

Teoría Afín de Curvas Planas

por

Antonio Martínez, Francisco Milán e Inhar Val

RESUMEN. La Geometría Diferencial Afín en el plano se basa en el estudio de los invariantes respecto al grupo de afinidades que conservan el área. En este trabajo se van a discutir, tanto desde un punto de vista local como global, algunos aspectos básicos de esta teoría. Así, para una curva plana convexa se introducen nociones como parámetro arco afín, normal afín y curvatura afín, a partir del área del triángulo que forman los extremos del arco y sus rectas tangentes. Localmente, esto permite caracterizar las cónicas como las únicas curvas convexas con curvatura afín constante. Globalmente, se muestra la elipse como solución de algunos problemas variacionales y se caracteriza por tener el mayor perímetro afín entre todos los óvalos con área constante.

1. INTRODUCCIÓN

En estas notas vamos a presentar la teoría básica de la geometría diferencial afín en el plano. Si bien la geometría afín no ha tenido una historia tan larga y relevante como la geometría euclídea o la proyectiva, su reciente conexión a campos en creciente desarrollo como el de la visión artificial justifican un renovado interés por sus objetos fundamentales.

El primer tratado sistemático de esta teoría fue realizado por Blaschke, [1], a principios del siglo XX, siguiendo el Programa Erlangen de Klein que proporciona la relación fundamental entre grupos y geometría. La geometría diferencial afín se basa en el estudio de invariantes del grupo equiafín o grupo unimodular afín y, grosso modo, si en el plano la geometría euclídea es la geometría de «la distancia», podemos decir que la geometría afín es la geometría «del área». Además del trabajo fundamental del Blaschke, referimos también a los textos [5], [7], [8] y [9] para un tratamiento más profundo del tema.

Aunque nuestro enfoque será puramente matemático, una importante motivación para reivindicar este campo ha sido la aplicación práctica del estudio de invariantes para curvas planas en visión artificial y en el tratamiento de imágenes. Un problema no trivial es la construcción de aproximaciones numéricas prácticas y eficientes a invariantes diferenciales, tales como las curvaturas afines y proyectivas ([2], [3] y [11]).

Con este trabajo queremos mostrar algunos elementos básicos de la geometría diferencial afín en el plano, como el normal afín y la curvatura afín. Vamos a discutir la teoría tanto desde un punto de vista local como global y, aunque proporcionamos nuevas aproximaciones de esta geometría, queremos también mostrar una serie de

hechos que hagan del mismo un trabajo accesible a un mayor número de matemáticos no necesariamente especialistas en el tema.

En general, dado un grupo G actuando sobre un espacio M , por un *invariante* de G entendemos una función $I : M \times \cdots \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que permanece inalterada bajo la acción del grupo, esto es, $I(g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_r) = I(x_1, \dots, x_r)$ para todo $x_1, \dots, x_r \in M$ y $g \in G$. Por ejemplo, el más simple de los invariantes del grupo de movimientos rígidos actuando sobre una pareja de puntos del plano es la función distancia, y su estudio ha permitido el desarrollo de la geometría euclídea. Si pensamos ahora en el grupo de transformaciones unimodulares o equiafines, $SL(2, \mathbb{R})$, $p \mapsto a + Bp$, con $a, p \in \mathbb{R}^2$ y $\det(B) = 1$, no es difícil observar que el área del triángulo que determinan tres puntos del plano es un invariante equiafín que va a resultar básico en el desarrollo de la geometría diferencial afín en el plano.

Desde un punto de vista local empezaremos viendo cómo se usa el invariante área para introducir, en curvas sin puntos de inflexión, nociones como parámetro arco afín, normal afín o curvatura afín, que van a permitir caracterizar las cónicas como las únicas curvas localmente convexas con curvatura afín constante. Asimismo mostramos una interpretación geométrica del normal afín, debida a Blaschke, que sugiere plantear otras caracterizaciones de las cónicas a partir de sus curvas centrales.

Globalmente, y aunque merecerían ser destacados varios de los resultados mostrados en [1] y [9], nos centramos en dar una nueva aproximación, similar a [6], que usamos para ver la elipse como solución de determinados problemas variacionales y probar que, de entre todos los óvalos con área constante, la elipse es el de mayor perímetro afín.

