APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

La derivada de una función $f(x)$, en un punto $x = a$, representa el valor de la pendiente de la recta tangente a dicha función, en el citado punto $x = a$.

Ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$: $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

Ecuación de la recta normal en el punto $(a, f(a))$: $y - f(a) = \dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Se llama **dominio** de una función *y*, *Dom(y)*, al conjunto de valores de la variable independiente *x* para los que existe la función.

Ejemplo: $y(x) = \dfrac{3+x}{x-1} \Rightarrow Dom(y) = \mathrm{R} - \{1\}$. La función $y(x)$ existe para todos lo números reales $x \in \mathrm{R}$ excepto el $x = 1$.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Dada una función $y(x)$, su derivada $y'(x)$ nos permite analizar el crecimiento o decrecimiento de la función:

- Si $y'(x_0) = 0 \Rightarrow y(x)$ presenta un óptimo local (máximo o mínimo) en x_0. Para conocer si es máximo o mínimo habrá que calcular la segunda derivada de $y(x)$, es decir $y''(x)$:
  - Si $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es mínimo local. La función pasa en x_0 de decrecer a crecer.
  - Si $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es máximo local. La función pasa en x_0 de crecer a decrecer.

Los máximos y mínimos dividen al dominio en regiones, en cada una de estas regiones hay que estudiar el signo de la primera derivada:

- Si $y'(x_0) > 0 \Rightarrow y(x)$ es creciente en x_0.
- Si $y'(x_0) < 0 \Rightarrow y(x)$ es decreciente en x_0.

Ejemplo: $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}^2 + 3x - 2 \Rightarrow y' = 10x + 3$.

Igualamos a 0 la primera derivada y calculamos su raíz: $y' = 0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{3}{10}$.

Calculamos el valor de la segunda derivada en $x_0 : y''\left(-\dfrac{3}{10}\right) = 10 > 0$.

Por tanto, $x_0 = -\dfrac{3}{10}$ es mínimo local y además la función es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{3}{10}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{3}{10}, +\infty\right)$.

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Dada una función $y(x)$, su segunda derivada $y''(x)$ nos permite analizar la concavidad o convexidad de la función:

- Si $y''(x_0) = 0 \Rightarrow y(x)$ presenta un punto de inflexión (cambio de cóncava a convexa o viceversa) en x_0.

Los puntos de inflexión dividen al dominio en regiones, en cada una de estas regiones hay que estudiar el signo de la segunda derivada:

- Si $y''(x_0) > 0 \Rightarrow y(x)$ es convexa en x_0.
- Si $y''(x_0) < 0 \Rightarrow y(x)$ es cóncava en x_0.

Ejemplo: $\mathrm{y} = 5\mathrm{x}^3 + 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y'' = 30x + 6$.

Igualamos a 0 la segunda derivada y calculamos su raíz: $y'' = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{3}{10}$ es punto de inflexión.

Para conocer la concavidad y convexidad, estudiamos el signo de la segunda derivada en las regiones $\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$ y $\left(-\frac{3}{10}, +\infty\right)$, por lo que la función es estrictamente convexa para $x \in \left(-\frac{3}{10}, +\infty\right)$ y estrictamente cóncava para $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$.

APLICACIONES A LA ECONOMÍA

Si representamos las funciones de **ingreso, coste y beneficio,** de producir y vender *x* unidades de producto, como $I(x), C(x)$ y $B(x)$, respectivamente, entonces:

- El **Ingreso Marginal** $[I'(x)]$ es el ingreso adicional que se consigue por vender una unidad más de producto.
- El **Coste Marginal** $[C'(x)]$ es el coste adicional necesario para producir una unidad más de producto.
- El **Beneficio Marginal** $[B'(x)]$ es el beneficio adicional que se consigue al producir y vender una unidad más de producto.

Ejemplo: Una empresa tiene como función de ingresos $I(x) = 5.000q + 40$, mientras que la función de coste es $C(x) = 3.000q - 20$.
La función de beneficios es $B(x) = I(x) - C(x) = 2.000q + 60$.
La función de ingreso marginal es $I'(x) = 5.000$. La función de coste marginal es $C'(x) = 3.000$. La función de beneficio marginal es $B'(x) = 2.000$.

