DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Asignatura: Didáctica de la Matemática. Curso 2010 - 2011

Profesores: Dr. D. Luis Rico Romero y Dra. Dña. María Consuelo Cañadas Santiago

Actividad sobre Contenidos en Textos de Matemáticas

En las siguientes páginas está escaneado el desarrollo, según diferentes textos, de un mismo tema de matemáticas de secundaria: *Funciones*. Los textos están redactados para alumnos de la misma edad (14-15 años). Uno de ellos corresponde al programa de la LGE, mientras que los otros dos son textos preparados para el programa LOGSE.

Para realizar la siguiente actividad es necesario también que dispongas de una copia de la Orden 2220/2007 publicada en el Boletín Oficial del Estado número 174 (fecha: 21.07.2007), http://www.boe.es/diario_boe/, orden relativa al currículo de educación secundaria. Los datos que interesan están en las páginas 31680 a 31689 (datos generales) y en las páginas 31789 a 31805 (datos del currículo de matemáticas) de esa orden.

El trabajo que se pide consiste en

- ✓ Identificar los contenidos mediante los cuales los autores de los textos plantean y desarrollan un mismo tema de matemáticas en educación secundaria.
- ✓ Comparar los contenidos matemáticos e ideas específicas recogidas en los tres libros de texto y señalar las diferencias y semejanzas entre ellos.
- ✓ En la Orden 2220/2007 aparecen los contenidos generales de Matemática en educación secundaria. Indica aquellos que más claramente aparecen reflejados en las páginas de cada uno de los libros. Compara los contenidos matemáticos e ideas específicas recogidas en los tres libros de texto con las que se recogen en el documento curricular.
- ✓ ¿Se refieren los tres libros a los mismos conceptos? ¿Trabajan los mismos procedimientos? ¿Destacan las mismas propiedades?
- ✓ Las notaciones y gráficos, ¿son los mismos? Los contextos y situaciones ¿son idénticos?
- ✓ ¿Qué recursos utiliza cada autor en su presentación?
- ✓ Resume brevemente las ideas que surgen como resultado de esta comparación.

Nota:
Los fragmentos presentados en las páginas anteriores pertenecen a los siguientes libros de texto:
1. Funciones 1 Editorial SM (corresponde al 1º de Bachillerato del plan 1971)
2. Fractal 3º ESO Editorial Vicens Vives.
3. Matemáticas 3º ESO Editorial Santillana.

Funciones 1º Bac. Plan LGE

A) CONCEPTO DE FUNCION REAL

22.1. Funciones reales de variable real

22.1.1. Definición

Sea D un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales **R**, es decir, $D \subset \mathbf{R}$.

Se llama función real de variable real a toda aplicación f de D en **R**, *y se designa por*

$$f: D \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{o} \quad D \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

Intuitivamente, una función real de variable real asigna a cada elemento x del dominio D un elemento y de **R**, y sólo uno.

Debe quedar bien claro que una función queda determinada siempre que conozcamos la manera de asociar a cada elemento de D un elemento de **R**. No es necesario que exista una fórmula matemática que relacione dichos elementos. La regla de asociación puede darse arbitrariamente.

22.1.2. Notación y terminología

- El subconjunto D se llama **dominio**, dominio de definición o campo de existencia de la función f. Se designa por Dom(f).
- Al número $x \in D \subset \mathbf{R}$ se le llama **variable independiente**. Su dominio de variación es precisamente D.
- Al número $y \in \mathbf{R}$ asociado por f al número x, se le llama **variable dependiente**. Es obvio que y depende de x, de ahí su nombre. Por eso también se designa la imagen de x por f(x), es decir, $y = f(x)$.

  Nótese que f(x) es un número real, mientras que f es la función.
- Se llama **recorrido** de una función f al conjunto de las imágenes de la variable dependiente y, es decir, al conjunto de los valores de **R** que tienen por original al menos un elemento de D. Se designa por f(D) o Im(f).

  Es evidente que f(D) es un subconjunto de **R**, pero no necesariamente igual a **R**.

22.1.3. Representación esquemática

La idea de función puede esquematizarse de muchas maneras. Señalamos algunas:

a) Los conjuntos D y **R** se representan por medio de un **diagrama de Venn**, tal como se indica en la figura 22.1:

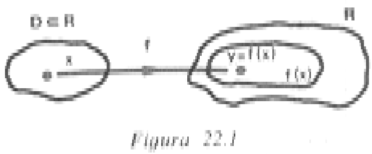


Figura 22.1

El elemento original x se une por medio de una flecha con el elemento imagen f(x), que también se designa por y.

b) Los conjuntos D y **R** se representan por medio de **diagramas lineales**, tal como se indica en la figura 22.2.

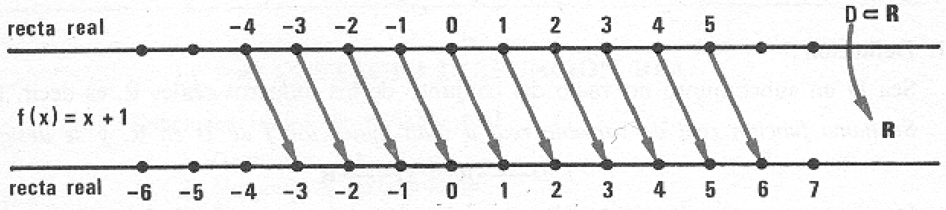


Figura 22.2

Lo mismo que antes, cada elemento del dominio D se une por medio de una flecha con el elemento imagen $y = f(x)$ del recorrido.

c) Las modernas máquinas calculadoras nos dan un esquema de función muy interesante. Incluso las de bolsillo tienen teclas funcionales tales como las siguientes (Fig. 22.3):

$$\boxed{x^2},\ \boxed{\sqrt{x}},\ \boxed{\frac{1}{x}},\ \boxed{n!},\ \ldots,\ \boxed{f}$$

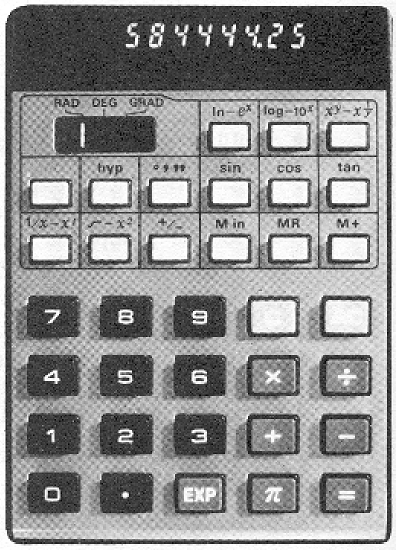


Figura 22.3

Introducido como dato un elemento x del dominio D, la pulsación de la tecla funcional f nos da como resultado f(x), es decir, la imagen de x por f.

Esquemáticamente se tiene:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

Así:

$$2 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{x}} \longrightarrow 0{,}5$$

$$3 \longrightarrow \boxed{x^2} \longrightarrow 9$$

Ejemplos:

1. La regla que asigna a cada número su cuadrado, puede escribirse ahora de la siguiente forma:

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2$$

2. La regla que asigna a cada número real el doble más uno, es una función f de **R** en **R** definida por $f(x) = 2x + 1$.