Mencionar, por último, que el estudio de los invariantes equiafines en el plano requiere siempre considerar curvas sin puntos de inflexión y que, por tanto, la condición de convexidad resulta esencial en todos los razonamientos.

2. TEORÍA LOCAL

Para desarrollar la teoría local afín de curvas planas usaremos que el invariante numérico equiafín más elemental es el área de un triángulo. Veremos cómo éste nos permite hablar de la longitud afín de determinadas curvas e introducir las nociones básicas de esta teoría.

2.1. LONGITUD DE ARCO AFÍN

Si consideramos un triángulo en \mathbb{R}^2 determinado por dos puntos x_1, x_2 y dos direcciones no paralelas x'_1, x'_2 , lo que significa que su tercer vértice es

$$x_3 = x_1 + \lambda_1 x'_1 = x_2 + \lambda_2 x'_2$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ determinados por $x_2 - x_1 = \lambda_1 x'_1 - \lambda_2 x'_2$, entonces (orientándolo como en la figura 1) su área está dada por

$$A_{12} = \frac{1}{2}[x_2 - x_3, x_1 - x_3] = -\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2[x'_1, x'_2] = \frac{[x'_1, x_2 - x_1][x_2 - x_1, x'_2]}{2[x'_1, x'_2]}$$

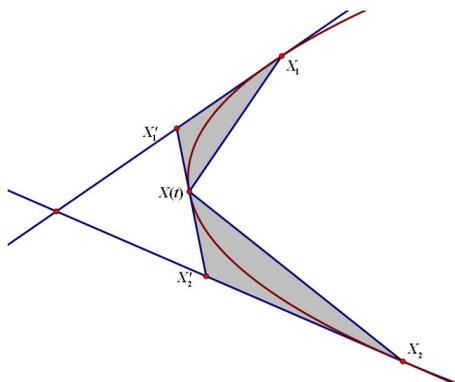


Figura 1: Triángulo y parábola tangente.

donde $[\ , \]$ denota el determinante.

Además, como existe una única parábola

$$x(t) = x_0 + x'_0 t + \frac{1}{2} x''_0 t^2, \quad x_0, x'_0, x''_0 \in \mathbb{R}^2,$$

que pasa, para $i = 1, 2$, por $x_i = x(t_i)$ con dirección tangente x'_i , el área se puede escribir como

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \frac{[x'(t_1), x(t_2) - x(t_1)] [x(t_2) - x(t_1), x'(t_2)]}{[x'(t_1), x'(t_2)]}$$

y se obtiene

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{8} [x'_0, x''_0] (t_2 - t_1)^3.$$

En consecuencia, para cualquier punto $x(t)$ de la parábola, entre x_1 y x_2 , la función $A^{1/3}$ verifica

$$A^{1/3}(t_1, t) + A^{1/3}(t, t_2) = A^{1/3}(t_1, t_2),$$

que es análogo a la propiedad aditiva de la distancia euclídea a lo largo de una recta.

Esto sugiere definir la longitud afín de un arco de parábola por $2A^{1/3}$, donde A es el área del triángulo que determinan los extremos del arco y sus rectas tangentes. De esta forma, cambiando t por un nuevo parámetro s tal que

$$\left[\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \right] = 1,$$

se tiene

$$A(s_1, s_2) = \frac{1}{8} (s_2 - s_1)^3.$$

Equivalentemente,

$$s_2 - s_1 = 2A^{1/3}(s_1, s_2)$$

y la parábola está parametrizada por la longitud afín de sus arcos.

Lo anterior motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1. Dada una curva plana diferenciable $x(t)$, sin puntos de inflexión, esto es,

$$\left[\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right] \neq 0,$$

se define su longitud de arco afín, $s(t)$, por la condición

$$\left[\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \right] = 1.$$

Es inmediato obtener que $s(t)$ está dada por

$$s(t) = \int \left[\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right]^{1/3} dt$$

y que es una función monótona, única salvo constantes e invariante por transformaciones equiafines.

Como en la teoría clásica de curvas, [4], se puede probar el siguiente resultado.