EJERCICIOS DE REPASO.

1.- Para cada una de las siguientes funciones, hallar:

a) El dominio.
b) Zonas de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
e) Representación gráfica.

1.1-. $y = x^3 + 5x^2 + 3x - 9.$; 1.2-. $y = \frac{x^2+1}{x-1}.$; 1.3-. $y = \ln(2x-8).$

1.4-. $y = e^{\frac{x^2}{2}}.$ 1.5-. $y = \frac{x}{\ln x}.$ 1.6-. $y = \frac{x^2}{x^2+1}.$

1.7-. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x+2}.$ 1.8-. $y = \frac{x+1}{x-1}.$ 1.9-. $y = 1 - \frac{1}{x}.$

1.10-. $y = \ln(x^2+1).$

2. Un empresario estima que el coste total de producir x unidades de un cierto producto es de $C(x) = x^2 + 4x + 100$ (en miles de euros). El precio de venta unitario es de $p(x) = 49 - 2x$ (en miles de euros). Determinar el precio que corresponde al beneficio máximo.

3. Un empresario estima que el coste total de producir x unidades de un cierto producto es de $C(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 10$ (en miles de euros). El precio de venta unitario es de $p(x) = x^2 + 5x$ (en miles de euros). Determinar el precio que corresponde al beneficio máximo.

4. Las funciones de ingresos y costes anuales por la venta y fabricación de x unidades de televisores vienen dadas por:

$I(x) = 2.000x - 0'04x^2$, $C(x) = 1.000.000 + 100x + 0'001x^2$.

a) Hallar las funciones de ingreso y de coste marginal.
b) ¿Cuál es el ingreso y coste marginal para $x_1 = 10.000$ y $x_2 = 25.000$?
c) Expresar la función que da el beneficio anual.
d) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo?. ¿Cuál es ese beneficio?

5. Las funciones de ingresos y costes anuales por la venta y fabricación de x unidades de radiadores vienen dadas por:

$I(x) = 2.700x - 0'08x^2.$

$C(x) = 700.000 + 250x + 0'003x^2.$

a) Hallar las funciones de ingreso y de coste marginal.
b) ¿Cuál es el ingreso y coste marginal para $x_1 = 800$ y $x_2 = 2.000$?
c) Expresar la función que da el beneficio anual.
d) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo?. ¿Cuál es ese beneficio?

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

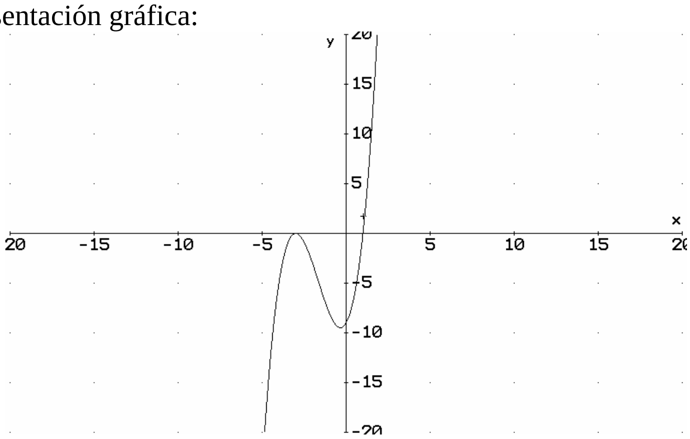
1.1-. a) *Dom(y)*=R.

b) Estrictamente creciente en $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-3,-\frac{1}{3}\right)$.

c) Máximo local en $x=-3$ y mínimo local en $x=-\frac{1}{3}$.

d) Estrictamente cóncava en $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$ y estrictamente convexa en $\left(-\frac{5}{3},+\infty\right)$. Punto de inflexión en $x=-\frac{5}{3}$.

a) Representación gráfica:



