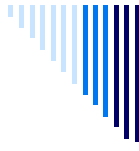
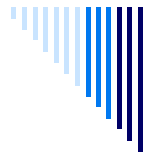


Tema 2. Aritmética

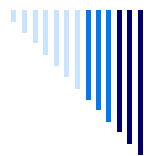


Fecha	Actividad
Lunes 11/10	Fin del tema 1. Estructura aditiva y multiplicativa: estudio conceptual, tipos de problemas, modelos y representaciones.
Miércoles 13/10	Prueba Tema 1. Continuación: Estructura aditiva y multiplicativa: estudio conceptual, tipos de problemas, modelos y representaciones.
Viernes 15/10	Seminario del tema 2.
Lunes 18/10	Estructura aditiva y multiplicativa: Métodos de cálculo. Estudio algebraico.
Miércoles 20/10	Continuación: Estructura aditiva y multiplicativa: Métodos de cálculo. Estudio algebraico.
Viernes 22/10	Seminario del tema 2.
Lunes 25/10	Divisibilidad. Números con signo.
Miércoles 27/10	Prueba del tema 2. Inicio del tema 3.



Ideas básicas

1. Qué es sumar, restar, multiplicar y dividir
2. Tipos de problemas aditivos y multiplicativos
3. Formas de resolver las sumas/restas y multiplicaciones/divisiones
4. Números con signo y relaciones de divisibilidad



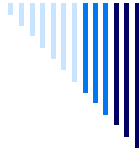
¿Cómo estudiar las operaciones?

- Qué es la suma, la resta, la multiplicación o la división. En qué situaciones/problemas se utiliza
- Qué propiedades tienen las operaciones
- Cómo obtener simbólicamente el resultado de las operaciones

Conceptual

Algebraico

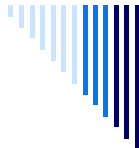
Algorítmico



¿Cómo organizar el estudio de las operaciones?

¿Cómo resolveríais los siguientes problemas?
¿Qué operaciones necesitáis utilizar?

1. Ana tiene 6 canicas y Bernardo lleva sus canicas para jugar, ¿cuántas canicas tiene Bernardo si entre los dos tienen 15 canicas?
2. Queremos repartir 20 árboles entre cuatro vecinos de una urbanización. ¿Cuántos le corresponden a cada uno?

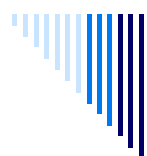


¿Cómo organizar el estudio de las operaciones?

- Estudio conjunto suma-resta
- Estudio conjunto multiplicación-división
- Además son operaciones inversas

Estructura Aditiva (\mathbb{N} , +, -)

Estructura Multiplicativa (\mathbb{N} , \times , :)



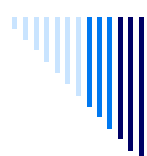
Estructura del Tema 2

1. Estudio conceptual de la Estructura Aditiva

- Significado de las operaciones
- Problemas aditivos
- Modelos para realizar operaciones y problemas

2. Estudio conceptual de la Estructura Multiplicativa

- Significado de las operaciones
- Problemas multiplicativos
- Modelos para realizar operaciones y problemas



Estructura del Tema 2

3. Estudio algebraico de las operaciones

- Propiedades de suma y resta
- Propiedades de multiplicación y división

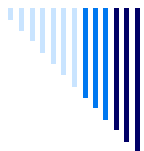
4. Formas simbólicas de obtener resultados

- Algoritmos de las operaciones
- Calculadora
- Cálculo mental
- Estimación

5. Números con signo y relaciones de divisibilidad



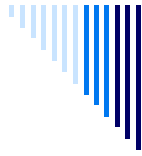
1. Estudio Conceptual de la Estructura Aditiva



Significado de las operaciones

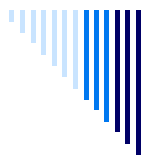
¿Qué es sumar? ¿Qué es restar?

