t(M)$ por

(II.1.4) $$A(t) = \int_M \Theta_t .$$

La primera fórmula de variación del área afín expresa geométricamente la condición de nulidad de la curvatura media afín. Concretamente se tiene (ver [C1], [VV]).

TEOREMA II.1.4.- *Sea* $x:M \longrightarrow \mathcal{A}^3$ *una superficie afín. Si* $x_t = x + t\psi\xi$ *es una deformación en la dirección normal afín de* x, *entonces*

$$\frac{d}{dt} A(t)\Big|_{t=0} = A'(0) = -3\int_M \psi H\Theta .$$

Observando el Teorema II.1.4, se sigue que $x:M \longrightarrow \mathcal{A}^3$ verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange ($A'(0)=0$) si y sólo si $H\equiv 0$.

En el caso de superficies afines convexas, Calabi [C1] estudió la segunda variación del área afín para deformaciones más generales y obtuvo el siguiente resultado:

TEOREMA II.1.5.- *La segunda variación del área afín de una superficie afín convexa con* $H\equiv 0$ *es negativa.*

Parece lógico, a raiz del resultado de Calabi, dar la siguiente:

DEFINICION II.1.6.- Una superficie afín se dice **afín-maximal** cuando tiene curvatura media afín identicamente cero.

OBSERVACIONES

II.1.- En el caso de superficies afines no convexas, esto es, cuando la métrica afín es indefinida, existen ejemplos que muestran que un resultado como él del Teorema II.1.5 no es posible. Concretamente, ver [VV], Verstraelen y Vrancken probaron que la segunda variación afín del helicoide no tiene signo.

II.2.- El helicoide está en la familia que forman las superficies afines-maximales regladas, familia cuya segunda fórmula de variación del área afín estudiaremos más adelante.

II.2 EJEMPLOS DE SUPERFICIES AFINES-MAXIMALES REGLADAS

Sea I un intervalo abierto de la recta real $\mathbb{R}$ y $\{g(v),f(v)\}$ una familia (diferenciable) de rectas, esto es, una correspondencia que asigna a cada $v\in I$ un punto $g(v)\in\mathcal{A}^3$ y un vector $f(v)\in\mathbb{R}^3$, $f(v)\neq 0$, dependiendo diferenciablemente (C^∞) de v.

Se considera la superficie reglada, $x(\mathbb{R}\times I)$, generada por la familia $\{g(v),f(v)\}$, esto es,

$$x(u,v) = g(v) + u\, f(v) \qquad (u,v)\in\mathbb{R}\times I. \tag{II.2.1}$$

De (II.2.1) se tiene,

$$\begin{array}{lll} x_u = f(v), & x_v = g'(v) + u\, f'(v), & \\ x_{uu} = 0, & x_{uv} = f'(v), & x_{vv} = g''(v) + u\, f''(v), \end{array} \tag{II.2.2}$$

y por tanto, $x(\mathbb{R}\times I)$ es una superficie afín (no degenerada) si y sólo si $x_{uv} = f'(v)$ es un campo de vectores transversal a M.

Usando (I.1.1), (I.1.2) y (II.2.2) se obtiene también que la métrica afín y el normal afín de $x(\mathbb{R}\times I)$ están dados por

$$\begin{array}{ll} h(x_u,x_u) = 0, & h(x_u,x_v)^2 = (f,g',f') \\ \xi = h(x_u,x_v)^{-1}(x_{uv} - \alpha\, x_u) & \end{array} \tag{II.2.3}$$

$$h(x_u,x_v)^2\alpha(u,v) = -\tfrac{1}{2}[(f,g'',f')+(f,g',f'')]+(f,uf'+g',f''). \tag{II.2.4}$$

Entonces, (I.1.1), (I.1.2), (II.2.3) y (II.2.4) permiten obtener

(II.2.5)
$$h(x_u,x_v)^3H = (f,f',f''), \qquad \det S = H^2, \qquad \tilde{\nabla}_{x_u} x_u = 0,$$
$$2h(x_u,x_v)^2\tilde{\nabla}_{x_u} x_v = [(f,f',uf''+g'')+(f,uf'+g',f'')]x_u,$$

y usando (I.1.14), (II.2.2), (II.2.3) y (II.2.5) se obtiene (ver [SS]) que una superficie afín reglada satisface,

(II.2.6) $$\kappa = H, \qquad J = 0.$$

De (II.2.3) y (II.2.6) se observa además que las superficies afines-maximales regladas tienen métrica afín indefinida llana.

Sean $\gamma(v)$ y $\beta(v)$, $v\in\mathbb{R}$, funciones C^∞ reales. Consideramos la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

(II.2.7) $$y'' + \beta(v)\, y = 0$$

Si $f_1(v)$ y $f_2(v)$ son dos soluciones de (II.2.7) tal que el Wronskiano asociado a (II.2.7) es -1, esto es,

(II.2.8) $$f_1\, f_2' - f_1'\, f_2 = -1,$$

y si $g_1(v)$ y $g_2(v)$ son dos funciones reales C^∞ verificando

(II.2.9) $$g_i'' = \gamma(v)\, f_i, \qquad i=1,2$$

entonces, de (II.2.3), (II.2.4), (II.2.5), (II.2.6), (II.2.7), (II.2.8) y (II.2.9) la superficie reglada dada por $M(\beta,\gamma) = x(\mathbb{R}^2)$, donde

(II.2.10) $$x(u,v) = \begin{pmatrix} u\, f_1(v) + g_1(v) \\ u\, f_2(v) + g_2(v) \\ v \end{pmatrix}$$

es una superficie afín en $\mathcal{A}^3$ con normal afín, métrica afín, endomorfismo afín de Weingarten, curvatura media afín, invariante Pick, curvatura afín de Gauss y conexión de Levi-Civita de la métrica afín dados, respectivamente, por

(II.2.11) $$\xi = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(II.2.12) $$h(x_u, x_u) = h(x_v, x_v) = 0, \quad h(x_u, x_v) = 1,$$

(II.2.13) $$Sx_u = 0, \quad Sx_v = \beta\, x_u,$$

(II.2.14) $$H = J = \kappa = 0,$$

(II.2.15) $$\tilde{\nabla}_{x_u} x_u = \tilde{\nabla}_{x_u} x_v = \tilde{\nabla}_{x_v} x_u = \tilde{\nabla}_{x_v} x_v = 0.$$

En consecuencia, $M(\beta,\gamma)$ es una superficie afín-maximal con métrica afín indefinida llana, y por (II.2.15) se tiene que,

(II.2.16) $M(\beta,\gamma)$ es afín completa.

OBSERVACIONES

II.3.- Si $\beta = 0$, tomando $f_1(v) = v$ y $f_2(v) = 1$ como soluciones de (II.2.7), se tiene que las funciones coordenadas x_i de la inmersión x satisfacen

(II.2.17) $$x_1 = x_2\, x_3 + \phi(x_3)$$

donde ϕ es una función C^∞ determinada por γ.

Además, por (II.2.12), (II.2.13) y (II.2.14), las superficies en la familia 1-paramétrica $M(0,\gamma)$ son esferas afines impropias con metrica afín indefinida llana.

Recíprocamente, Magid y Ryan, [MR], probaron que una esfera afín impropia con métrica afín indefinida llana es localmente afín equivalente a la superficie (II.2.17).

M(0,0) es un paraboloide hiperbólico y M(0,1) es congruente via una transformación afín a la superficie de Cayley (ver [NP2]).

II.4.- Si $\beta = 1$, la familia 1-paramétrica $M(1,\gamma)$ contiene como caso especial al helicoide $x(u,v) = (u\ \mathrm{sen}v,\ u\cos v,\ v)$.

II.5.- La superficie $x(u,v) = (u\ \mathrm{senh}v,\ u\cosh v,\ v)$ está contenida en la familia 1-paramétrica $M(-1,\gamma)$.

II.3 SUPERFICIES AFINES-MAXIMALES REGLADAS

Sea $x:M \longrightarrow \mathcal{A}^3$ una superficie afín con métrica afín indefinida h. Tomando localmente parámetros asintóticos u y v respecto de h, (ver [B] y [SS]), los coeficientes de la métrica están dados por

(II.3.1) $$h(x_u,x_u)=h(x_v,x_v)=0, \qquad h(x_u,x_v)=F,$$

donde F es una función C^∞ positiva.

De la ecuación de Codazzi (I.1.4), de (I.1.10), (I.1.11) y (II.3.1) se obtiene,

(II.3.2) $$K(x_u,x_u) = F^{-1}ax_v, \quad K(x_v,x_v) = F^{-1}bx_u, \quad K(x_u,x_v) = 0,$$

y

(II.3.3) $$\tilde{\nabla}_{x_u}x_u = F^{-1}F_u x_u, \quad \tilde{\nabla}_{x_u}x_v = \tilde{\nabla}_{x_v}x_u = 0, \quad \tilde{\nabla}_{x_v}x_v = F^{-1}F_v x_v,$$

para algunas funciones C^∞ a y b sobre M. Así, la curvatura afín de Gauss y el invariante Pick verifican

(II.3.4) $$\kappa F = -(\lg F)_{uv}$$

(II.3.5) $$JF^3 = ab.$$

Usando (I.1.9), (II.3.1), (II.3.2) y (II.3.3) las ecuaciones de estructura (I.1.1) se escriben:

(II.3.6) $$Fx_{uu} = F_u x_u + a x_v, \quad x_{uv} = F\xi, \quad Fx_{vv} = b x_u + F_v x_v.$$

Además, las condiciones de integrabilidad están dadas por:

(II.3.7) $$FH_u = F^{-2} a b_u - (F^{-1} a_v)_v, \quad FH_v = F^{-2} b a_v - (F^{-1} b_u)_u.$$

Blaschke probó, para el caso particular de superficies afines analíticas (esto es, superficies afines con la propiedad: "$J=0 \Rightarrow a\equiv 0$ o $b\equiv 0$", ver [B] pg. 125) el siguiente resultado.

TEOREMA II.3.1.- *Una superficie afín-maximal, analítica, con métrica afín indefinida llana, se puede expresar localmente en la forma* $x(u,v) = (x_1,x_2,x_3)$ *con*

$$x_1 = -vV_2 + \int (V_2V_3' - V_3V_2')du,$$

$$x_2 = vV_1 + \int (V_3V_1' - V_1V_3')du,$$

$$x_3 = \int (V_1V_2' - V_2V_1')du,$$

donde V_1, V_2 y V_3 *son funciones de u.*

La hipótesis de analiticidad impuesta por Blaschke al estudiar las superficies afines regladas, se puede evitar en el caso de superficies afines con invariante Pick identicamente nulo y curvatura media afín constante. Concretamente obtenemos el siguiente:

LEMA II.3.2.- *Sea* $x: M \longrightarrow \mathcal{A}^3$ *una superficie afín con métrica afín indefinida. Si* κ = H = *cte. entonces para un punto arbitrario* $m_0 \in M$ *existe un abierto* U, $m_0 \in U$, *tal que toda parametrización asintótica sobre U verifica que al menos una de las funciones a, b es identicamente nula.*

Demostración.- Tomamos una carta U con parámetros asintóticos u y v tal que $m_0 \in U$.

De (I.1.14), (II.3.5) y (II.3.7) se sigue

$$ab = 0,$$

$$(F^{-1}a_v)_v = F^{-2}ab_u = - F^{-2}a_u b = 0, \qquad \text{(II.3.8)}$$

$$(F^{-1}b_u)_u = F^{-2}ba_v = - F^{-2}ab_v = 0,$$

y por tanto

$$a(u,v) = a_1(u)Q(u,v) + a_2(u),$$

$$\text{(II.3.9)}$$

$$b(u,v) = b_1(v)P(u,v) + b_2(v),$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son funciones C^∞ dependiendo de una sola variable y P y Q son funciones C^∞ tales que $Q_v = F$ y $P_u = F$.