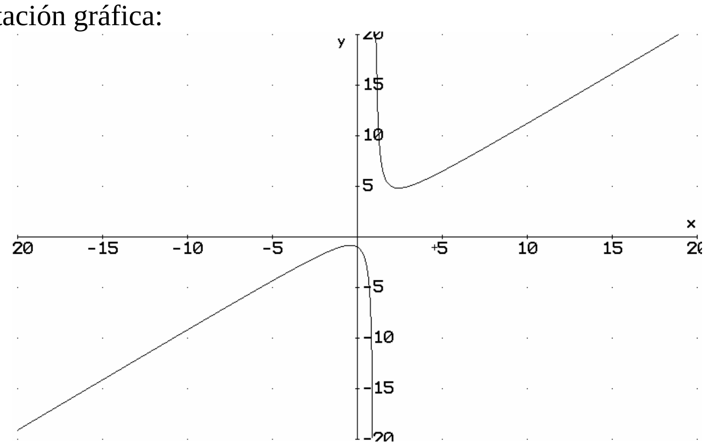
1.2.-. a) *Dom(y)*=R-{1}.

b) Estrictamente creciente en $\left(-\infty,2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2},+\infty\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$.

c) Máximo local en $x=2-\sqrt{2}$ y mínimo local en $x=2+\sqrt{2}$.

a) Estrictamente cóncava en $(-\infty,1)$ y estrictamente convexa en $(1,+\infty)$. No presenta puntos de inflexión.

b) Representación gráfica:



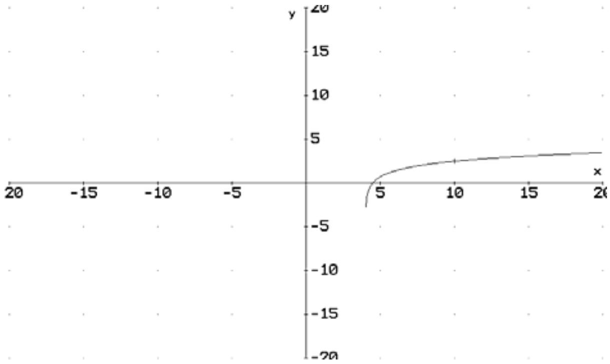
1.3-. a) *Dom(y)*= $\{x\in R/x>4\}$.

b) Estrictamente creciente en $(4,+\infty)$.

c) No presenta máximos ni mínimos.

d) Estrictamente cóncava en $(4,+\infty)$. No presenta puntos de inflexión.

e) Representación gráfica:



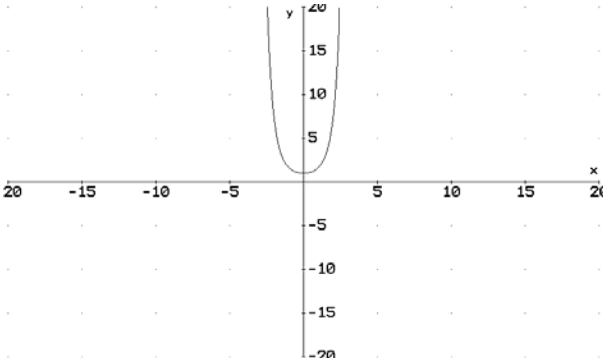
1.4-. a) *Dom(y)*=R.

b) Estrictamente creciente en $(0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$.

c) Mínimo local en $x=0$.

d) Estrictamente convexa en R. No presenta puntos de inflexión.

e) Representación gráfica:



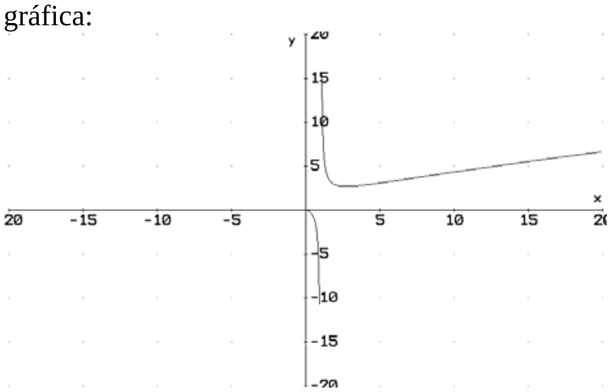
1.5-. a) *Dom(y)*=R$^+$-{1}.