Funciones 1º Bac. Plan LGE

Nota: En la práctica, y por abuso de notación, suele hablarse de la función, por ejemplo, $f(x)=1/x$. Evidentemente esta expresión no define una función real, sino infinitas funciones, dependiendo del dominio $D \subset \mathbf{R}$; no obstante, si no se expresa el dominio la función queda determinada, suponiendo que se trata siempre del dominio máximo. En nuestro ejemplo, $D=\mathbf{R}^*$.

En adelante, salvo que se diga lo contrario, podemos emplear esa expresión y otras semejantes siempre que se entienda que el dominio es máximo.

En este sentido debe entenderse la frase: «Hallar el dominio de la función $f(x)=\cdots$». Insistimos, se trata del dominio máximo.

22.1.4. Algunos tipos de funciones

Puesto que una función es una aplicación de D en **R**, podemos decir que una función es **inyectiva**, **suprayectiva** o **biyectiva** cuando lo es la aplicación que la define.

Ejemplos:

1. La función f de **R** en **R** dada por $f(x)=2x+1$ es inyectiva.

   En efecto,

$$f(x)=f(x') \Leftrightarrow 2x+1=2x'+1 \Leftrightarrow 2x=2x' \Leftrightarrow x=x'$$

   luego si las imágenes son iguales los originales también lo son, que es la condición para que una función sea inyectiva.

2. La función f de **R** en **R**, definida por $f(x)=x^2$, no es una función ni inyectiva ni suprayectiva.

   No es inyectiva ya que $f(-2)=f(2)=4$.

   No es suprayectiva ya que, por ejemplo, -4 no tiene original; no existe ningún número que elevado al cuadrado nos dé -4.

3. La correspondencia f de D en **R**, definida por $f(x)=\sqrt{x}$, no es función para ningún dominio.

   En efecto, para que tenga sentido la expresión $f(x)=\sqrt{x}$, x tiene que ser positivo; en este caso existen dos raíces o una raíz. Así $f(4)=\{-2, 2\}$. Por tanto f no es función.

4. La función f de **R** en **R**, definida por $f(x)=x^3$, es biyectiva.

El dominio D hemos visto que puede ser un subconjunto no vacío cualquiera de **R**. Según el dominio, algunas funciones reciben un nombre particular.

- Si $D = \mathbf{N}^*$ las funciones son precisamente las **sucesiones reales** que hemos estudiado en los temas anteriores.
- Si $D \subset \mathbf{Z}$ las funciones reciben el nombre de **funciones reales de variable entera**, o simplemente funciones enteras.
- Si $D \subset \mathbf{Q}$ las funciones se llaman **funciones reales de variable racional**, o simplemente funciones racionales.
- Si $D \subset \mathbf{R}$ las funciones se llaman **funciones reales de variable real**.

Funciones 1º Bac. Plan LGE

22.1.5. Igualdad de funciones

Sean $f: D_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ y $g: D_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ dos funciones. Se dice que f es igual a g, y se escribe $f=g$, cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

i) $D_1 = D_2$, es decir, tienen el mismo dominio.

ii) $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio $D_1 = D_2$.

Ejemplos:

1. Las funciones $f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2$ son distintas, aunque la expresión que nos da la imagen de x es la misma.

2. Las funciones dadas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ son distintas si consideramos que están definidas en el dominio máximo que es $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R} - \{1\}$, respectivamente. Nótese que son iguales, excepto en el punto $x = 1$, en que la segunda no está definida.

El conjunto de las funciones definidas en un dominio D se designa por $F(D, \mathbf{R})$.

22.2. Representación gráfica de una función

22.2.1. Grafo de una función

Sea $f: D \longrightarrow \mathbf{R}$ una función. A cada valor numérico x del dominio D le corresponde por f un valor numérico $y = f(x)$, que es la imagen de x.

La función f determina así un conjunto de pares de números reales; cada par está formado por un elemento de D y un elemento de $\mathbf{R}$ que se corresponden por la función f:

$$(x, y) = (x, f(x)), \qquad x \in D, \qquad y = f(x) \in \mathbf{R}$$

Se llama grafo de la función f, y se designa por G_f, al subconjunto de $D \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2$ dado por

$$G_f = \{(x, f(x))/x \in D\}$$

Ejemplos:

1. *Se considera la función f de $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $\mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Hallar su grafo*

   Se tiene: $G_f = \{(x, f(x))/x \in D\} = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17), (5, 26)\}$

2. *Hallar 7 pares del grafo G_f de la función f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$.*

Funciones 1º Bac. Plan LGE

22.2.2. Gráfica de una función

Consideremos ahora un plano y en él un sistema de referencia cartesiano rectangular dado por R(O; OX, OY).

Sea $f: D \longrightarrow \mathbf{R}$ una función. A cada elemento $(x, f(x))$ del grafo G_f le corresponde en el plano un punto $P(x, f(x))$. Gráficamente (Fig. 22.4):

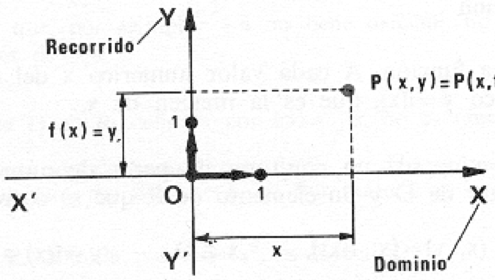


Fig. 22.4

El conjunto de todos los pares o elementos del grafo G_f, tiene por correspondiente en el plano un conjunto de puntos. La **figura del plano** determinada por los puntos $P(x, f(x))$ de una función f, se llama **gráfica** de la función.

Es evidente que para construir la gráfica de una función en el plano necesitamos conocer todos los puntos $P(x, f(x))$. Tendríamos así la gráfica exacta.

- Si el dominio de la función f es finito es posible representar todos los puntos $P(x, f(x))$ y obtener la gráfica completa. Aun en este caso si el número de puntos es elevado la construcción de la gráfica completa resulta inviable.
- Si el dominio es infinito, es imposible representar todos los puntos $P(x, f(x))$. En la práctica se representan los puntos necesarios de modo que al unirlos luego convenientemente por un trazo continuo se obtiene una gráfica que se aproxima a la real.

Para el estudio de la gráfica de una función es conveniente construir una **tabla de valores** tal como hemos hecho en 22.2.1 (Ejemplo 2). No obstante, todo parece indicar que la construcción de la gráfica de una función por la «fuerza bruta» no es el camino ideal. En este curso y en los siguientes estudiaremos propiedades de las funciones que nos ayudarán a conocer mejor una función y a construirla de forma más sencilla. Así, por ejemplo, veremos que la gráfica de la función f de **R** en **R**, definida por $f(x) = 2x + 1$, es una recta; por tanto, para dibujarla perfectamente basta representar dos puntos distintos.