TAREA para casa: Buscar términos que se identifican con sumar y con restar



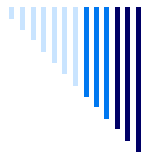
Significado de suma

- Concepción binaria: unir/combinar (combinación de dos cantidades a las que se les asigna el mismo papel)
- Concepción unitaria: añadir (la cantidad inicial sufre un cambio de estado al añadirle la segunda cantidad, que da como resultado su incremento)



Significado de la resta

- Concepción binaria: diferencia (como resultado de la comparación de dos cantidades)
- Concepción unitaria: quitar/separar (la cantidad inicial sufre un cambio de estado al quitarle la segunda cantidad, que da como resultado su disminución)
- Inversa de la suma. Suma donde se desconoce uno de los sumandos



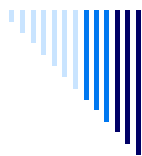
Etapas en los problemas

PROBLEMAS DE UNA ETAPA

Los problemas simples o de una etapa son los que se resuelven con una operación aritmética

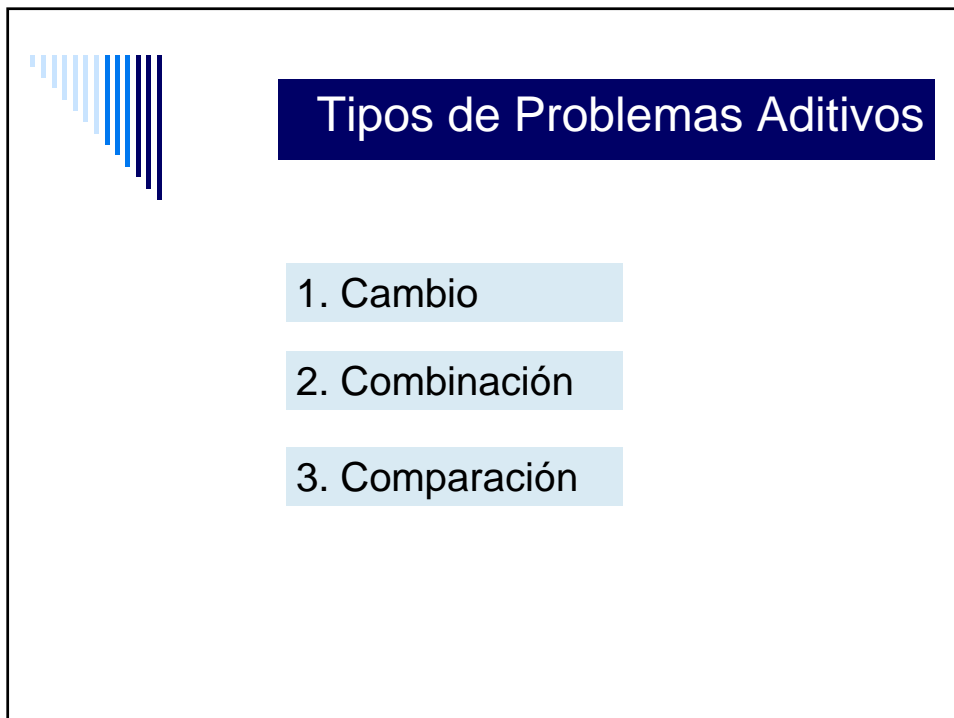
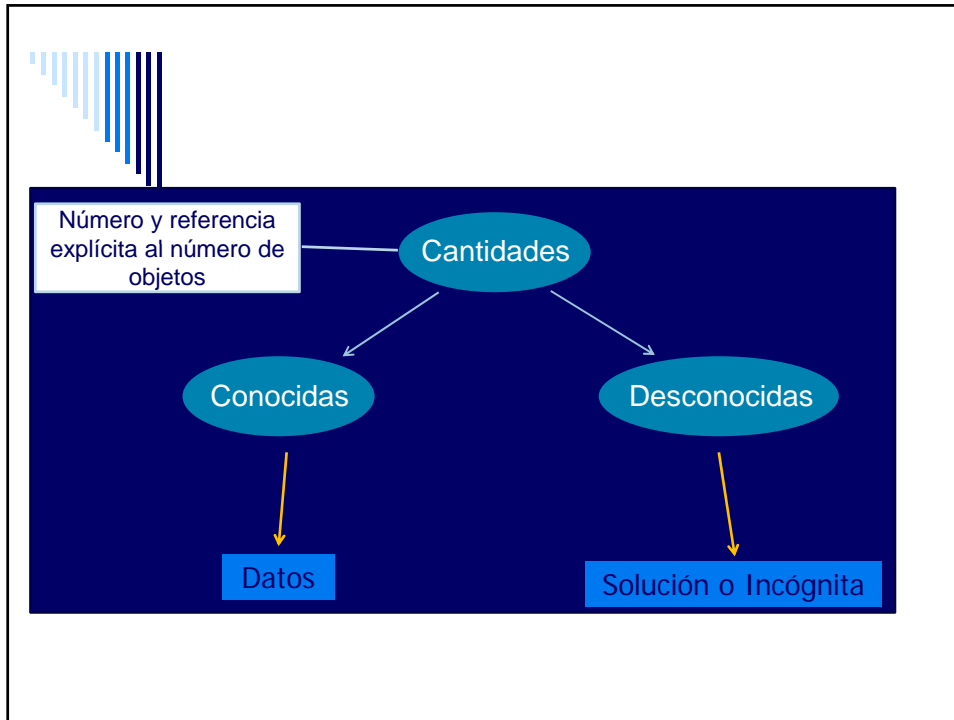
PROBLEMAS DE DOS O MÁS ETAPAS

