ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Concepto.

Una expresión de la forma $ax+b=0$, con a,b números conocidos ($a \neq 0$) y x representando un número desconocido (incógnita), recibe el nombre de *ecuación de primer grado con una incógnita*.

Ejemplos: $2x-8=0; 4x+3=0; 5x-4=0.$

Todo número que pueda sustituir a la incógnita en la ecuación y verifique la igualdad, se llama raíz o solución de la ecuación. Si a,b son números reales es fácil comprobar que el número real $-\frac{b}{a}$ es la única solución de a ecuación propuesta.

Resolución de una ecuación de primer grado.

Resolver una ecuación significa calcular sus soluciones. En este caso, será calcular el número $-\frac{b}{a}$. Para resolver la ecuación de primer grado se suelen seguir los pasos siguientes:

(1) Eliminar los paréntesis, realizando las operaciones indicadas, si hay alguna.
(2) Quitar denominadores, multiplicando los dos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores que aparezcan en la ecuación.
(3) Mediante las operaciones adecuadas (sumas o restas) se colocan en un miembro de la ecuación todos los términos con x y en el otro los que no llevan x.
(4) Se despeja la x, dividiendo los dos miembros de la ecuación por el número que está multiplicando a la x.

ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS Y SISTEMAS DE DOS ECUACIONES.

Concepto.

Una ecuación de la forma $ax+by=c$ en la que a,b y c son números conocidos, mientras x e y son incógnitas, recibe el nombre de ecuación lineal con dos incógnitas. Una solución de la ecuación es un par ordenado que sustituidos por la x e y, la satisfacen.

Un conjunto de dos ecuaciones lineales con las mismas incógnitas, recibe el nombre de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+10y=4 \\ 6x-2y=22 \end{array}\right\}$$

Una solución del sistema es una par ordenado de números que sustituidos en lugar de x e y, verifiquen las dos ecuaciones simultáneamente.

El sistema se dice que es compatible si admite alguna solución. En caso contrario se dice que es incompatible. Un sistema compatible puede tener infinitas soluciones y decimos que se llama indeterminado o una solución única, llamándose sistema compatible determinado.

Resolución de un sistema de dos ecuaciones.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se utiliza algunos de estos métodos:

a) Sustitución: Hay que despejar una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones y sustituir el resultado obtenido en la otra ecuación. Así se elimina una incógnita y queda una ecuación con una sola incógnita. Resuelta esa ecuación se sustituye el valor en cualquiera de las ecuaciones y se calcula la incógnita que falta. Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ 3x+5y=-1 \end{array}\right\};$$

$$y=4-2x;\quad 3x+5(4-2x)=-1;\quad 3x+20-10x=-1;$$

$$-7x=-21;\quad x=3;$$

$$y=4-2\cdot 3;\quad y=-2$$

b) Reducción: Hay que conseguir que al sumar las ecuaciones, previamente multiplicadas por números adecuados, se obtenga una ecuación que sólo posea una incógnita. Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 5x-2y=9 \\ 3x+5y=-7 \end{array}\right\};$$

Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por 2:

$$\begin{array}{r} 25x-10y=45 \\ 6x+10y=-14 \end{array}$$; Sumando estas dos ecuaciones se obtiene $31x=31;\quad x=1$.

Al sustituir en la primera, podemos calcular el valor de y: $5-2y=9;\quad y=-2$.

c) Igualación: Hay que despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados obtenidos. Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y=8 \\ 2x+3y=9 \end{array}\right\};$$

$$\begin{array}{l} y=3x-8 \\ y=\dfrac{9-2x}{3}; \end{array}\quad \begin{array}{l} 3x-8=\dfrac{9-2x}{3}; 9x-24=9-2x;\quad 11x=33; x=3; \\ y=3\cdot 3-8; y=1. \end{array}$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a,b y c son números reales conocidos, a distinto de cero y la letra x siendo la incógnita, recibe el nombre de ecuación de segundo grado con una sola incógnita.

Resolución de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Los números a,b y c se llaman coeficientes, y se puede discutir la resolución de la ecuación en función de los valores de los coeficientes.

a) Si b = c = 0, la ecuación queda $ax^2=0$, la única solución es que x valga 0.

b) Si B es cero y c no lo es, la ecuación queda reducida $ax^2+c=0$. Por tanto $x^2=\frac{-c}{a}; x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

c) Si b no es cero y c si es cero, la ecuación queda $ax^2+bx=0$. Sacando factor común obtenemos $x(ax+b)=0$. Hay dos soluciones posibles $x_1=0;\quad x_2=\frac{-b}{a}$.

d) Si ningún coeficiente es nulo obtenemos $ax^2+bx+c=0$. Para resolver aplicamos la expresión $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ECUACIONES IRRACIONALES.

Aquellas ecuaciones que presentan su incógnita bajo una raíz cuadrada, que se considera positiva, se llaman ecuaciones irracionales. Para resolverlas se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación y se resuelve la nueva ecuación resultante.

Ejemplo: $\sqrt{x+1}+x=5$.

Despejando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado los dos miembros:

$$\sqrt{x+1}=5-x; \quad x+1=25-10x+x^2; \quad x^2-11x+24=0;$$

$$x_1=8; x_2=3.$$

De las dos soluciones se comprueba sustituyendo en la ecuación, que la válida es la segunda.

EJERCICIOS DE REPASO.

1.- Resuelva las ecuaciones:

$5x-1=4$ | $2x-3=5+2x$

$2x+3(2x-3)=x-1+2(x+2)$ | $(x+3)^2=0$

$(x+2)(x-3)=0$ | $\frac{2x-5}{5}-\frac{1-x}{8}=\frac{3(x+2)}{4}$

$x-\frac{1-2x}{3}=-4$ | $5x-3+\frac{1-2x}{2}=0$

$\frac{3x}{2}+\frac{2(2-x)}{4}=2-\frac{x+2}{6}$ | $\frac{7}{3}=\frac{2}{x-6}$

2.- Resuelva los sistemas:

$$\left.\begin{array}{r}3x-4y=7\\3x-2y=-1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}2x-4y=6\\x-2y=3\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}2x-4y=6\\x-2y=5\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}2x-4y=6\\x-y=5\end{array}\right\}$$

3.- Resuelva:

$3x^2=0$ | $3x^2+6=0$ | $3x^2-12=0$

$2x^2+3x=5$ | $x^2+2x+1=0$ | $x^2+x+2=0$

$x^2-5x+6=0$ | $\frac{1}{2}+\frac{2}{4-x}=\frac{1}{3}$ | $\frac{x}{2}+\frac{2}{4-x}=\frac{1}{3}$

4.- Resuelva:

$\sqrt{x+1}-2=0$; $\quad \sqrt{2x-1}=x+1$; $\quad \sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}$; $\quad \sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}=2$