Un punto $P(x_1, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$ cuando se verifica la relación $y_1 = f(x_1)$.

Ejemplos:

1. *Representar la función f de* $D = \{1, 2, 3, 4\}$ *en* **R** *definida por* $f(x) = 2x$

Tabla de la función

x	$y = f(x)$	$P(x, y)$
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)
3	6	(3, 6)
4	8	(4, 8)

Gráfica de la función

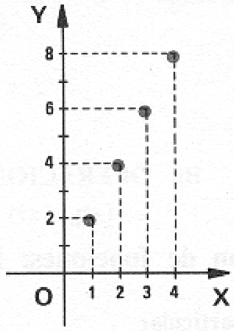


Figura 22.5

Funciones 1º Bac. Plan LGE

22.3. Se define una función f de **N** en **Z** de la siguiente forma:

$$f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(3)=10,\ f(4)=17,\ f(5)=26,\ \ldots$$

¿Cuál es la fórmula general que define la función f?

22.4. Se define la función f de $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en **R** por $f(x)=2x+1$. Hallar el recorrido. ¿Es una función inyectiva? ¿Por qué?

22.5. Dada la función f por $f(x)=1/(x^2-1)$, se pide su dominio máximo.

22.6. Dada la función f por $f(x)=1/(x^2-3x+2)$, se pide su dominio máximo.

22.7. Dada la función f por $f(x)=\sqrt{x-1}$, se pide su dominio máximo.

22.8. Dada la función f por $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$, hallar su dominio máximo.

22.9. Demostrar que la función f de **R** en **R** dada por $f(x)=3x+7$ es inyectiva.

22.10. Demostrar que la función f de **R** en **R** dada por $f(x)=x^2$ no es inyectiva.

22.11. ¿Es una función la correspondencia f de **R** en **R** dada por $f(x)=\sqrt{x}$? ¿Por qué?

22.12. ¿Qué nombre reciben las funciones cuyo dominio es **N**?

22.13. Demostrar que la función f de **R** en **R** definida por $f(x)=x^3$ es biyectiva.

22.14. Dada la función f de **R** en **R** por $f(x)=x^2+x+1$, se pide:

a) La imagen de $x=2$.
b) El original de 3.
c) $f(3x)$.

22.15. Dada la función f de **R** en **R** definida por $f(x)=1/(1+x^2)$ se pide:

a) $f(1/x)$.
b) $f(cx)$.
c) $f(x+y)$.
d) $f(x)+f(y)$. ¿Son iguales los resultados de *c* y *d*)?

22.16. ¿Es posible que, en una función a dos valores distintos de la variable independiente, corresponda el mismo valor de la variable dependiente? ¿Y al revés? Razonar con un ejemplo la contestación.

22.17. Dada la función $f(x)=1/(1+x)$, ¿para qué valores de c existe un número x tal que $f(x)=f(cx)$?

22.18. Hallar el dominio máximo de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}$

b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$.

22.19. Explica si son funciones las relaciones siguientes:

a) A cada número entero le hacemos corresponder sus factores primos.
b) A cada número natural le hacemos corresponder su mayor divisor.
c) A cada número real le hacemos corresponder su raíz cuarta.

Funciones 1º Bac. Plan LGE

22.20. Dadas las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, ¿son iguales en su dominio máximo? Si la respuesta es negativa, ¿en qué dominio son iguales?

22.21. Sea f una función de **N** en **R** dada por $f(x) = 2x$ y g la función de **R** en **R** dada por $g(x) = 2x$. ¿Son iguales? Si la respuesta es negativa, ¿en qué dominio son iguales?

22.22. Representar la función f de **R** en **R** dada por $f(x) = x$. ¿Qué nombre recibe su gráfica respecto de un sistema de coordenadas rectangulares?

22.23. Representar la función f de **R** en **R** dada por $f(x) = -x$. ¿Qué nombre recibe su gráfica respecto de un sistema de coordenadas rectangulares?

22.24. Representar en el plano 8 puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 25$. ¿A qué figura geométrica pertenecen?

22.25. Cada paso de una llamada telefónica cuesta dos pesetas y el paso dura 1 minuto. Dibujar la gráfica que indica el coste de una llamada durante 5 minutos.

22.26. A cada número real entre 0 y 5 le hacemos corresponder su parte decimal. Representar esta función.

22.27. Dadas las funciones f, g y h de **R** en **R** definidas por:

$$f(x) = x^2 - x + 1, \qquad g(x) = 2x^3 - 3x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^4 + x^2 + 1$$

hallar su suma y el producto fg.

22.28. Se consideran las funciones f y g de **R** en **R** definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 2x + 5 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

hallar su suma, la diferencia $f - g$ y el producto.

22.29. Representar la función valor absoluto $f(x) = |x|$. ¿Cómo puede obtenerse la función f partiendo de la función $g(x) = x$? Razonar la contestación.

22.30. ¿Cómo son las gráficas de f y g de **R** en **R** definidas por $f(x) = -x^2 - x - 1$ y $g(x) = x^2 + x + 1$, respecto del eje OX? ¿Cuánto vale su suma?

22.31. Se considera la función f de **N** en **R** dada por $f(x) = x^2 - x + 1$. ¿Cuál es el elemento opuesto de esta función? ¿Cuál es su dominio?

22.32. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Se pide: *a)* $f + g$, *b)* $g - f$, *c)* fg.

22.33. Dada la función $f(x) = x^3$. Se pide: *a)* Su dominio máximo, *b)* el dominio máximo de la función inversa 1/f.

22.34. Definir una función en **R** que no tenga inversa en ningún punto. ¿Qué nombre recibe?

22.35. Definir una función f en **R** que coincida con su opuesta $-f$. ¿Qué nombre recibe?

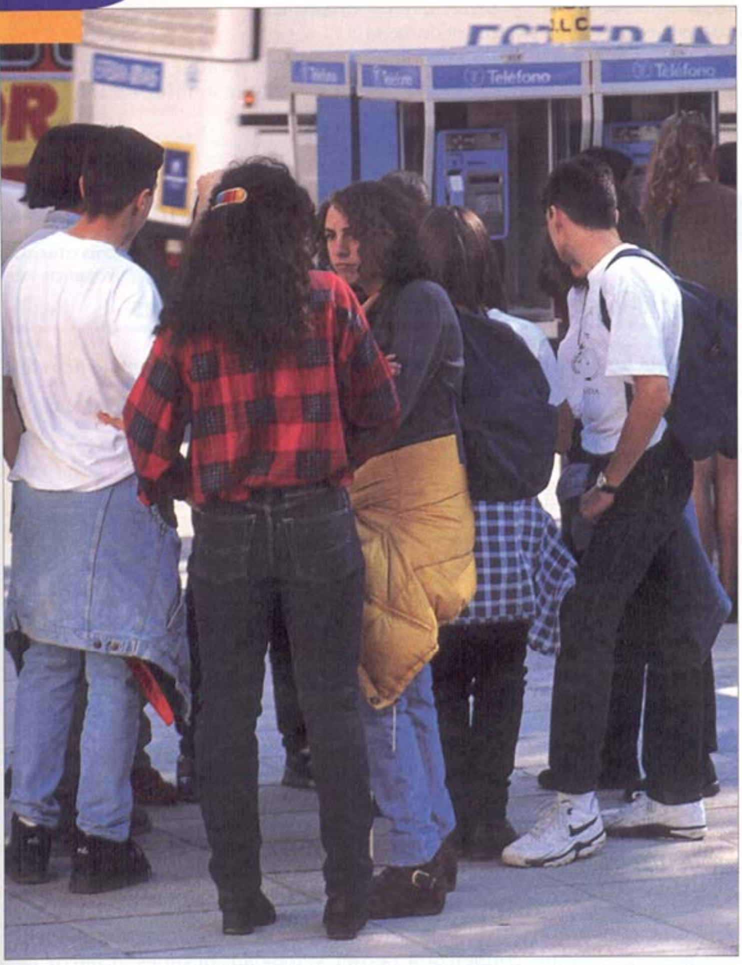
22.36. Definir una función f en **R** que coincida con su inversa 1/f. ¿Cuántas hay? ¿Qué nombre reciben?