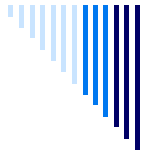
Los problemas compuestos o de más etapas son los que se resuelven con, al menos dos operaciones (iguales o diferentes)



Problemas Aditivos

Inventa varios problemas que se resuelvan con una suma o con una resta, de forma que sean diferentes





Problemas Aditivos de Cambio

Tenía 5 canicas y me dan 8, ¿cuántas tengo ahora?

Datos: 5 canicas (Estado inicial)
8 canicas (Transformación)

Tengo 13 caramelos y me como 4 ¿cuántos me quedan?

Datos: 13 caramelos (Estado inicial)
4 caramelos (Transformación)

Problemas dinámicos, dependen del tiempo

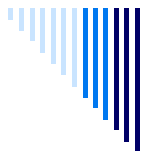
Concepción binaria de la suma/resta

Su estructura es

A
→
T
→
B

(estado) (transformación) (estado)

La acción es añadir/quitar o avanzar/retroceder



Problemas Aditivos de Cambio

Estaba en el piso 5^o y subí 8, ¿en qué piso me encuentro?

Datos: 5^o piso (Estado inicial)
8 pisos (Transformación)

Estaba en el piso 13^o y ahora estoy en el 5^o, ¿cuántos he bajado?

Datos: 13^o piso (Estado inicial)
5^o piso (Estado final)

Problemas dinámicos, dependen del tiempo

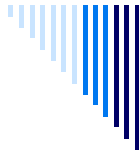
Concepción binaria de la suma/resta

Su estructura es

A
→
T
→
B

(estado) (transformación) (estado)

La acción es añadir/quitar o avanzar/retroceder



Problemas Aditivos de Combinación

Tengo 5 manzanas y 8 naranjas ¿cuántas frutas tengo?

Datos: 5 manzanas (Parte)
8 naranjas (Parte)

Tengo 13 lápices rojos y verdes, si 4 son rojos ¿cuántos son verdes?

Datos: 13 lap. rojos y verdes(Todo)
4 lap. verdes (Parte)

Problemas estáticos, no dependen del tiempo

Concepción binaria suma/resta

Su estructura es

A	B
---	---

La acción es reunir o separar

Dos cantidades incluidas en un todo que se dan a la vez



Problemas Aditivos de Comparación

Tengo 6 galletas y tú tienes 9 ¿cuántas galletas tienes tú más que yo?

Datos: 6 galletas (Referido)
9 galletas (Referente)

Si tengo 15 años y mi hermana tiene 7 menos ¿cuántos años tiene ella?