Suponemos que existe u_0 tal que $a_1(u_0) \neq 0$. Entonces, de (II.3.8) y (II.3.9) se tiene

$$b(u,v) = b_1(v)[P(u,v)-P(u_0,v)],$$

y por tanto, si $b_1(v_0) \neq 0$ para algún v_0, se sigue que

$$[P(u,v_0)-P(u_0,v_0)]a_1(u) = 0$$

y, derivando respecto de u, $F(u,v_0)a_1(u) + [P(u,v_0)-P(u_0,v_0)]a_1'(u) = 0$. Así $F(u,v_0)(a_1(u))^2 = 0$ y $a_1 \equiv 0$ en U, lo que contradice la suposición. En consecuencia $b \equiv 0$ en U, y se concluye el Lema en este caso.

El caso $a_1 \equiv 0$ y $a_2(u_0) \neq 0$ es análogo.

TEOREMA II.3.3.- *Sea M una superficie afín-maximal con métrica afín indefinida h. Entonces h es llana si y sólo si M es, localmente, afín equivalente a $M(\beta,\gamma)$ para algunas funciones diferenciables β y γ.*

Demostración.- Si h es llana ($\kappa = 0$), (II.3.4) implica $F(u,v) = F_1(u)F_2(v)$, (ver [S1]), así, tomando nuevos parámetros asintóticos

$$\bar{u} = \int_{u_0}^{u} F_1(\tau)d\tau, \qquad \bar{v} = \int_{v_0}^{v} F_2(\tau)d\tau$$

se obtiene $\bar{F} = 1$.

Si además H es identicamente nula en M. Por el Lema II.3.2 podemos tomar una carta U con parámetros asintóticos u, v tal que

$$a \equiv 0, \qquad F = 1,$$

$$b(u,v) = -u\,\beta(v) + \gamma(v).$$

Así, (II.3.6) puede escribirse como

$$\text{(II.3.10)} \qquad x_{uu} = 0, \quad x_{uv} = \xi, \quad x_{vv} = (-u\,\beta(v) + \gamma(v))\,x_u,$$

y por tanto

$$\text{(II.3.11)} \qquad \begin{aligned} &x(u,v) = u\,f(v) + g(v), \\ &u\,f''(v) + g''(v) = (-u\,\beta(v) + \gamma(v))\,f(v), \end{aligned}$$

donde $f,g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son funciones C^∞. Así,

$$\text{(II.3.12)} \qquad \begin{aligned} &f''(v) + \beta(v)f(v) = 0, \\ &g''(v) = \gamma(v)f(v). \end{aligned}$$

Sean $f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' + \beta(v)y = 0$ con $f_1 f_2' - f_1' f_2 = -1$. Entonces, (II.3.12) implica,

$$\text{(II.3.13)} \qquad \begin{aligned} f(v) &= c_1 f_1(v) + c_2 f_2(v), \\ g(v) &= c_1 g_1(v) + c_2 g_2(v) + c_3 v + c_4, \end{aligned}$$

donde $g_1'' = \gamma f_1$, $g_2'' = \gamma f_2$ y c_1, c_2, c_3 y c_4 son vectores constantes.

Ahora, de (I.1.2), (II.3.1), (II.3.10), (II.3.11) y (II.3.13) tenemos $\det(c_1, c_2, c_3) = 1$ y por una transformación afín llegamos a que

$$f(v) = \begin{pmatrix} f_1(v) \\ f_2(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g(v) = \begin{pmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \\ v \end{pmatrix},$$

y x es como en (II.2.10).

El recíproco se sigue de (II.2.12) y (II.2.14).

II.4 INDICE DE UNA SUPERFICIE AFIN-MAXIMAL REGLADA. INTERPRETACION GEOMETRICA.

El Teorema II.3.3 reduce el estudio de las fórmulas de variación afin de una superficie afín-maximal con métrica afín indefinida llana, al estudio de la familia $M(\beta, \gamma)$.

Por (II.2.10) y (II.2.11), una deformación en la dirección normal afín de $M(\beta, \gamma)$ es de la forma

$$\text{(II.4.1)} \qquad x_t(u,v) = \begin{pmatrix} u\, f_1(v) + g_1(v) + t\, \psi(u,v)\, f_1'(v) \\ u\, f_2(v) + g_2(v) + t\, \psi(u,v)\, f_2'(v) \\ v \end{pmatrix},$$

donde ψ es una función C^∞ con soporte en un dominio compacto Ω, entonces, de (I.1.1), (I.1.2), (II.1.4), (II.2.7), (II.2.9), (II.2.11) y (II.4.1),

$$A(t)=\int_{\Omega}\left[\left|t^2\psi_{uu}(u\beta\psi_u-\gamma\psi_u+\psi_{vv}-\beta\psi+2t\beta\psi_v\psi_u+t\beta'\psi\psi_u)-(1+t\psi_{uv}+t^2\beta\psi_u^2)^2\right|\right]^{\frac{1}{4}}dudv,$$

por tanto, se obtiene para la primera y segunda variación afín, (ver también [VV]),

$$A'(0)=0,$$

(II.4.2)

$$A''(0) = -\frac{3}{4}\int_{\Omega}\left\{\left(\psi_{uv}\right)^2 - \beta(v)\left(\psi_u\right)^2\right\}dudv.$$

PROPOSICION II.4.1.- *La segunda variación del area afín, bajo todas las deformaciones en la dirección normal afín, de $M(\beta,\gamma)$ tiene signo si y sólo si $ind(L_\beta) = 0$.*

Demostración.- Sea ϕ una función C^∞, $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, con soporte en un dominio compacto I. Consideramos en (II.4.1) $\psi(u,v) = \phi(u)\phi(v)$, entonces, de (II.4.2) y (II.1.2) tenemos

$$A''(0) = -\frac{3}{4}\,Q_\beta(\phi,\phi)\int_{\mathbb{R}}(\phi'(u))^2du.$$

Así, si la segunda variación tiene signo obtenemos que Q_β tiene signo y por tanto, $Ind(L_\beta)=0$.

Recíprocamente, consideremos como en (II.4.1) una deformación de $M(\beta,\gamma)$ en la dirección normal afín. De (II.4.2) y (II.1.2)

(II.4.3) $$A''(0) = -\frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}}Q_\beta(\phi^u,\phi^u)du,$$

donde $\phi^u(v) = \psi_u(u,v)$.

Si $Ind(L_\beta)=0$, entonces $Q_\beta(\phi,\phi) \geq 0$ para cualquier función ϕ con soporte compacto en un dominio acotado en $\mathbb{R}$, y de (II.4.3), $A''(0) \leq 0$.

DEFINICION II.4.2.- Definimos el **índice de $M(\beta,\gamma)$** como el índice del operador L_β, esto es, $\mathrm{ind}(M(\beta,\gamma)) = \mathrm{ind}(L_\beta)$.

OBSERVACION.

II.6.- El $\mathrm{ind}(M(\beta,\gamma))$ no indica como en el caso Euclídeo la dimensión del subespacio de funciones tales que $A''(0) > 0$, pues si φ es una autofunción de L_β asociada a un autovalor negativo, entonces $A''(0) > 0$ para cualquier $\psi(u,v) = \phi(u)\varphi(v)$ con $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

La interpretación geométrica del índice se verá más adelante.

Consideremos $N(\beta) = \{w \in C^\infty(\mathbb{R}): w''(v) + \beta(v)w(v) = 0,\ v \in \mathbb{R}\}$ y $w_1, w_2 \in N(\beta)$. Por el Teorema de comparación de Sturm (Teorema II.1.2), entre dos cualesquiera ceros consecutivos de w_1 la función w_2 tiene un cero salvo que $w_2 = \mu w_1$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$. Así, si existe $w \in N(\beta)$ con infinitos ceros entonces todas las funciones en $N(\beta)$ tienen infinitos ceros. En este caso se dice que (II.2.7) es una **ecuación oscilatoria.**

PROPOSICION II.4.3.- *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.- $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma)) = \infty$,

2.- (II.2.7) es una ecuación oscilatoria.

Demostración.- Suponemos que $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma)) = \infty$, entonces existe una sucesión creciente y exhaustiva de dominios acotados $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathrm{Ind}(L_\beta, I_n) = n$, esto es,

$$\lambda_1(I_n) < \lambda_2(I_n) < \ldots < \lambda_n(I_n) < 0 \le \lambda_{n+1}(I_n) < \ldots$$

Sea $\varphi_n(I_n)$ una función propia asociada al valor propio $\lambda_n(I_n)$. Por el Teorema II.1.3, $\varphi_n(I_n)$ tiene $n+1$ ceros en $\overline{I}_n$, y del Teorema II.1.2 se obtiene que cualquier función en $N(\beta)$ tiene al menos n ceros en I_n. Como $n \to \infty$, (II.2.7) es una ecuación oscilatoria.

Recíprocamente, si (II.2.7) es una ecuación oscilatoria y $w \in N(\beta)$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ existe un dominio acotado $I_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que w es una función propia de L_β con $n+2$ ceros en $\bar{I}_n$. Por el Teorema nodal (Teorema II.1.3) w es una función propia asociada al valor propio $\lambda_{n+1}(I_n)=0$, así $\mathrm{Ind}(L_\beta, I_n)=n$ y se concluye la demostración.

OBSERVACIONES.

II.7.- El resultado obtenido por Verstraelen y Vrancken [VV], sobre el signo de la segunda variación del helicoide es un caso particular de las Proposiciones II.4.1 y II.4.3.

II.8.- Por la Proposición II.4.1 existen muchos ejemplos de superficies afines-maximales que tienen segunda variación negativa.

Consideramos la curva generatriz de $M(\beta,\gamma)$, esto es, la curva C^∞ $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(v)=(f_1(v),f_2(v))$. De (II.2.8) se tiene que $f(\mathbb{R})$ no pasa por el origen $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$, por ello, tomando

$$p(v)=f_1(v)/[(f_1^2(v)+f_2^2(v))^{1/2}], \qquad q(v)=f_2(v)/[(f_1^2(v)+f_2^2(v))^{1/2}],$$

una determinación del ángulo que forman el eje de abcisas y el vector de posición, $f(v)$, está dado por

$$\text{(II.4.4)} \qquad \theta(v) = \theta_0 + \int_{v_0}^{v} (pq'-qp')dv = \theta_0 - \int_{v_0}^{v} \frac{1}{f_1^2(v)+f_2^2(v)}dv,$$

donde $(p(v_0),q(v_0)) = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$. Así,

$$\text{(II.4.5)} \qquad p(v) = \cos\theta(v), \qquad q(v) = \operatorname{sen}\theta(v), \qquad v\in\mathbb{R}.$$

Si suponemos que $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma)) < \infty$, la Proposición II.4.3 implica que f_1 y f_2 tienen un número finito de ceros en $\mathbb{R}$. Además, de (II.4.4), θ es estrictamente decreciente. Así, existen θ_-, $\theta_+\in\mathbb{R}$, tal que

(II.4.6) $$\theta_- = \lim_{v \to -\infty} \theta(v), \qquad \theta_+ = \lim_{v \to +\infty} \theta(v).$$

Sea $V(f) = \theta_- - \theta_+$ la variación del ángulo polar de f, V(f) no depende de la selección de $\theta(v)$, y se tendrá que

(II.4.7) $$\theta_- = \theta_+ + W(f)2\pi + \theta_1$$

para algún entero W(f) y algún $\theta_1 \in]0,2\pi]$. Este entero W(f) es llamado el **número de vueltas** de la curva f alrededor del origen.

