Salinas y Benitez

Algebra

SEGUNDA PARTE

ALGEBRA

POR

D. IGNACIO SALINAS Y ANGULO

Y

D. MANUEL BENÍTEZ Y PARODI

CORONELES DEL CUERPO DE E. M. DEL EJÉRCITO

SEGUNDA PARTE

elegida de texto por real orden de 21 de octubre de 1886
en el concurso celebrado el 3 de octubre de 1885 por la Dirección general
de Instrucción Militar

TERCERA EDICIÓN
NOTABLEMENTE CORREGIDA

MADRID
LIBRERÍA DE HERNANDO Y COMP.ª—ARENAL, NÚM. 11

IMPRENTA DEL DEPÓSITO DE LA GUERRA
1898

INDICE

PARTE SEGUNDA

ÁLGEBRA SUPERIOR

LIBRO TERCERO

ALGORITMO FUNCIONAL

CAPÍTULO PRIMERO

DE LAS FUNCIONES EN GENERAL Y ESTUDIO DE LAS FUNCIONES POTENCIAL, EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

CAPÍTULO II

FUNCIONES DE VARIABLES IMAGINARIAS Y CÁLCULO DE LOS RADICALES ALGEBRAICOS

CAPÍTULO III

TEORÍA ELEMENTAL DE LAS SERIES

LIBRO CUARTO

ANÁLISIS COMBINATORIO

CAPÍTULO PRIMERO

OPERACIONES COORDINATORIAS

CAPÍTULO II

APLICACIONES DE LA TEORÍA COORDINATORIA

CAPÍTULO III

DETERMINANTES

Páginas.

CAPÍTULO II

LÍMITES Y SEPARACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA

CAPÍTULO III

CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA

CAPÍTULO IV

TEORÍA DE LA ELIMINACIÓN Y SU EMPLEO EN LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

PARTE SEGUNDA

ÁLGEBRA SUPERIOR

LIBRO III

ALGORITMO FUNCIONAL (*)

CAPÍTULO PRIMERO

DE LAS FUNCIONES EN GENERAL Y ESTUDIO DE LAS FUNCIONES POTENCIAL, EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

I.—Funciones en general.

165. Clasificación de las funciones. La definición de función, anteriormente dada (1), indica desde luego que existe una infinidad de funciones diversas; y esto obliga á agruparlas de modo que se distingan por caracteres generales, tomando por base de su clasificación, ya el número ó calidad de las variables, ya la forma simbólica que exprese la ley de dependencia de la función, respecto de la variable ó variables que contenga.

Cuando una cantidad depende de otra ó de dos ó más cantidades independientes entre sí, que pueden recibir valores cualesquiera, se dice que es *función de una, de dos ó de más variables*. Así: el área de un círculo es función de una sola variable, que es el radio; el área de un triángulo, cuando está expresada por el

(*) La primera parte del álgebra, ó *álgebra elemental*, ha comprendido el *algoritmo algebráico* en lo que principalmente afecta á las operaciones algébricas, y la aplicación del mismo á la *resolución de las ecuaciones de primero y segundo grado*. Esta segunda parte del álgebra, ó *álgebra superior*, contiene el *algoritmo funcional*, es decir, el algoritmo algebraico en lo que se refiere á la clasificación y estudio de las diversas clases de funciones, el *análisis combinatorio*, y, como última síntesis, la *teoría y resolución de las ecuaciones de cualquier grado*.

producto de la base por la mitad de su altura, es una función de dos variables; y el volumen de un paralelepípedo es una función de tres variables. (*)

En el caso de que una ó varias de las variables sean á su vez funciones de otra, se tiene una *función de función* ó *función doble* de esa otra variable; y si ésta es también función de una nueva variable, entonces resulta una *función de función de función* ó *función triple* de la última. Tales funciones se denominan, en general, *funciones múltiples*.

Tomando, por ejemplo, para área del círculo la expresión $A = \frac{C^2}{4\pi}$, la cantidad A es una función inmediata de la circunferencia C; pero como ésta es á su vez función del radio, resulta que, bajo esa forma, dicha área es una función doble del radio.

Antes de proceder á la clasificación de las funciones, por medio de la forma en que se exprese su ley de generación, conviene observar que el estudio de los fenómenos físicos y aun el de la vida social, muestran que no siempre que dos magnitudes variables están ligadas entre sí, es posible determinar una de ellas cuando se conoce la otra; bien porque la ley de generación ó dependencia no pueda definirse de un modo preciso, bien porque sea desconocida dicha ley, aun suponiendo que exista.

Si la ley funcional puede formularse rigurosamente por medio de símbolos, su expresión constituye una *función matemática*, siempre susceptible de cálculo exacto ó tan aproximado como se quiera; pero, en caso contrario, no puede hallarse sino una *función empírica* para expresarla.

Estas últimas funciones se obtienen por el estudio atento de una tabla, donde se consignan á la vez que valores muy próximos de la variable, los valores respectivos de la función, determinados por medio de observaciones ó cálculos directos muy precisos. La función simbólica, deducida por tanteos y á posteriori, que dé es-

(*) El área del triángulo, cuando se expresa por dos lados y el ángulo que forman, ó por medio de las longitudes de sus tres lados, es también una *función de tres variables*; si bien, en el segundo caso, dichas variables no son independientes por completo.

tos últimos valores, con mayor ó menor aproximación, es la función empírica correspondiente. (*)

La dependencia de las funciones matemáticas, respecto de sus variables independientes, se establece por medio de igualdades ó ecuaciones de relación (**). Si en estas ecuaciones, después de reducidas á su expresión más sencilla, una función y sus variables están ligadas tan sólo por las operaciones elementales del algoritmo algébrico, se dice que dicha función es una *función algebraica*; pero si las variables, ó la función misma, entran como exponente ó como índice (***), ó se halla alguna de aquéllas afectadas del signo logarítmico ó de cualquiera de los que emplea la trigonometría, entonces la función referida se llama *función transcendente*; tomando también esta denominación todas aquellas otras funciones matemáticas que no son puramente algébricas.

Las funciones, bien sean algebraicas ó transcendentes, pueden ser *implícitas* ó *explícitas*. Se llaman funciones implícitas las que están determinadas por una ó varias ecuaciones no resueltas. Así: las funciones expresadas por la letra y, en las ecuaciones de relación,

$$y^5 - bxy = a, \quad by + c^y = \log x, \quad \overset{/}{\tan g}\, y = \operatorname{sen} x - \cos y,$$

son funciones implícitas de x. Si estas ecuaciones pudiesen resolverse con respecto á y, y se pusieran bajo la forma $y = f(x)$, se obtendrían entonces funciones explícitas de la variable x.

Las funciones matemáticas, de una sola variable, pueden ser *simples* y *compuestas*. Es función simple aquella en que no es preciso efectuar sino una operación en que entre la variable, para

(*) Ejemplo muy notable de esta clase de funciones, son las que en el estudio de la *balística* expresan la resistencia del aire, en función de la velocidad y de la forma y dimensiones del proyectil.

(**) El número de estas ecuaciones debe ser tal que, considerando las funciones y las variables como incógnitas, constituyan un sistema indeterminado, el cual se convierta en determinado cuando las variables se supongan conocidas. De otro modo, las variables independientes no podrían recibir valores arbitrarios ó en número indefinido, ni las funciones serían en realidad otra cosa que *funciones aparentes* ó *ficticias*.

(***) El índice equivale á un exponente inverso, cuando se emplean los exponentes fraccionarios (**62**).

obtener el valor correspondiente de la función, ó en la que sólo hay una relación de dependencia. Así: las funciones

$$a \pm x,\quad ax,\quad \frac{x}{a},\quad x^m,\quad \log x,\quad a^x,\quad \operatorname{sen} x,\quad \cot x,$$

en las cuales a designa una constante, y m un número entero y positivo, ó una fracción positiva cuyo numerador sea la unidad (*), son funciones simples. (**)

Se llama función compuesta la que resulta de la combinación operativa de diversas funciones entre sí (***). Así:

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

es una función compuesta; y también lo son análogamente:

$$y = x^m \operatorname{tang}(a + x);\qquad \text{é}\qquad y = \frac{\log x}{\operatorname{sen} x}\ (****).$$

Las funciones algébricas explícitas, se dividen en *funciones racionales* y *funciones irracionales*. Las primeras son aquellas en que las variables no están bajo radical ni tienen exponentes fraccionarios; y las segundas son las que, por el contrario, contienen alguna variable bajo el signo radical ó afectada de exponente fraccionario. Entre las funciones racionales hay que distinguir las *funciones enteras* y las *funciones fraccionarias;* tomando el primero de estos nombres las que no contienen la variable ó variables en denominador, ni afectadas de exponentes negativos, que son las llamadas fraccionarias.

(*) Si $m = -m'$, sería $y = x^m = x^{-m'} = \frac{1}{x^{m'}}$; y si $m = \frac{r}{s}$, se tendría:

$$y = x^m = x^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{x^r};$$

y, en uno y otro caso, habría que efectuar dos operaciones dependientes de x, para determinar la función y, que no sería ya una función simple, sino una función múltiple.

(**) Estas funciones y las que expresan las demás líneas trigonométricas, se llaman también *elementales*, porque son los elementos constituyentes de las demás.

(***) Las funciones de dos ó más variables no se clasifican de este modo, porque siempre pueden considerarse como compuestas.

(****) Debe observarse que una función suele pertenecer á la vez á dos ó más categorías de esta clasificación. Se ve, por ejemplo, que x^x es únicamente una función compuesta, mientras que u^v, siendo u y v funciones de x, es además una función múltiple.

Así: la función $y = ax + \frac{b}{c}$ es racional y entera; la función $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ es irracional; y la función $y = \frac{1}{x^3} + \sqrt{b}$ es una función fraccionaria.

Las funciones racionales y enteras se clasifican, á su vez, por el grado con respecto á la variable ó variables independientes. De modo que si en la función

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + a_{m-1} x + a_m,$$

hacemos $m = 1$, $m = 2$, $m = 3 \ldots.$, tendremos, en el mismo orden, las funciones *lineal* ó de *primer grado, cuadrática* ó de *segundo grado, cúbica* ó de *tercer grado*, y así sucesivamente. (*)

Cuando el enlace entre las variables y la función es tal que multiplicando cada una de aquéllas por un factor arbitrario t, el valor de la función queda multiplicado por t^m, la función se llama *función homogénea* y *del grado m.* De suerte que las funciones

$$z = ax^3 + 2bx^2y + cy^3,\qquad z = \sqrt{x^3(y - x)},\qquad z = \frac{x^2 - y^2}{ax + by},$$

son funciones homogéneas de x é y, y, respectivamente, de tercero, segundo y primer grado.

Hay funciones de varias variables, que no se alteran ó adquieren valores iguales y de signos contrarios, cuando se permutan dos cualesquiera de dichas variables. En el primer caso, las funciones toman la denominación de *funciones simétricas permanentes,* ó simplemente *simétricas;* y en el segundo se las designa con el nombre de *funciones simétricas alternas* (**). Así: las funciones

$$u = (x - y)^4,\qquad u = \cos x^m z^m,\qquad u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2,$$

son funciones simétricas permanentes de x, y, z; porque no varían cuando en ellas se permutan x é y, x y z é y y z; mientras que

$$u = (x - y)^3,\qquad u = \operatorname{sen}(x - y),\qquad u = (x - y)(x - z)(y - z),$$

son funciones simétricas alternas; pues adquieren valores iguales, pero opuestos, cuando se efectúan las referidas permutaciones.

(*) Según que el grado del numerador es menor ó mayor que el del denominador, en las funciones fraccionarias, así las denomina Baltzer, *puras* ó *espúreas*.

(**) División establecida por Cauchy.

Las funciones transcendentes toman los nombres particulares de *exponenciales, logarítmicas* y *trigonométricas ó circulares,* según que contienen las operaciones ó los signos que á estas denominaciones corresponden. (*)

Cuando en una misma ecuación, que liga dos variables, se despeja el valor de cada una, como si la otra fuese constante, á cualquiera de las funciones explícitas que así resultan, se llama *función directa,* y á la otra *función inversa.* Según esto, $x = \pm\sqrt{y}$ es función inversa de la $y = x^2$.

Considerando los valores de la función que corresponden á los de las variables, pueden clasificarse también las funciones, en *proporcionales, periódicas, pares* é *impares.*

Se dice que una función es proporcional, cuando sus valores son directa ó inversamente proporcionales á los de las variables, ó á sus $m^{ésimas}$ potencias. Tales son: $y = ax^m$ é $y = \frac{a}{x^m}$.

Una función es periódica, cuando, para valores sucesivos de la variable, toma periódicamente el mismo valor. Así: $sen x$ y $tang x$ son funciones periódicas, cuyos períodos respectivos son 2π y π.

Si atribuyendo á una variable valores iguales y de signos contrarios, se obtienen para la función los mismos valores, se dice que es una *función par;* y se llama *función impar* la que toma valores numéricos iguales y de signos contrarios, para valores de la variable independiente iguales y de diverso signo. Así: x^2 y $cos x$ son funciones pares; y x^3 y $sen x$ son funciones impares.

Además de las distintas clases de funciones que hemos indicado y de las *imaginarias* é *indefinidas,* que serán objeto de los dos capítulos siguientes, hay otras muy importantes que se deducen de funciones anteriormente conocidas y que se llaman *funciones derivadas,* las cuales definiremos con precisión y estudiaremos detenidamente, antes de tratar de la resolución general de las ecuaciones, á cuya teoría sirven de principal fundamento. (**)

(*) Ya se ha indicado que no son éstas las únicas funciones transcendentes que existen; habiendo otras, muy importantes, que se definen y clasifican en el cálculo infinitesimal.

(**) Las funciones á que corresponden las derivadas, se llaman, por oposición, *funciones primitivas.*

El análisis combinatorio nos dará de igual modo á conocer las *funciones determinantes* y sus notables propiedades; y, finalmente, veremos que hay funciones especiales que se utilizan, ya en la demostración de algún teorema, ya para determinados fines, y que toman por lo general el nombre del matemático que primero las empleó; tales son: las *funciones de Sturm* (*); las *funciones abelianas,* ó de Abel; las determinantes de Hesse (**) y de Jacobi (***) ó *funciones hessiana* y *jacobiana;* y las *funciones alefs* (****) de Wronski.

166. Notación funcional. Aun cuando ya se ha explicado la manera de expresar simbólicamente una función (5), es indispensable hacer ahora algunas ampliaciones, en vista de cuanto acaba de exponerse.

Las funciones no dependen sólo de cantidades variables, sino también de ciertas magnitudes constantes, que reciben el nombre de *parámetros* ó el de *coeficientes,* según se trate de cuestiones ó magnitudes geométricas ó de problemas físicos ó abstractos, y las cuales se encierran á veces entre paréntesis, juntamente con dichas variables, en la siguiente forma:

$$z = f(x, y, a, b, c.....).$$

Si estos parámetros ó coeficientes, en vez de tener valores constantes, variasen al mismo tiempo que la variable ó variables independientes, saldrían ya de la categoría de parámetros ó coeficientes y se considerarían como otras tantas variables.