Datos: 15 años (Referido)
7 años (Comparación)

Problemas estáticos, no dependen del tiempo

Concepción binaria de la suma/resta

Su estructura es

A	—————	B
---	-------	---

(referente) comparación (referido)

La acción es comparar

Problemas Aditivos de Igualación


PROBLEMAS DE CAMBIO

- Carlos tenía 4 lápices e Irene le dio 3. ¿Cuántos lápices tiene ahora Carlos? ($a + b = ?$)
- Carlos tenía 3 lápices e Irene le dio algunos. Si ahora Carlos tiene 7 lápices, ¿cuántos lápices le dio Irene? ($a + ? = c$)
- Carlos tenía algunos lápices e Irene le dio 3. Si ahora Carlos tiene 7 lápices, ¿cuántos lápices tenía al principio? ($? + b = c$)

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN

- Teresa tiene 4 lápices e Ignacio tiene 3 lápices. ¿Cuántos lápices tienen entre los dos? ($a + b = ?$)
- Teresa e Ignacio tienen 7 lápices entre los dos. Si Teresa tiene 3 lápices, ¿cuántos lápices tiene Ignacio? ($a + ? = c$)
- Teresa e Ignacio tienen 7 lápices entre los dos. Si Ignacio tiene 4 lápices, ¿cuántos lápices tiene Teresa? ($? + b = c$)


PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

- Teresa tiene 4 lápices e Ignacio tiene 3. ¿Cuántos lápices tiene Teresa más que Ignacio? (Diferencia desconocida)
- Ignacio tiene 3 lápices y Teresa tiene 1 lápiz más que Ignacio. ¿Cuántos lápices tiene Teresa? (Comparación desconocida)
- Teresa tiene 4 lápices. Si tiene 1 lápiz más que Ignacio. ¿Cuántos lápices tiene Ignacio? (Referente desconocido)

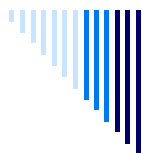
PROBLEMAS DE IGUALACIÓN

- Teresa tiene 4 lápices e Ignacio tiene 3. ¿Cuántos lápices necesita Ignacio para tener los mismos que Teresa? (Igualación desconocida)
- Ignacio tiene 3 lápices. Si le dan un lápiz tendrá los mismos que Teresa. ¿Cuántos lápices tiene Teresa? (Igualar conjunto conocido)
- Teresa tiene 4 lápices. Si a Ignacio le diesen 1 lápiz tendría los mismos que Teresa. ¿Cuántos lápices tiene Ignacio? (Igualar conjunto desconocido)



Clasificar y describir los siguientes problemas

1. En una floristería hay 315 rosas y 205 claveles, ¿cuántas flores hay?
2. Pedro tenía algunos euros ahorrados. Para su cumpleaños le dan 168 más y ahora tiene 443 euros. ¿Cuántos euros tenía Pedro al principio?
3. María mide 28 centímetros más que Javier. Si María mide 175 centímetros, ¿cuántos centímetros mide Javier?
4. Pedro, Juan y María juegan a las canicas. Pedro pierde 43 canicas con María. Si en total ha perdido 25 canicas, ¿cuántas ha ganado o perdido con Juan?
5. Javier tiene 37 euros menos que Carlos. Si Carlos recibe 125 euros, ¿cuántos euros de más o de menos que Carlos tiene Javier?
6. Irene tiene 5 años más que Raquel y 7 menos que Susana. ¿Cuántos años de más o de menos le lleva Raquel a Susana?



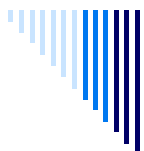
¿Qué factores influyen en la dificultad de los problemas aditivos?

- Tipo de problema: cambio, combinación, igualación y comparación
- Posición de la cantidad desconocida:

$$a + b = ?, \quad a + ? = c, \quad ? + b = c$$
- Formulación de la pregunta
- Lenguaje empleado
- Magnitud de los números (datos y resultado)



2. Estudio Conceptual de la Estructura Multiplicativa



Significado de las operaciones

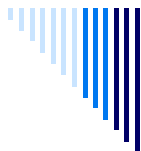
¿Qué es multiplicar? ¿Qué es dividir?