22.37. Un globo se hincha manteniendo siempre la forma esférica. Hallar la función que expresa el radio en función del volumen de aire inyectado.

Santillana 3º ESO, Funciones

UNIDAD 11

Funciones y gráficas



Las llamadas telefónicas y las gráficas

Cinco amigos residentes en Almería han realizado llamadas telefónicas a diferentes ciudades del país. El precio y la duración de la llamada de cada uno aparecen representados en la gráfica de puntos.

INTERPRETA, CALCULA Y CONTESTA

- El precio de la llamada de Rosa, ¿fue mayor o menor que el precio de la llamada de Mónica?
- ¿Quiénes hablaron durante mucho tiempo? ¿Quiénes hablaron poco tiempo?
- ¿Quién habló poco tiempo y pagó mucho por la llamada?
- ¿Quiénes crees que realizaron una llamada local?
- ¿Tiene sentido unir de alguna manera los cinco puntos representados en el gráfico?
- ¿Por qué las llamadas locales serían puntos situados en una misma recta que pasa por el origen? Dibújala.
- Las llamadas (puntos) de Almería a Alicante estarían situadas en otra recta. ¿Pasaría por el origen? ¿Por encima o por debajo de la anterior?

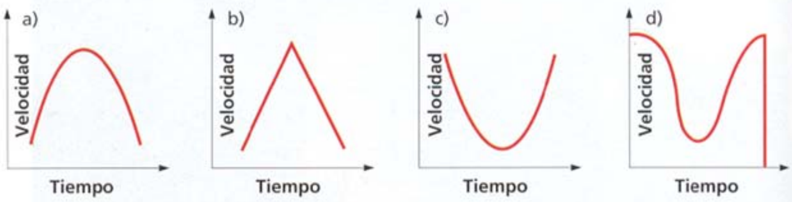
Santillana 3º ESO. Funciones

1 ESTUDIO CUALITATIVO DE LAS GRÁFICAS

Las gráficas como representación de relaciones

¿Cuál de las siguientes gráficas crees que corresponde al cambio de velocidad de la bola en el aire al ser golpeada por el jugador de golf?

Trayectoria de la bola de golf



Muchas personas dirían que la gráfica a) es la más parecida al movimiento real de la bola, pero esto es un error conceptual porque se identifica la gráfica del cambio de velocidad con la trayectoria de la bola.

La elección de la gráfica b) la hacen otras personas pensando que la pelota pierde velocidad cuando sube y acelera cuando baja. Lo que piensan es cierto, pero la elección es equivocada.

También tienen su argumento las personas que eligen la gráfica c). Esas personas dicen que la pelota pierde velocidad al principio y después vuelve a ganar velocidad.

Finalmente, las que eligen la gráfica d) dicen que la pelota, una vez golpeada, acelera, después comienza a perder velocidad; después, a partir de un cierto instante, la pelota gana velocidad hasta que llega al hoyo, donde su velocidad se hace cero.

La gráfica d) es la que mejor describe la variación de la velocidad a lo largo del tiempo.

Dicha gráfica expresa la relación tiempo-velocidad. La magnitud tiempo aparece representada en el eje horizontal, y la magnitud velocidad, en el eje vertical.

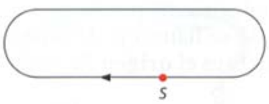
Las gráficas no son simples dibujos de las situaciones que sirven de base.

Una gráfica es la representación de una relación entre dos variables.

Santillana 3º ESO, Funciones

Gráficas a partir de dibujos

Circuito del scalextric



Más de una vez habrás jugado al scalextric y tú mismo habrás construido el circuito. Casi seguro que el primero era como el dibujado en el margen.

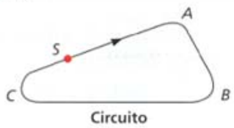
Tras colocar el coche en la salida *S*, habrás apretado el acelerador y el coche habrá ido aumentando su velocidad, pero al llegar a la curva, habrás dejado de pulsar para evitar que el coche se salga de la pista, disminuyendo la velocidad. Terminada la curva, al llegar un nuevo tramo recto habrás aumentado la velocidad otra vez, disminuyéndola en la curva siguiente y así sucesivamente. La gráfica de la velocidad del coche habría sido:

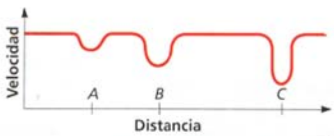
Circuito circular del scalextric

Si el circuito fuera circular, habrías tomado una velocidad constante en todo momento. Su gráfica sería una recta paralela al eje *OX*.

Actividades

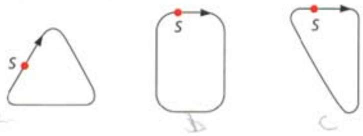
1. Si el circuito del scalextric tiene la forma que se indica, termina de dibujar la gráfica. Indica dónde disminuye la velocidad, dónde aumenta y dónde es constante.





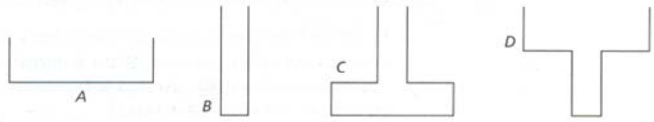
¿Por qué disminuye la velocidad en el punto *C* más que en *A* y en *B*? La curva es más cerrada

2. Discute con tus compañeros hasta encontrar el circuito que se corresponde con la gráfica representada.



3. La gráfica adjunta nos muestra cómo varía la altura del líquido en el vaso *X* conforme se llena de forma continua.

¿Sabrías dibujar la gráfica para los vasos siguientes?

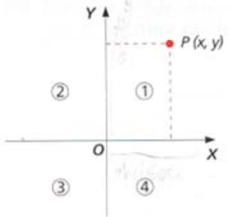


Santillana 3º ESO, Funciones

2 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS. TABLAS Y GRÁFICAS

Puntos y coordenadas

Ejes de coordenadas y coordenadas del punto P



Para representar puntos en el plano se toman dos rectas perpendiculares OX y OY llamadas ejes de coordenadas. El eje OX se llama **eje de abscisas** y el eje OY **eje de ordenadas**. El punto común O es el **origen de coordenadas**.