TEOREMA 1. Si $x : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un arco de curva parametrizada por su longitud de arco afín s , entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = L$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n 2A^{1/3}(s_{i-1}, s_i) \right| < \varepsilon,$$

donde, para $i = 1, \dots, n$, $A(s_{i-1}, s_i)$ es el área del triángulo que determinan los puntos $x(s_{i-1}), x(s_i)$ y sus rectas tangentes.

2.2. ECUACIONES DE ESTRUCTURA

El siguiente paso va a consistir en desarrollar la *teoría local de curvas planas parametrizadas por la longitud de arco afín*.

Como $[x'(s), x''(s)] = 1$, el vector tangente $x'(s)$ y el denominado *normal afín* $x''(s)$ forman una base de \mathbb{R}^2 asociada a la curva. Derivando se tiene

$$0 = [x'(s), x'''(s)].$$

Esto es, los vectores $x'(s)$ y $x'''(s)$ son linealmente dependientes y se puede escribir

$$x'''(s) + k(s)x'(s) = 0 \quad \text{con} \quad k(s) = [x''(s), x'''(s)].$$

DEFINICIÓN 2. A la función $k(s)$ la llamaremos *curvatura afín de la curva*.

Como en el caso euclídeo, la curvatura afín mide la variación de su normal afín y determina la curva salvo transformaciones equiafines.

TEOREMA 2. Para cada función diferenciable $k(s)$ existe una curva plana $x(s)$ con curvatura afín $k(s)$, única salvo transformaciones equiafines.

En particular, si la curvatura afín es constante se tiene ecuación diferencial

$$x'''(s) + kx'(s) = 0,$$

que podemos resolver, distinguiendo los valores que puede tomar k , según sigue:

1. $k = 0$: en este caso los normales afines son constantes $x''(s) = x''_0$, y la curva sería un arco de la parábola dada por

$$x(s) = x_0 + x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2 \quad \text{con} \quad 1 = [x'_0, x''_0].$$

Por tanto, la parábola es la única curva plana con curvatura afín cero y, como esperábamos, su papel es análogo a la recta euclídea.

2. $k = \text{cte} > 0$: en este caso, y salvo una transformación equiafín, la curva se puede escribir como

$$x(s) = \begin{pmatrix} a \cos(k^{1/2} s) \\ b \sen(k^{1/2} s) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad 1 = [x'(s), x''(s)] = abk^{3/2},$$

y se tiene una elipse cuando $k^{1/2} s$ varía en $[0, 2\pi]$. Así, su longitud afín $L = 2\pi k^{-1/2}$ y su área $A = \pi ab$ están relacionados por

$$L^3 = 8\pi^3 k^{-3/2} = 8\pi^3 ab = 8\pi^2 A.$$

Como veremos más adelante, éste es el mayor perímetro afín que alcanza una curva plana, cerrada y convexa, que acota una región con área fija A .

3. $k = \text{cte} < 0$: en este último caso la curva se puede escribir como

$$x(s) = \begin{pmatrix} a \cosh((-k)^{1/2} s) \\ b \senh((-k)^{1/2} s) \end{pmatrix}$$

y obtenemos un arco de hipérbola.

NOTA 1. En los casos con $k = \text{cte} \neq 0$, la ecuación da

$$x''(s) = -k x(s) + \text{cte} = -k(x(s) - p),$$

esto es, las normales afines de la elipse y la hipérbola pasan por un punto fijo p al que llamaremos centro.

2.3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL NORMAL AFÍN

De lo anterior se deduce que las cónicas juegan, en esta geometría, el mismo papel que las rectas y circunferencias en la teoría euclídea. También conservan algunas de sus propiedades. Por ejemplo, teniendo en cuenta que las rectas y circunferencias son simétricas respecto a sus rectas normales, parece natural que las cónicas se puedan caracterizar como curvas afínmente simétricas respecto a sus rectas normales afines.

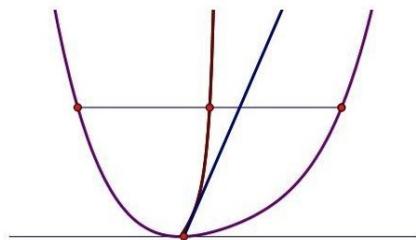


Figura 2: Curva central y normal afín.