Con estas notaciones se tiene:

LEMA II.4.4.- *Si $Ind(M(\beta,\gamma)) < \infty$ y $w \in N(\beta)$. Entonces*

$$Ind(M(\beta,\gamma)) \le \#w^{-1}(0) = (\text{número de ceros de } w) \le Ind(M(\beta,\gamma)) + 1.$$

Demostración.- Por la Proposición II.4.3, $w^{-1}(0)$ está contenido en un intervalo acotado I_w. Si $Ind(M(\beta,\gamma)) = k$, existe un intervalo acotado I, $I \supset I_w$, $I \neq I_w$, tal que

$$\lambda_k(I) < 0 \le \lambda_{k+1}(I).$$

Sean $\varphi_k(I)$ y $\varphi_{k+1}(I)$ funciones propias asociadas a $\lambda_k(I)$ y $\lambda_{k+1}(I)$, respectivamente. Usando el Teorema II.1.2,

$$(\text{número de ceros de } \varphi_k(I) \text{ en } \bar{I}) - 1 \le \#w^{-1}(0) \le$$

$$\le (\text{número de ceros de } \varphi_{k+1}(I) \text{ en } I_w) + 1,$$

y por el Teorema II.1.3, $k \le \#w^{-1}(0) \le k+1$, lo que concluye la demostración.

TEOREMA II.4.5.- *Sea $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función parte entera de un número real, esto es la función definida por $E(v)=k$, donde k es un entero tal que $v \in [k,k+1[$. Si $Ind(M(\beta,\gamma)) < \infty$, entonces*

$$W(f) = E\left(\frac{Ind(M(\beta,\gamma))}{2}\right).$$

Demostración.- Consideramos $\bar{f}_1(v) = f_1(v)\mathrm{sen}\theta_- - f_2(v)\cos\theta_-$, entonces $\bar{f}_1 \in N(\beta)$, y usando (II.4.5) y (II.4.7) tenemos

$$\bar{f}_1(v)=0 \iff \theta(v)=\theta_- - k\pi > \theta_+ = \theta_- - W(f)2\pi - \theta_1,$$

para algún entero positivo k, donde $\theta_1 \in]0,2\pi]$.

Así $k < 2W(f) + \theta_1/\pi$ y

$$\#\bar{f}_1^{-1}(0) = 2W(f) + i, \qquad \text{para algún } i\in\{0,1\}. \tag{II.4.8}$$

Ahora, el Lema II.4.4 y (II.4.8) dan

$$E\left(\frac{\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))}{2}\right) \le W(f) \le E\left(\frac{\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))+1}{2}\right). \tag{II.4.9}$$

Si $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))$ es un entero par, el Teorema se sigue de (II.4.9).

Suponemos que $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))=2m+1$, para algún entero m. Entonces, de (II.4.9), $W(f)=m$, o $W(f)=m+1$.

Se supone ahora que, $W(f) = m+1$, entonces, por el Lema II.4.4 y (II.4.8), $i=0$ y $\theta_1\in]0,\pi]$. Considerando la función

$$\bar{f}_2(v) = f_1(v)\mathrm{sen}(\theta_- - \theta_1/2) - f_2(v)\cos(\theta_- - \theta_1/2),$$

se tiene que $\bar{f}_2(v)=0 \iff \theta(v)=\theta_- - \theta_1/2 - k\pi > \theta_+ = \theta_- - W(f)2\pi - \theta_1$, para algún entero k, lo que implica $0 < k\pi + \theta_1/2 < 2W(f)\pi + \theta_1$. Por tanto,

$$\#\bar{f}_2^{-1}(0) = 2W(f) + 1 = 2m + 3$$

y esto no es posible (ver Lema II.4.4).

Así $W(f)=m$ y se concluye la demostración del Teorema.

OBSERVACIONES

II.9.- Cuando β es una constante positiva, (II.2.7) es una ecuación oscilatoria, esto es $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))=\infty$. Sin embargo, existen funciones C^{∞} positivas β, (como la función $\beta(v)=(1+v^2)^{-2}$), tal que $\mathrm{Ind}(M(\beta,\gamma))<\infty$.

II.10.- Consideramos una función C^{∞} $\beta(v)$ tal que $-1\leq\beta(v)\leq 4k^2$ y

$$\beta(v)=\begin{cases} 4k^2, & v\in[0,\pi], \\ -1, & v\notin\,]-\pi/2k,\pi(2k+1)/2k[, \end{cases}$$

para algún entero positivo k. Entonces la superficie afín $M(\beta,\gamma)$ verifica que $W(f)=k$.

CAPITULO III

SUPERFICIES AFINES CON CURVATURA MEDIA AFIN Y CURVATURA AFIN DE GAUSS CONSTANTES

En este Capítulo se clasifican localmente las superficies afines con curvatura media afín H y curvatura afín de Gauss κ constantes, salvo el caso $\kappa = \frac{1}{3}H \neq 0$, para el que se dan resultados parciales.

Concretamente, si estos dos invariantes afines coinciden se obtienen las cuádricas y algunas familias de superficies afines regladas.

Cuando son diferentes, tras dar una base local adecuada de campos de vectores tangentes en cierto entorno de cada punto de la superficie afín, probamos que $\kappa = \frac{1}{3}H$ o la curvatura afín de Gauss-Kronecker es constante, y en este caso obtenemos las esferas afines llanas.

III.1. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Sea M una superficie afín en $\mathcal{A}^3$ con métrica afín h, en un entorno U de cualquier punto de M consideramos una base de campos de vectores ortonormales $\{E_1,E_2\}$, esto es,

$$h(E_1,E_1) = 1, \quad h(E_1,E_2) = 0, \quad h(E_2,E_2) = \varepsilon, \tag{III.1.1}$$

donde $\varepsilon = +1$ ó $\varepsilon = -1$ según que la métrica afín h sea definida o indefinida.

Por (III.1.1), uno puede escribir

$$\tilde{\nabla}_{E_1}E_1 = pE_2 \qquad \tilde{\nabla}_{E_2}E_2 = qE_1,$$

$$K(E_1,E_1) = aE_1 + bE_2, \tag{III.1.2}$$

$$SE_1 = (H+\alpha)E_1 + \beta E_2,$$

para algunas funciones diferenciables p, q, a, b, α y β definidas en el entorno U. Así, usando (I.1.4), (I.1.6), (I.1.10), (I.1.11), (III.1.1) y (III.1.2), se obtiene

$$\tilde{\nabla}_{E_1}E_2 = -\varepsilon pE_1 \qquad \tilde{\nabla}_{E_2}E_1 = -\varepsilon qE_2,$$

$$K(E_1,E_2) = \varepsilon bE_1 - aE_2, \quad K(E_2,E_2) = -\varepsilon aE_1 - \varepsilon bE_2, \tag{III.1.3}$$

$$SE_2 = \varepsilon\beta E_1 + (H-\alpha)E_2.$$

De (I.1.13), (I.1.14), (III.1.1), (III.1.2) y (III.1.3) se tiene también que la curvatura afín de Gauss y el invariante Pick de M están dados por

$$\kappa = H + 2(a^2+\varepsilon b^2) = \varepsilon q_1 + p_2 - \varepsilon p^2 - q^2,$$

$$J = 2\mathrm{traza}K_{E_1}K_{E_1} = 2(a^2+\varepsilon b^2), \tag{III.1.4}$$

y análogamente, por (I.1.9), (III.1.2) y (III.1.3),

$$\bar{\nabla}_{E_1}E_1 = aE_1 + (b+p)E_2, \qquad \bar{\nabla}_{E_2}E_2 = (q-\varepsilon a)E_1 - \varepsilon bE_2,$$

$$\bar{\nabla}_{E_1}E_2 = \varepsilon(b-p)E_1 - aE_2, \qquad \bar{\nabla}_{E_2}E_1 = \varepsilon bE_1 - (a+\varepsilon q)E_2,$$

así, la ecuación de Gauss (I.1.3) y la ecuación de Codazzi (I.1.5) las podemos escribir como

$$\text{(III.1.5)} \qquad \begin{aligned} &\varepsilon b_1 - a_2 = -\varepsilon\beta - 3(\varepsilon pa-qb), \\ &a_1 + b_2 = -\alpha + 3(\varepsilon bp+\varepsilon qa), \end{aligned}$$

$$\text{(III.1.6)} \qquad \begin{aligned} &\varepsilon\beta_1 - (H+\alpha)_2 = 2(\varepsilon\alpha b-\varepsilon\beta a+q\beta-\varepsilon p\alpha), \\ &\beta_2 + (\alpha-H)_1 = 2(\varepsilon\beta b+\alpha a+\varepsilon p\beta+\varepsilon q\alpha), \end{aligned}$$

donde por $(\ )_1$ y $(\ )_2$ denotamos las derivadas con respecto a E_1 y E_2, respectivamente.

OBSERVACIONES

III.1.- Si M es una superficie afín convexa con $\kappa = H$, es inmediato de (I.1.11), (III.1.2), (III.1.3) y (III.1.4) obtener que la forma cúbica es identicamente nula y, por tanto, usando el Teorema I.1.3, M está contenida en una cuádrica.

III.2.- Para clasificar las superficies afines con métrica afín indefinida y $\kappa = H =$ cte. usaremos parámetros asintóticos como en el caso de las superficies afines-maximales llanas (Teorema II.3.3).

III.3.- Si $\kappa \neq H$ y la métrica afín es definida, entonces de (III.1.4) se sigue que $\kappa > H$.

III.4.- Si $\kappa \neq H$ y la métrica afín es indefinida, se puede suponer que $\kappa > H$, ya que cambiando el signo del normal afín se preserva la signatura de la métrica afín y se cambia el signo de κ y H. En este caso, se obtiene la misma superficie pero con distinta orientación.

Estudiamos por tanto el caso en que $\kappa > H$, esto es, superficies afines con invariante Pick positivo.

LEMA III.1.1.- *Sea M una superficie afín con invariante Pick positivo* ($J=\kappa-H>0$). *Entonces para cualquier punto m de M existe un entorno U de m y una base local de campos de vectores ortonormales* $\{E'_1,E'_2\}$ *tal que* $h(K(E'_1,E'_1),E'_2) \equiv 0$ *sobre U.*

Demostración.- Introducimos la siguiente notación, usada por Hahn [H]

$$c(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta) \text{ si } \varepsilon = 1 \\ \cosh(\theta) \text{ si } \varepsilon = -1 \end{cases} \qquad t(\theta) = \begin{cases} \tan(\theta) \text{ si } \varepsilon = 1 \\ \tanh(\theta) \text{ si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

$$s(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\theta) \text{ si } \varepsilon = 1 \\ \operatorname{senh}(\theta) \text{ si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Sea $\{E_1,E_2\}$ una base ortonormal de campos de vectores definidos en un entorno U de m. Entonces, para toda función θ sobre U, $\{E_1^\theta,E_2^\theta\}$ donde

$$\text{(III.1.7)} \qquad E_1^\theta = c(\theta)E_1 + \varepsilon s(\theta)E_2, \qquad E_2^\theta = -s(\theta)E_1 + c(\theta)E_2$$

es también una base ortonormal de campos de vectores sobre U, y por (III.1.2) y (III.1.3) se tendrá

$$\begin{pmatrix} a^\theta \\ b^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\theta) & s(\theta) \\ -\varepsilon s(\theta) & c(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac^2(\theta) + 2bs(\theta)c(\theta) - \varepsilon as^2(\theta) \\ bc^2(\theta) - 2a\varepsilon s(\theta)c(\theta) - \varepsilon bs^2(\theta) \end{pmatrix}$$

donde $a^\theta = h(K(E_1^\theta,E_1^\theta),E_1^\theta)$ y $b^\theta = h(K(E_1^\theta,E_1^\theta),\varepsilon E_2^\theta)$. Así, usando las identidades

$$s(3\theta) = 3s(\theta) - 4\varepsilon s^3(\theta), \qquad c(3\theta) = 4c^3(\theta) - 3c(\theta),$$

se tiene

$$\text{(III.1.8)} \qquad a^\theta = ac(3\theta) + bs(3\theta), \qquad b^\theta = -\varepsilon as(3\theta) + bc(3\theta).$$

Como $J = \kappa - H > 0$, de (III.1.4) a^{θ} y b^{θ} no se anulan en el mismo punto y por tanto, de (III.1.8) se puede suponer que a no se anula en un entorno V de m, $V \subseteq U$, (de no ser así tomamos $\{E_1^{\pi/2},E_2^{\pi/2}\}$ en lugar de $\{E_1,E_2\}$).