b) Estrictamente creciente en $(e,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0,e)$.

c) Mínimo local en $x=e$.

d) Estrictamente cóncava en $(0,1)$ y estrictamente convexa en $(1,+\infty)$. No presenta puntos de inflexión.

e) Representación gráfica:



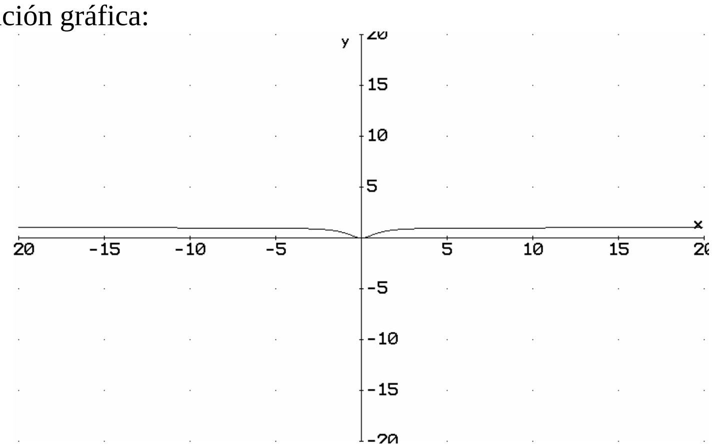
1.6-. a) *Dom(y)*=R.

b) Estrictamente creciente en $(0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$.

c) Mínimo local en $x=0$.

d) Estrictamente cóncava en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ y estrictamente convexa en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Puntos de inflexión en $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

e) Representación gráfica:



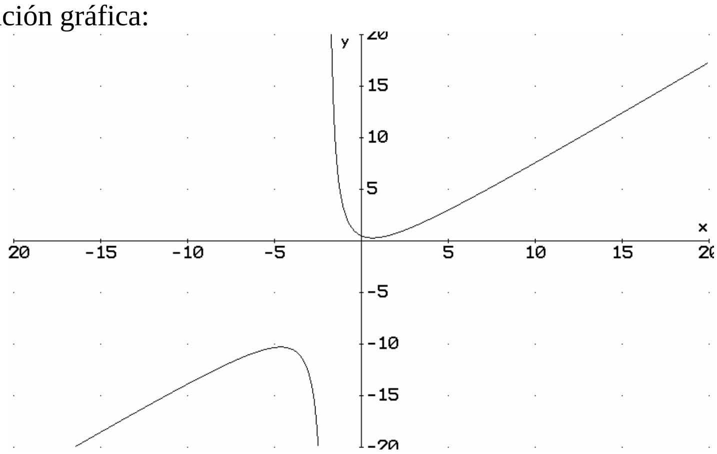
1.7-. a) *Dom(y)*=R-{-2}.

b) Estrictamente creciente en $\left(-\infty,-2-\sqrt{7}\right)\cup\left(-2+\sqrt{7},+\infty\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(-2-\sqrt{7},-2+\sqrt{7}\right)$.

c) Mínimo local en $x=-2+\sqrt{7}$ y máximo local en $x=-2-\sqrt{7}$.

d) Estrictamente cóncava en $\left(-\infty,-2\right)$ y estrictamente convexa en $\left(-2,+\infty\right)$. No presenta puntos de inflexión.

e) Representación gráfica:



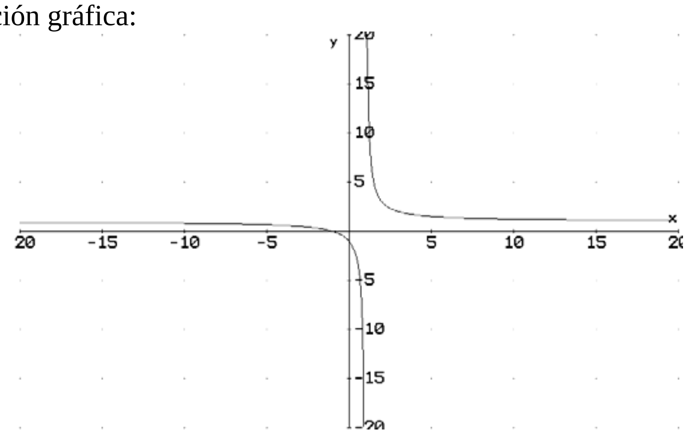
1.8-. a) *Dom(y)*=R-{1}.

b) Estrictamente decreciente en su dominio.

c) No presenta máximos ni mínimos locales.