TAREA para casa: Buscar términos que se identifican con multiplicar y con dividir



Significado de multiplicar

- Suma repetida: se reitera un número determinado de veces (cada número tiene un papel diferente)
- Producto cartesiano: $a \times b =$ número de combinaciones posibles de a elementos con b elementos

Multiplicación como Suma Repetida

$$5 + 5 + 5 = 3 \times 5 (= 15)$$

$$a + a + a \dots (n) + a = n \times a$$

multiplicador

multiplicando

- ✓ Los dos números tienen papeles diferentes


Multiplicación como Producto Cartesiano

3x4

	□	△	◇	○
●	■	▲	◆	●
●	■	▲	◆	●
●	■	▲	◆	●

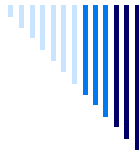
$a \times b = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = \text{Card}(A \times B)$

✓ **Los dos números tienen el mismo papel**



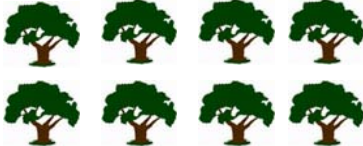
Significado de dividir

- División partitiva/Reparto: se fracciona una cantidad en un número de grupos (cada cantidad tiene un papel diferente)
- Concepción cuotitiva/Resta repetida: se resta una cantidad un número determinado de veces
- Inversa de la multiplicación. Multiplicación donde se desconoce uno de los factores



División Partitiva/Reparto

**Vamos a plantar 8 árboles en un jardín.
Queremos disponerlos en 2 filas, ¿cuántas
árboles habrá en cada fila?**




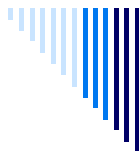
$8 : 2$

División Cuotitiva/Resta reiterada

**Vamos a plantar 8 árboles en un jardín. Queremos
disponerlos en filas de 2 árboles cada una, ¿cuántas
filas habrá?**


$8 : 2$





División Partitiva/Reparto

**Vamos a plantar 8 árboles en un jardín. Queremos
disponerlos en 2 filas, ¿cuántas árboles habrá en cada
fila?**




- Se conoce el total de elementos y el número de grupos (cantidades de diferente naturaleza)
- No se conoce el número de elementos por grupo

División Cuotitiva/Resta reiterada

**Vamos a plantar 8 árboles en un jardín. Queremos disponerlos
en filas de 2 árboles cada una, ¿cuántas filas habrá?**

- Se conoce el total de elementos y el número de elementos por grupo (cantidades de igual naturaleza)
- No se conoce el número de grupos

¿Cuántas veces cabe un número en otro?



División como Inversa de la Multiplicación

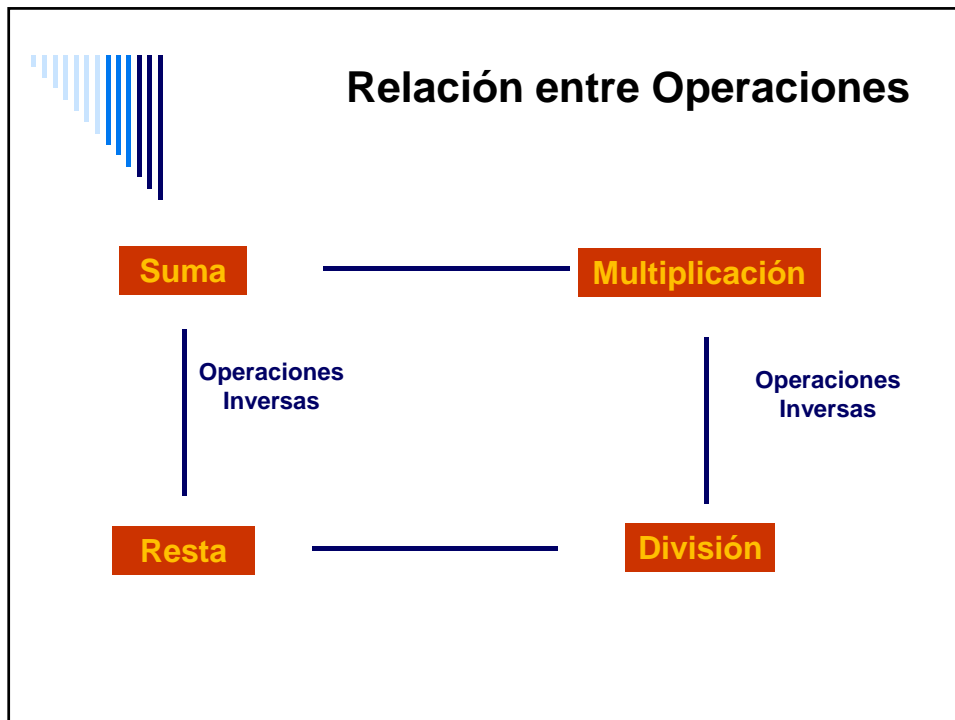
$$16 : 2 = \blacksquare \quad \blacksquare \times 2 = 16$$