Teniendo ahora en cuenta que de (III.1.4) y de ser $\kappa > H$, $1 > -b^2/\varepsilon a^2$ en V, se sigue entonces, por (III.1.7) y (III.1.8), que la base $\{E_1',E_2'\} = \{E_1^{\theta'},E_2^{\theta'}\}$ con $\theta' = \frac{1}{3}\mathrm{arct}\left(\frac{b}{\varepsilon a}\right)$ satisface

$$h(K(E_1',E_1'),E_2') = 0 \text{ sobre } V,$$

lo que concluye la demostración.

Usando el Lema III.1.1, es inmediato, de (III.1.2), (III.1.4) y (III.1.5), que una esfera afín con curvatura afín de Gauss κ constante y $\kappa \neq H$, verifica $p = q \equiv 0$ y por tanto tiene métrica afín llana ($\kappa = 0$).

En consecuencia, se tiene que una esfera afín convexa con curtatura afín de Gauss constante y $\kappa \neq H$, tiene su métrica afín, su operador afín de Weingarten y su forma cúbica como los de la superficie $x^1x^2x^3$ = cte. > 0, así el Teorema fundamental afín (ver [B]) y la Observación III.1 permiten dar el siguiente resultado (ver también [K], [LP]).

TEOREMA III.1.2.- *Sea M una esfera afín convexa con curvatura afín de Gauss constante. Entonces M está en una cuádrica o en la imagen afín de la superficie $x^1x^2x^3 = c$, con c constante positiva.*

En el caso no convexo, integrando las ecuaciones de estructura se puede conseguir el siguiente resultado (ver [MR], [S1]).

TEOREMA III.1.3.- *Sea M una esfera afín con métrica afín indefinida y curvatura afín de Gauss constante $\kappa \neq H$. Entonces M está en la imagen afín de la superficie $((x^1)^2+(x^2)^2)x^3$ = cte. > 0.*

III.2 CLASIFICACION

Sea M una superficie afín con curvatura media afín y curvatura afín de Gauss constantes.

Si además $\kappa > H$ entonces, por el Lema III.1.1, para cualquier punto m de M existe una base local de campos de vectores ortonormales $\{E_1, E_2\}$ sobre un entorno U de m tal que la función b de (III.1.2) es identicamente nula en U. Así, (III.1.4) se escribe como

$$\kappa = H + 2a^2 = \varepsilon q_1 + p_2 - \varepsilon p^2 - q^2, \qquad \text{(III.2.1)}$$
$$J = 2a^2,$$

donde a es una constante no nula. Además, la ecuación (III.1.5) da

$$\alpha = 3\varepsilon q a, \qquad \beta = -3pa, \qquad \text{(III.2.2)}$$

y por consiguiente (III.1.6) se puede expresar en términos de p y q como,

$$p_1 + q_2 = 4\varepsilon pq - 2pa, \qquad \text{(III.2.3)}$$

$$q_1 - \varepsilon p_2 = -2p^2 + 2\varepsilon q^2 + 2aq, \qquad \text{(III.2.4)}$$

Ahora, de (III.2.1) y (III.2.4), se sigue también

$$2\varepsilon q_1 = \kappa + 2\varepsilon a q + 3q^2 - \varepsilon p^2, \qquad \text{(III.2.5)}$$

$$2p_2 = \kappa - 2\varepsilon a q - q^2 + 3\varepsilon p^2, \qquad \text{(III.2.6)}$$

y con las notaciones anteriores de tiene:

LEMA III.2.1.- *Sea M una superficie afín con κ y H constantes y $\kappa > H$. Entonces*

$$3(p_1 - q_2)^2 = (a^2 + \kappa)(2\varepsilon\kappa - 12(p^2 + \varepsilon q^2)).$$

Demostración.- Derivando (III.2.3) respecto a E_1 y (III.2.5) respecto a E_2 se tiene

$$\text{(III.2.7)}\qquad \begin{aligned} &p_{11} + q_{21} = 4\varepsilon p_1 q + 4\varepsilon p q_1 - 2p_1 a,\\ &q_{12} = a q_2 + 3\varepsilon q q_2 - p p_2. \end{aligned}$$

Como, por (III.1.3)

$$\text{(III.2.8)}\qquad q_{21} - q_{12} = \left(\tilde{\nabla}_{E_1} E_2\right)(q) - \left(\tilde{\nabla}_{E_2} E_1\right)(q) = -\varepsilon p q_1 + \varepsilon q q_2,$$

entonces, de (III.2.3), (III.2.5), (III.2.6), (III.2.7) y (III.2.8) se sigue que

$$\text{(III.2.9)}\qquad p_{11} = 2pa^2 - ap_1 + 4\varepsilon q p_1 + 3p\kappa + 7pq^2 - \varepsilon p^3 - 4\varepsilon q q_2.$$

Derivando ahora (III.2.3) y (III.2.9) respecto a E_2 y (III.2.6) respecto a E_1 se obtiene

$$\begin{aligned} p_{112} = {} & 2p_2 a^2 - ap_{12} + 4\varepsilon q_2 p_1 + 4\varepsilon q p_{12} + 3p_2\kappa + 7p_2 q^2 + \\ & + 14pqq_2 - 3\varepsilon p^2 p_2 - 4\varepsilon q_2^2 - 4\varepsilon q q_{22}, \end{aligned}$$

$$\text{(III.2.10)}\qquad \begin{aligned} &p_{12} + q_{22} = -2p_2 a + 4\varepsilon p_2 q + 4\varepsilon p q_2,\\ &p_{21} = -\varepsilon a q_1 - q q_1 + 3\varepsilon p p_1, \end{aligned}$$

y análogamente, por (III.1.3)

$$\text{(III.2.11)}\qquad p_{12} - p_{21} = -\varepsilon q p_2 + \varepsilon p p_1.$$

Así, de (III.2.3), (III.2.5), (III.2.6), (III.2.10) y (III.2.11) se sigue que

$$\text{(III.2.12)}\qquad p_{112} = \frac{3}{2}a^2\kappa - \varepsilon a^3 q - \frac{31}{2}a^2q^2 + \frac{5}{2}\varepsilon a^2 p^2 - 2\varepsilon a q\kappa + 20qap^2 -$$

$$- 6\varepsilon aq^3 - 4\varepsilon app_1 + 4\varepsilon q_2p_1 - 14q^2\kappa - 20\varepsilon q^2p^2 - \frac{7}{2}q^4 +$$

$$+ 32qpp_1 + \frac{3}{2}\kappa^2 + 3\varepsilon p^2\kappa - 2pqq_2 - \frac{9}{2}p^4 - 4\varepsilon q_2^2.$$

Ahora bien, de (III.1.3),

$$p_{112} - p_{121} = - \varepsilon qp_{12} + \varepsilon pp_{11}, \tag{III.2.13}$$

así, usando (III.2.9), (III.2.10), (III.2.11) y (III.2.13) se tiene

$$\begin{aligned} p_{112} = & - 2q^2\kappa + 36\varepsilon q^2p^2 - \frac{7}{2}q^4 + 14qpp_1 - 2\varepsilon aq\kappa - \frac{7}{2}a^2q^2 - \\ & - 6\varepsilon aq^3 + \frac{21}{2}\varepsilon a^2p^2 - 4\varepsilon app_1 + 15\varepsilon p^2\kappa - \frac{9}{2}p^4 - \frac{1}{2}\kappa^2 - \\ & - 20pqq_2 + 4\varepsilon p_1^2 - \frac{1}{2}a^2\kappa - \varepsilon a^3q. \end{aligned} \tag{III.2.14}$$

El Lema se concluye entonces de (III.2.3), (III.2.12) y (III.2.14).

LEMA III.2.2.- *Sea M una superficie afín con* H *y* κ *constantes y* $\kappa > H$. *Entonces* $\kappa = \frac{1}{3}H$ *ó detS es constante.*

Demostración.

Si $\kappa + a^2 = 0$ entonces, de (III.2.1), $\kappa = \frac{1}{3}H$.

Consideramos ahora el caso $\kappa + a^2 \neq 0$. Sea $\delta = +1$ ó $\delta = -1$ según que $a^2+\kappa > 0$ ó $a^2+\kappa < 0$ respectivamente, entonces, $\delta(a^2+\kappa) > 0$. Denotamos por $c = \pm(\delta(a^2+\kappa))^{1/2}$, de (III.2.3) y el Lema III.2.1 se sigue

$$2p_1 = - 2pa + 4\varepsilon pq + c\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2} \tag{III.2.15}$$

$$2q_2 = - 2pa + 4\varepsilon pq - c\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2} \tag{III.2.16}$$

donde $R = p^2 + \varepsilon q^2$.

Usando (III.1.2), (III.1.3) y (III.2.2) se obtiene

(III.2.17) $\quad \det S = H^2 - 9\varepsilon a^2 R,$

y por tanto la curvatura afín de Gauss-Kronecker será constante cuando lo sea la función R.