Cada uno de estos ejes se gradúa con números positivos y números negativos. De este modo, a cada punto P del plano le corresponde un par de números (x, y) que llamamos **coordenadas del punto**. También a cada par de números le corresponde un punto del plano. El primer número o primera coordenada x corresponde al eje horizontal y el segundo y al eje vertical. Los ejes coordenados sirven para situar puntos en el plano.

Los dos ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes:

① Los puntos del primer cuadrante tienen las x e y positivas.

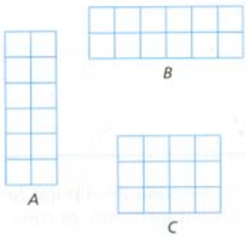
② Los puntos del segundo cuadrante tienen las x negativas e y positivas.

③ Los puntos del tercer cuadrante tienen las x e y negativas.

④ Los puntos del cuarto cuadrante tienen las x positivas e y negativas.

Enunciado, tablas y gráfica

Rectángulos de igual área



¿Cuál es la gráfica que representa la relación entre la base y la altura de todos los rectángulos de área 12 unidades cuadradas?

Fíjate en la base y en la altura de los rectángulos A, B y C. El área de cada uno es 12 unidades cuadradas ($12\ u^2$).

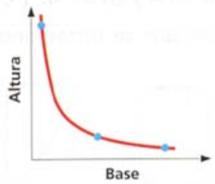
Los rectángulos cuya base y altura son números enteros se obtienen escribiendo los divisores de 12.

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Estos números son los valores posibles de la base y de la altura. Así se puede confeccionar la siguiente tabla:

Base	1	2	3	4	6	12
Altura	12	6	4	3	2	1

Gráfica de la relación entre la base y la altura de todos los rectángulos de área 12



La gráfica es la del margen, y en ella se ve que conforme aumentamos la base disminuye la altura para que el área no varíe y siga siendo 12.

Actividades

1. De todos los rectángulos de área 24 unidades cuadradas cuya altura y anchura son números enteros, averigua cuál es el que tiene menor perímetro.
2. Haz una tabla correspondiente a todos los rectángulos de área 16 cm^2. Después, dibuja la gráfica correspondiente, representando la base en el eje de abscisas y la altura en el eje de ordenadas.
3. La bajada de bandera de un taxi cuesta 300 ptas. y cada minuto cuesta 25 ptas. Forma una tabla para viajes de 5 minutos, 10 minutos, 15 minutos y 20 minutos. Representa estos puntos sobre unos ejes (x = minutos, y = precio). ¿Cuánto costará un viaje de 1 hora?

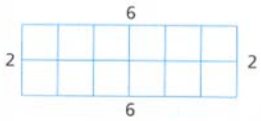
Santillana 3º ESO, Funciones

Gráficas a partir de puntos

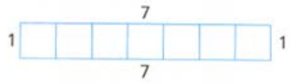
Cuerda y rectángulo que se forma con ella

Luis ha unido los extremos de una cuerda de 16 dm de longitud con cinta adhesiva y después ha formado rectángulos. ¿Cómo varía el área según los lados del rectángulo?

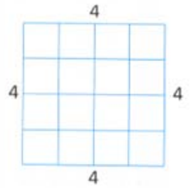
Se observa que se pueden hacer muchos rectángulos cuyo perímetro sea 16 dm. Por ejemplo, los rectángulos siguientes:



Área = 6 × 2 = 12 u²



Área = 7 × 1 = 7 u²



Área = 4 × 4 = 16 u²

Antes, lo que era fijo, constante, era el área, y ahora lo que se mantiene es el perímetro. Si haces un rectángulo muy alto la base será muy pequeña y al ser el área base por altura, el producto será un número muy bajo.

Si aumentamos la base y disminuimos la altura del rectángulo, los números son menos extremados y su producto será un número mayor. A partir de ahí, aumentando la base disminuye la altura y el rectángulo tendrá un área inferior, y así hasta formar un rectángulo de base muy grande y altura muy pequeña, y de área, por tanto, un número muy pequeño.

¿Cuál será la gráfica que expresa el área de todos los rectángulos de perímetro 16 dm?

Si formamos una tabla con valores enteros para la base podemos obtener la altura y el área correspondiente.

Base	7	6	5	4	3	2	1
Altura	1	2	3	4	5	6	7
Área	7	12	15	16	15	12	7

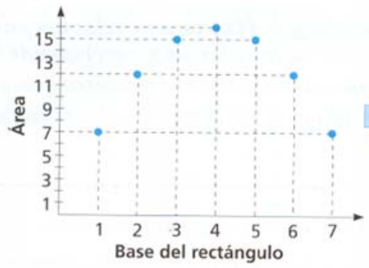
PIENSA

Justifica tu respuesta

¿Puede haber rectángulos con la misma área y perímetros distintos?

Representando la longitud de la base en el eje de abscisas y el área en el eje de ordenadas, resultan los puntos de la figura de la izquierda. Uniendo esos puntos se obtiene la gráfica que buscamos.

Gráficas de la variación del área PARABOLA



Actividades

1. De todos los rectángulos de área 36 cm² cuya base y altura son números enteros, ¿cuál es el que tiene mayor perímetro?

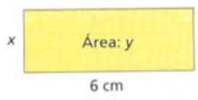
2. Haz una tabla correspondiente a todos los rectángulos de perímetro 36 cm cuya base y altura son números enteros. ¿Cuál es el que tiene mayor área? Haz la gráfica correspondiente.

Santillana 3º ESO, Funciones

3 IDEA DE FUNCIÓN: VARIABLES, ECUACIÓN

Expresión algebraica de una función

Área del rectángulo
$A = y = 6 \cdot x$



¿Cuál es la expresión del área de un rectángulo del que se conoce un lado de 6 cm y el otro lado x cm es variable desde 1 cm hasta un máximo de 20 cm? (Ver figura del margen.)

En este problema utilizaremos las letras x e y (variables). La variable y representará el área del rectángulo y la variable x representará el lado variable del rectángulo.

El área del rectángulo es $6 \cdot x$, luego la relación entre x e y es $y = 6x$.

En la tabla aparecen cuatro valores de la variable x y los correspondientes valores de la variable y. Se observa también que, a cada valor de la variable x, corresponde un único valor de la variable y. Por cumplir esta propiedad la relación $y = 6 \cdot x$ se llama **función**.

En el margen se han representado los valores de la tabla y uniéndolos se ha obtenido la gráfica de la función $y = 6x$.

Tabla de valores de y = 6x

Lado x	1	2	3	4
Área y	6	12	18	24

Variables, dominio y recorrido

La expresión algebraica $y = 6x$ se llama **ecuación** de la función. La variable x se llama **variable independiente** y representa los distintos valores que puede tomar, es decir, de 1 cm hasta 20 cm.