$$a : b = \blacksquare \quad b \neq 0 \quad \blacksquare \times b = a$$



Resumen

- **Multiplicación:** suma repetida o producto cartesiano
- **División:** reparto, resta repetida o inversa de la multiplicación



Problemas Multiplicativos

Inventa varios problemas que se resuelvan con una multiplicación o con una división, de forma que sean diferentes



Tipos de Problemas Multiplicativos

1. Proporcionalidad simple

2. Comparación

3. Producto cartesiano



Problemas Multiplicativos de Proporcionalidad Simple

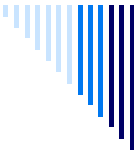
1. Un abuelo compra 3 dulces por nieto. Si tiene 4 nietos, ¿cuántos dulces compra? **Multiplicación**

2. Un abuelo tiene 4 nietos. Si el abuelo compra 12 dulces, ¿cuántos dulces se puede comer cada nieto? **División partitiva**

3. Un abuelo compra 3 dulces por nieto. Si en total ha comprado 12 dulces, ¿cuántos nietos tiene el abuelo? **División cuotitiva**

- ✓ Los datos pertenecen a conjuntos diferentes
- ✓ Un dato indica el sumando y el otro indica el número de veces que se suma

Dato desconocido



Problemas Multiplicativos de Comparación

Referente

Escalar

Eva tiene 6 años y su primo Antonio tres veces más, ¿cuántos años tiene Antonio?

Referido o Comparado

Incógnita en comparado

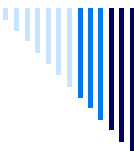
Eva tiene 6 años y Antonio 18, ¿cuántas veces más años tiene Antonio que Eva?

Incógnita en escalar

Antonio tiene tres veces los años que Eva. Si Eva tiene 6 años, ¿cuántos años tiene Antonio?

Incógnita en referente

Aumento vs disminución



Problemas Multiplicativos de Producto Cartesiano

Tengo tres camisetas de diferentes colores y dos pantalones (uno de rayas y uno de cuadros). ¿De cuántas formas diferentes me puedo vestir?

Combinatoria

Un jardín rectangular de 35 m² tiene 5 metros de ancho, ¿cuánto mide de largo?

Producto de medidas

Dato desconocido

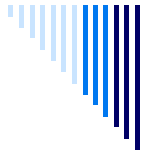
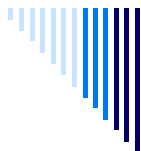


Tabla-resumen Problemas Multiplicativos

Problemas de estructura multiplicativa de una etapa						
Proporcionalidad simple			Comparación		Producto cartesiano	
Multiplicación	División partitiva	División cuotitiva	Aumento	Disminución	Combinatoria	Producto de medidas

Dato desconocido



¿Hay más problemas multiplicativos?