Derivando (III.2.6) respecto a E_1 y (III.2.15) respecto a E_2 se tiene

$$2(p_{12} - p_{21}) = \frac{1}{2}c\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{-1/2}(-8\delta pp_2 - 8\delta\varepsilon qq_2) - 2p_2 a +$$

$$+ 4\varepsilon p_2 q + 4\varepsilon pq_2 + 2\varepsilon aq_1 + 2qq_1 - 6\varepsilon pp_1,$$

entonces, de (III.2.11),

(III.2.18) $$0 = -4c\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{-1/2}(\delta pp_2 + \delta\varepsilon qq_2) - 2p_2 a + 6\varepsilon p_2 q +$$

$$+ 4\varepsilon pq_2 + 2\varepsilon aq_1 + 2qq_1 - 8\varepsilon pp_1.$$

Ahora, sustituyendo (III.2.5), (III.2.6), (III.2.15) y (III.2.16) en (III.2.18) y multiplicando por $\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2}$ se obtiene

$$0 = 6\varepsilon q(a^2+\kappa)\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2} - 6c\delta p\kappa + 18c\delta\varepsilon p^3 +$$

$$+ 18c\delta q^2 p + 8c\delta\varepsilon qpa,$$

y como estamos suponiendo que la constante $c = \pm(\delta(a^2+\kappa))^{1/2}$ es no nula, la expresión anterior se reduce a

(III.2.19) $$0 = 6\varepsilon qc\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2} - 6p\kappa + 18\varepsilon p^3 + 18q^2 p + 8\varepsilon qpa.$$

Análogamente, derivando (III.2.5) respecto a E_2 y (III.2.16) respecto a E_1 se tiene

$$2(q_{12} - q_{21}) = 2aq_2 + 6\varepsilon qq_2 - 2pp_2 + 2p_1 a - 4\varepsilon p_1 q - 4\varepsilon pq_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}c\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{-1/2}(-8\delta pp_1 - 8\delta\varepsilon qq_1),$$

y por (III.2.5), (III.2.6), (III.2.8), (III.2.15) y (III.2.16),

(III.2.20) $$0 = -6pc\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2} - 6q\kappa + 18\varepsilon qp^2 + 18q^3 + 4p^2 a - 4\varepsilon q^2 a.$$

Multiplicando (III.2.19) por p, (III.2.20) por εq y sumando se sigue

(III.2.21) $$3R\kappa - 9\varepsilon R^2 = 4\varepsilon qp^2 a + 2qa(\varepsilon p^2 - q^2),$$

y de forma similar, al multiplicar (III.2.19) por q, (III.2.20) por p y restar se tiene

(III.2.22) $$3Rc\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta\kappa - 4\delta R\right)^{1/2} = - 4\varepsilon q^2 pa + 2pa(p^2 - \varepsilon q^2).$$

Sumando ahora el cuadrado de (III.2.21) con el cuadrado de (III.2.22) por ε, se obtiene

$$0 = R^2(81R^2 - (90\varepsilon\kappa + 40\varepsilon a^2)R + 15\kappa^2 + 6\kappa a^2)$$

y R es constante por ser la raiz de un polinomio con coeficientes constantes. Así, el Lema se concluye de (III.2.17).

OBSERVACIONES

III.5.- Para la obtención de (III.2.19) y (III.2.20) es fundamental que $\kappa \neq \frac{1}{3}H$, pues si no al sustituir (III.2.5), (III.2.6), (III.2.15) y (III.2.16) en (III.2.18) se obtiene una identidad.

III.6.- Existen resultados para superficies afines con curvatura media afín y curvatura afín de Gauss-Kronecker constantes (ver [B], [V]), que combinados con la clasificación local de esferas afines con curvatura afín de Gauss constante (ver [S1]) y nuestro Lema III.2.2, permiten clasificar las superficies afines con curvatura media afín y curvatura afín de Gauss constantes, salvo $\kappa = \frac{1}{3}H$. Sin embargo, damos una demostración directa sin recurrir a ellos.

TEOREMA III.2.3.- *Sea M una superficie afín convexa con curvatura media afín, H, y curvatura afín de Gauss, κ, constantes. Entonces* $\kappa = \frac{1}{3}H$ *ó M se queda en una cuádrica ó en la imagen afín de la superficie* $Q(c,2) = \{(x^1,x^2,x^3)\colon x^1x^2x^3=c\}$ *para alguna constante* $c > 0$.

Demostración.

Si $\kappa = H$ es conocido, (ver Observación III.1), que M está en una cuádrica.

Si $\kappa \neq H$ y $\kappa \neq \frac{1}{3}H$ entonces, de (III.1.4) y del Lema III.2.2, la curvatura afín de Gauss-Kronecker es constante. Además, de (III.2.17), (III.2.21) y (III.2.22) se tiene que $R = p^2 + q^2$ es constante y

$$\text{(III.2.23)}\qquad \begin{aligned} 2qp^2 + q(p^2-q^2) &= c_1, \\ 2q^2p - p(p^2-q^2) &= c_2, \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Multiplicando la primera ecuación de (III.2.23) por p, la segunda por q y sumando se tiene

$$\text{(III.2.24)}\qquad (2qR - c_1)p = c_2q.$$

Análogamente, multiplicando la primera ecuación por q, la segunda por p y restando se sigue

$$\text{(III.2.25)}\qquad (p^2-q^2)R = c_1q - c_2p.$$

Así, al sustituir (III.2.24) en (III.2.25) por $(2qR - c_1)^2$, obtenemos

$$c_2^2q^2R - (2qR - c_1)^2q^2R = (2qR - c_1)^2c_1q - (2qR - c_1)c_2^2q$$

lo que prueba que q es constante y en consecuencia también p.

Como p y q son constantes el Lema III.2.1 y (III.2.1) permiten obtener que $p = q = 0$ y por tanto, de (III.1.2), (III.1.3), (III.2.1) y (III.2.2), M es una esfera afín convexa con curvatura afín de Gauss identicamente nula. El Teorema se concluye entonces del Teorema III.1.2.

TEOREMA III.2.4.- *Sea M una superficie afín no convexa con curvatura media afín* H *y curvatura afín de Gauss* κ *constantes. Entonces* $\kappa = \frac{1}{3}H$ *ó M está en la imagen afín de la superficie* $((x^1)^2 + (x^2)^2)x^3 = cte. > 0$ *ó en la superficie reglada* $x(u,v) = uf(v) + g(v)$ *donde* $f,g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *son funciones* C^∞ *verificando* $det(f,g',f') = 1$ *y* $det(f,f',f'') = H$. *En particular, si* $H = 0$ *M está en una superficie reglada de la forma* $M(\beta,\gamma)$ *dada en II.2.*

Demostración.

Si $\kappa \neq H$ y $\kappa \neq \frac{1}{3}H$, podemos suponer, (ver Observación III.4), sin perdida de generalidad que $\kappa > H$.

Como en la demostración del Teorema III.2.3, de (III.1.4), (III.2.17), (III.2.21), (III.2.22) y el Lema III.2.2 se tiene

$$\text{(III.2.26)} \qquad \begin{aligned} 2qp^2 + q(p^2+q^2) &= c_3, \\ 2q^2p + p(p^2+q^2) &= c_4, \end{aligned}$$

donde c_3 y c_4 son constantes.

Multiplicando la primera ecuación de (III.2.26) por p, la segunda por q y restando se obtiene

$$\text{(III.2.27)} \qquad (2qR - c_3)p = - c_4q,$$

donde $R = p^2 - q^2$.

Análogamente, multiplicando la primera ecuación por q, la segunda por p y restando se sigue

$$\text{(III.2.28)} \qquad -(p^2+q^2)R = c_3 q - c_4 p,$$

sustituyendo ahora (III.2.27) en (III.2.28) por $(2qR - c_3)^2$,

$$-c_4^2 q^2 R - (2qR - c_3)^2 q^2 R = (2qR - c_3)^2 c_3 q + (2qR - c_3) c_4^2 q,$$

y por tanto, la función q es constante y en consecuencia p. Entonces, de (III.2.1) y del Lema III.2.1 se sigue que $R = p^2 - q^2 = 0$, y las ecuaciones (III.2.21) y (III.2.22) se reducen a $qp^2 = 0 = pq^2$, y por tanto

$$p = q = 0.$$

Al ser p y q identicamente cero, de (III.1.2), (III.1.3), (III.2.1) y (III.2.2), se tiene que M es una esfera afín con métrica afín indefinida llana, y así, por el Teorema III.1.3, M está en la imagen afín de la superficie $((x^1)^2 + (x^2)^2)x^3 = \text{cte.} > 0$.

Si $\kappa = H = \text{cte.}$, por el Lema II.3.2, para cualquier punto de M existe un entorno suyo con parámetros asintóticos u y v tal que (II.3.6) se escribe

$$Fx_{uu} = F_u x_u,$$

$$\text{(III.2.29)} \qquad x_{uv} = F\xi,$$

$$Fx_{vv} = Bx_u + F_v x_v,$$

donde F y B son funciones C^∞ verificando $F > 0$ y (II.3.7), esto es,

$$\text{(III.2.30)} \qquad (F^{-1}B_u)_u = 0.$$

De la primera ecuación de (III.2.29) se tiene

$$\text{(III.2.31)} \qquad x(u,v) = f(v)\int F du + g(v)$$

para algunas funciones diferenciables $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dependientes del parámetro v.

Como de (I.1.2), (II.3.1) y la segunda ecuación de (III.2.29)

$$\det(x_u, x_v, x_{uv}) = F^2$$

y de (III.2.31)

$$\det(x_u, x_v, x_{uv}) = \det(f, g', f')F^2$$

entonces, se sigue que

$$\det(f, g', f') = 1. \tag{III.2.32}$$

Además, de la segunda ecuación de (III.2.29) y (III.2.31)

$$\xi_v = f''(v) + f'(v)F^{-1}F_v + f(v)(F^{-1}F_v)_v$$

y usando (II.3.4), (III.2.29) y (III.2.31), se tiene también que

$$\xi_v = (F^{-1})_v x_{uv} + F^{-1}x_{vvu} = F^{-2}B_u x_u - Hx_v =$$

$$= F^{-1}B_u f(v) - Hf'(v)\int F du - Hf(v)\int F_v du - Hg'(v).$$

Por tanto, de ambas expresiones se deduce que,

$$- Hg' = f'' + f'\left(F^{-1}F_v + H\int F du\right) + f\left((F^{-1}F_v)_v + H\int F_v du - F^{-1}B_u\right), \tag{III.2.33}$$

y así, (III.2.32) y (III.2.33) dan

$$\det(f, f', f'') = H. \tag{III.2.34}$$

El Teorema se concluye haciendo ahora el cambio de parámetros $\bar{u} = \int F du$ $\bar{v} = v$, y usando (III.2.31), (III.2.32) y (III.2.34).

Además, si $H = 0$ entonces, por el Teorema II.3.3, M es localmente afín equivalente a la superficie $M(\beta,\gamma)$.

Si $H \neq 0$, (III.2.33) permite obtener una expresión de g relacionada con f.

OBSERVACIONES

III.7.- En el Teorema III.2.4, si $f'(v) = -Hg(v)$, $H \neq 0$, se obtienen las esferas afines propias con métrica afín indefinida y $J = 0$, que fueron estudiadas por Radon [R]. En particular, el hiperboloide de una hoja es una esfera afín propia reglada, dada por la función $f(v) = (\mathrm{sen}v, -\cos v, 1)$.

III.8.- Las superficies afines homogéneas, (ver [G]), dadas por los grafos

$$x(u,v) = (u,v,\tfrac{1}{2}(u^2+v^{-2/3}), \quad v > 0, \quad \text{(métrica afín definida)}$$

$$x(u,v) = (u,v,\tfrac{1}{8}(u^2-v^{-2/3}), \quad v > 0, \quad \text{(métrica afín indefinida)}$$

tienen $\kappa = \frac{1}{3}H$ = constante $\neq 0$ y curvatura afín de Gauss-Kronecker identicamente cero.

Recíprocamente, es conocido, (ver [V]), que una superficie afín con $\kappa = \frac{1}{3}H$ = constante $\neq 0$ y curvatura afín de Gauss-Kronecker constante es localmente afín equivalente con uno de los grafos anteriores.

III.9.- Aunque no se conocen todas las superficies afines que satisfacen $\kappa = \frac{1}{3}H$ = constante $\neq 0$, por el Lema III.2.1 se sigue que $p_1 = q_2$, entonces cuando la métrica afín es definida, usando (III.1.2), (III.2.1), (III.2.3), (III.2.4), (III.2.5) y (III.2.6) tenemos

$$\Delta R = \Delta(p^2+q^2) = 9R^2 + 2a^2R + a^4 - 24ap^2q + 12aq(q^2-p^2) =$$

$$= 3R^2 - 4a^2R + a^4 + 6(pa - 2pq)^2 + 6(qa + q^2-p^2)^2 \geq$$

$$\geq 3R^2 - 4a^2R + a^4,$$

donde Δ es el Laplaciano de la métrica afín. Así, usando el Teorema 8 de [CY2], (III.2.1) y (III.2.17) obtenemos:

"Una superficie afín convexa, afín completa con $\kappa = \frac{1}{3}H$ *= cte.* $\neq 0$ *tiene curvatura afín de Gauss-Kronecker no negativa, y por tanto* $0 \leq T \leq H^2$".