La variable y se llama **variable dependiente** y representa los distintos valores que puede tomar, desde el menor valor (para $x = 1$), $y = 6 \cdot 1 = 6$ cm^2, hasta el máximo valor (para $x = 20$), $y = 6 \cdot 20 = 120$ cm^2.

La variable x puede tomar todos los valores de 1 a 20, diremos que el intervalo 1-20 es el **dominio** de la función $y = 6x$.

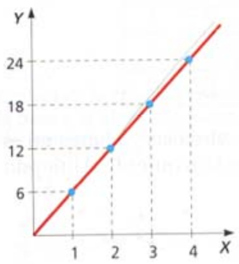
La variable y puede tomar todos los valores de 6 a 120, diremos que el intervalo 6-120 es el **recorrido** o **rango** de la función.

El valor de la variable y en una función se suele escribir también por $f(x)$, así la función $y = 6x$ se puede escribir también así: $f(x) = 6x$.

En general, una función se puede escribir $y = f(x)$.

No toda relación entre dos variables es una función, sólo lo es cuando a cada valor de la variable independiente corresponde un único valor de la variable dependiente.

Gráfica de y = 6x



> ***Una función $y = f(x)$ es una relación entre dos variables x e y, de forma que a cada valor de x corresponde un único valor de y.***
> ***El dominio es el conjunto de valores que puede tomar la variable x.***
> ***El recorrido es el conjunto de valores que puede tomar la variable y.***

Actividades

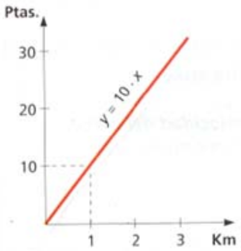
1. Un ciclista recorre 15 km por hora.
   a) ¿Cuál es la función que expresa el camino recorrido en kilómetros?
   b) ¿Cuáles son las variables de la función?
   c) ¿Cuál es el dominio si está 6 horas corriendo? ¿Y el recorrido?

2. La relación $y = \sqrt{x}$, entre las variables x e y, asocia a cada número x el valor y que aparece en la pantalla al calcular $\sqrt{x}$.
   a) ¿Es $y = \sqrt{x}$ una función con esta definición?
   b) ¿Sería $y = \sqrt{x}$ una función si a cada x le asociamos sus dos raíces cuadradas?

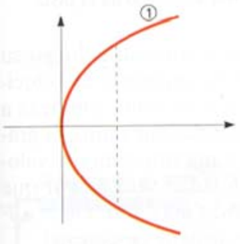
Santillana 3º ESO, Funciones

Diversos lenguajes para expresar una función

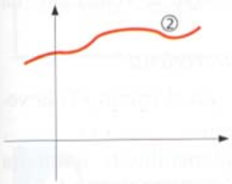
Gráfica de y = 10 · x



Esta gráfica no corresponde a una función



Esta gráfica corresponde a una función



Si el precio de un viaje en autobús es 10 ptas. por kilómetro, la función que relaciona el precio del billete con los kilómetros recorridos puede expresarse en varios lenguajes:

- **Lenguaje ordinario** (un texto o frase que relacione las dos magnitudes): «El precio de cada billete de un autobús a 10 pesetas el kilómetro depende o es función del número de kilómetros recorridos.»
- **Lenguaje numérico** (una tabla de valores que relacione las dos magnitudes).

Kilómetros	1	2	3	...	200	300	350	...
Pesetas	10	20	30	...	2.000	3.000	3.500	...

- **Lenguaje algebraico** (una expresión que relacione las dos magnitudes). Si x indica el número de kilómetros e y el valor de cada billete, la relación entre las dos variables (x e y) viene dada por la expresión $y = 10 \cdot x$.
- **Lenguaje gráfico** (gráfica que relacione las dos magnitudes). La gráfica de esta función (ver margen) se puede dibujar a partir de la función $y = 10 \cdot x$, obteniendo previamente algunos valores de la tabla.

En todos estos lenguajes se maneja la misma idea: la existencia de dos magnitudes variables y una relación de dependencia entre ellas que posibilite asignar a cada valor de la variable independiente un solo valor de la variable dependiente.

Esto es una **función**.

Cuando nos referimos a una función cualquiera se escribe $y = f(x)$; aquí la letra f indica la asignación u operación que hay que hacer con cada valor de la variable independiente para obtener el valor correspondiente de la variable dependiente.

Cuando se tiene representada la relación entre dos variables se puede saber fácilmente si esa relación es o no una función. Por ejemplo:

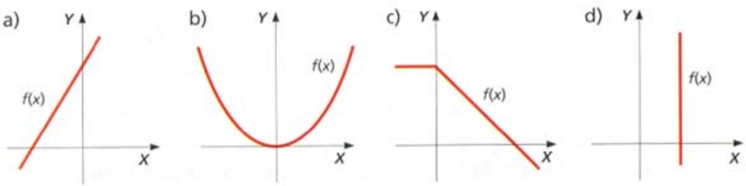
- La gráfica ① no corresponde a una función porque a cada valor de la variable independiente corresponden dos valores de la variable dependiente.
- La gráfica ② corresponde a una función porque a cada valor de la variable independiente corresponde un solo valor de la variable dependiente.

Actividades

1. En la expresión algebraica del área del rectángulo $A = 6x$ de la página anterior, ¿podrá tomar x valores decimales? ¿Y negativos? Forma una tabla con números decimales y comprueba que los puntos (x, área) pertenecen a la gráfica de la función del área del rectángulo. ¿Podrías hacer lo mismo en la gráfica del precio del viaje en autobús? Hazlo.

2. Observa las gráficas y explica cuáles corresponden a funciones y cuáles no.

a) b) c) d)



Fractal 3º ESO, Funciones

6 Función. Construcción e interpretación de gráficas

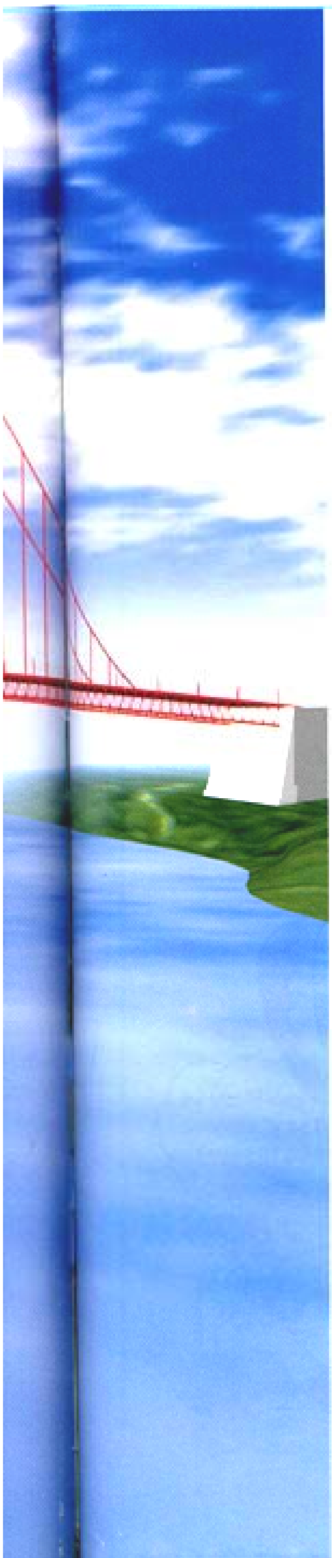
En la televisión, los periódicos, revistas y libros técnicos aparece información de carácter económico, científico, social, deportivo, etc., expresada mediante gráficas.