En este sentido (ver figura 2) es interesante tener presente la siguiente interpretación geométrica debida a Blaschke:

Dada una curva plana convexa, si se define su *curva central* en un punto como el conjunto de los puntos medios de los segmentos con extremos en la curva y paralelos a la recta tangente en el punto, entonces la dirección de los normales afines de la curva viene dada por los vectores tangentes a sus curvas centrales.

TEOREMA 3. *Si todas las curvas centrales de una curva plana y convexa son rectas, entonces la curva está en una cónica.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la curva parametrizada por su longitud de arco afín s . Si su curva central en un punto arbitrario $x(s_0)$ es una recta con vector director v (ver figura 3), entonces la curva se puede simetrizar mediante la transformación equiafín que aplica $\{x'(s_0), v\}$ en la base usual $\{e_1, e_2\}$.

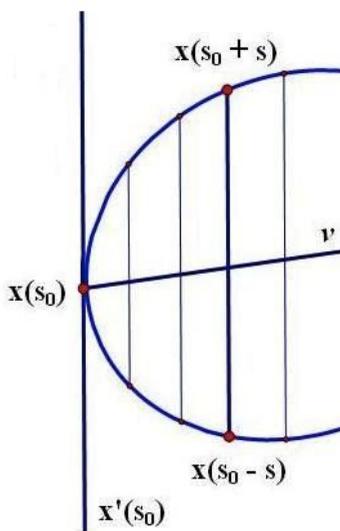


Figura 3: Recta central.

Por tanto, el punto $x(s_0)$ y los extremos de cada segmento paralelo a $x'(s_0)$ determinan dos arcos con la misma longitud afin (ya que son simétricos salvo una transformación equiafin), y se deduce que dichos extremos son $x(s_0 + s)$ y $x(s_0 - s)$.

Así,

$$[x(s_0 + s) + x(s_0 - s) - 2x(s_0), v] = 0.$$

Derivando,

$$[x''(s_0 + s) + x''(s_0 - s), v] = 0, \quad [x^{(4)}(s_0 + s) + x^{(4)}(s_0 - s), v] = 0$$

y

$$[x''(s_0), v] = 0 = [x^{(4)}(s_0), v],$$

esto es, el normal afin $x''(s_0)$ es efectivamente el vector director de la recta central en $x(s_0)$, y $x^{(4)}(s_0)$ tiene dirección normal afin.

Por tanto, de $k(s) = [x''(s), x'''(s)]$ se tiene

$$k'(s_0) = [x''(s_0), x^{(4)}(s_0)] = 0 \quad \text{con } x(s_0) \text{ arbitrario}$$

y la curva está en una cónica. □

3. TEORÍA GLOBAL

Finalmente, usaremos estas ideas para dar algunas propiedades globales que caracterizan la elipse como solución de un problema variacional y de una desigualdad isoperimétrica.

Concretamente, para un óvalo $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (esto es, una curva plana, cerrada y convexa), parametrizado por su longitud de arco afin s y con perímetro afin L , consideramos (como en [6]) la deformación

$$x_t(s) = x(s) + \Phi(t, s)x''(s)$$

con $\Phi : [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable para $\varepsilon > 0$, tal que x_t es convexa para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\Phi_t(s) = \Phi(t, s)$ es L -periódica y $\Phi_0 \equiv 0$.

Entonces, la longitud afin y el área del óvalo x_t están dadas por

$$L(t) = \int_0^L [x'_t(s), x''_t(s)]^{1/3} ds,$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [x_t(s), x'_t(s)] ds,$$

y su primera fórmula de variación es

$$\frac{dL}{dt}(0) = \frac{-2}{3} \int_0^L k(s)\psi(s) ds,$$

$$\frac{dA}{dt}(0) = - \int_0^L \psi(s) ds \quad \text{con } \psi(s) = \partial_t \Phi(t, s)|_{t=0}.$$

Así, considerando el operador

$$J(t) = L(t) - \frac{2}{3}\bar{k}A(t) \quad \text{con} \quad \bar{k} = \frac{1}{L} \int_0^L k(s) ds,$$

se tiene la siguiente caracterización variacional de la elipse.