Los Teoremas III.2.3 y III.2.4 permiten clasificar las superficies afines con curvatura media afín H constante y curvatura afín de Gauss κ constante, salvo el caso $\kappa = \frac{1}{3}H \neq 0$. Concretamente, se tiene que una tal superficie es parte de alguna de las representadas en el siguiente cuadro.

Superficies afines con curvatura media afín y curvatura afín de Gauss constantes

	METRICA DEFINIDA (POSITIVA)			METRICA INDEFINIDA		
	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
H>0	Elípsoide $x^2+y^2+z^2=1$	------	------	$\kappa=H/3$, o superficie reglada (1)	-------	-------
H=0	------	paraboloide elíptico $z=x^2+y^2$	------	-------	superficie reglada (1) $M(\beta,\gamma)$	-------
H<0	------	$xyz=1$	$\kappa=H/3$, o hiperboloide de dos hojas $x^2-y^2-z^2=1$	-------	$z(x^2+y^2)=1$	$\kappa=H/3$, o superficie reglada(1)

(1) $x(u,v)=uf(v)+g(v)$, $\det(f,g',f')=1$, $\det(f,f',f'')=H$

CAPITULO IV

SUPERFICIES AFINES CONVEXAS CON CURVATURA MEDIA AFIN CONSTANTE

En este Capítulo se estudian, desde un punto de vista global, las superficies afines con métrica afín definida positiva y curvatura media afín H constante, de hecho se prueba, bajo la hipótesis de completitud de la métrica afín, un resultado que permite caracterizar los ejemplos más conocidos de esferas afines convexas atendiendo sólo a determinadas condiciones de crecimiento de la curvatura afín de Gauss-Kronecker.

En este sentido, destacamos la solución parcial que se obtiene del, hasta ahora sin resolver, Problema Afín de Bernstein.

IV.1. ALGUNAS FORMULAS Y RESULTADOS BASICOS

Sea M una superficie afín con métrica h definida positiva y con curvatura media afín H constante. De (I.1.14) se sigue que la curvatura afín de Gauss κ está acotada inferiormente por H y por tanto se puede aplicar la Proposición 5 de [CY1], (ver también el Teorema 8 de [CY2] para una versión más general), en orden a probar el siguiente resultado:

TEOREMA IV.1.1.- *Sea M una superficie afín convexa con métrica afín completa y con curvatura media afín constante. Si u es una función C^2 no negativa definida sobre M ($u\in C^2(M)$) verificando*

$$\Delta u \geq c_0 + c_1 u + c_2 u^2 = g(u)$$

donde por Δ se denota el Laplaciano de la métrica afín, para algunas constantes c_0, c_1 y c_2 con $c_2 > 0$.

Entonces u está acotada superiormente por una raiz del polinomio g.

Consideramos ahora, en un entorno de cualquier punto $m\in M$, una base local de campos de vectores ortonormales $\{E_1, E_2\}$ paralelos en el punto, entonces como en el Capítulo III se puede escribir

$$\tilde{\nabla}_{E_1} E_1 = pE_2 \qquad \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 = qE_1,$$

$$K(E_1, E_1) = aE_1 + bE_2, \tag{IV.1.1}$$

$$SE_1 = (H+\alpha)E_1 + \beta E_2,$$

para algunas funciones diferenciables p, q, a, b, α y β definidas en el entorno, ($p(m) = q(m) = 0$), y de (III.1.4), (III.1.5) y (III.1.6) se obtiene

$$\kappa = H + 2(a^2+b^2) = q_1 + p_2 - p^2 - q^2, \qquad J = 2(a^2+b^2), \tag{IV.1.2}$$

$$b_1 - a_2 = -\beta - 3(pa-qb), \qquad a_1 + b_2 = -\alpha + 3(bp+qa), \tag{IV.1.3}$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 2(\alpha b-\beta a+q\beta-p\alpha), \qquad \beta_2 + \alpha_1 = 2(\beta b+\alpha a+p\beta+q\alpha), \tag{IV.1.4}$$

donde por $(\ )_1$ y $(\ )_2$ denotamos las derivadas con respecto a E_1 y E_2 respectivamente.

Haciendo los calculos en el punto $m\in M$, (IV.1.2) y (IV.1.3) dan

$$a\Delta a + b\Delta b = a(a_{11}+a_{22}) + b(b_{11}+b_{22}) = \tag{IV.1.5}$$

$$= 3(a^2+b^2)\kappa + a(\beta_2-\alpha_1) - b(\beta_1+\alpha_2)$$

y

$$\alpha^2+\beta^2 = |\nabla a|^2 + |\nabla b|^2 - 2b_1a_2 + 2a_1b_2 \tag{IV.1.6}$$

donde por ∇ y Δ denotamos el Gradiente y el Laplaciano de la métrica afín h respectivamente.

De (IV.1.2), (IV.1.5) y (IV.1.6) se tiene

$$\tfrac{1}{2}\Delta J = 3J\kappa + (\alpha^2+\beta^2) + (a_1-b_2)^2 + (b_1+a_2)^2 + \tag{IV.1.7}$$

$$+ 2a(\beta_2-\alpha_1) - 2b(\beta_1+\alpha_2)$$

que para esferas afines ($\alpha \equiv \beta \equiv 0$) se reduce a

$$\Delta J = 6J\kappa + 2(a_1-b_2)^2 + 2(b_1+a_2)^2 \geq 6J\kappa = 6J^2 + 6JH.$$

De lo anterior y de los Teoremas I.1.3 y IV.1.1 se obtiene (ver también [B], [C1], [C2], [J], [P], [CY1])

TEOREMA IV.1.2.- *Una esfera afín convexa, con métrica afín completa y curvatura media afín no negativa, es un elipsoide o un paraboloide elíptico.*

Consideramos ahora el invariante $B^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (esto es, H^2 - detS) que caracteriza las esferas afines como aquellas superficies afines para las que es identicamente nulo. Entonces (IV.1.2) y (IV.1.4) dan

$$\alpha\Delta\alpha + \beta\Delta\beta = \alpha(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + \beta(\beta_{11}+\beta_{22}) = \tag{IV.1.8}$$

$$= 8(a^2+b^2)B^2 + 2HB^2 + 4\beta\alpha(b_1+a_2) + 2(\alpha^2-\beta^2)(a_1-b_2).$$

Además, sumando los cuadrados de (IV.1.4) se tiene

$$2JB^2 = |\nabla\alpha|^2 + |\nabla\beta|^2 - 2\beta_1\alpha_2 + 2\beta_2\alpha_1$$

y

(IV.1.9) $$B^{-1}(|\nabla\alpha|^2 + |\nabla\beta|^2) - B^{-3}|\alpha\nabla\alpha + \beta\nabla\beta|^2 =$$

$$= (a^2+b^2)B + \tfrac{1}{4}B^{-1}[(\alpha_1-\beta_2)^2 + (\beta_1+\alpha_2)^2] -$$

$$- B^{-3}[\tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)(|\nabla\alpha|^2-|\nabla\beta|^2) + 2\alpha\beta(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)].$$

De (IV.1.8) y (IV.1.9),

(IV.1.10) $$\Delta B^2 = 2(\alpha\Delta\alpha + \beta\Delta\beta) + 2|\nabla\alpha|^2 + 2|\nabla\beta|^2 =$$

$$= 16(a^2+b^2)B^2 + 4HB^2 + 8\beta\alpha(b_1+a_2) + 4(\alpha^2-\beta^2)(a_1-b_2) +$$

$$+ 4(a^2+b^2)B^2 + (\beta_2-\alpha_1)^2 + (\beta_1+\alpha_2)^2 =$$

$$= 10JB^2 + 4HB^2 + 8\beta\alpha(b_1+a_2) + 4(\alpha^2-\beta^2)(a_1-b_2) +$$

$$+ (\beta_2-\alpha_1)^2 + (\beta_1+\alpha_2)^2$$

y

(IV.1.11) $$\Delta B = B^{-1}(\alpha\Delta\alpha + \beta\Delta\beta + |\nabla\alpha|^2 + |\nabla\beta|^2) - B^{-3}|\alpha\nabla\alpha + \beta\nabla\beta|^2 =$$

$$= 9(a^2+b^2)B + B^{-1}\{4\beta\alpha(b_1+a_2) + 2(\alpha^2-\beta^2)(a_1-b_2)\} -$$

$$- B^{-3}\{\tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)(|\nabla\alpha|^2-|\nabla\beta|^2)+2\alpha\beta(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\} + 2HB +$$

$$+ \tfrac{1}{4}B^{-1}[(\alpha_1-\beta_2)^2+(\beta_1+\alpha_2)^2].$$

OBSERVACION.- Consideramos (IV.1.11) sólo cuando $B^2 \neq 0$, ya que la función B no es regular cuando $B^2 = 0$.

Con las mismas notaciones anteriores se sigue:

LEMA IV.1.3.-

$$\Delta(\tfrac{1}{2}J + B^2) \geq 3J\kappa + B^2 + 10JB^2 + 4HB^2 - 4B^4 - \tfrac{1}{2}J.$$

Demostración.- De (IV.1.7) y (IV.1.10) tenemos

$$\Delta(\tfrac{1}{2}J + B^2) = 3J\kappa + B^2 + 10JB^2 + 4HB^2 - 4B^4 - \tfrac{1}{2}J +$$
$$+ \left[4\beta\alpha + (b_1+a_2)\right]^2 + \left[2(\alpha^2-\beta^2) + (a_1-b_2)\right]^2 +$$
$$+ \left[a + (\beta_2-\alpha_1)\right]^2 + \left[b - (\beta_1+\alpha_2)\right]^2 \geq$$
$$\geq 3J\kappa + B^2 + 10JB^2 + 4HB^2 - 4B^4 - \tfrac{1}{2}J.$$

LEMA IV.1.4.-

$$\Delta(\tfrac{1}{2}J + B) \geq 3J\kappa + 2HB,$$

en los puntos de M tales que $B^2 \neq 0$.

Demostración.- Como $B^2 \neq 0$, entonces de (IV.1.4),

(IV.1.12)
$$b = \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}[\alpha(\beta_1-\alpha_2) + \beta(\beta_2+\alpha_1)],$$
$$a = \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}[\alpha(\beta_2+\alpha_1) - \beta(\beta_1-\alpha_2)],$$

y por tanto

(IV.1.13)
$$(\alpha_1-\beta_2)[a(\alpha^3-3\alpha\beta^2) + b(3\alpha^2\beta-\beta^3)] +$$
$$+ (\beta_1+\alpha_2)[a(3\alpha^2\beta-\beta^3) - b(\alpha^3-3\alpha\beta^2)] =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)(|\nabla\alpha|^2-|\nabla\beta|^2) + 2\alpha\beta(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2).$$

Ahora, usando (IV.1.7), (IV.1.11), (IV.1.12) y (IV.1.13) tenemos

(IV.1.14)
$$\Delta(\tfrac{1}{2}J + B) = 3J\kappa + 2HB +$$
$$+ [B^{-1}2\beta\alpha + (b_1+a_2)]^2 + [B^{-1}(\alpha^2-\beta^2) + (a_1-b_2)]^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{3}B^{-1}\Big\{[2^{-1/2}(\alpha_1-\beta_2)-3a2^{1/2}B]^2 + [2^{-1/2}(\beta_1+\alpha_2)-3b2^{1/2}B]^2\Big\} +$$
$$+ \tfrac{1}{6}B^{-1}\Big\{\Big[2^{-1/2}(\alpha_1-\beta_2) - 3B^{-2}2^{1/2}[a(\alpha^3-3\alpha\beta^2) + b(3\alpha^2\beta-\beta^3)]\Big]^2 +$$
$$+ \Big[2^{-1/2}(\beta_1+\alpha_2)-3B^{-2}2^{1/2}[a(3\alpha^2\beta-\beta^3)-b(\alpha^3-3\alpha\beta^2)]\Big]^2\Big\} \geq$$
$$\geq 3J\kappa + 2HB$$

lo que concluye la demostración.