En las funciones múltiples, la notación es análoga; de manera que si se tiene:

$$z = f(y) \quad \text{é} \quad y = \varphi(x) \qquad \text{podrá ponerse} \qquad z = f[\varphi(x)] = \psi(x).$$

Si se verificase que $y = f(u, z)$, siendo á su vez $u = \varphi(x)$ y $z = \psi(x)$, se tendría:

$$y = f[\varphi(x), \psi(x)] = F(x);$$

(*) Carlos Sturm, sabio profesor y matemático francés de mediados del presente siglo.

(**) Otto Hesse, matemático alemán contemporáneo, profesor de la Universidad de Heidelberg.

(***) Carlos Gustavo Jacobi, notable matemático alemán del primer tercio de este siglo.

(****) Nombre de la primera letra del alfabeto hebráico, que Wronski empleó para representarlas.

de suerte que aun cuando y parece ser una función de dos variables, u y z, en realidad no depende sino de una variable independiente x, á la cual basta dar valores particulares para determinar u y z y, por consiguiente, y.

167. Representación gráfica de las funciones. Los valores sucesivos que toma una función, correspondientes á una serie de valores de la variable, pueden fijarse en una tabla, de modo que su examen nos manifieste la marcha de los valores funcionales; pero para hacer más perceptible la ley según la cual varía una función, suele emplearse un procedimiento gráfico, que consiste en tomar sobre una recta, considerada como *eje*, y á partir de un punto fijo, elegido arbitrariamente y llamado *origen*, los valores numéricos de la variable, transformados en línea por medio de un cierto módulo lineal, y denominados *abscisas*, esto es, segmentos de dicha recta, y en llevar los valores correspondientes de la función, que se llaman entonces *ordenadas*, sobre las perpendiculares á las abscisas en sus extremos respectivos (*); conviniendo en considerar como positivas las distancias contadas á la derecha del origen y por encima de la referida recta fija, y como negativas las de sentido contrario. La línea que une los extremos de las ordenadas ó, más propiamente, las distancias sucesivas de sus diversos puntos al eje de las abscisas, representan así, en forma sensible, la marcha de los valores de la función. (**)

Suponiendo, por ejemplo, que quiere estudiarse la función algebraica, $y=x^2$, se formará el siguiente cuadro de valores:

$x=0,$	$y=0$
$x=\pm 1,$	$y=1$
$x=\pm 2,$	$y=4$
....	.....
$x=\pm\infty,$	$y=\infty$

el cual se representa gráficamente por medio de la curva AOB, (fig. 1), que permite reconocer, de un solo golpe de vista, la suce-

(*) Basta, en general, que las ordenadas sean paralelas entre sí.

(**) Las abscisas y ordenadas, juntas, reciben el nombre de *coordenadas*; y designando la variable por x y la función por y, la primera recta elegida se denomina *eje de las x*, y su perpendicular, trazada por el origen, sobre la cual podrían tomarse los valores de la función, *eje de las y*.

La fecunda idea de la representación gráfica, que exige sean reales todos

sión de los valores de esta función par, la rapidez de su crecimiento, su ilimitación indefinida y la carencia de valores funcionales negativos. (*)

De idéntica manera, la función transcendente, $y=\log x$, en el sistema de base $b>1$, da el cuadro de valores que sigue:

$x=0,$	$y=-\infty$
$x<1,$	$y<0$
$x=OA=1,$	$y=0$
$x>1,$	$y>0$
$x=OB=b,$	$y=BC=1$
....	....
....	....
$x=\infty,$	$y=\infty$
$x<0,$	$y=$ imag.°

La curva *MAN*, (fig. 2), que es la representación geométrica de dicha función, deja percibir inmediatamente la marcha de los referidos valores y la no existencia de los logaritmos de los números negativos. (**)

Se comprende que este sistema de representación gráfica, no sólo es aplicable á las funciones matemáticas, sino también á las empíricas que carezcan de expresión simbólica aproximada; pudiendo estudiarse así unas y otras con más facilidad que por la simple inspección de las tablas de valores; pues á veces la forma gráfica descubre propiedades y resultados, que tal vez no se hubieran apercibido considerando solamente el cuadro ó sucesión de valores numéricos.

Más adelante tendremos ocasión de notar las ventajas de esta representación sensible, patentizando que se adapta de un modo sorprendente á la naturaleza íntima de las funciones.

los valores considerados y la cual se extiende fácilmente á las funciones de dos variables, sirviéndose de una superficie referida á tres ejes rectangulares ú oblicuos que concurren en un punto, es debida al insigne Descartes y constituye el *sistema de coordenadas cartesianas*, origen y fundamento de la *geometría analítica*.

El álgebra utiliza dicha representación geométrica, no con el fin de estudiar las propiedades de las líneas, sino para poner de manifiesto las propiedades numéricas de las funciones.

(*) Esta línea es la *parábola de segundo grado* ó *parábola de Apolonio*, nombre del geómetra griego que la dió á conocer en el siglo III (a. J. C.).

(**) La línea MAN, se titula *logarítmica*, y fué estudiada por vez primera por el matemático Gunter.

168. Continuidad. *Se dice que una cantidad varía de una manera continua, cuando, al pasar de uno de sus valores á otro cualquiera distinto, es siempre real, finita y determinada, y adquiere, una vez por lo menos, todos los valores intermedios, ó bien todos los estados numéricos comprendidos entre dichos valores.* (*)

Partiendo de este concepto, diremos que *una función* f(x), *de una sola variable, se llama continua con relación á dicha variable, cuando variando* x *de un modo continuo, la función varía también de igual manera.* (**)

Como esta circunstancia no queda siempre satisfecha por valores cualesquiera de la variable, precisaremos la definición anterior diciendo que *una función*, f(x), *es continua para valores de su variable comprendidos entre* a *y* b, *si varía continuamente entre los valores correspondientes* f(a) *y* f(b). (***)

(*) Entendemos por estados numéricos comprendidos entre dos valores dados, todos los que son mayores que el menor y menores que el mayor, tomando en cuenta la cantidad y el signo, según lo dicho respecto á las relaciones de magnitud de las cantidades positivas y negativas **(8)**. No debe sin embargo creerse, que la condición de tomar absolutamente todos los valores intermedios entre los dos considerados, excluye que la cantidad que varía de un modo continuo, pueda también pasar por otros valores á la vez mayores ó menores que aquéllos, y que no estén por lo tanto comprendidos entre los mismos, sino en lo relativo al orden ó posición intermedia.

La discontinuidad que procede de los valores imaginarios de la función, puede desaparecer interpretando éstos geométricamente sobre planos perpendiculares ú oblicuos al de los valores reales, de un modo análogo á lo que se verá en el capítulo que sigue. La función $y=\pm\sqrt{x^2-4}$, representa así no sólo una *hipérbola equilátera* sino también una *circunferencia* de diámetro igual al *eje transverso* de aquélla, y cuyo plano le es perpendicular.

(**) Esta definición no excluye el caso de que, para un mismo valor de x, la función adquiera dos ó más valores distintos, siempre que éstos constituyan series diversas que separadamente varíen de un modo continuo, las cuales estarán gráficamente representadas por líneas ó ramas distintas que se prolongarán á uno y otro lado de la línea donde se hallen las ordenadas, correspondientes á la abscisa común. No debe sin embargo confundirse este caso con aquel en que, para una cierta determinación única de la variable, pase bruscamente $f(x)$ de un valor á otro distinto, que deba considerarse como inmediato al primero; pues entonces no tomaría entre ellos ninguno de los valores intermedios. Tal sucede, por ejemplo, á la función $y=4+\left(\sqrt[1-x]{2}+1\right)^{-1}$ que, en virtud de las significaciones de los exponentes fraccionarios y negativos, pasa bruscamente de 4 á 5, para el valor $x=1$, según se ve haciendo $x=1\mp h$, y después $h=0$.

(***) Si estos valores extremos de la función fueran iguales, la continuidad debería verificarse entre cada uno de ellos y otro cualquiera intermedio que fuese distinto. De todos modos, la representación gráfica de la función, está siempre dada por una *línea continua*, comprendida entre las extremidades de las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$.

Se dice, por último, que *una función*, f(x), *es continua para* x=a, *cuando, para un cierto valor de* h, *por pequeño que éste sea, la función es continua para todos los valores de la variable, comprendidos entre* a—h *y* a+h.

Las funciones de dos ó más variables se denominan continuas, si lo son respecto de cada una de las variables, considerando las demás como constantes.

Para reconocer la continuidad de una función bastará, pues, demostrar que cumple con las condiciones que acaban de enunciarse, y, á este fin, se aplicarán los siguientes teoremas. (*)

Teorema I. *Una función es continua, cuando para crecimientos suficientemente pequeños de su variable, los incrementos correspondientes de la función son reales, y pueden ser, en valor absoluto, tan pequeños como se quiera.* (**)

Sea la función $f(x)$, y vamos á demostrar que si, para todo valor suficientemente pequeño del incremento positivo h, puede verificarse, no considerando sino los valores absolutos, la desigualdad

$$f(x+h)-f(x)<\varepsilon,$$

en la cual ε representa una cantidad positiva tan pequeña como se quiera, dicha función $f(x)$ será continua; es decir, que si m es cualquier cantidad comprendida entre $f(a)$ y $f(b)$, habrá por lo menos un valor de x, comprendido entre a y b, para el cual será precisamente $f(x)=m$.

En efecto: supongamos, primero, que todos los valores de la función tienen el mismo signo, y consideremos sólo sus valores absolutos. Siendo, por ejemplo, $b>a$, dividamos la diferencia positiva $b-a$ en n partes iguales, y llamemos h_1 una de ellas; es

---

(*) La definición de función continua de varias variables, permite referir las proposiciones á una sola variable.

(**) Se entiende por incremento, la diferencia, positiva ó negativa, entre un nuevo valor y el precedente, tomando este último por substraendo.

El incremento positivo se llama *crecimiento*, y el negativo *decrecimiento*. Al estudiar las variaciones de una función, suele suponerse, para fijar las ideas, que su variable toma valores continuamente crecientes.

evidente que si se substituye sucesivamente en lugar de x la serie de valores $a, a+h_1, a+2h_1, \ldots\ldots b$, alguno de éstos hará $f(x)=m$, ó habrá, por lo menos, dos valores consecutivos c_1 y c_1+h_1, tales que m esté comprendida entre $f(c_1)$ y $f(c_1+h_1)$. Si se divide análogamente en n partes iguales el intervalo entre c_1 y c_1+h_1, se obtendrá una nueva serie de valores, alguno de los cuales cumplirá con la condición indicada, ó habrá dos, al menos, c_2 y c_2+h_2, tales que $f(c_2)$ y $f(c_2+h_2)$ comprendan la cantidad m. Continuando de este modo se llegará, al fin, á un valor de x que hará $f(x)=m$, ó á valores $f(c_p)$ y $f(c_p+h_p)$, de la función, que comprenderán á m, y cuya diferencia, según la hipótesis, podrá ser tan pequeña como se quiera; puesto que h_p tiende hacia cero. Claro es, entonces, que la diferencia entre $f(c_p)$ y m tenderá con mayor razón hacia cero, y, como m es constante, será $lím. f(c_p)=m$; pero siendo c_p una variable siempre creciente y menor que b, tiene por necesidad un cierto límite c; luego $lím. f(c_p)=f(c)$ (*) y, por lo tanto, $f(c)=m$, que es lo que se quería demostrar (**).

Si la función pasa de un valor positivo á otro negativo ó inversamente, empezaremos por probar que llegará á adquirir el valor cero, que siempre está comprendido entre dos cantidades de signos contrarios.

Efectivamente: sean $+A$ y $-B$ dos de los valores de $f(x)$, y consideremos una cantidad constante C, mayor que el mayor de los valores absolutos de los resultados negativos que da la función $f(x)$ para todos los valores de x capaces de producirlos, y comprendidos entre los que la hacen adquirir los valores extremos $+A$ y $-B$; es claro que, según la hipótesis, la función $C+f(x)$ tomará incrementos que podrán ser menores que cualquier cantidad dada y, por consiguiente, esta función, que es siempre positiva, adqui-

(*) No debe olvidarse que el límite de cualquier sistema de operaciones con cantidades variables, que siempre pueden considerarse como positivas, poniendo los signos explícitos ó combinándolos separadamente, es la misma serie de operaciones efectuadas con los límites. Es fácil ver, por otra parte, que las proposiciones demostradas en la aritmética, relativas á los límites, subsisten con independencia de que las variables y sus límites respectivos sean cantidades positivas ó negativas.

(**) Cuando a y b pueden ser cantidades cualesquiera, la función es continua para todos los valores de x.

rirá todos los valores comprendidos entre $C+A$ y $C-B$, luego pasará una ó varias veces por el valor C que cumple con esa condición; pero cuando $C+f(x)$ se reduzca á C, necesariamente $f(x)$ será igual á cero; luego $f(x)$ no puede pasar de un valor á otro de signo contrario, sino anulándose una ó más veces.

Ahora bien: partiendo del valor de x que reduce la función á cero y considerando los valores siempre positivos que ésta toma por una parte, ó los negativos que adquiere por otra, según sea m mayor ó menor que cero, nos hallaremos en el primer caso, para el que ya ha sido demostrada la continuidad. (*)

TEOREMA II. *Las variaciones de toda función continua, pueden ser menores que cualquier cantidad, con tal de que sean suficientemente pequeñas las de la variable de que depende.*

Para demostrar este teorema, que es recíproco del anterior, supongamos que la función $f(x)$ sea continua para valores de x comprendidos entre a y b, y que sea c uno de dichos valores; decimos que siempre existirá un valor de h, suficientemente pequeño, para el cual, no considerando sino los valores absolutos de los incrementos, se verifique la desigualdad

$$f(c+h)-f(c) < \varepsilon;$$

siendo ε una cantidad positiva tan pequeña como se quiera.

En efecto: si así no fuese, el valor absoluto de la diferencia, indicada en el primer miembro de esta desigualdad, excedería siempre á una cierta cantidad positiva ε', y, según el caso, sería constantemente

$$f(c+h) > f(c)+\varepsilon' \qquad \text{ó} \qquad f(c+h) < f(c)-\varepsilon';$$

pero, ya se verificase una ú otra relación, cuando h tendiese hacia cero, $f(x)$ no podría tomar todos los valores comprendidos

(*) Si la función se anulase para más de un valor de x, bastaría considerar los valores respectivamente anteriores ó posteriores al primero ó al último de sus valores iguales á cero, comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Se debe también observar que este teorema, que algunos consideran innecesario ó consecuencia inmediata de la definición de función continua, da el único procedimiento general para investigar algebraicamente la *continuidad* ó *discontinuidad* de una función cualquiera, después de desarrollar directamente ó por medio de la *fórmula de Taylor*, de que se tratará oportunamente, la expresión $f(x+h)$, ó, sea, la función incrementada.

entre $f(c+h)$ y $f(c)$; pues, si se realiza la primera desigualdad, no podrá adquirir ninguno de los valores mayores que $f(c)$ y menores que $f(c)+\varepsilon'$, y, si se verifica la segunda, no podría ser nunca igual á ningún valor menor que $f(c)$ y mayor que $f(c)-\varepsilon'$; lo cual es contrario á la hipótesis de ser la función continua.