En nuestro mundo actual, el lenguaje gráfico es un instrumento imprescindible para conocer y transmitir información.

La utilidad de las gráficas reside en que proporcionan una visión "panorámica" de los fenómenos y muestran cómo unas magnitudes dependen de otras.

En este tema aprenderemos a interpretar gráficas y a describir los fenómenos que éstas representan.

Fractal 3º ESO, Funciones



Calentando motores...

Altura del nivel en función del volumen

1. Llenamos de agua el recipiente de la figura, vaso a vaso, vertiendo cada vez 0,5 litros y midiendo después la altura que va alcanzando el nivel. Obtenemos la siguiente tabla:

volumen (ℓ)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
altura (cm)	3,5	4,8	5,7	6,5	7,2

volumen (ℓ)	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
altura (cm)	7,8	8,3	8,8	9,3	9,7

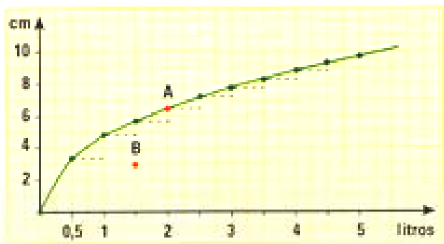
Indica:

a) Las magnitudes (variables) que se relacionan en la tabla.

b) Los centímetros que asciende el nivel con el contenido del primer vaso y con el del último. (Observa el recipiente y explica por qué los resultados son distintos.)

De la tabla a la gráfica

2. Al representar los pares volumen-altura, (0,5 , 3,5), (1 , 4,8), etc., y tras unir los puntos, obtenemos la gráfica:



Puntos. Crecimiento

a) El punto A está en la gráfica pero el B no. ¿Qué significa esto?

b) ¿Cuál es la altura del nivel cuando llevamos vertidos 0,25; 2,5 y 4,2 litros?

c) La altura del nivel es 8 cm. ¿Cuánta agua hemos vertido?

d) El punto (0 , 0) está en la gráfica, ¿por qué?

e) La curva es ascendente, pues al aumentar el volumen (abscisas) aumenta la altura. Pero el ascenso es menos acusado en la parte derecha de la gráfica. ¿A qué se debe?

Dominio y escala

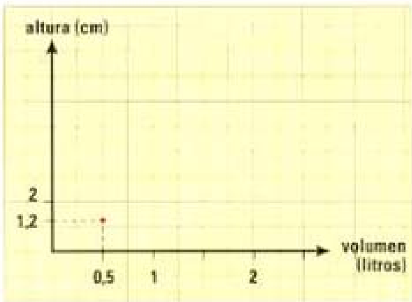
f) La curva se ha trazado justo hasta hacer rebosar el recipiente. Indica aproximadamente su capacidad total y su altura.

g) Las escalas usadas en cada eje no son iguales. ¿Deberían acaso serlo? Justifica la respuesta.

Una curva muy recta

3. En el ejemplo anterior, la forma de la gráfica tuvo mucho que ver con la del recipiente. Ahora, el recipiente es cilindriico y, tras vaciar la primera jarra (0,5 ℓ), la regla marca 1,2 cm.

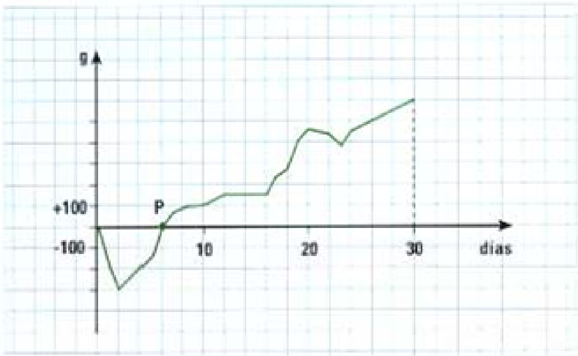
volumen (ℓ)	0,5	1,0	1,5	...
altura (cm)	1,2			...



Completa la tabla y representa la nueva función (saca la regla del recipiente, ya no la necesitas).

Variación del peso de un recién nacido en el primer mes de vida

4. Observa esta gráfica correspondiente a un bebé que al nacer pesó 3,300 kg:



a) ¿Qué ocurre en los primeros días de vida? Interpreta el punto P.

b) ¿Qué días pesó el niño 150 g menos que al nacer?

c) En algún momento de la segunda quincena la madre cambió el pecho por el biberón. ¿Le gustó el cambio al niño?

d) Indica el aumento de peso durante la primera, segunda y tercera decena.

e) Indica el máximo y mínimo peso que dio el niño durante el mes y en qué días.

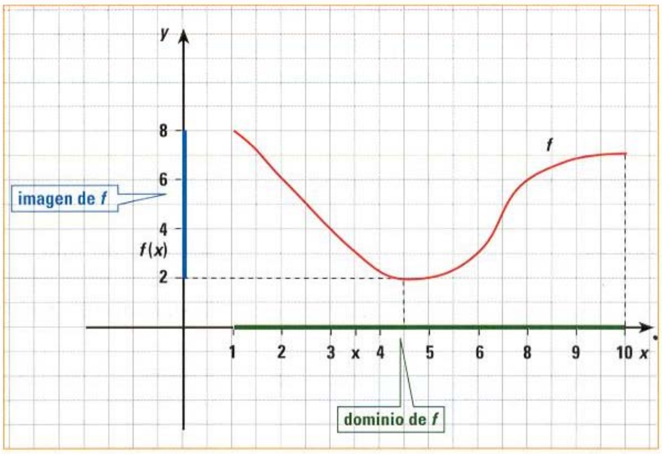
Fractal 3º ESO, Funciones

En marcha

1 Función

En una función se relacionan dos magnitudes o variables.

Esta relación puede venir dada por una tabla, con algunos pares de valores, o por una gráfica en la que, al menos teóricamente, se pueden leer todos los pares, o también mediante una fórmula.



x	f(x)
1	8
1,5	7
2	6
2,5	5
…	…

Variable independiente: es la representada en el eje X o de *abscisas*.

Variable dependiente: es la representada en el eje Y o de *ordenadas*.

1. Concepto y símbolos

Una función puede entenderse como una regla que asocia a cada valor posible de la variable independiente un valor ¡y uno sólo! de la variable dependiente.

Si designamos esta regla por f (cualquier otra letra valdría), escribimos:

$f(1) = 8 \qquad f(2{,}5) = 5 \qquad f(3) = 4 \ldots$ y en general

$$\boxed{f(x) = y}$$

nombre de la función — valor de la variable independiente — valor de la variable dependiente

Dominio de f: es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.