OBSERVACION

La desigualdad (IV.1.14) generaliza la obtenida por Calabi para el caso de ser $H = 0$ (ver [C3], ecuación (4.5)).

IV.2 SUPERFICIES AFINES CONVEXAS, COMPLETAS, CON CURVATURA MEDIA AFIN CONSTANTE

En esta sección nos ocuparemos de demostrar el siguiente resultado de clasificación (Ver [MM1]).

TEOREMA IV.2.1.- *Sea M una superficie afín convexa, con métrica afín completa y curvatura media afín constante. Suponemos que:*

(I) $J - cB^2 \geq d$, *para algunos números reales c y d,* $c > \frac{2}{5}$,

y

(II) $3J\kappa + 2HB \geq 0$.

Entonces M es una de las siguientes superficies:

i) un elípsoide,

ii) un paraboloide elíptico,

iii) un hiperboloide,

iv) una imagen afín de la superficie $Q(e,2) = \{(x^1,x^2,x^3) \ / \ x^1x^2x^3=e\}$ *para alguna constante positiva e.*

OBSERVACIONES

IV.1.- Una superficie afín convexa, afín completa, con curvatura media afín constante positiva tiene $\kappa \geq H > 0$ (ver (I.1.14)), por tanto, usando el Teorema de Bonnet, es compacta y las hipótesis (I) y (II) del Teorema IV.2.1 se verificaran siempre en este caso. Así, como corolario del Teorema obtenemos:

COROLARIO IV.2.2.- *Cada ovaloide en* $\mathcal{A}^3$ *con curvatura media afín constante es un elipsoide.*

Este Corolario fue obtenido ya por Blaschke en 1923 y por Schwenk y Simon en 1986. Sin embargo el método de demostración usado por ellos es completamente diferente al que aquí se da (ver [B], [ScS]).

IV.2.- Cuando $H \equiv 0$ sobre M, esto es, cuando M es afín-maximal, es conocido que M no puede ser compacta, (ver [Ch]), además en este caso la hipótesis (II) del Teorema no impone restricciones a M ya que $\kappa = J \geq 0$ sobre M.

En este sentido diremos que los resultados globales que se conocen son bastante escasos y todos ellos encaminados a resolver el denominado **Problema afín de Bernstein** que afirma:

"Toda superficie afín-maximal convexa con métrica afín completa es un paraboloide elíptico".

Citemos a este respecto el obtenido por Calabi [C1] quien probó:

"Si M es una superficie afín-maximal convexa, afín completa, dada por un grafo globalmente, entonces M es un paraboloide elíptico".

Nosotros como consecuencia del Teorema IV.2.1 obtenemos la siguiente solución parcial al Problema Afín de Bernstein:

COROLARIO IV.2.3.- *Toda superficie afín-maximal convexa, afín completa, con $\kappa + cT$ acotado inferiormente ($T = \det S$), para algún número real $c > \frac{2}{5}$, es un paraboloide elíptico.*

Y en particular

COROLARIO IV.2.4.- *Si la curvatura afín de Gauss-Kronecker de una superficie afín-maximal convexa y completa M, está acotada inferiormente. Entonces M es un paraboloide elíptico.*

Combinando el Corolario IV.2.4 con el Teorema A de [L4] se sigue (ver también Teorema B de [L4] y Proposición I.3.4):

"Si M es una superficie afín-maximal, dada por el grafo de una función convexa definida en todo $\mathbb{R}^2$ y con curvatura afín de Gauss Kronecker acotada inferiormente, entonces M es un paraboloide elíptico".

IV.3.- Para el caso de superficies afines con curvatura media afín constante negativa, se conocen resultados de clasificación siempre bajo la hipótesis de ser M una esfera afín , $B^2 \equiv 0$, (ver [LP], [K]).

El Teorema IV.2.1 evita la hipótesis de esfera afín sobre M imponiendo no obstante ciertas condiciones de crecimiento para B^2 (expresiones (I) y (II)). Así por ejemplo, permite obtener la siguiente caracterización de Q(e,2).

COROLARIO IV.2.5.- *Sea M una superficie afín convexa, afín completa y con curvatura media afín constante negativa. Si $3\kappa \geq 2B$ y la curvatura afín de Gauss-Kronecker está acotada inferiormente. Entonces M es una imagen afín de la esfera afín $Q(e,2)$.*

Antes de proceder a la demostración del Teorema IV.2.1 veamos el siguiente

LEMA IV.2.6.- *Bajo las hipótesis del Teorema IV.2.1, si $H \leq 0$ y $\kappa \geq 0$, se tiene que la función continua*

$$u = \frac{1}{2}J + B$$

es subarmónica sobre la variedad de Riemann M, esto es, para cada dominio $\Omega \subseteq M$ y cada función armónica f sobre M, $u + f$ no tiene máximo en Ω salvo que $u + f$ sea constante.

Demostración.- Suponemos que $u + f$ tiene un máximo en un punto $m_0 \in \Omega$.

Consideramos varios casos:

Caso 1.- Supongamos que $B(m_0) > 0$, entonces existe un entorno Ω' de m_0 tal que $B > 0$ en $\Omega' \subseteq \Omega$ y u es una función diferenciable en Ω'. De (II) y el Lema IV.1.4,

$$\Delta(u + f) = \Delta u \geq 3J\kappa + 2HB \geq 0 \quad \text{en } \Omega',$$

y por el Principio del Máximo,

$$\text{(IV.2.1)} \qquad u + f = \text{cte.}, \qquad 3J\kappa + 2HB = 0 \quad \text{en } \Omega'.$$

Ahora, si $H = 0$, de (IV.1.2), (IV.1.7) y (IV.2.1), se tiene

$$0 = (\Delta J)(m_0) \geq B^2(m_0) > 0$$

lo cual es una contradicción.

Si $H < 0$, de (IV.1.2), (IV.1.14) y (IV.2.1) obtenemos $(J\kappa)(m_0) > 0$ y

(IV.2.2) $$(24J + 12H)(aa_i + bb_i) + 2HB^{-1}(\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) = 0, \qquad i=1,2,$$

(IV.2.3) $$b_1 + a_2 = - B^{-1}2\beta\alpha, \qquad a_1 - b_2 = - B^{-1}(\alpha^2-\beta^2),$$

(IV.2.4) $$\alpha_1 - \beta_2 = 6aB = 6B^{-2}[a(\alpha^3-3\alpha\beta^2) + b(3\alpha^2\beta-\beta^3)],$$
$$\beta_1 + \alpha_2 = 6bB = 6B^{-2}[a(3\alpha^2\beta-\beta^3) - b(\alpha^3-3\alpha\beta^2)].$$

Ahora bien, como h es definida positiva, existe una base ortonormal que diagonaliza el endomorfismo afín de Weingarten en el punto m_0, esto es, una base $\{e_1,e_2\}$ de Tm_0M para la que $\beta(m_0) = 0$. Trasladando esta base paralelamente se obtiene una base local de campos de vectores ortonormales $\{E_1,E_2\}$ paralelos en el punto y además con $\beta(m_0) = 0$. Por tanto, considerando esta base, (IV.2.4) da

$$aB^3 = a\alpha^3, \qquad bB^3 = - b\alpha^3, \qquad \text{en } m_0,$$

y como $(J\kappa)(m_0) > 0$, podemos suponer $a(m_0) \neq 0$ (el razonamiento es análogo si consideramos $b(m_0) \neq 0$), y se sigue que,

(IV.2.5) $$b(m_0) = 0, \qquad B(m_0) = \alpha(m_0).$$

De (IV.1.3), (IV.1.4), (IV.2.3), (IV.2.4) y (IV.2.5) tenemos que en m_0

$$b_1 = a_2 = b_2 = 0, \qquad a_1 = - B,$$

$$\beta_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_1 = 4aB, \qquad \beta_2 = -2aB,$$

y sustituyendo en (IV.2.2)

$$[(24J + 12H)(-aB) + 2HB^{-1}(B4aB)](m_0) = 0.$$

Por tanto, $(24J + 4H)(m_0) = 0$ y $\kappa(m_0) < 0$ lo que contradice (IV.2.1) y las hipótesis del Lema.

Caso 2.- Supongamos $B(m_0) = 0$ y $\kappa(m_0) > 0$. Entonces considerando

$$u_\varepsilon = \frac{1}{2}J + \left(\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}$$

donde ε es una constante positiva que determinaremos después, y teniendo en cuenta que

$$u_\varepsilon + f \le u + \varepsilon + f \le (u + f)(m_0) + \varepsilon = (u_\varepsilon + f)(m_0)$$

se sigue que $u_\varepsilon + f$ tiene un máximo en $m_0 \in \Omega$ y así

$$(\Delta(u_\varepsilon + f))(m_0) = (\Delta u_\varepsilon)(m_0) \le 0. \tag{IV.2.6}$$

Ahora bien, de (IV.1.4), (IV.1.7) y (IV.1.11)

$$(\Delta u_\varepsilon)(m_0) \ge \left[3J\kappa + 4a\beta_2 - 4b\beta_1 + \frac{2}{\varepsilon}(\beta_1^2+\beta_2^2)\right](m_0) = \tag{IV.2.7}$$

$$= \left[3J\kappa - \varepsilon J + \left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{1/2}\beta_1 - (2\varepsilon)^{1/2}b\right)^2 + \left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{1/2}\beta_2 + (2\varepsilon)^{1/2}a\right)^2\right](m_0)$$

y tomando entonces $\varepsilon < 3\kappa(m_0)$ y usando (IV.2.6) y (IV.2.7) tenemos

$$0 < (\Delta u_\varepsilon)(m_0) \le 0$$

que no es posible.

Caso 3.- Supongamos $B(m_0) = 0$ y $\kappa(m_0) = 0$, entonces de ser $\kappa \ge 0$ y (IV.1.2)

$$-\frac{1}{2}H + f \le u + f \le -\frac{1}{2}H + f(m_0) \quad \text{en } \Omega$$

y f tiene un máximo en el punto $m_0 \in \Omega$. Así, por el Principio del Máximo, f es constante en Ω y $u + f = -\frac{1}{2}H + f$ es una función constante en Ω, lo que concluye el Lema.

DEMOSTRACION del Teorema IV.2.1.