TEOREMA III. *La suma algébrica y el producto de un número limitado de funciones continuas, lo mismo que cualquier potencia de una función de esta clase, son á su vez funciones continuas; y otro tanto sucede al cociente, finito y determinado, de dos de dichas funciones, y á toda raíz de una de ellas.* (*)

Se justifica fácilmente este teorema, fundándose en las proposiciones que acabamos de demostrar, en los principios de la teoría de los límites y en lo dicho al tratar de la determinación aritmética de un radical (**59**).

Consideremos, por ejemplo, el producto de varias funciones continuas $f_1(x)f_2(x)\ldots\ldots f_n(x)$.

Si cambiamos x en $x+h$, siendo h una cantidad tan pequeña como se quiera, el producto se convertirá en

$$f_1(x+h)f_2(x+h)\ldots\ldots f_n(x+h);$$

pero cuando h tienda hacia cero, estos factores tendrán respectivamente por límites $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_n(x)$, luego:

$$\text{lím.}\ [f_1(x+h)f_2(x+h)\ldots\ldots f_n(x+h)]=f_1(x)f_2(x)\ldots\ldots f_n(x);$$

y, por lo tanto, el producto incrementado podrá diferenciarse del propuesto en tan poco como se quiera, y este último será una función continua.

Se demuestran de igual modo las otras proposiciones, que comprende el enunciado del teorema.

Las restricciones hechas en dicho enunciado quedan también justificadas; porque cuando dos funciones continuas que se dividen, pasan simultáneamente por cero, la función cociente puede ser indeterminada, y será infinita, si sólo se anula la función divisor, perdiéndose en ambos casos la continuidad de dicho cociente; y porque lo mismo ocurre para el valor imaginario de una raíz de orden par de cualquier función continua, cuando ésta se hace negativa. Así: $\frac{x^2+1}{(x-3)^2}$ se convierte en ∞ para $x=3$; y $\sqrt{(x-2)(x-5)}$ es imaginario para todo valor de x comprendido entre 2 y 5.

(*) Al considerar por separado todas las operaciones, debe sobrentenderse que el exponente de la potencia y el índice de la raíz son números enteros y positivos. Se supone también que las funciones son continuas para cualesquiera valores de x, ó sólo para los comprendidos entre límites dados.

El razonamiento hecho en la demostración anterior, no es aplicable en tales casos, puesto que supone la existencia de un límite; y lo realmente indeterminado, lo infinito, ó lo imaginario, no pueden ser límites de ninguna cantidad variable. (*)

La suma algébrica y el producto de un número ilimitado de funciones continuas, pueden no ser funciones continuas; pues sabemos que los teoremas correspondientes de los límites, exigen que el número de sumandos y el de factores sea limitado.

TEOREMA IV. *Si* u *es una función continua de* x, *para* x=a, *y* z *es función continua de* u, *para* u=f(a), z *será función continua de* x *para* x=a.

En efecto: según se ha demostrado en el teorema segundo, á un incremento suficientemente pequeño del valor a de x, corresponderá un incremento tan pequeño como se quiera de $u=f(a)$; pero como z es función continua de u, para este último valor, á tal incremento de u deberá también corresponder otro infinitamente pequeño (**) de z; luego, en definitiva, á un incremento suficientemente pequeño de x, á partir de a, corresponderá otro tan pequeño como se quiera de z, y, en virtud del primer teorema, z será una función continua de x, para $x=a$.

TEOREMA V. *Si* f(u, v) *es una función continua de* u *y de* v, *siendo* u *y* v *funciones continuas de* x, f(u, v) *será á su vez una función continua de la variable* x.

(*) Los valores indeterminados é infinitos, así como los imaginarios, no es indispensable que procedan de división ó de raíz, cuando se consideran funciones transcendentes. Se ve, en efecto, que la función $sen\frac{1}{x}$ es indeterminada para $x=0$; que $tang\,x$ es $\pm\infty$ para $x=\frac{\pi}{2}$; y que $log\,x$ es imaginario siempre que $x<0$.

(**) Esta expresión, *infinitamente pequeño*, que no conviene usar con demasiada frecuencia, fuera del cálculo infinitesimal, es sinónima de *cantidad variable que tiene por límite cero*.

Si se cambia x en $x+h$, y designamos por α y β los incrementos, positivos ó negativos, que respectivamente correspondan á u y v, se deduce de la hipótesis, que las diferencias

$$f(u+\alpha, v)-f(u, v) \quad \text{y} \quad f(u+\alpha, v+\beta)-f(u+\alpha, v),$$

tendrán por límite cero, y, por consiguiente, su suma

$$f(u+\alpha, v+\beta)-f(u, v)$$

gozará de la misma propiedad; pero como esta expresión representa el incremento total de $f(u,v)$, que es en último término una función de x, dicha función será continua respecto de esa variable independiente, según lo antes demostrado.

TEOREMA VI. *Si una función es continua, su función inversa también lo será entre los límites correspondientes.*

Supongamos, en efecto, que la función $y=f(x)$ sea continua para los valores comprendidos entre $f(a)=m$ y $f(b)=n$. Es claro que si consideramos la función inversa, que representaremos por $x=\varphi(y)$, ésta tendrá que ser continua entre los valores a y b que corresponden á los m y n de la nueva variable y; pues llamando c una cantidad cualquiera mayor que a y menor que b, el valor p de y, dado por la igualdad $p=f(c)$ y comprendido, por lo tanto, entre m y n, hará evidentemente $c=\varphi(p)$; siendo por lo mismo continua la función $\varphi(y)$, que tiene la propiedad de pasar por todos los valores que, como el c, están comprendidos entre a y b.

La demostración que acaba de darse supone, de un modo implícito, que la función directa es continuamente creciente ó decreciente entre los valores considerados; porque, de otro modo, no podría decirse que el valor p estaba cuantitativamente comprendido entre m y n; mas si no fuera posible hacer tal hipótesis, se considerarían valores sucesivos entre los cuales se verificara esa condición y quedaría igualmente demostrada la continuidad de la función inversa, entre sus valores extremos. (*)

(*) Es digno de notarse que la curva que representa por sus distancias al eje de las x la función $y=f(x)$, es exactamente la misma que, por sus distancias al eje de las y, representa la función inversa $x=\varphi(y)$. Esta notable propiedad justifica la proposición demostrada, y puede fácilmente comprobarse en las funciones, *directa* é *inversa*, $y=x^2$ y $x=\pm\sqrt{y}$.

Ejercicios.

I. Clasificar la función, y, en las expresiones siguientes:

$$y=(a+bx+cx^2)^3\,; \quad 2xy+x^2-2y-3x-1=0\,; \quad Ax+By+Cz+D=0\,;$$

$$y^2=2px^3\,; \quad x^3+y^3+z^3=a^3\,; \quad y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\,;$$

$$y=\cos x\,; \quad y+1=a^{-\frac{1}{x}}\,; \quad y=\frac{1}{b+x^m}\,; \quad y=\frac{a}{x^2}\,; \quad y=\frac{1}{x}\log(1+x).$$

II. Representar gráficamente las funciones que siguen:

$$y=\frac{x^2-7x+6}{x-10}\,; \quad y=ax^2+b\,; \quad y=\frac{1}{x}\,; \quad y=\operatorname{sen} x\,;$$

$$y=\operatorname{tang} x\,; \quad y^2=ax-x^2\,; \quad y=\frac{x^2}{a}\,; \quad y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}\,.$$

II.—Función potencial.

169. Potencia de exponente entero y positivo. La más sencilla de las expresiones algébricas, que generalmente se consideran, es la que se presenta bajo la forma potencial x^m, que comprende como caso particular la sola letra x, y á la cual sabemos que pueden aplicarse las reglas operativas explicadas en la primera parte del álgebra, siempre que el exponente m sea un número entero y positivo.

Ahora bien: como esta expresión entra como elemento constitutivo en otras muchas expresiones algébricas, y envuelve en sí las formas fraccionaria y radical, cuando m es negativo ó fraccionario (**44, 62**), importa saber si podrá someterse á las mismas operaciones, siendo el exponente m un número cualquiera; porque entonces, al presentarse en el cálculo, no habrá necesidad de hacer restricciones que limiten la generalidad de las reglas operativas. Con tal propósito examinaremos los dos casos indicados, para ocuparnos después, con toda generalidad, del estudio de la función x^m, considerando á x como una cantidad variable.

170. Potencia de exponente fraccionario positivo. Ya hemos visto que el exponente fraccionario tiene su origen en la extracción de la raíz de un cierto orden de una potencia; conviniendo en que las notaciones $\sqrt[n]{x^m}$ y $x^{\frac{m}{n}}$ sean símbolos de una misma operación. Vamos ahora á demostrar que *sometiendo las potencias de exponentes fraccionarios á las mismas reglas operativas que las potencias de exponente entero, el resultado, así obtenido, es siempre su verdadero valor, expresado bajo la forma de dicha notación.* (*)

En efecto: si han de multiplicarse dos potencias de exponentes fraccionarios se tendrá:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \text{ (**)};$$

luego podemos decir que si α y β son positivos y conmensurables, se verificará que

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta},$$

y, en general,

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} \cdot a^{\gamma} \ldots\ldots = a^{\alpha+\beta} \cdot a^{\gamma} \ldots\ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots}$$

Si se trata de dividir dos potencias de dicha forma, también se verificará, para todos los valores positivos y conmensurables de α y β,

$$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta};$$

puesto que $a^{\alpha-\beta} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha}$.

Aplicando el mismo procedimiento á la elevación á potencias, se tiene:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}};$$

lo cual nos dice que, para todos los valores positivos y conmensurables de α y β, se tiene

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha \cdot \beta}.$$

(*) Al generalizar los procedimientos de cálculo, no hay que ocuparse de la suma y de la resta, que son operaciones de pura indicación, é independientes, por eso mismo, de la forma de las cantidades consideradas.

(**) El caso de ser uno de los exponentes enteros puede considerarse incluído en el que examinamos, suponiendo m divisible por n, ó p divisible por q. De todos modos, es fácil en esta operación, como en otra cualquiera, examinar dicho caso separadamente.

Se demostraría de igual modo que

$$(abc)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha} \quad \text{y} \quad (a:b)^{\alpha} = a^{\alpha} : b^{\alpha}. \text{ (*)}$$

171. Variación de las potencias de exponente fraccionario. Establecida ya la variabilidad de las potencias de exponentes enteros de una cantidad positiva (**69**), examinemos ahora como varían las potencias cuyo exponente es fraccionario y positivo.

TEOREMA I. *Toda potencia fraccionaria y positiva de una cantidad a, igualmente positiva, es mayor ó menor que la unidad según que a sea también mayor ó menor que 1.*

En efecto: si $a > 1$ y la fracción $\frac{m}{n}$ representa un número conmensurable, se tendrá $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; pero como $a^m > 1$ (**69**), necesariamente se verificará que

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} > 1 \text{ (76)}.$$

Bien directamente ó poniendo a bajo la forma $\frac{1}{a'}$, y haciendo análogos razonamientos, se demuestra que, si $a < 1$, será $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

TEOREMA II. *Cuando a es mayor que la unidad,* $a^{\frac{m}{n}}$ *crece aumentando* $\frac{m}{n}$, *y decrece en el caso contrario.*

Puesto que

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m'}{n'}}$$

se ve que, si $a > 1$, $a^{\frac{m'}{n'}} > 1$, luego:

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}} > a^{\frac{m}{n}}.$$

Fácilmente se deduciría lo contrario, suponiendo $a < 1$.

(*) Si $\alpha = \frac{m}{n}$, se tiene:

$$(abc)^{\alpha} = (abc)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(abc)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m c^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{c^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} \cdot c^{\frac{m}{n}} = a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha}$$

y, análogamente,

$$(a:b)^{\alpha} = (a:b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a:b)^m} = \sqrt[n]{a^m : b^m} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = a^{\alpha} : b^{\alpha}.$$

Teorema III. *Si el número conmensurable,* $\frac{m}{n}$, *tiene por límite cero,* $a^{\frac{m}{n}}$ *tendrá por límite la unidad.*

En la hipótesis de ser $a > 1$, las raíces de orden creciente de a, tienen por límite inferior la unidad (76); luego existirá siempre una raíz, la $q^{ésima}$ por ejemplo, tal que se tenga:

$$\sqrt[q]{a} - 1 < \delta \quad \text{ó, bien,} \quad a^{\frac{1}{q}} - 1 < \delta;$$

representando δ una cantidad positiva tan pequeña como se quiera; de modo que para todos los valores de $\frac{m}{n}$ inferiores á $\frac{1}{q}$, se verificará, con mayor razón,

$$a^{\frac{m}{n}} - 1 < \delta \quad \text{y, por lo tanto,} \quad \text{lím. inf. } a^{\frac{m}{n}} = 1.$$

Si fuera $a < 1$, se tendría análogamente:

$$1 - \sqrt[q]{a} < \delta \quad \text{ó, bien,} \quad 1 - a^{\frac{1}{q}} < \delta,$$

y, con más razón, para valores de $\frac{m}{n}$ que sean inferiores á $\frac{1}{q}$,

$$1 - a^{\frac{m}{n}} < \delta, \quad \text{de donde,} \quad \text{lím. sup. } a^{\frac{m}{n}} = 1.$$

172. Potencia de exponente inconmensurable y positivo.—*La potencia* a^l, *de base positiva y de exponente inconmensurable y positivo, es, por definición, el límite de las potencias que se obtienen reemplazando dicho número inconmensurable,* l, *por números conmensurables, de los cuales sea límite.*

Para justificar esta definición, es preciso demostrar la existencia de dicho límite.

Según hemos visto, si se supone $a > 1$ y que sean crecientes los números conmensurables $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''} \dots$, que tienen por límite l, las potencias

$$a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m'}{n'}}, a^{\frac{m''}{n''}} \dots\dots$$

serán también crecientes é inferiores á a^t, designando por t cualquier número conmensurable mayor que l; luego tendrán un cierto límite superior que designaremos por λ.

Para probar que este límite λ, correspondiente á una cierta ley de valores crecientes de $\frac{m}{n}$, es también límite de las potencias que pertenecen á otra cualquier ley de variación, supongamos que $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \dots\dots$ tiendan ahora hacia l de un modo cualquiera. (*)

Es evidente que habrá una cierta fracción de la primera ley, tal que, para ella y para cualquiera $\frac{\mu}{\nu}$ de las que le siguen, sea

$$\lambda - a^{\frac{\mu}{\nu}} < \frac{\delta}{2};$$

representando por δ una cantidad tan pequeña como se quiera; pero si un valor $\frac{\mu_1}{\nu_1}$ de la nueva ley considerada, se aproxima suficientemente á l, podrá también aproximarse tanto como se quiera á la fracción variable y creciente $\frac{\mu}{\nu}$, luego, concretándose sólo á los valores absolutos, se podrá establecer, para una infinidad de determinaciones particulares de $\frac{\mu}{\nu}$ y de $\frac{\mu_1}{\nu_1}$, además de la anterior desigualdad, la que sigue:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} - a^{\frac{\mu_1}{\nu_1}} < \frac{\delta}{2} \quad (**)$$

la cual, sumada miembro á miembro con la precedente, da, con igual restricción (***),

$$\lambda - a^{\frac{\mu_1}{\nu_1}} < \delta;$$

(*) Esta ley de variación puede ser creciente, distinta de la anterior, decreciente, ó formada por valores unos mayores y otros menores que l; pues no supone sino la aproximación indefinida á este límite.