1. Varias etapas
2. Problemas no rutinarios
 - Problemas reales
 - Problemas de división con resto
 - Problemas irresolubles

Modelos y Representaciones

1. Modelos lineales

2. Modelos cardinales

pp. 214-219

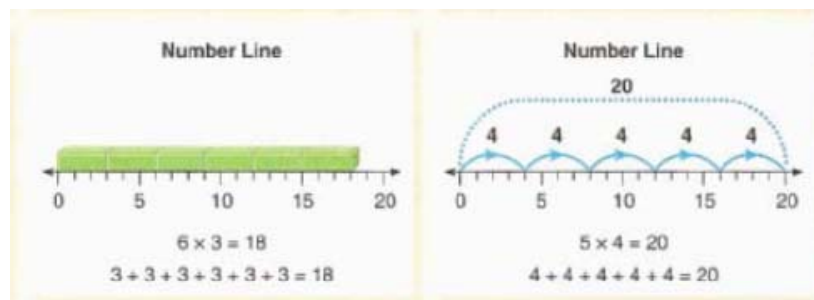
3. Modelos de medida

4. Modelos numéricos

5. Modelos de razón/comparación aritmética

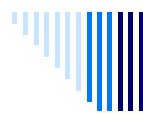
6. Modelos funcionales

1. Modelos lineales



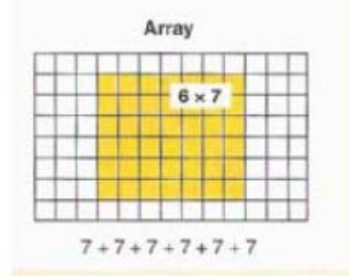
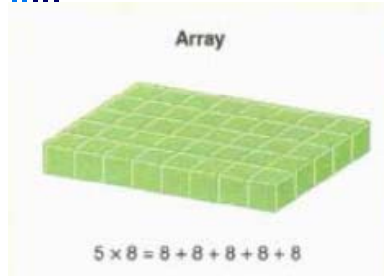
Con soporte gráfico

Sin soporte gráfico

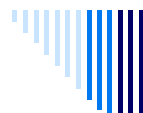
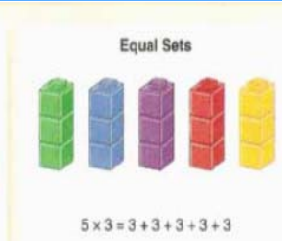
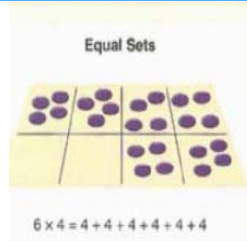


2. Modelos cardinales

Esquema rectangular



Unión repetida de conjuntos con el mismo número de objetos



Producto cartesiano

	1	2	3
1			
2			

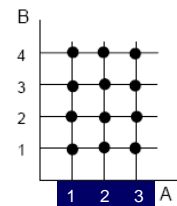
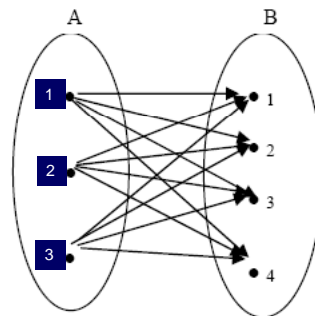