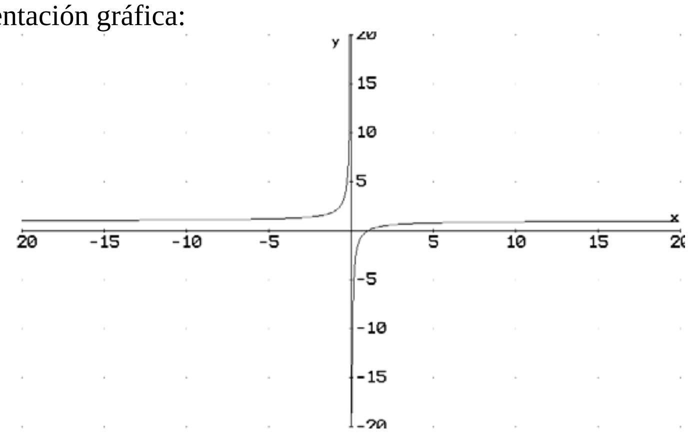
d) Estrictamente cóncava en $\left(-\infty,1\right)$ y estrictamente convexa en $\left(1,+\infty\right)$. No presenta puntos de inflexión.

e) Representación gráfica:

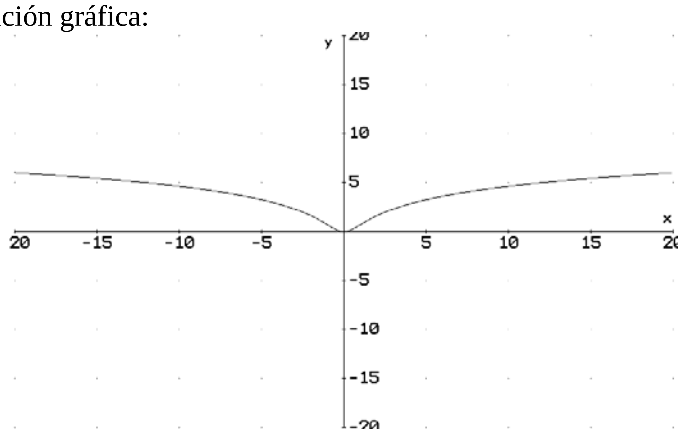


1.9-. a) *Dom(y)*=R-{0}.

b) Estrictamente creciente en su dominio.
c) No presenta máximos ni mínimos locales.
d) Estrictamente cóncava en $(0,+\infty)$ y estrictamente convexa en $(-\infty,0)$. No presenta puntos de inflexión.
e) Representación gráfica:



1.10-. a) *Dom(y)*=R.
b) Estrictamente creciente en $(0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$.
c) Mínimo local en $x_0 = 0$.
d) Estrictamente cóncava en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y estrictamente convexa en $(-1,1)$. Puntos de inflexión en $x=-1$ y $x=1$.
e) Representación gráfica:



2. $x = 7'5$ millones de euros.

3. $x = 1'5$ millones de euros.

4. a) $I'(x) = 2.000 - 0'08x$, $C'(x) = 100 + 0'002x$
b) I'(10.000) = 1.200; I'(25.000) = 0; C'(10.000) =120; C'(25.000) = 150.
c) $B(x) = 1.900x - 0'041x^2 - 1.000.000$.
d) $x = 23.170'73$ unidades. $B(23.170'73) = 21.012.195$ u.m.

5. a) $I'(x) = 2.700 - 0'16x$, $C'(x) = 250 + 0'006x$.
b) $I'(800) = 2.572$, $I'(2.000) = 2.380$, $C'(800) = 254'8$, $C'(2.000) = 262$.
c) $B(x) = 2.450x - 0'083x^2 - 700.000$.
d) $x = 121'48$ unidades. $B(121'48) = -403.582'4$ u.m.