(**) Para comprender bien esta desigualdad, basta imaginar que en su primer miembro se saca factor común la potencia de menor exponente y observar que uno de los términos, de la diferencia que resultaría entre paréntesis, sería la unidad y el otro una potencia cuyo exponente tendería hacia cero.

(***) Cuando á una cantidad positiva menor que $\frac{\delta}{2}$, se le suma otra, positiva ó negativa, menor también en valor absoluto que $\frac{\delta}{2}$, el resultado, positivo ó negativo, será de seguro menor que δ en valor absoluto.

lo que prueba que $a^{\frac{m}{n}}$ tiene el mismo límite λ, cualquiera que sea la manera como varíe $\frac{m}{n}$ al aproximarse á su límite l.

Razonamientos análogos justificarían la existencia y determinación del límite potencial, en el caso de ser $a < 1$.

Establecida la definición anterior, se prueba fácilmente que las reglas operativas, ya explicadas para las potencias de exponentes enteros y fraccionarios positivos, son aplicables al caso de ser los exponentes inconmensurables y mayores que cero, siendo siempre la base positiva.

En efecto: si representamos por α y β dos exponentes inconmensurables, límites respectivos de $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, se tiene:

$$a^{\alpha} . a^{\beta} = \text{lím}\, a^{\frac{m}{n}} . \text{lím}\, a^{\frac{p}{q}};$$

pero como $\textit{lím}\, a^{\frac{m}{n}} . \textit{lím}\, a^{\frac{p}{q}} = \textit{lím} \left(a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}}\right) = \textit{lím}\, a^{\frac{m}{n}+\frac{q}{q}} = a^{\alpha+\beta}$, resulta, por último:

$$a^{\alpha} . a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

De esta igualdad se deduce inmediatamente la regla de la división; y las demás pueden obtenerse procediendo de una manera análoga.

173. Potencia de exponente negativo cualquiera. Ya hemos dicho (44) que una cantidad afectada de exponente entero negativo, es el símbolo del cociente de la unidad por la misma cantidad afectada de igual exponente positivo. Extendiendo ahora esta notación á exponentes negativos cualesquiera (*), es fácil generalizar para ellos las reglas operativas que se aplican á las potencias de exponentes positivos, sean ó no conmensurables.

Se tiene, en efecto,

$$a^{-m} . a^{n} = \frac{1}{a^{m}} . a^{n} = a^{n} : a^{m} = a^{n-m} = a^{-m+n};$$

(*) Los exponentes negativos cualesquiera, resultan de aplicar la regla de la división á potencias de exponentes positivos también cualesquiera, pero en las que el exponente del dividendo es menor que el del divisor. Esta clase de exponentes fueron usados, por vez primera, por Wallis.

y, análogamente,

$$a^{-m} . a^{-n} = \frac{1}{a^{m}} \cdot \frac{1}{a^{n}} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n};$$

luego, cualesquiera que sean α y β, siempre se verificará que

$$a^{\alpha} . a^{\beta} = a^{\alpha+\beta};$$

y, considerando un producto de varias potencias,

$$a^{\alpha} a^{\beta} a^{\gamma} \ldots\ldots = a^{\alpha+\beta} a^{\gamma} \ldots\ldots = a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots}$$

Con respecto á la división se tiene:

$$a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

puesto que $a^{\alpha-\beta} . a^{\beta} = a^{\alpha}$.

Para elevar á potencias, las de una cierta cantidad, habrá que considerar los casos en que uno solo de los exponentes sea negativo ó que lo sean ambos.

Examinando sucesivamente cada uno de ellos, resulta:

$$(a^{-m})^{n} = \left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$$

$$(a^{m})^{-n} = \frac{1}{(a^{m})^{n}} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$$

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m}}\right)^{n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn};$$

es decir que, en todos casos,

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

También es fácil deducir que, siendo α un número negativo cualquiera, se tendrá:

$$(abc)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha} \quad \text{y} \quad (a : b)^{\alpha} = a^{\alpha} : b^{\alpha} \text{ (*)}.$$

(*) Se ve, en efecto, que siendo $\alpha = -m$, será:

$$(abc)^{\alpha} = (abc)^{-m} = \frac{1}{(abc)^{m}} = \frac{1}{a^{m} b^{m} c^{m}} = \frac{1}{a^{m}} \cdot \frac{1}{b^{m}} \cdot \frac{1}{c^{m}} = a^{-m} . b^{-m} . c^{-m} = a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha};$$

174. Potencia de exponente cero. Cuando se aplica la regla de la división á las potencias de igual exponente de una misma letra, se obtiene para cociente una potencia de exponente cero, y como dicho cociente debe ser igual á la unidad, queda justificado que, cualquiera que sea su origen, dicha potencia es siempre símbolo de la unidad.

175. Continuidad de la función potencial. Si consideramos á x como variable y m representa un número constante, la expresión x^m es lo que algunos autores llaman *función simple algébrica*, si bien otros suponen que es transcendente cuando m es inconmensurable (*), no siendo propiamente simple, según hemos visto, sino en el caso de ser m entero y positivo. (**)

Prescindiendo de esta clasificación, demostraremos los teoremas que siguen.

Teorema I. *La función* x^m *es continua para todos los valores de* x, *si el exponente* m *es entero y positivo.*

Para demostrarlo, probaremos que para cualquier valor de la variable x, se verificará la desigualdad

$$(x+h)^m - x^m < \varepsilon\,;$$

considerando sólo el valor absoluto del primer miembro y siendo ε una cantidad positiva tan pequeña como se quiera.

Desde luego, esta desigualdad queda satisfecha para $x=0$; porque entonces será también $x^m=0$ (***), y se reduce á la condición $h^m<\varepsilon$, la cual se verifica para valores de h suficientemente pequeños.

---

y que, análogamente,

$$(a:b)^\alpha = (a:b)^{-m} = \frac{1}{(a:b)^m} = \frac{1}{a^m:b^m} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{b^m} = a^{-m} : b^{-m} = a^\alpha : b^\alpha.$$

Conviene también notar que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$.

(*) Entre ellos el matemático Abel.

(**) Así la consideran los matemáticos franceses contemporáneos, Juan María Duhamel y Antonio Agustín Cournot.

(***) Debe observarse que si m fuese negativo, x^m se convertiría en ∞, al hacer $x=0$, y la función dejaría de ser continua.

Poniendo la condición de continuidad bajo la forma

$$x^m\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - 1\right] < \varepsilon,$$

se ve además que, para cualquier valor de x distinto de cero y positivo ó negativo, la cantidad entre corchetes tiende á anularse al mismo tiempo que h, y que otro tanto sucede á todo el primer miembro; puesto que, en la hipótesis de ser m entero y positivo, el factor x^m será una cantidad real y finita. (*)

Corolario. *Toda función algébrica racional y entera de* x, *es continua para valores cualesquiera de su variable.* Observando, en efecto, que si una función varía de un modo continuo, su producto por una cantidad constante y su suma con ella variarán evidentemente de igual modo, se deduce la continuidad de la función $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots\cdots + tx + u$, sin más que notar que puede considerarse como una suma de funciones continuas en número limitado. (**)

Teorema II. *La función* x^m *es continua para todos los valores positivos de su variable, cualquiera que sea el valor de* m; *y crece ó decrece según que este exponente sea positivo ó negativo.* (***)

Cuando varíe x entre los valores positivos a y b, de los cuales

---

(*) Por el desarrollo ya conocido de $(x+h)^m$, que en la hipótesis hecha conduce á un número finito de términos, todos los cuales, á partir del segundo, tienden hacia cero, podría igualmente demostrarse el teorema.

Al aplicar por primera vez á una función determinada el teorema fundamental de la continuidad, importa advertir que si bien el incremento funcional $f(x+h) - f(x)$ es en todos casos cero, para $h=0$, no siempre puede ser tan pequeño como se quiera para valores suficientemente pequeños del incremento de la variable, ni tener por lo tanto cero por límite. Así ocurre, por ejemplo, en $tang(x+h) - tang\,x$ y en $log(x+h) - log\,x$; pues, prescindiendo del signo, la primera diferencia es infinita para $x=\frac{\pi}{2}$, cualquiera que sea el grado de pequeñez de h, y otro tanto sucede para $x=0$ en la segunda, la cual es además imaginaria para todo valor negativo de x.

(**) Se podría demostrar también directamente este importantísimo corolario, aplicando á $f(x+h)$ la fórmula de la potencia de un binomio.

(***) Cuando se dice que una función es creciente ó decreciente, sin indicar el modo como varía su variable, se supone, implícitamente, que ésta recibe incrementos positivos, según ya hemos indicado.

el primero es menor que el segundo, decimos que la función x^m tomará todos los comprendidos entre a^m y b^m, y que x^m crecerá ó decrecerá con x, según que m sea positivo ó negativo.

En efecto: si pudiera verificarse, siendo x y m positivos, que

$$(x+h)^m < x^m, \text{ se tendría, } \frac{(x+h)^m}{x^m} < 1$$

ó, bien,
$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^m < 1;$$

lo cual es imposible; porque hemos demostrado que las potencias positivas de una cantidad mayor que la unidad son también mayores que la unidad.

Por el contrario, cuando $m = -n$, no podrá ser

$$(x+h)^{-n} > x^{-n} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{(x+h)^n} > \frac{1}{x^n};$$

pues entonces resultaría:

$$(x+h)^n < x^n;$$

lo cual se opone á lo que acaba de demostrarse.

Por otra parte: si p es una cantidad cualquiera, comprendida entre a^m y b^m, la función x^m pasará por dicho valor, p, con sólo hacer $x = p^{\frac{1}{m}}$ (*); luego x^m no puede pasar del primer valor a^m al segundo b^m, sin tomar todos los valores comprendidos entre estos dos, y como, por crecer siempre, no pasa sino una sola vez por cada valor, la función es creciente y continua (**).

(*) Claro es que si p está comprendida entre a^m y b^m, $\sqrt[m]{p} = p^{\frac{1}{m}}$ lo estará necesariamente entre a y b.

(**) Ha sido indispensable la restricción que establece el enunciado, porque no sólo la función puede perder la continuidad para valores negativos de la variable, sino que tampoco se halla entonces bien definida.

Se ve, efectivamente que $(-8)^{\frac{1}{3}}$ y $(-8)^{\frac{2}{6}}$, que constan de bases y exponentes iguales, tienen por valores respectivos:

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{y} \quad \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{2^6} = \pm 2.$$

Además si fuese $x < 0$ y m una fracción de la forma $\frac{2n+1}{2p}$, tal como $\frac{7}{8}$, x^m vendría á ser imaginaria.

Claro es que si la función x^m crece de un modo continuo cuando m es una constante positiva, será también continua, pero decreciente, para valores negativos de dicho exponente y para cualquier valor positivo de x distinto de cero; puesto que $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ (*).

Corolario. *Cualquiera que sea* m, *todo polinomio de la forma* $ax^m + bx^{m-1} + \cdots\cdots + tz + u$, *es una función continua de* x, *siempre que esta variable no reciba sino valores positivos.*

Ejercicios.

I. Calcular los resultados de las expresiones y operaciones que se indican á continuación:

$$625^{\frac{1}{4}}; \quad 125^{\frac{5}{3}}; \quad \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}; \quad a^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{1}{2}}; \quad a^{\frac{2}{5}} : a^{0,1};$$

$$a : a^{\frac{2}{7}}; \quad \left(m^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{a}{b}}; \quad \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{10}}; \quad \frac{35a^{\frac{9}{8}} b^{\frac{29}{18}} c}{5a^{\frac{3}{8}} b^{\frac{5}{6}} c}.$$

II. Efectuar las siguientes operaciones:

$$4^{\sqrt{5}+1} . 4^{\sqrt{5}-1}; \quad 10^{\sqrt{3}} . 10^{\frac{1}{\sqrt{3}}}; \quad \left(3\sqrt{2}\right)^{\sqrt{18}}; \quad \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{\frac{1}{12}}}.$$

(*) Se ve fácilmente, y en general, que si la función $f(x)$ es continua, y no se anula para ninguno de los valores dados á su variable, $\frac{1}{f(x)}$ será también continua para esos mismos valores; porque se tiene:

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+h)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x) . f(x+h)};$$

y como el numerador, del segundo miembro de esta igualdad, tiene por límite cero, por ser $f(x)$ continua, y el denominador tiende á $[f(x)]^2$, que es siempre una cantidad positiva, el incremento de la función $\frac{1}{f(x)}$ puede ser tan pequeño como se quiera, y esta función es, por consiguiente, continua.

En el caso particular que examinamos, puede demostrarse aun con más sencillez, observando que $x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$.

III. Obtener los valores y resultados que á continuación se indican:

$$\left(2^{-3}\right)^2;\ \left(2^2\right)^{-3};\ \left(4^{-4}\right)^{-3};\ \left[\left(3^{-2}\right)^{-3}\right]^{-4};\ \left(-1^{-1}\right)^{-2};$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^5;\ \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7};\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6};\ 3^2 . 3^{-2};\ 10^{-8} : 10^{-6};\ m^{-x} : m^{-2x};$$

$$(a+b)^{-(x+y)} : (a+b)^{-(x-y)};\ \left(a^x b^{-y}\right)^{-3};\ \left(\frac{a^{-x}}{b^y}\right)^{-3}$$

$$512^{-\frac{1}{3}};\ 625^{-\frac{3}{4}};\ \left(3^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{2}{3}};\ (0{,}125)^{-\frac{1}{3}};\ 8^{-\widehat{0,6}};\ u^{-1} . u^{\frac{3}{4}};$$

$$e^{-2x} . e^{-\frac{x}{y}};\ y^{-1} : y^{-\frac{m}{n}};\ \left(2a^{-1} b^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{3}{5}} b^{-\frac{4}{7}}\right)^2.$$

III.—Función exponencial.

176. Definición. *Se da el nombre de función exponencial á la potencia de exponente variable y base constante.*

Así: a^x es una función exponencial, cuando a es constante y x variable; y será la función exponencial simple, cuando x sea la variable independiente.

177. Variaciones de la función exponencial. La variabilidad de la función a^x, está sujeta á la ley que establece la siguiente proposición.