Diagrama de flechas



3. Modelos de medida



Regletas Cuisinaire

Balanza



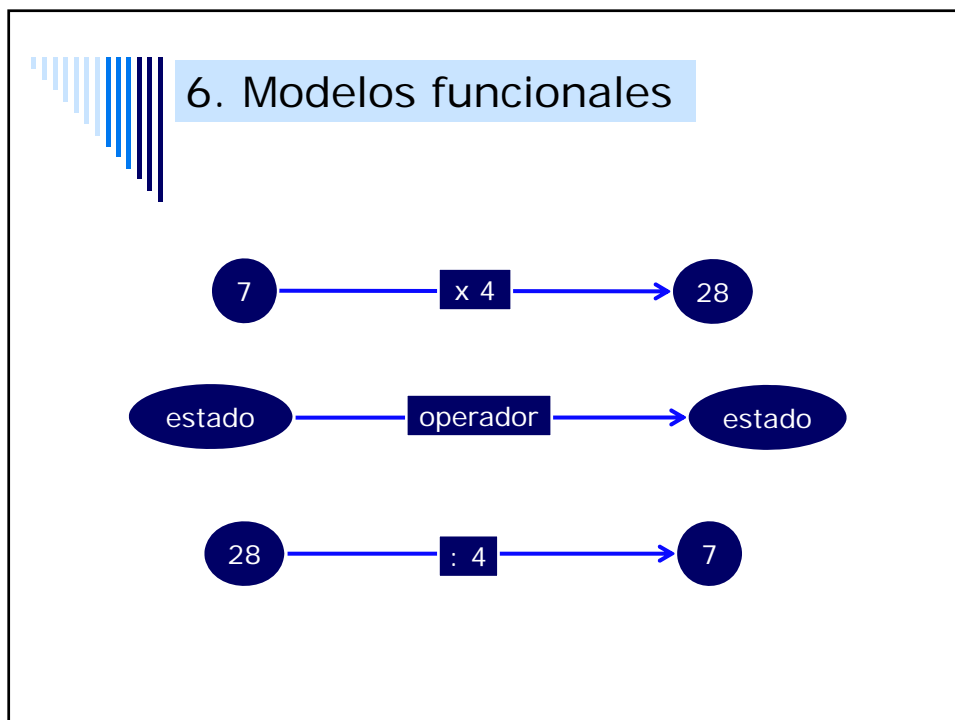
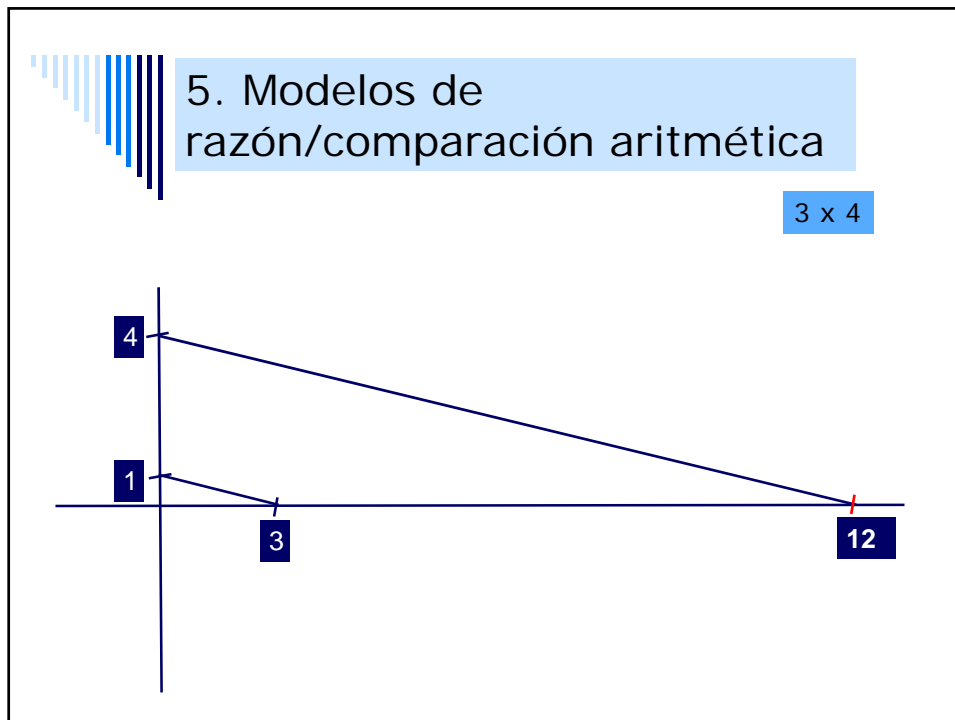
4. Modelos numéricos

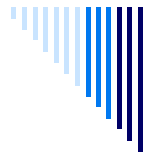
$$5 \times 8$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$$

... y otras posibles
descomposiciones de los factores

- 80x40
- 5x40
- 80x2
- 5x2
- ...
- 85x42





Trabajo Autónomo

- Actividades de reflexión y evaluación del tema 2
- Modelos y representaciones (pp. 214-219)