TEOREMA 4. *Son equivalentes:*

- (i) $x(\mathbb{R})$ es una elipse con $k(s) = \bar{k} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$;
- (ii) $\frac{dJ}{dt}(0) = 0$, para cada deformación $x_t = x + \Phi_t x''$;
- (iii) $\frac{dL}{dt}(0) = 0$, para toda x_t con área constante.

DEMOSTRACIÓN. Las implicaciones (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) son ciertas por las fórmulas de variación. En consecuencia, basta analizar (iii) \Rightarrow (i).

Para ver que la curvatura afín es constante, se usa que la función

$$\psi(s) = k(s) - \bar{k} \quad \text{con} \quad \bar{k} = \frac{1}{L} \int_0^L k(s) ds$$

verifica

$$\int_0^L \psi(s) ds = \int_0^L (k(s) - \bar{k}) ds = 0.$$

Esto permite construir una deformación, con área constante, asociada a ψ .

De hecho, si $\bar{\psi}$ es una función L -periódica con $\int_0^L \bar{\psi}(s) ds \neq 0$, entonces los óvalos

$$x_{tz}(s) = x(s) + (z\bar{\psi}(s) + t\psi(s)) x''(s)$$

tienen área $A(t, z)$ con

$$\partial_t A(t, z)|_{t=z=0} = - \int_0^L \psi(s) ds = 0$$

y

$$\partial_z A(t, z)|_{t=z=0} = - \int_0^L \bar{\psi}(s) ds \neq 0.$$

Así, por el teorema de la función implícita existe una función $z(t)$, con $\frac{dz}{dt}(0) = 0$, tal que

$$A(t, z(t)) = A(0, 0) = \text{cte para todo } t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Esto es,

$$\Phi(t, s) = z(t)\bar{\psi}(s) + t\psi(s)$$

define una deformación x_t de x con área constante y

$$\psi(s) = k(s) - \bar{k} = \partial_t \Phi(t, s)|_{t=0}.$$

Ahora, usando (iii) para esta deformación se tiene

$$0 = \frac{dL}{dt}(0) = \frac{-2}{3} \int_0^L k(s) (k(s) - \bar{k}) ds.$$

Por tanto,

$$0 = \int_0^L (k(s) - \bar{k})^2 ds$$

da $k(s) = \bar{k}$ y el óvalo $x(\mathbb{R})$ tiene que ser una elipse con $\bar{k} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$. □

Por cálculos directos se obtiene que, para una elipse, la segunda variación del funcional J está dada por

$$\frac{d^2J}{dt^2}(0) = \frac{-2}{9} \int_0^L (\psi''(s) + \bar{k}\psi(s)) (\psi''(s) + 4\bar{k}\psi(s)) ds;$$

y, como el desarrollo de Fourier de la función L -periódica ψ es

$$\psi(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{L}s\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi}{L}s\right) \right),$$

con $\bar{k} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, se puede ver que

$$\frac{d^2J}{dt^2}(0) = \frac{-2}{9} L\bar{k}^2 \left(a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^2)(4 - n^2)(a_n^2 + b_n^2) \right) \leq 0.$$

COROLARIO 1. *La elipse optimiza este problema, esto es, $\frac{d^2L}{dt^2}(0) \leq 0$ para cada deformación con área constante.*

Es interesante destacar también la siguiente propiedad isoperimétrica.

TEOREMA 5. *Entre todos los óvalos con área constante A , la elipse, y sólo la elipse, alcanza el mayor perímetro afín. En general,*

$$8\pi^2 A \geq L^3$$

y se da la igualdad sólo para la elipse.

DEMOSTRACIÓN. Dado un óvalo, es conocido que en cualquier dirección existe una recta tangente, que tomaremos como eje de ordenadas. Entonces, la simetrización de Steiner en esta dirección consiste en trasladar todos los segmentos verticales del óvalo hasta que sus puntos medios estén en el eje de abscisas (ver figura 4). De esta forma se conserva el área del óvalo y se simetriza al mismo en una dirección.