TEOREMA. *La función* a^x *crece ó decrece con* x, *cuando siendo la cantidad* a *positiva, sea ésta mayor ó menor que la unidad.*

Supongamos, en efecto, para fijar las ideas, que sea $a > 1$. Si damos á la variable x un incremento positivo h, la función tomará un incremento expresado por

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1);$$

pero como a^h es siempre mayor que la unidad, se verificará que $a^{x+h} > a^x$; luego si $m > n$ se tendrá:

$$a^m > a^n.$$

De igual manera se prueba que $a^m < a^n$, cuando $a < 1$.

178. Continuidad de la función exponencial. Para demostrar que, en el mismo supuesto de ser la base a positiva, la función a^x es continua, sabemos que bastará hacer ver que la diferencia entre

sus valores sucesivos, puede ser menor que cualquier cantidad dada.

Se verifica esta última circunstancia, porque dando á x un incremento positivo h, tan pequeño como se quiera, y suponiendo que a sea mayor que la unidad, la función se incrementará en

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1);$$

pero, como a^h tiene por límite la unidad, cuando h tiende hacia cero, k puede ser menor que cualquier cantidad y la función a^x es continua.

Cuando a sea menor que la unidad, se podrá poner bajo la forma: $a = \frac{1}{a'}$; siendo $a' > 1$, y, por lo tanto, $a^x = \frac{1}{a'^x}$.

Al crecer ahora x, crecerá a'^x de una manera continua, luego a^x decrecerá de una manera también continua.

Establecida ya la continuidad de la función a^x, puede examinarse la marcha que siguen sus valores, cuando la variable pase por todos los comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$.

Si se supone primero $a > 1$ y que x adquiere sucesivamente todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$, se ve que la función crece de un modo continuo desde 1 hasta $+\infty$.

Cuando, en la misma hipótesis respecto de a, x toma valores negativos, la función se transforma en

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}}$$

haciendo $x = -x'$; pero suponer que x varía desde 0 hasta $-\infty$, equivale á decir que x' crece desde 0 hasta $+\infty$; luego la función a^x decrece continuamente desde 1 hasta 0.

Resumiendo diremos, que *cuando la variable* x *crece de una manera continua, desde* $-\infty$ *á* $+\infty$, *la función* a^x *crece continuamente desde* 0 *hasta* $+\infty$.

Suponiendo $a < 1$, se tendrá:

$$a^x = \frac{1}{a'^x};$$

y como a' es mayor que la unidad, se deduce que *cuando* x *crece* *continuamente desde* $-\infty$ *á* $+\infty$, *la función* a^x *decrece de un modo continuo desde* $+\infty$ *á* 0.

Es fácil demostrar que *la función* a^x *deja de ser continua, cuando* a *sea una cantidad negativa.*

Efectivamente: si, suponiendo $a<0$, damos á la variable x un valor de la forma $x=\frac{2m}{2n+1}$, tendremos:

$$a^x=a^{\frac{2m}{2n+1}}=\sqrt[2n+1]{a^{2m}}>0;$$

es decir, que el valor correspondiente de a^x será positivo.

Si, en el mismo supuesto, hacemos $x=\frac{2m+1}{2n+1}$, se halla:

$$a^x=a^{\frac{2m+1}{2n+1}}=\sqrt[2n+1]{a^{2m+1}}<0;$$

lo que da un valor negativo para la función.

Y si, por último, recibe x un valor $x=\frac{2m+1}{2n}$, se tiene:

$$a^x=a^{\frac{2m+1}{2n}}=\sqrt[2n]{a^{2m+1}}=\text{imag.}^{\text{o}}$$

Se ve, pues, que dando á la variable x valores que pueden diferenciarse en tan poco como se quiera, siendo m constante y n suficientemente grande, la función a^x pasa bruscamente de positiva á negativa y de negativa á imaginaria, perdiendo así la continuidad. (*)

Siendo la base $a>0$, puede demostrarse también que *la función* a^x *deja de ser continua, si se toman para ella valores negativos.*

En efecto: puesto que a es una cantidad positiva, es claro que a^x no podrá recibir ningún valor negativo, sino cuando x sea una fracción de denominador par. Haciendo $x=\frac{m}{2n}$ resulta:

$$a^x=a^{\frac{m}{2n}}=\sqrt[2n]{a^m}<0,$$

(*) Decimos bruscamente, porque lo positivo y lo negativo sólo pueden diferenciarse en tan poco como se quiera, cuando pueden diferir infinitamente poco de cero; é imaginando que el valor absoluto de a fuese mayor que la unidad, las raíces serían también mayores que la unidad en valor absoluto.

por la facultad que hay de afectar del signo $+$ ó del signo $-$ toda raíz de orden par de cualquier cantidad positiva; pero si se hace $x=\frac{m}{2n+1}$, que es un nuevo valor de la variable, de forma tal que, cuando n sea suficientemente grande, puede diferir del anterior en tan poco como se quiera, se tendrá:

$$a^x=a^{\frac{m}{2n+1}}=\sqrt[2n+1]{a^m}>0,$$

ó, bien, un valor de la función que ha de ser forzosamente positivo.

Vemos, por lo tanto, que para valores de la variable, tan poco diferentes como se quiera, resultaría para la función dos valores, uno positivo y otro negativo, ninguno de los cuales tiene por límite cero; lo cual haría imposible la continuidad. (*)

Ejercicios.

I. Disponer por orden de magnitud los valores de a^x cuando

$$a=5 \quad \text{y} \quad x=\frac{1}{6},\ -3,\ 4,\ -1,\ 0;$$

y los que resultan suponiendo

$$a=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x=7,\ 0,\ -2,\ 1,\ \frac{3}{4}.$$

II. Representar geométricamente la función exponencial $y=a^x$, en los tres casos de ser a mayor, igual ó menor que la unidad.

IV.—Función logarítmica.

179. Nueva definición de logaritmo. Si se examina el sistema de las dos progresiones, que han servido para definir los logaritmos (**88**), y recordamos que, por medio de la interpolación, sus razones, c y r, pueden diferenciarse en tan poco como se quiera, respectivamente de la unidad y de cero (**85,80**), vemos que se podrá reemplazar c por $1+\alpha$ y r por β, designando α y β dos va-

(*) Se sabe (**76**) que creciendo n indefinidamente y siendo m constante, las dos raíces anteriores tienen por límite de sus valores absolutos la unidad.

riables, positivas ó negativas, que tienen cero por límite (*), convirtiéndose entonces las dos progresiones mencionadas en las que siguen:

$$\begin{array}{l} \div\!\div \cdots : (1+\alpha)^{-3} : (1+\alpha)^{-2} : (1+\alpha)^{-1} : 1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \cdots \\ \div \cdots . -3\beta \quad . -2\beta \quad . -\beta \quad . 0 . \quad \beta \quad . \quad 2\beta \quad . \quad 3\beta \quad \cdots \end{array}$$

El supuesto de que α y β se aproximen indefinidamente á cero, ó, lo que es lo mismo, que los términos consecutivos de estas progresiones puedan diferir entre sí tan poco como se quiera, se sabe que es condición indispensable para que todo número tenga un logaritmo determinado; mas cualquiera que sea el grado de pequeñez de dichas variables y pueda ó no entrar la unidad en la progresión por diferencia (**), $a = (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ será la base del sistema así constituído; porque, en todos casos, se tendrá:

$$\log a = \frac{1}{\beta} . \log(1+\alpha) = \frac{1}{\beta} . \beta = 1 \text{ (***)}.$$

Ahora bien: de la igualdad,

$$a = (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad \text{se deduce} \qquad 1+\alpha = a^{\beta};$$

y, substituyendo en la progresión por cociente, resulta:

$$\begin{array}{l} \div\!\div : \cdots : a^{-3\beta} : a^{-2\beta} : a^{-\beta} : 1 : a^{\beta} : a^{2\beta} : \cdots \\ \div . \cdots . -3\beta \quad . -2\beta \quad . -\beta \quad . 0 . \beta \quad . \ 2\beta \ . \cdots \end{array}$$

(*) Suponiendo que se interpolan $n-1$ términos entre cada dos de las primeras progresiones, resultan las igualdades: $1+\alpha = \sqrt[n]{c}$, de donde $\alpha = \sqrt[n]{c} - 1$; y $\beta = \frac{r}{n}$; viéndose así que ambas variables tienen simultáneamente cero por límite, cuando n tiende hacia el infinito.

(**) Debe recordarse que, al generalizar la definición de los logaritmos, se demostró (**88**) que, si r era conmensurable, cualquier número de esta clase, tal como la unidad, se podía hacer entrar en la progresión por diferencia, por una interpolación conveniente de términos. Claro es, según se notó también, que si r fuese inconmensurable, nunca podría la unidad, ni número conmensurable alguno, formar parte de dicha progresión.

(***) Cuando la unidad entre en la progresión aritmética, habrá un cierto valor entero de m para el cual sea $m\beta = 1$ ó $\frac{1}{\beta} = m$; siendo en ese caso la base, $(1+\alpha)^m$.

lo cual manifiesta que *los logaritmos de los números son los exponentes de las potencias á que debe elevarse un número constante, llamado base del sistema, para reproducir dichos números.*

Según esta nueva definición, si se tiene,

$$a^x = y, \qquad \text{será} \qquad x = \log y$$

apareciendo entonces x como una función de y, que llamaremos *función logarítmica*, y que es inversa de la exponencial.

Considerados de este modo los logaritmos, se deduce á su vez la primera definición, con sólo observar que dando á x valores en progresión por diferencia, a^x los adquiere en progresión por cociente.

Se ve, por lo tanto, que, en el fondo, son equivalentes ambas definiciones. (*)

180. Propiedades de la función logarítmica. El estudio de la función exponencial que, por ser inversa de la función logarítmica, hace que ésta sea continua en los mismos casos que aquélla (**168**), nos da el medio de poner de manifiesto las consecuencias y propiedades que ya hemos establecido, fundándonos en otras consideraciones (**92, 93**).

En efecto: si en la función $a^x = y$, suponemos que sea $a > 0$ é y un número positivo cualquiera, y hacemos variar á x de un modo continuo desde $-\infty$ á $+\infty$, a^x pasará una sola vez por todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$; luego llegará á ser igual á y; y como el valor correspondiente de x será el logaritmo de y, se deduce que *todo número positivo tiene un logaritmo.*

Si se supone que y ó a sean negativos, entonces la función $a^x = y$, pierde, según hemos visto (**178**), la propiedad de ser continua, propiedad indispensable para que esa función pueda ser

(*) La definición de los logaritmos, por medio de la función exponencial, es debida á Euler, quien comprendió desde luego que dicha función continua puede engendrar todos los números, y que, presentados éstos bajo esa forma, las operaciones con ellos se reducirían de igual manera que se reducen las de las potencias de una misma base respecto á sus exponentes. Esta feliz idea no pudo ocurrirse á Neper, como algunos creen equivocadamente; porque hasta Descartes, es decir hasta principios del siglo XVII, no fueron conocidas y empleadas la notación potencial y sus reglas operativas.

igual ó tan aproximada como se quiera á todos los números; deduciéndose, por consiguiente, que *los números negativos no tienen logaritmos* (*), *y que la base de cualquier sistema logarítmico debe ser precisamente positiva* (**).

Del examen de la función exponencial, que estamos considerando, resulta inmediatamente que, bien sea la base mayor ó menor que la unidad, se tendrá:

$$x = 0;\ a^0 = 1;\ \log 1 = 0 \quad \text{y} \quad x = 1;\ a^1 = a;\ \log a = 1;$$

es decir, que, *en todo sistema, el logaritmo de la unidad es cero, y el logaritmo de la base es la unidad.*

El cálculo que sigue demuestra igualmente que, *según sea la base mayor ó menor que la unidad, el logaritmo de cero será menos ó más infinito; y el de infinito, por el contrario, más ó menos infinito.*

$$x = -\infty \begin{cases} a > 1;\ a^{-\infty} = 0, & \log 0 = -\infty \\ a < 1;\ a^{-\infty} = \infty, & \log \infty = -\infty \end{cases}$$

$$x = +\infty \begin{cases} a > 1;\ a^{\infty} = \infty, & \log \infty = \infty \\ a < 1;\ a^{\infty} = 0, & \log 0 = \infty. \end{cases}$$

Se ve además que, siendo la base a mayor que la unidad, la función exponencial, esto es, el número, crece con la variable, ó, sea, el logaritmo; y que, si $a < 1$, el primero decrece cuando la variable crece; verificándose así que *á mayor número corresponde mayor ó menor logaritmo, según que la base sea mayor ó menor que la unidad.*

(*) Al decir que los números negativos carecen de logaritmos, no debe entenderse que la ecuación $a^x = y$ no pueda quedar satisfecha por un valor negativo de y; pues $4^x = -2$ para $x = \frac{1}{2}$, y, por lo tanto, $\log_4(-2) = \frac{1}{2}$; pero este logaritmo, como otro cualquiera análogo, no formaría parte de ningún sistema, por ser entonces la función discontinua, según ya hemos demostrado.

Conviene también recordar lo dicho en la primera parte del álgebra (**92**), respecto á la expresión imaginaria de los logaritmos de los números negativos, que se justificará más adelante, al tratar de los desarrollos en serie por medio de la *fórmula de Mac-Laurin.*

(**) La base del sistema de logaritmos, $a = (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$, será mayor ó menor que la unidad, según los signos de α y β; pero nunca podrá ser dicha unidad. Se ve también *à priori* que, si $a = 1$, la función a^x sólo valdría la unidad, y no sería capaz de producir todos los números.

Resultan, pues, idénticas conclusiones que las consignadas en la primera parte del álgebra; y podemos demostrar que pasa otro tanto con la propiedad fundamental y otras ya demostradas, las cuales enunciaremos en los mismos términos.

Teorema I. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

En efecto: si se tiene

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'', \ldots\ldots$$

podrán multiplicarse, miembro á miembro, estas igualdades y resultará:

$$a^{x+x'+x''+\ldots\ldots} = y\,y'y''\ldots\ldots;$$

luego, $x + x' + x'' + \ldots\ldots = \log(y\,y'y''\ldots\ldots)$; y como $x, x', x''\ldots\ldots$, son respectivamente los logaritmos de $y, y', y''\ldots\ldots$, se tendrá, en definitiva:

$$\log(y\,y'y''\ldots\ldots) = \log y + \log y' + \log y'' + \ldots\ldots$$

Teorema II. *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

De las dos igualdades

$$a^x = y, \qquad a^{x'} = y'$$

resulta, dividiendo miembro á miembro,

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'}; \quad \text{luego} \quad \log\frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

Teorema III. *El logaritmo de la potencia de un número, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de dicho número.*

Efectivamente: de la igualdad $a^x = y$ se deduce $a^{mx} = y^m$, y, por lo tanto,

$$\log y^m = m \log y.$$

Teorema IV. *El logaritmo de la raíz de un número, es igual al logaritmo de dicho número, dividido por el índice de la raíz.*

Extrayendo la raíz $m^{ésima}$ de los dos miembros de la igualdad $a^x = y$, resulta:

$$a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{y} \qquad \text{de donde} \qquad \log \sqrt[m]{y} = \frac{\log y}{m}. \; (*)$$

181. Base del sistema. Ya hemos visto que la base de un sistema de logaritmos ha de ser un número positivo y distinto de la unidad, que puede elegirse arbitrariamente; de suerte que aun cuando á cada número sólo corresponderá un logaritmo en un sistema determinado, existirán sin embargo una infinidad de sistemas de logaritmos.