Distinguiremos también varios casos:

<u>Caso</u> $H > 0$.- Como M es compacta (ver Observación IV.1), usando el Principio del Máximo y el Lema IV.1.4 tenemos que existe un punto $m_0 \in M$ tal que

$$B(m_0) = 0, \qquad \left(\frac{1}{2}J + B\right)(m) \le \frac{1}{2}J(m_0), \text{ para todo } m \in M. \tag{IV.2.8}$$

Si tomamos ahora $B_H = (\alpha^2 + \beta^2 + 9H^2)^{1/2}$, entonces

$$\frac{1}{2}J + B_H \le \frac{1}{2}J + B + 3H \le \frac{1}{2}J(m_0) + 3H = (\frac{1}{2}J + B_H)(m_0), \text{ en } M.$$

Así, $\frac{1}{2}J + B_H$ alcanza su máximo en el punto $m_0 \in M$ y consecuentemente

$$(\Delta(\frac{1}{2}J + B_H))(m_0) \le 0. \tag{IV.2.9}$$

Como $\alpha(m_0) = \beta(m_0) = 0$, de (IV.1.4), (IV.1.7) y (IV.1.11) obtenemos

$$(\frac{1}{2}\Delta J)(m_0) \ge [3J\kappa + 4a\beta_2 - 4b\beta_1](m_0),$$

$$(\Delta B_H)(m_0) = (3H)^{-1}(|\nabla\alpha|^2 + |\nabla\beta|^2)(m_0) = (3H)^{-1}2(\beta_1^2 + \beta_2^2)(m_0),$$

y entonces, de (IV.1.2)

$$(\Delta(\frac{1}{2}J + B_H))(m_0) \ge \left\{\left[(6H)^{1/2}a + (3H)^{-1/2}\beta_2 2^{1/2}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[(6H)^{1/2}b - (3H)^{-1/2}\beta_1 2^{1/2}\right]^2 + 12(a^2+b^2)^2\right\}(m_0) \ge$$
$$\ge 12[(a^2+b^2)^2](m_0) \ge 0. \tag{IV.2.10}$$

Ahora, por (IV.2.9) y (IV.2.10) tenemos $a(m_0) = b(m_0) = 0$, y (IV.1.2) y (IV.2.8) dan

$$0 \le \left(\frac{1}{2}J + B\right)(m) \le \frac{1}{2}J(m_0) = 0 \quad \text{para todo } m \in M,$$

y por tanto, del Teorema I.1.3, M es una cuádrica con $H > 0$, esto es, un elipsoide.

Caso $H \leq 0$.- De la hipótesis (II), si $H \leq 0$ entonces $J = 0$ (y tenemos una cuádrica) ó $\kappa \geq 0$.

Supongamos $H \leq 0$ y $\kappa \geq 0$. Entonces, por la hipótesis (I) y por el Lema IV.1.3, se obtiene que considerando $d \leq 0$ (lo que no es ninguna restricción)

$$\Delta(\tfrac{1}{2}J+B^2) \geq 3J^2 + 3JH + 10JB^2 + 4HB^2 - \tfrac{1}{2}J + B^2 - 4B^4 =$$

$$= \frac{10c-4}{1+c}(\tfrac{1}{2}J+B^2)^2 + (\frac{28d}{c(1+c)} + 6H - 1)(\tfrac{1}{2}J+B^2) +$$

$$+ (3 - \frac{10c-4}{4(1+c)})J^2 + (10 - \frac{10c-4}{1+c})JB^2 -$$

$$- (4 + \frac{10c-4}{1+c})B^4 - \frac{14d}{c(1+c)}J + (2 - 2H - \frac{28d}{c(1+c)})B^2 \geq$$

$$\geq \frac{10c-4}{1+c}(\tfrac{1}{2}J+B^2)^2 + (\frac{28d}{c(1+c)} + 6H - 1)(\tfrac{1}{2}J+B^2) +$$

$$+ (\frac{14}{1+c}J - \frac{14c}{1+c}B^2)B^2 - \frac{14d}{c(1+c)}J \geq$$

$$\geq \frac{10c-4}{1+c}(\tfrac{1}{2}J+B^2)^2 + (\frac{28d}{c(1+c)} + 6H - 1)(\tfrac{1}{2}J+B^2) - \frac{14d^2}{c(1+c)}.$$

Usando ahora el Teorema IV.1.1, concluimos que $\frac{1}{2}J + B^2$ está acotada superiormente por una constante, y por tanto $\frac{1}{2}J + B$ también ha de estar acotada superiormente.

Ahora bien, suponiendo que M es simplemente conexa (de otra forma se puede pasar a su recubridor universal) y como M es afín completa con $\kappa \geq 0$ y no existen superficies afines compactas con $H \leq 0$ (ver Proposición I.3.3), se sigue que M ha de ser conformemente equivalente a $\mathbb{C}$. En consecuencia M es de tipo parabólico, y de lo anterior y del Lema IV.2.6 $\frac{1}{2}J + B$ es una función subarmónica acotada superiormente sobre M, lo que lleva a que $\frac{1}{2}J + B$ es constante (ver [FK]). Usando entonces (IV.1.2), el Lema IV.1.4 y la hipótesis (II), se sigue que

$$3J\kappa + 2HB = 0, \qquad \kappa = \text{cte.} \geq 0,$$

así, como M no es compacta,

$$\text{(IV.2.11)} \qquad \kappa = 0, \qquad HB = 0.$$

Si $H = 0$ entonces, por (IV.1.2) y (IV.2.11), $J = 0$ y, por el Teorema I.1.3, M es una cuádrica con $H = 0$, esto es, un paraboloide elíptico.

Si $H < 0$ entonces, de (IV.2.11), $B \equiv 0$ y M es una esfera afín con $\kappa = 0$ y $H < 0$, esto es, una imagen afín de la superficie $Q(e,2)$, para alguna constante positiva e (ver Teoremas III.1.2 y III.2.3).

BIBLIOGRAFIA

[B] BLASCHKE, W.: "Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie". Berlin J. Springer 1923.

[Be] BERWALD, L.: "Die grundgleichungen der hyperflächen im Euklidischen R_{n+1} gegenüber den inhaltstreuen affinitäten". Monatsh. Math. Phys. 32(1922), 89-106.

[C1] CALABI, E.: "Hypersurfaces with Maximal Affinely Invariant Area". Amer. J. Math. 104, 91-126(1982).

[C2] CALABI, E.: "The improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens". Mich. Math. J., 5(1958), 105-126.

[C3] CALABI, E.: "Convex affine-maximal surfaces". Results in Math., vol. 13(1989), 199-223.

[C4] CALABI, E.: "Complete affine hyperspheres I". Ist. Naz. Alta Mat. Sym. Mat., X(1972), 19-38.

[CH] COURANT, R., HILBERT, D.: "Methods of Mathematical Physics", Vol. 1, New York, Interscience, 1953.

[CL] CODDINGTON, E.A., LEVINSON N.: "Theory of Ordinary Differential Equations". McGraw-Hill, New York 1955.

[CY1] CHENG, S.Y., YAU, S.T.: "Complete affine hypersurfaces, Part I. The completeness of Affine Metrics". Comm. on Pure and Applied Math., 39(1986), 839-866.

[CY2] CHENG, S.Y., YAU, S.T.: "Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications". Comm. on Pure and Applied Math., 28(1975), 333-354.

[Ch] CHERN, S.S.: "Affine minimal hypersurfaces, Minimal Submanifolds and Geodesic". Kagai Publ., Ltd. Tokyo (1978), 17-30.

[FK] FARKAS, H.M., KRA, I.: "Riemann surfaces". Springer Verlag, 1979.

[G] GUGGENHEIMER, H.: "Differential Geometry". McGraw-Hill, 1963.

[Gi] GIGENA, S.: "On a conjecture by E. Calabi". Geom. Dedicata 11, (1981) 387-396.

[H] HAHN, J.: "Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms". Math. Z. 187(1984), 195-208.

[J] JORGENS, K.: "Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt-s^2$". Math. Ann., 127(1954), 180-184.

[K] KUROSE, T.: "Two results in the affine hypersurface theory". J. Math. Soc. Japan, vol. 41, 3(1989), 539-548.

[KN] KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: "Foundations of Differential Geometry" vol. 1. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1963.

[L1] LI, A.M.: "Calabi conjecture on hiperbolic affine hyperspheres". Math. Z. 203, 483-491(1990).

[L2] LI, A.M.: "Some theorems in affine differential geometry". Acta Math. Sinica, 5(1989) 345-354.

[L3] LI, A.M.: "Affine maximal surfaces and harmonic functions". Lec. Notes, 1369(1986-87), 142-151.

[L4] LI, A.M.: "Affine completeness and Euclidean completeness". Preprint TU Berlin 1990.

[LP] LI, A.M., PENN, G.: "Uniquess theorems in affine differential geometry, Part II". Results in Math., vol. 13(1989), 308-317.

[MM1] MARTINEZ, A., MILAN, F.: "Convex affine surfaces with constant affine mean curvature". Proc. Conf. Global Analysis Global Differential Geometry. TU Berlin 1990. Aparecerá en Lecture Notes.

[MM2] MARTINEZ, A., MILAN, F.: "On the affine Bernstein Problem". Geom. Dedicata 37: 295-302, 1991.

[MM3] MARTINEZ, A., MILAN, F.: "On affine-maximal ruled surfaces". Aparecerá en Math. Z.

[MR] MAGID, M., RYAN, P.: "Flat affine spheres in $\mathbb{R}^3$". Geom. Dedicata 33: 277-288, 1990.

[N1] NOMIZU, K.: "On Completeness in Affine Differential Geometry". Geom. Dedicata 20: 43-49, 1986.

[N2] NOMIZU, K.: "Introduction to Affine Differential Geometry, Part I". Lecture Notes, MPI/88-37, Bonn 1988.

[NP1] NOMIZU, K., PINKALL, U.: "Cubic form theorem for affine immersions". Results in Math. 13(1988), 338-362.

[NP2] NOMIZU, K., PINKALL, U.: "Cayley surfaces in Affine Differential Geometry". Tôhoku Math. J. 41, 589-596(1989).

[NS] NOMIZU, K., SASAKI, T.: "A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces". Preprint.

[P] POGORELOV, A. V.: "On the improper affine hyperspheres". Geom. Dedicata, 1(1972), 33-46.

[R] RADON, J.: "Zur Affingeometrie der Regelflächen". Leipziger Berichte 70, 147-155(1918).

[Sa] SASAKI, T.: "Hyperbolic affine hyperspheres". Nagoya Math. J., 77 (1980), 107-123.

[S1] SIMON, U.: "Local classification of twodimensional affine spheres with constant curvature metric". J. Differential Geometry and Applications (Brno) Vol. 1. Aparecerá.

[S2] SIMON, U.: "Affine differential geometry". Proceedings Conf. Math. Reasearch Institute at Oberwolfach, Nov. 2-8, 1986.

[S3] SIMON, U.: "Hypersurfaces in equiaffine differential geometry and eigenvalue problems". Proceedings Conf. Diff. Geom. Nové Mesto(CSSR) 1983; Part I, 127-136(1984).

[S4] SIMON, U.: "Hypersurfaces in equiaffine differential geometry". Geom. Dedicata, 17(1984), 157-168.

[SS] SCHIROKOV, P.A., SCHIROKOV, A.P.: "Affine Differentialgeometrie". Teubner Leipzig 1962.

[ScS] SCHWENK, A., SIMON, U.: "Hypersurfaces with constant equiaffine mean curvature". Arch. Math. 46, 85-90(1986).

[T] TZITZEICA, G.: "Sur une nouvelle classe de surfaces". Rend. Circ. Mat. Palermo 25, 180-187(1908); 28, 210-216(1909).

[V] VRANCKEN, L.: "Affine surfaces with constant affine curvatures". Geom. Dedicata 33, 177-194(1990).

[VV] VERSTRAELEN, L., VRANCKEN, L.: "Affine Variation Formulas and Affine Minimal Surfaces". Michigan Math. J. 36, 77-93(1989).