Repetiendo el proceso en distintas direcciones, las simetrizaciones del óvalo se aproximan cada vez más a una circunferencia C con

$$8\pi^2 A = 8\pi^2 A_C = L_C^3$$

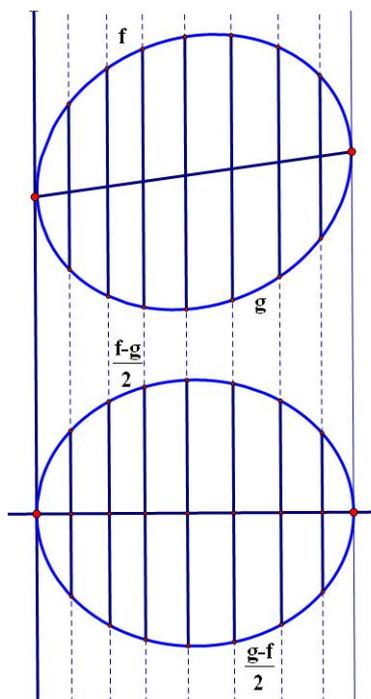


Figura 4: Simetrización de Steiner.

y la demostración se reduce a probar que, durante el proceso de simetrización, el perímetro afín aumenta o se mantiene.

Para esto, se puede considerar el óvalo parametrizado por las gráficas de dos funciones f y g con $f''(u) < 0$ y $g''(u) > 0$ en $[0, u_1]$, y se definen las curvas convexas

$$x_t(u) = \left(\frac{t+1}{2}g(u) + \frac{t-1}{2}f(u) \right), \quad t \in [-1, 1],$$

que tienen longitud afín

$$L(t) = \int_0^{u_1} [x_t'(u), x_t''(u)]^{1/3} du = \int_0^{u_1} \left(\frac{t+1}{2}g''(u) + \frac{t-1}{2}f''(u) \right)^{1/3} du.$$

Derivando,

$$\frac{d^2L}{dt^2} = \frac{-2}{9} \int_0^{u_1} \left(\frac{t+1}{2}g''(u) + \frac{t-1}{2}f''(u) \right)^{-5/3} \left(\frac{f''(u) + g''(u)}{2} \right)^2 du \leq 0$$

para $t \in [-1, 1]$, y

$$2L(0) \geq L(-1) + L(1) = L(-f) + L(g) = L$$

da

$$L \leq 2L \left(\frac{g-f}{2} \right) = \text{Longitud afín de la simetrización.}$$

Por tanto, el perímetro afín aumenta al simetrizar, salvo que $(f+g)''(u) = 0$ y la curva central $\frac{1}{2}(f+g)$ sea una recta.

En consecuencia, $8\pi^2 A \geq L^3$ y se da la igualdad si y sólo si todas las curvas centrales del óvalo son rectas, es decir, sólo para la elipse. \square

REFERENCIAS

- [1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie*, Springer, 1923.
- [2] E. CALABI, P. OLVER Y A. TANNENBAUM, Affine geometry, curve flows, and invariant numerical aproximations, *Advances in Mathematics* **124** (1996), 154–196.
- [3] M. CRAIZER, M. ALVIM Y R. TEIXEIRA, Area distances of convex plane curves and improper affine spheres, *SIAM J. Imaging Sciences* **1** (2008), 209–227.
- [4] M. DO CARMO, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, 1990.
- [5] A. M. LI, U. SIMON Y G. ZHAO, *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, Walter de Gruyter, 1993.
- [6] A. MARTÍNEZ Y F. MILÁN, Affine isoperimetric problems and surfaces with constant affine mean curvature, *Manuscripta Math.* **75** (1992), 35–41.
- [7] K. NOMIZU Y T. SASAKI, *Affine differential geometry*, Cambridge University Press, 1994.
- [8] P. A. SCHIROKOV Y A. P. SCHIROKOV, *Affine Differentialgeometrie*, Teubner, Leipzig, 1962.
- [9] B. SU, *Affine differential geometry*, Science Press, Beijing, 1983.
- [10] I. VAL, *Geometría diferencial afín de curvas y superficies*, Universidad de Granada, 2011.
- [11] I. WEISS, Geometric invariants and object recognition, *Int. J. Comput. Vision* **10** (1993), 207–231.

ANTONIO MARTÍNEZ, DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE GRANADA
Correo electrónico: amartine@ugr.es

FRANCISCO MILÁN, DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE GRANADA
Correo electrónico: milan@ugr.es

INHAR VAL, DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE GRANADA
Correo electrónico: ival_calvo@hotmail.com