Generalmente no se emplean otros sistemas que el decimal ó de Brigs, ya dado á conocer (**94**, **95**), y el de Neper, definido por las dos primeras progresiones aquí consideradas y por la condición característica $\text{lím}\,\frac{\alpha}{\beta} = 1$. (**)

Fijado así este sistema, no podrá obtenerse su base substituyendo en $(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ en lugar de α y β valores simultáneos cualesquiera, que no se conocen ahora como en el caso de proceder estas variables de la interpolación de términos entre dos progresiones anteriormente establecidas (***), sino que será preciso hallar el valor límite que le corresponde cuando α y β tiendan hacia cero y se verifique la relación $\text{lím}\,\frac{\alpha}{\beta} = 1$. En tal concepto, como

$$\text{lím.}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = \text{lím.}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}} = \text{lím.}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

dicha base será, en virtud de la condición expresada, $\text{lím}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, cuando la única variable α tienda libremente hacia cero (*).

Esta base del sistema de los logaritmos neperianos se representa por la letra e, y más adelante veremos cómo se calcula.

182. Cambio de base y módulo. Según lo que acaba de indicarse, se comprende que puede ser necesario en los cálculos numéricos, obtener el logaritmo neperiano de un número cuando se conozca su logaritmo decimal y recíprocamente; ó, bien, en general, que sea preciso, dado el logaritmo de un número en un cierto sistema, calcular su logaritmo en otro cualquiera. Esta operación se designa con el nombre de *cambio de base*, y se efectúa aplicando la proposición que sigue.

TEOREMA. *El logaritmo de un número, en un nuevo sistema, se obtiene multiplicando su logaritmo, en el sistema antiguo, por el logaritmo de la base de éste, tomado en el nuevo sistema.*

En efecto: si suponemos que se hayan calculado los logaritmos de los números en el sistema cuya base es a, y se desea obtenerlos

---

(*) Los tres últimos teoremas hubieran podido deducirse como corolarios del primero, una vez demostrado éste. Las demostraciones dadas, sirviéndose de la forma exponencial, tienen la ventaja de ser independientes de que los logaritmos sean conmensurables ó inconmensurables, positivos ó negativos.

(**) Los logaritmos neperianos son los que se usan más frecuentemente en el análisis superior, denominándose *naturales*, porque, como más adelante demostraremos en la teoría de las series, son los únicos que dependen directa y exclusivamente de los números. Se llaman también *hiperbólicos*, porque referida la *hipérbola equilátera* á sus asíntotas, y tomando por unidad de superficie el cuadrado que tiene por diagonal el *semieje real ó transverso*, el área comprendida entre la rama cuya asíntota es la parte positiva del eje de las x, y dicha asíntota, contada desde la ordenada del vértice hasta otra ordenada cualquiera, es el logaritmo natural de la longitud de la abscisa correspondiente.

(***) Se ha dicho que esos dos valores simultáneos eran: $\alpha = \sqrt[n]{c} - 1$ y $\beta = \frac{r}{n}$, para un mismo valor del número entero n. La base del sistema será entonces,

$$a = (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\sqrt[n]{c}\right)^{\frac{n}{r}} = c^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{r}} = c^{\frac{1}{r}},$$

independientemente de la mayor ó menor aproximación á cero de las variables α y β.

(*) Supuesta la variabilidad de α y β, conviene notar que la expresión general de la base del sistema, correspondiente á las primitivas progresiones, debe ser también $\text{lím}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$, cuando esas variables tiendan simultáneamente á cero; pero si las leyes de variación de α y β son tales que hacen constante á $(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$, como se ha visto ocurre siempre que las progresiones propuestas proceden de efectuar interpolaciones en otras anteriormente fijadas, entonces $\text{lím}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}} = (1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$; porque el límite de una función que accidentalmente se convierte en constante, es esa constante misma.

En el sistema de Neper se supone establecidas *à priori* las dos progresiones á que nos venimos refiriendo, y que α y β son variables que tienden hacia cero, sin que exista otra relación que las ligue, más que $\text{lím}\,\frac{\alpha}{\beta} = 1$.

en aquel que tiene por base b, se verificará, llamando x al logaritmo de y en el primer sistema,

$$a^x = y;$$

y tomando los logaritmos de los dos miembros de esta igualdad, en el sistema de base b,

$$\log_b y = x \log_b a \quad \text{ó} \quad \log_b y = \log_a y \log_b a$$

que es lo que quería demostrarse.

Corolario. *El logaritmo de la antigua base en el nuevo sistema y el de la nueva base en el antiguo, son inversos uno de otro.*

Basta observar que, si hacemos $y = b$, se tendrá:

$$\log_b b = \log_a b \log_b a, \quad \text{de donde} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b};$$

puesto que $\log_b b = 1$.

El número constante $\log_b a$, ó su igual $\frac{1}{\log_a b}$, es lo que se llama *módulo*, y sirve de multiplicador para pasar de uno á otro sistema. Representando dicho módulo por M, se tiene:

$$\log_b y = M \log_a y. \ (*)$$

183. Nuevas aplicaciones de los logaritmos. Ya sabemos que empleando el cálculo logarítmico se reducen las operaciones á otras de grado inferior; pues, aplicando las propiedades ya demostradas, la multiplicación se convierte en suma, la división en resta, la elevación á potencias en multiplicación, y la extracción de raíces en división.

Pero además de estas importantes reducciones, los logaritmos permiten resolver otros dos problemas inversos de gran importancia, que son: *hallar el exponente de una potencia, conociendo ésta y el número elevado*; *y calcular el índice de una raíz, conociendo ésta y el número de que fué extraída.*

(*) La segunda expresión de M, es la que generalmente permite determinar el módulo; puesto que no se consideran sino logaritmos del sistema conocido. Así: para pasar de los logaritmos vulgares á los de base 5, por ejemplo, bastará multiplicar los primeros por el factor constante, $M = \frac{1}{\log_{10} 5}$.

La primera de estas cuestiones equivale, en efecto, á buscar un logaritmo en un sistema de base determinada; pues si a es el número que se elevó á la potencia de exponente desconocido, x, y b es dicha potencia, se tendrá:

$$a^x = b \quad \text{de donde} \quad x = \log_a b;$$

y este logaritmo se determina fácilmente por la mediación del sistema vulgar, en el que sabemos hallar todos los logaritmos.

Respecto de la segunda cuestión, basta observar que $\sqrt[x]{a} = b$ equivale á la ecuación $a^{\frac{1}{x}} = b$, de la cual se deduce

$$\frac{1}{x} = \log_a b \quad \text{ó, bien,} \quad x = \frac{1}{\log_a b} \ (*).$$

Ejercicios.

I. ¿En el sistema de base 3, cuáles son los logaritmos de 3, 9, 81, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{243}$?

II. ¿Cuáles son los módulos para pasar de los logaritmos decimales á los que tienen por base los números 7, 12 y $\frac{4}{9}$?

III. Determinar, con cinco cifras decimales exactas, los logaritmos de 54, 121 y 0,18 en el sistema de base 12.

IV. Obtener, en menos de 0,000001, el logaritmo de 7, en los sistemas cuyas bases sean 3, 5 y $\frac{2}{7}$.

V. ¿Para qué bases se tiene log 49 = 2 y log 0,0081 = 4?

VI. ¿En qué sistemas se verifica que log 10 = 20 y log 13 = 13?

VII. ¿Qué potencia de 18 es el número 104976 y qué raíz de 19487171 el número 11?

(*) La igualdad $a^x = b$, en la que x es una incógnita, así como la que liga los diversos elementos de la regla de interés compuesto, cuando el tiempo es desconocido, y que ya resolvimos como aplicación de los logaritmos, son *ecuaciones exponenciales* de forma elemental.

Es fácil ver que la segunda de estas nuevas aplicaciones, puede referirse inmediatamente á la primera, por medio de la ecuación $b^x = a$.

CAPITULO II

FUNCIONES DE VARIABLES IMAGINARIAS Y CÁLCULO DE LOS RADICALES ALGEBRAICOS

I.—Significación de las expresiones imaginarias elementales y forma en que se presentan.

184. Origen algorítmico de las expresiones imaginarias. Ya se ha dicho (16) que cuando hay que extraer una raíz, cuyo índice sea $2n$ (*), de una cantidad negativa, se expresa una operación imposible de realizar; puesto que toda cantidad, positiva ó negativa, elevada á una potencia de grado par, produce siempre otra cantidad positiva. En tal concepto, á las expresiones que contienen un radical de la forma $\sqrt[2n]{-A}$, y que carecen, por lo tanto, de realidad numérica, se les ha dado el nombre de *expresiones imaginarias* (**); debiendo observarse que tienen su origen en la virtualidad propia de los procedimientos algorítmicos que emplea el álgebra para realizar sus fines; porque la generalidad de esta ciencia no la obliga á considerar si la expresión sobre la cual opera es positiva ó negativa, ó si podrá ó no realizarse la operación, mostrándonos sólo, en uno ó en otro caso, la posibilidad ó imposibilidad de resolver numéricamente la cuestión propuesta.

Ahora bien: conviene notar que la verdadera dificultad de la operación, indicada por la expresión $\sqrt[2n]{-A}$, está en hallar el signo ó expresión factorial de que debe afectarse el valor ó determi-

(*) Aquí n representa un número entero cualquiera, sin afección alguna.
(**) Más adelante expondremos los inconvenientes de esta denominación.

nación aritmética $\sqrt[2n]{A}$ (*), para que, elevada á la potencia de grado $2n$, reproduzca $-A$. Una vez obtenido ese signo, quedará definida y limitada la imposibilidad que encierra $\sqrt[2n]{-A}$, y se prestará mejor, según veremos, al concepto y procedimientos de cálculo de dichas expresiones imaginarias.

185. Significación de las expresiones $\sqrt{-1}$ y $a\sqrt{-1}$. De las expresiones imaginarias, á que nos hemos referido, estudiaremos la más sencilla, que está formada por un radical de índice igual á 2. Las consideraciones que expondremos no sólo serán generales, en gran parte, sino que más adelante demostraremos que todas las formas imaginarias, en que entren raíces del orden $2n$, pueden reducirse, en último término, á imaginarias de segundo orden.

Supongamos que se tiene la expresión $\sqrt{-a^2}$ (**), y veamos cuál debe ser el factor de que debe afectarse la cantidad a, para que elevada al cuadro reproduzca $-a^2$.

Representando dicho factor, que no puede ser $+1$ ni -1, por la letra i, deberá tenerse:

$$(ia)^2 = -a^2, \qquad i^2 = -1, \qquad i = \pm\sqrt{-1};$$

luego $\pm\sqrt{-1}$ es el factor que debe afectar á toda expresión cuyo cuadrado haya de ser negativo. (***)

Se desprende de esta consideración que $\sqrt{-1}$ no puede tener valor cuantitativo, pues su papel ó significación algorítmica se reduce únicamente á indicar que ha de cambiarse el signo de la expresión á que afecta, después de elevada al cuadrado. (****)

(*) Esta determinación puede siempre hallarse, exacta ó tan aproximadamente como se quiera, cuando el valor numérico de A es conocido.
(**) Tanto para mayor sencillez, como para expresar que la cantidad subradical es esencialmente negativa, suponemos que su valor absoluto es un cuadrado perfecto; pero esta hipótesis no restringe los razonamientos.
(***) Rafael Bombelli, matemático italiano de mediados del siglo XVI, fué el primero que hizo uso del símbolo $\sqrt{-1}$; siendo Carlos Federico Gauss, célebre matemático alemán de principios de este siglo, quien lo designó con la letra i, adoptada luego en todos los tratados de álgebra.
(****) Por este motivo, M. F. Vallès, notable matemático francés y distinguido autor de varias obras recientes, relativas á las formas imaginarias, propone que se emplee tan sólo el símbolo $\sqrt{-}$.

Conociendo lo que expresa el factor $\sqrt{-1}$, queda desde luego conocida la significación de la expresión $a\sqrt{-1}$; puesto que se tendrá $\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$ (*); igualdad en cuyo segundo miembro se halla explícita la imposibilidad que encierra el primero, quedando así definida y aislada dicha imposibilidad.

186. Binomio imaginario. La síntesis sumatoria de un elemento real y otro imaginario, expresada por la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, se denomina *binomio imaginario*, en el cual α y β representan cantidades reales, positivas ó negativas; de suerte que puede presentar las cuatro combinaciones que comprende la forma múltiple $\pm\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, poniendo los signos de manifiesto.

187. Clasificación de las expresiones imaginarias. Si atendemos á la forma ordinaria de la representación algébrica de las expresiones imaginarias que proceden de la raíz cuadrada, las dividiremos en *monomias* y *binomias*, siendo las primeras las que se hallan comprendidas en la forma $\sqrt{-A} = \pm\alpha\sqrt{-1}$, y las segundas las que lo están en $\pm\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$; pero si consideramos la naturaleza de los elementos que las constituyen, entonces las clasificaremos en *imaginarias puras* y *mixtas*; siendo las primeras las que no constan sino de elementos imaginarios, y las segundas, aquellas en cuya composición entra algún término real.

La expresión $\sqrt{-1}$ es la forma *imaginaria típica* ó *imaginaria simple*.

188. Interpretación geométrica de las expresiones imaginarias. A pesar de que las expresiones imaginarias indican una operación imposible de realizar numéricamente, no por eso deben considerarse como signos de imposibilidad absoluta; pues hay casos en que las expresiones imaginarias son la representación analítica de una cierta afección de la magnitud, diferente de la positiva y de la negativa, como vamos á evidenciar por las siguientes consideraciones.

(*) Este resultado es igual al que, por otro orden de consideraciones, se obtuvo en la teoría de las ecuaciones de segundo grado (**153**).

Al ocuparnos de la cualidad de la magnitud (7), dimos las denominaciones de positivas y negativas á las magnitudes que respectivamente favorecían ó contrariaban los fines del enunciado del problema, y las afectamos de los signos respectivos $+$ y $-$, ó más bien de los factores $+1$ y -1; pero como al definir la cualidad de la magnitud no hemos supuesto exclusivamente estos dos conceptos opuestos, se comprende que pueda existir otra afección distinta, en la cual queden incluídos todos aquellos modos de ser que hagan concurrir á las magnitudes de diversa manera que las que hemos denominado positiva y negativa.