Imagen de f: es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

En la gráfica de la página anterior no cabe preguntar por el valor de f(−2) ó f(11). No existen. El dominio es el intervalo [1 , 10].

Tampoco tiene sentido buscar el valor de *x* que se transforma en 0, o en 10, pues ambos caen fuera de la imagen, que es [2 , 8].

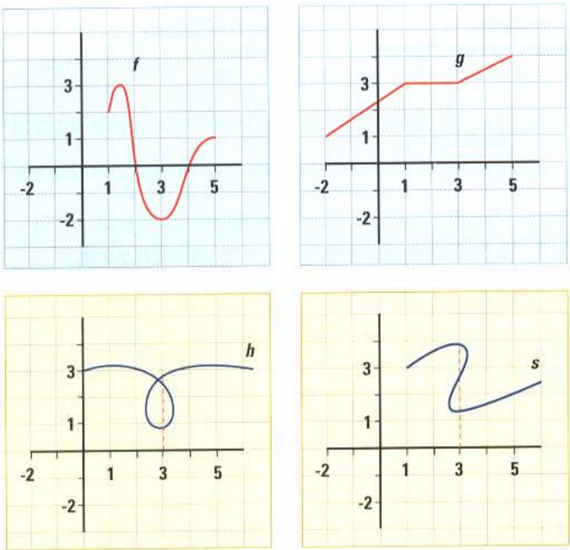
Magnitud es cualquier característica de los cuerpos que pueda medirse: velocidad, longitud, peso, etc.

3. Escalas

No es necesario que las escalas de los ejes sean iguales, pues las variables suelen representar *magnitudes* diferentes. La elección de las escalas debe realizarse atendiendo únicamente a la mejor legibilidad de la gráfica.

¡ACCIÓN!

1 Observa las gráficas:



a) Las gráficas de f y g representan funciones pero no la de h, ni la de s. Explícalo.

b) Para las funciones f y g calcula:

f(3), f(5), g(1,5) y g(−0,5)

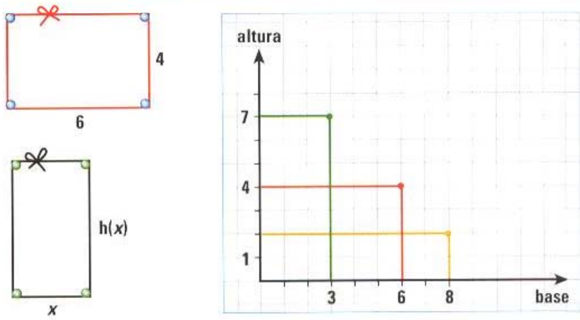
c) Calcula x de modo que $f(x) = 0$.

Calcula x de modo que $g(x) = 3$.

d) Determina el dominio e imagen de f y de g.

2 Con un hilo de 20 cm podemos formar una infinidad de rectángulos: para cada valor posible de la base aparece una altura.

base x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	…
altura $h(x)$							…



a) Completa y representa la tabla.

b) Determina h(4) y h(0,5).

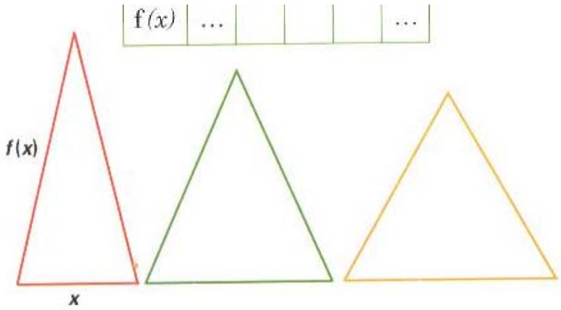
c) Determina x de modo que $h(x) = 4,5$.

d) Indica el dominio y la imagen de h.

e) La bisectriz del ángulo que forman los ejes corta a la gráfica en un punto. ¿Qué rectángulo representa ese punto?

Fractal 3º ESO, Funciones

f(x)	…				…



a) Completa la tabla –añade puntos si es necesario– y represéntala.

b) ¿Pueden unirse los puntos de la gráfica? ¿Es continua la función? ¿Es creciente?

c) Indica el dominio y la imagen. Interpreta el resultado.

d) Tanto el máximo como el mínimo absolutos representan triángulos un tanto raros. Explica lo que ocurre.

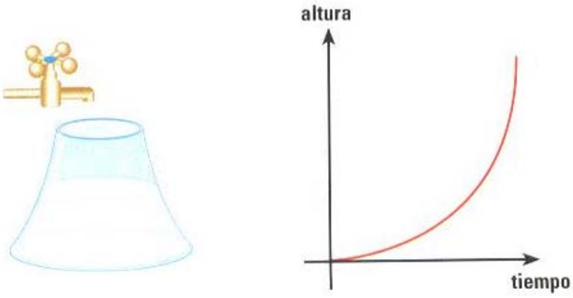
6 *Sin siquiera conocer la función.* El dominio de una cierta función es [–6, 8]. La imagen es [3, 6] y la función es creciente.

a) Calcula f(–6) y f(8).

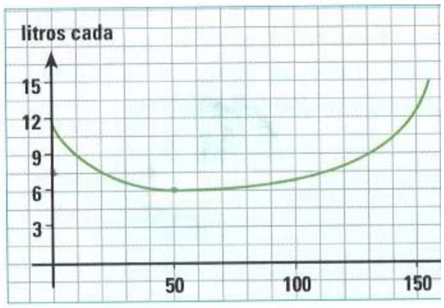
b) Halla las coordenadas del máximo y mínimo absolutos.

c) ¿Puede tener la función algún máximo local? ¿Y algún mínimo local?

7 *Construye a mano alzada.* La gráfica muestra la variación de la altura del nivel cuando el recipiente se llena con un caudal constante:



8 En la guía de usuario de un mo
automático (sin cambio manual de m
el consumo de gasolina en función de
la siguiente gráfica (los ingenieros la
la bañera"):

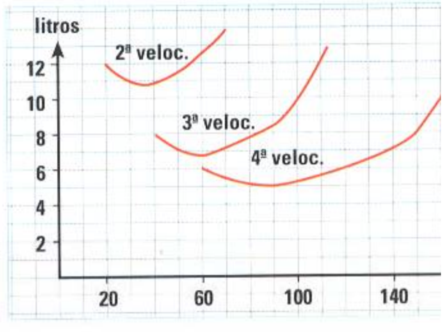


a) ¿Es más rentable conducir a 20 ki
que a 100 kilómetros por hora?

b) ¿A qué velocidad debe conducir el

c) ¿A qué velocidad se consume men

9 En un coche con cambio de ma
depende no sólo de la velocidad sino
se lleve puesta. Observa las tres gráfi



a) El consumo a 50 y a 70 km/h.

b) La velocidad máxima alcanzada
tros.

c) La marcha más económica a 50 y

d) El dominio e imagen de cada gráfi