Los problemas puramente numéricos, no suelen presentar ejemplos en que intervengan afecciones distintas; pues, en general, dichos problemas no suponen posibilidad de otras soluciones que las positivas, interpretando los resultados negativos tan sólo en aquellos casos en que el lenguaje tiene medios de expresar propiamente las magnitudes opuestas; así es que las soluciones imaginarias serán, en ellos, signos de imposibilidad. (*)

No sucede lo mismo cuando se consideran problemas geométricos; porque la extensión y la dirección realizan de tal modo lo

(*) Tratando de la interpretación de las expresiones imaginarias, algunos autores, entre ellos el malogrado filósofo español D. José María Rey y Heredia, han presentado ejemplos numéricos concretos, en los cuales aparecen cantidades de diversa afección que la positiva y la negativa; pero no han podido hasta ahora formular ningún problema determinado, en donde se evidencie la influencia ó manera de concurrir de dichas magnitudes; limitándose únicamente á indicar cuestiones en términos generales, que nada resuelven en definitiva, como puede observarse en las siguientes:

«Los problemas relativos á la fortuna de las personas, versan ordinariamente sobre cantidades *habidas* ó *debidas*; pero si hubieran de formularse tomando en cuenta los *depósitos*, éstos serían considerados coma *cantidades indirectas*; puesto que no afectando directamente al *debe* y al *haber* de la fortuna, modifican, sin embargo, de un modo indirecto la situación del capital.

Si en el juego se considera la circunstancia de quedar á veces, de una á otra jugada, algunas cantidades llamadas *puestas*, que luego han de distribuirse entre los que hayan cumplido ciertas condiciones, la situación verdadera de cada jugador no quedará definida entonces por la consideración de *ganancia ó pérdida*; sino que habrá de tomarse en cuenta la cantidad retenida, que no es ganancia ni pérdida actual, sino aplazada; siendo por lo tanto una cantidad indirecta.»

En estas cuestiones, y en otras análogas que podrían presentarse, falta todavía probar que la forma imaginaria es la apropiada para expresar, en forma algorítmica, esa clase especial de cantidades, que se hallan fuera de las afecciones opuestas, positiva y negativa.

que no alcanza á expresar el número, que puede demostrarse que las expresiones imaginarias, que hemos dado á conocer, tienen entonces una interpretación geométrica determinada.

En efecto: puesto que la oposición que existe entre dos longitudes, contadas á partir de cualquier punto de una cierta recta, se expresa algébricamente afectando á dichas magnitudes de los signos $+$ y $-$, ó de los factores $+1$ y -1, ocurre desde luego investigar si las longitudes que se tomen sobre las demás rectas situadas en un mismo plano, y partiendo de dicho punto, podrán también expresarse por medio de otro signo ó factor algebraico que las determine.

Con tal objeto, empezaremos por deducir la representación algebraica de la perpendicularidad.

Si elegimos al punto O, (fig. 3), como origen de todas las longitudes que se consideren, y llamamos λ su unidad, tendremos que $OA = +\lambda a$ y $OA' = -\lambda a$, siendo a el número abstracto que expresa la medida; pero si queremos indicar que la misma longitud ha de tomarse en la dirección OP, perpendicular á MN, debe verse de qué modo es preciso modificar la unidad lineal λ, para que el resultado λ' represente algebraicamente la operación geométrica que es preciso efectuar para pasar de la dirección ON á la dirección OP. Ahora bien: como esa modificación ha de ser de naturaleza algébrica, pues de lo contrario ninguna ventaja obtendría el cálculo, admitiremos la existencia de un cierto factor p que satisfaga á la igualdad $\lambda' = \lambda p$. (*)

Para determinar ese factor, observaremos que OP goza de la propiedad de producir la dirección OM, opuesta á OA, cuando con OP se efectúe igual operación ó construcción geométrica, que se hizo con OA para obtener OP. (**)

En tal concepto, si el módulo λ tuvo que multiplicarse por el factor p, para expresar que la nueva dirección había de ser tomada sobre OP, se deduce que repitiendo la operación sobre λp, habrá de obtenerse la dirección OM; de suerte que la ley de la perpendicularidad exige que $\lambda p^2 = -\lambda$, cualquiera que sea λ, y, por lo tanto, que $p^2 = -1$ ó, bien, $p = \pm\sqrt{-1}$; y, considerando OP como dirección perpendicular positiva, $p = \sqrt{-1}$.

El doble signo que hemos obtenido se explica fácilmente; porque repitiendo los anteriores razonamientos con OQ, opuesto á OP, y empleando el factor p, se llega al mismo resultado; de suerte que si $\lambda\sqrt{-1}$ es la unidad efectiva de las longitudes tomadas sobre OP, $-\lambda\sqrt{-1}$ será la de las que se cuenten sobre OQ.

Resulta, según esto, (fig. 4), que $\sqrt{-1}$ *es el índice de la perpendicularidad, y que las afecciones sucesivas de las longitudes contadas sobre los cuatro segmentos indefinidos de dos rectas perpendiculares entre sí, son:* $+\lambda$, $+\lambda\sqrt{-1}$, $-\lambda$ y $-\lambda\sqrt{-1}$.

Investiguemos ahora la forma del factor que debe afectar á la unidad, cuando la longitud haya de llevarse en una dirección que forme un ángulo cualquiera con la de las longitudes positivas, que se toma como término de relación ó de partida.

Siendo OA, (fig. 5), esa primera dirección que se fija, consideremos otra cualquiera OB, y veamos cuál debe ser el factor que ha de afectar al módulo de las longitudes que se lleven sobre ella.

Para obtenerlo, bajemos desde un punto cualquiera C la perpendicular CC', y observemos que para ir del punto O al punto C, se puede seguir el camino OC, ó, bien, OC' y luego $C'C$; pero ya que á la dirección CC' es preciso afectarla del signo $\sqrt{-1}$, la expresión algébrica del camino $OC'C$ será $OC' + CC'\sqrt{-1}$.

Como para llegar al punto C puede seguirse también el camino OC, en el sentido de OB, es indispensable para que los dos hechos geométricos conduzcan no sólo á la misma separación efectiva, sino á la misma posición respecto del punto de origen O, que sea

$$OC' + CC'\sqrt{-1} = OC.d;$$

(*) El elemento modificador ha de ser necesariamente factorial; pues es el único modo de expresar algébricamente que la manera de ser de la magnitud considerada, afecta á todos sus elementos constitutivos.

(**) Esto es una consecuencia de la reciprocidad que existe entre dos perpendiculares en un mismo punto á una recta, trazadas en sentido opuesto é indefinidamente prolongadas.

representando por d el factor que debe afectar las longitudes contadas en la dirección OB. (*)

De la igualdad precedente se deduce:

$$d = \frac{OC'}{OC} + \frac{CC'}{OC}\sqrt{-1},$$

forma que no depende de la posición particular del punto elegido en la dirección OB, sino que corresponde á toda ella; puesto que $\frac{OC'}{OC}$ y $\frac{CC'}{OC}$ son relaciones constantes que convienen á cualquiera de sus puntos. Esta independencia queda explícita observando que

$$\frac{OC'}{OC} = \cos\varphi \qquad \text{y} \qquad \frac{CC'}{OC} = \operatorname{sen}\varphi,$$

siendo φ el ángulo que forma OB con OA; de modo que se tendrá:

$$d = \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}.$$

Si se quiere, pues, representar algébricamente una recta cuya longitud sea m y cuya inclinación respecto de OA sea φ, se expresará de la siguiente manera:

$$m\left(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}\right).$$

Estas consideraciones permiten interpretar geométricamente el binomio imaginario $\pm\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$; porque refiriéndonos á la figura anterior y considerando la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, su representación geométrica se obtendrá llevando sobre OA una magnitud lineal $OC' = \alpha$ y levantando, en C', una perpendicular $C'C = \beta$.

Resumiendo lo expuesto, diremos que las expresiones imaginarias puras, de la forma $\pm A\sqrt{-1}$, tienen su interpretación geométrica tomando sobre la perpendicular, trazada en el origen á una recta fija sobre la cual se cuenten las magnitudes positivas y negativas, una distancia de longitud A, por la parte superior ó

(*) La equivalencia supuesta entre las líneas $OC'C$ y OC, obliga á considerar, implícitamente, que las magnitudes que se cuentan á partir de O, se limitan á fijar la posición de un punto en un plano.

inferior, según que esté afectada del signo $+$ ó $-$; y que las imaginarias binomias, de la forma $\pm\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, representan direcciones oblicuas que pueden corresponder á los cuatro cuadrantes, según los signos de α y β.

También queda comprobado que la geometría presenta ejemplos bien perceptibles de magnitudes lineales, que además de las afecciones positiva y negativa tienen otra distinta, con la cual se expresa la posición que ocupan en un plano, respecto de una recta fija, las que forman con ésta ángulos cualesquiera; afección que recibe el nombre de *externa* ó *indirecta*. (*)

189. Denominaciones diversas. Puesto que las expresiones imaginarias indican una imposibilidad numérica, consideradas en abstracto, y tienen interpretación determinada y precisa, cuando se trata de magnitudes geométricas, no parece propia la denominación de expresiones imaginarias con que generalmente se las distingue.

Muchos matemáticos las denominan *cantidades complejas* (**); pero es un calificativo demasiado genérico para expresar formas algebraicas de un carácter particular. Otros han propuesto los nombres de *cantidades imposibles* (***), *cantidades indirectas* (****), *cantidades dirigidas* (*****), y, finalmente, el de *cantidades geométricas* (******), llamándose *planas* aquellas de cuya significación nos hemos ocupado (*******).

(*) El primer ensayo de representación geométrica de las expresiones imaginarias, fué hecho á mediados del siglo XVII, por el profesor de la Universidad de Königsberg, Enrique Kühn; si bien al abate francés Adrián Quintín Buée, matemático y literato francés de principios del siglo actual, es debida á la idea de representar las unidades imaginarias sobre un eje perpendicular al de las cantidades positivas y negativas.

(**) Cauchy y recientemente Hoüel, así como el profesor de la Universidad de Pavía, Félix Casorati, y bastantes otros autores.

(***) Alberto Girard, que fué el primero que tomó en consideración las raíces imaginarias de las ecuaciones.

(****) Rey y Heredia, á fin de armonizar la denominación con la significación geométrica y con el concepto intelectual á que corresponden.

(*****) Roberto Argand, matemático suizo de principios de este siglo, de acuerdo, también, con la interpretación geométrica de estas expresiones.

(******) Justo Bellavitis, matemático italiano contemporáneo, quien supone muy fundadamente, á nuestro juicio, que tales expresiones carecen de toda otra significación concreta.

(*******) Hay otras *imaginarias esféricas* que corresponden á las líneas

Esta variedad de nombres y el carácter de la presente obra, motivan que conservemos la antigua denominación, que el uso ha autorizado.

190. Módulo y argumento. *Se da el nombre de módulo de una expresión algébrica, á su valor puramente cuantitativo ó aritmético.* (*)

Argumento (**) *es la relación cualitativa de una afección particular de la magnitud con la positiva ó fundamental, ó con otra tomada como base ó término de relación.* Así: concretándonos á la representación geométrica de las expresiones imaginarias, diremos que *el argumento de una expresión imaginaria es el ángulo que forma la dirección que representa, con aquella sobre la cual se cuentan las longitudes positivas.*

191. Modulación. En las expresiones algébricas no sólo hay que considerar su valor cuantitativo, sino también el factor cualitativo que determina su afección, positiva, negativa ó imaginaria; pero como no siempre aparecen explícitos estos dos factores, conviene, y aun es muchas veces necesario, separarlos.

El hecho matemático, en cuya virtud se efectúa la separación expresada, toma el nombre de *modulación* (***), la cual puede ser *factorial* ó *calificativa.* En el primer caso el módulo se afecta, por vía de multiplicación, del factor cualitativa y cuantitativamente

---

situadas fuera del plano de referencia de las *imaginarias planas*, y partiendo del mismo origen, las cuales se expresan algorítmicamente por medio de *exponenciales imaginarias, puras* y *afectas.*

(*) No debe confundirse este módulo con la unidad concreta, que se elige para medir las magnitudes de su misma especie.

(**) La palabra argumento tiene aquí la significación que le da nuestro Diccionario de la Lengua, de *indicio ó señal.* Generalmente indica un número ó cantidad de cuyo conocimiento depende otra cantidad que quiere calcularse. Así: en las tablas de altitudes, es un argumento la altura barómetrica; y en la astronomía se llaman argumento de la *latitud* y argumento de la *paralaje*, magnitudes determinadas que sirven para calcular dichos elementos astronómicos.

(***) En la teoría matemática de la música, se llama así el paso ó transición de uno á otro tono, de modo que al mismo tiempo resulten separados y unidos armónicamente dos sonidos diversos. Tiene esta palabra, por lo tanto, en el estudio que nos ocupa, una significación parecida; pues presenta separados, y unidos á la vez, el módulo y el argumento de las expresiones imaginarias.

igual á la unidad correspondiente; y en el segundo el módulo se modifica adjetivamente, por la indicación del argumento que corresponde al valor cualitativo. Por ahora sólo nos ocuparemos de la modulación factorial.

192. Modulación factorial de las expresiones imaginarias. Las cantidades reales se modulan fácilmente; puesto que sabemos que siempre se verifica la igualdad

$$\pm a = a(\pm 1).$$

Del mismo modo, las imaginarias puras, $\pm b\sqrt{-1}$, presentan explícitos sus dos factores; porque es evidente que

$$\pm b\sqrt{-1} = b(\pm\sqrt{-1});$$

siendo b el valor modular y $\pm\sqrt{-1}$ el afectivo correspondiente.

Con igual facilidad se modulan las imaginarias de la forma $\sqrt[2n]{-A}$; porque la transformación

$$\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[2n]{-1 \cdot A} = \sqrt[2n]{A} \cdot \sqrt[2n]{-1},$$

nos dice que $\sqrt[2n]{A}$ es el módulo, y $\sqrt[2n]{-1}$ el coeficiente ó factor afectivo.

Las expresiones de la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ son, según hemos visto, el resultado de multiplicar una cierta cantidad real por el factor que expresa la indirección; de suerte que el módulo del binomio imaginario será la mencionada cantidad, que vamos á determinar algebraicamente. (*)

Todo binomio imaginario puede ponerse bajo la forma:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right);$$

(*) La representación geométrica de la imaginaria binomia, manifiesta, desde luego, que debiendo representar el módulo la separación puramente cuantitativa que existe entre el punto de origen y el que se determina por dicha imaginaria, tiene que ser $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, según el teorema de Pitágoras.

pero observando que la suma de los cuadrados de los términos $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ y $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ es igual á la unidad, podemos hacer

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\varphi \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\operatorname{sen}\varphi; \text{(*)}$$

convirtiéndose así la expresión primera en

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=M\,(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}),$$

designando por M el radical $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; mas como el factor comprendido dentro del paréntesis es, según sabemos, el coeficiente afectivo, M será el módulo del binomio imaginario.

En toda expresión imaginaria, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, el módulo $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ha de ser, por definición, esencialmente positivo; pero el argumento φ, que entra en el coeficiente ó factor afectivo, y del cual sólo se conocen el seno y el coseno, no está completamente determinado; pudiendo ser cualquiera de los ángulos que comprende la fórmula

$$\varphi=\psi+2k\pi,$$

en la cual ψ representa el menor argumento positivo, correspondiente á la imaginaria de que se trata, y k un número entero cualquiera, comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$. (**)

Dos binomios imaginarios que tienen el mismo módulo, y que no se diferencian sino en el signo de su argumento, se llaman conjugados. Así $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, es fácil ver que son dos expresiones *imaginarias conjugadas.* (***)

Cuando los binomios imaginarios se hallan modulados, en la forma últimamente obtenida, se dice que están expresados bajo *forma trigonométrica.* (*)

(*) Dos cantidades numéricas reales, cuya suma de cuadrados es la unidad positiva, representan siempre, una el seno y otra el coseno de un mismo ángulo.

(**) Dada una imaginaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, puede ponerse bajo la forma modulada, resolviendo trigonométricamente el triángulo rectángulo $CC'C$, (fig. 5), cuyos catetos son numéricamente conocidos, y determinando la hipotenusa y el ángulo en O.

(***) Las direcciones representadas por estas dos expresiones son simétricas, con relación á la recta sobre la cual se cuentan las longitudes positivas, y corresponden, por lo mismo, á dos ángulos iguales y de signos contrarios.

Ejercicios.

I. Representar geométricamente las expresiones imaginarias que siguen:

$$6\pm6\sqrt{-1};\quad 2\pm3\sqrt{-1};\quad -5\pm8\sqrt{-1};\quad 7+\sqrt{-25};$$
$$1-\sqrt{-3}\,(**);\quad \pm\sqrt{-49};\quad \pm\sqrt{-12};\quad -4-3\sqrt{-4};\quad 5-\sqrt{-7}.$$

II. Modular las anteriores expresiones.

II.—Operaciones con las expresiones imaginarias.

193. Necesidad de someter las expresiones imaginarias á los procedimientos operativos. Las expresiones imaginarias aparecen en el curso del cálculo al dar valores particulares á las letras que entran en las cantidades subradicales, ó por su propia virtualidad, y están generalmente ligadas por operaciones que, aun cuando carezcan de realidad numérica, es indispensable considerarlas. La razón consiste en que, dada la generalidad que caracteriza al álgebra, le importa más que conocer la naturaleza íntima ó el concepto explícito de lo que sus símbolos representan, el que jamás se substraigan éstos á las transformaciones y artificios de cálculo que son de su dominio y constituyen su esencia.

Se comprende, por otra parte, la posibilidad de que una combinación operativa de expresiones imaginarias, conduzca á un resultado real; bien porque haya una destrucción de los términos imaginarios, ó bien porque con dichas expresiones se efectúen operaciones inversas de las que llevan indicadas.

194. Observaciones preliminares al cálculo de las expresiones imaginarias. Antes de ocuparnos de las reglas relativas al cálculo de las expresiones imaginarias, conviene hacer algunas obser-

(*) Las formas trigonométricas de las imaginarias facilitan los procedimientos algorítmicos, y evitan el que se llegue á ciertas conclusiones absurdas, que aparecen algunas veces cuando se emplea la forma ordinaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

(**) Las construcciones geométricas de la media proporcional, permiten hallar exactamente, en forma lineal, las raíces numéricas inconmensurables, cuyos índices sean potencias perfectas de 2.

vaciones encaminadas á explicar la marcha general que debe seguirse con el fin de evitar errores, así como también para formarse idea más precisa de las mencionadas expresiones imaginarias y del papel que desempeñan en el álgebra.

Desde luego podemos decir que ciertas relaciones son aplicables á las expresiones imaginarias; porque se verifican independientemente de la forma y naturaleza de las cantidades, tales como las siguientes: $\frac{a}{a}=1$, $a+a=2a$, $a-a=0$ y otras análogas; pero las operaciones y transformaciones, cuya demostración suponga que las expresiones que se consideran son reales, no podrán extenderse á las imaginarias, sino después de examinar si pueden ó no serles aplicadas.

Como el radical $\sqrt{-1}$ afecta factorialmente á las cantidades á que va unido, si varias de las que entran en una expresión ó resultado lo contienen y se hallan ligadas por los signos $+$ y $-$, podrá sacarse como factor común. Así:

$$a\sqrt{-1} \pm b\sqrt{-1} = (a \pm b)\sqrt{-1};$$

puesto que el segundo miembro expresa que $\sqrt{-1}$ afecta á la cantidad a y también á $\pm b$, que es lo indicado en el primero.

Esta observación, que se justifica geométricamente, permite aplicar á las expresiones imaginarias la regla **(25)** para reducir términos semejantes.

Conviene, por último, tener presente las propiedades generales, que siguen, del binomio $a \pm b\sqrt{-1}$.

Un binomio imaginario, de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$, *no puede ser igual á una cantidad real, sino siendo* $b=0$; pues si fuese

$$a \pm b\sqrt{-1} = c \quad \text{se tendría} \quad \pm b\sqrt{-1} = c-a,$$

lo cual es imposible á no ser $b=0$, y en este caso $c=a$.

El binomio imaginario tampoco puede ser igual á un monomio imaginario, á no ser que se anule su parte real; porque si se tuviera

$$a \pm b\sqrt{-1} = c\sqrt{-1} \quad \text{sería} \quad a=(c \mp b)\sqrt{-1};$$

que es también un resultado inadmisible.

La condición necesaria y suficiente para que una expresión imaginaria sea cero, es que su módulo lo sea. Se ve, en efecto, que si la expresión $a+b\sqrt{-1}$ es nula, será $a=0$ y $b=0$, y por lo tanto $\sqrt{a^2+b^2}=0$; y que si, recíprocamente, $\sqrt{a^2+b^2}=0$, deberá ser $a=0$ y $b=0$, y anularse dicha expresión imaginaria.

Dos binomios imaginarios no pueden ser iguales sin ser idénticos; pues suponiendo

$$a+b\sqrt{-1} = a'+b'\sqrt{-1}$$

se tendría

$$a-a' = (b'-b)\sqrt{-1};$$

igualdad imposible, excepto en el caso de ser

$$a=a' \quad \text{y} \quad b=b'.$$

Es fácil observar que esta proposición y las anteriores, se deducen inmediatamente de la significación geométrica del binomio imaginario. La forma modulada deja también conocer que las cantidades reales y las imaginarias puras pueden considerarse como casos particulares de la imaginaria binomia; convirtiéndose ésta en una cantidad real, positiva ó negativa, cuando $\varphi=0$ ó $\varphi=\pi$; y siendo una imaginaria monomia, igualmente positiva ó negativa, para los valores $\varphi=\frac{\pi}{2}$ y $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

El binomio $a+b\sqrt{-1}$ *no puede contener un factor real, á no ser que dicho factor lo sea á la vez de* a *y* b. Se ve, en efecto, que si $a+b\sqrt{-1}$ contuviese el factor real f, el otro factor no podría ser real ni monomio imaginario; luego sería necesariamente de la forma $a'+b'\sqrt{-1}$, y, entonces, se tendría:

$$a+b\sqrt{-1} = f(a'+b'\sqrt{-1}) = fa'+fb'\sqrt{-1};$$

luego

$$a=fa' \quad \text{y} \quad b=fb'.$$

Resulta, por lo tanto, que si a y b son primos entre sí, el binomio $a+b\sqrt{-1}$ no puede tener ningún factor real.

195. Adición de expresiones imaginarias. El concepto de la adición algébrica **(11)** es tan general, que comprende el caso en que todos ó varios sumandos sean imaginarios; pues sólo se trata de formar una síntesis de la reunión ó agregación de las expresiones consideradas. Podemos así aplicar á las expresiones imaginarias el procedimiento operativo, explicado para las cantidades reales (**30**); efectuando también la reducción de términos semejantes, conforme se ha indicado en las observaciones anteriores.

Según esto:

$$(a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1}=a''+b''\sqrt{-1}.$$

El resultado obtenido comprueba que la suma de dos ó más binomios imaginarios es otro binomio imaginario, á excepción del caso particular en que las partes reales ó las afectadas del factor $\sqrt{-1}$ fuesen iguales y de signos contrarios. Esto último ocurrirá seguramente cuando dichos binomios sean conjugados; siendo entonces la suma igual al duplo del término real de cada una. Claro es que si $a+a'=0$, la suma se reduciría á una imaginaria pura.

La suma algebraica de las imaginarias

$$z_1=x_1+y_1\sqrt{-1},\quad z_2=x_2+y_2\sqrt{-1},\quad z_3=x_3+y_3\sqrt{-1},\ldots..$$

es evidentemente

$$Z=(x_1+x_2+x_3+\ldots..)+(y_1+y_2+y_3+\ldots..)\sqrt{-1}=X+Y\sqrt{-1}.$$

Es claro que si, en la expresión final, fuese $Y=0$, la suma sería una cantidad real, y que si $X=0$, se convertiría en una imaginaria pura. La suma podría también reducirse á cero.

Se tiene de tal modo:

$$(3+5\sqrt{-1})+(-2+9\sqrt{-1})+(7-19\sqrt{-1})=8-5\sqrt{-1}.$$

196. Interpretación geométrica de la suma de expresiones imaginarias. La suma de las expresiones imaginarias tiene su representación geométrica, deducida de la de cada uno de los sumandos.

Se entiende, en efecto, por sumar la magnitud lineal representada por $a'+b'\sqrt{-1}$, con la que tiene por signo representativo $a+b\sqrt{-1}$, el agregar ó yuxtaponer á la primera, otra igual á la segunda, en magnitud, dirección y sentido. Partiendo de este supuesto, la construcción sumatoria consistirá en trazar por A, (fig. 6), la línea AB' paralela á OB, en igual sentido que ésta, y OB'

representará la suma. Para comprobarlo basta observar que la expresión analítica de OB' es

$$(a+a')+(b+b')\sqrt{-1};$$

puesto que

$$a=OR,\quad b=AR,\quad a'=-OP,\quad b'=BP;\ (*)$$

y de la igualdad de los triángulos OBP y $AB'S$, se deduce:

$$OQ=OR-OP=a+a' \quad \text{y} \quad B'Q=AR+BP=b+b'.$$

La línea OB' toma el nombre de *resultante* (**), y se ve que es independiente del orden en que se efectúe la suma.

Ya sabemos que la resultante anterior puede también expresarse por

$$OB'(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}),$$

siendo la magnitud OB' su módulo, y OA y $AB'=OB$ los de los sumandos; y como se verifica que

$$OB'\leqq OA+AB' \quad \text{y} \quad OB'\geqq OA-AB',$$

se deduce que *el módulo de la suma de dos sumandos imaginarios, no puede exceder á la suma de sus módulos, ni ser menor que su diferencia.* (***)

Si hubieran de sumarse varias expresiones imaginarias, se pro-

(*) Las magnitudes a y a', que representan las respectivas proyecciones de las rectas dadas sobre la recta XX', han de tomarse con el signo + ó con el signo —, según se cuenten de X' hacia X ó inversamente. De igual modo: b y b' son las proyecciones de las mencionadas rectas sobre YY', tomadas con el signo + ó con el —, según se cuenten de Y' hacia Y ó al contrario.

(**) Esta denominación procede de la mecánica; pues observando que la figura $OAB'B$ es un paralelogramo, por tener dos lados iguales y paralelos, deducimos que la suma de dos imaginarias representadas linealmente, es en magnitud y dirección, ó, sea, en módulo y argumento, la diagonal del paralelogramo sobre ellas construído; es decir, que las imaginarias se adicionan de igual modo que se componen dos fuerzas concurrentes.

Tal observación hace comprender la ventaja que proporcionaría la representación imaginaria de las fuerzas, que aún no se ha llevado á la ciencia del equilibrio y del movimiento, y que había de producir seguramente tan notables resultados como la concepción de Descartes en la geometría analítica; permitiendo someter al cálculo abstracto no sólo las magnitudes ó intensidades de las fuerzas, sino otro elemento tanto ó más importante, cual es la dirección en que actúan.

(***) En el caso muy particular de que OA y OB tuviesen la misma dirección, el módulo de la suma sería igual á la suma ó á la diferencia de los módulos de los sumandos, según que éstos fuesen de igual ó distinto sentido.

cedería sucesivamente como acabamos de indicar; resultando, por último, que la representación geométrica de una suma de varios sumandos, es la recta que une los extremos de un contorno poligonal formado de la misma manera que hemos construído la línea quebrada OAB'; y verificándose, de igual modo, que *el módulo de la suma de varias expresiones imaginarias, no puede exceder á la suma de los módulos de los sumandos.*

Cualquiera que sea el número de los sumandos, se ve también que la resultante podría coincidir con el eje de las cantidades reales ó con el de las imaginarias puras.

197. Substracción de expresiones imaginarias. La definición de substracción algébrica (32) conviene igualmente á las expresiones imaginarias, á las cuales puede aplicárseles, por tanto, el procedimiento operativo (34) que ha sido explicado para las demás cantidades algebraicas.

Se tendrá de este modo:

$$(a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1}=a''+b''\sqrt{-1};$$

después de agrupar los términos reales y sacar $\sqrt{-1}$ factor común.

Cuando $a''=a-a'$ ó $b''=b-b'$, ó, bien, ambas diferencias parciales, fuesen iguales á cero, la diferencia total sería una imaginaria pura, una cantidad real ó también igual á cero.

Se ve, por ejemplo, que

$$(8-3\sqrt{-1})-(5-7\sqrt{-1})=3+4\sqrt{-1};$$

$$(7+6\sqrt{-1})-(7-2\sqrt{-1})=8\sqrt{-1}; \quad (9-2\sqrt{-1})-(5-2\sqrt{-1})=4.$$

198. Interpretación geométrica de la substracción de expresiones imaginarias. De la significación geométrica de la suma, se deduce inmediatamente que para obtener la diferencia, bastará trazar por el extremo del minuendo una paralela igual y de sentido contrario al substraendo. En tal concepto, si OA, (fig. 7), es la magnitud lineal que representa $a+b\sqrt{-1}$, y OB la expresada por $a'+b'\sqrt{-1}$, no habrá más que trazar, por A, la recta AB' paralela á OB, pero tomada en sentido contrario, para obtener la recta OB', que representará el resultado de la anterior substracción; puesto que OA es la resultante ó suma de OB' y OB.

Como la figura OAB' será generalmente un triángulo, se deduce que *el módulo de la diferencia es en general menor que la suma de los módulos del minuendo y del substraendo y mayor que su diferencia; pudiendo ser igual á una ú otra en algún caso.* (*)

La recta OB' podrá á su vez coincidir en dirección con la XX', sobre la cual se cuentan las cantidades reales, ó con la YY', que corresponde á las imaginarias monomias.

199. Suma y resta combinadas de expresiones imaginarias. Como el procedimiento algebraico no presenta dificultad alguna, nos limitaremos á decir que cuando haya de interpretarse geométricamente el resultado de una serie de sumas y restas de varias expresiones imaginarias, es evidente que bastará hallar las resultantes de las sumas separadas de los minuendos y substraendos, y restar luego la segunda de la primera, según acaba de explicarse; ó, bien, efectuar las sumas y restas sucesivas, en el orden en que se hallen indicadas.

De ambos modos se deduce que *el módulo del resultado, de una serie de sumas ó restas, no podrá exceder á la suma aritmética de los módulos de cada una de las expresiones que se consideren.*

200. Multiplicación de expresiones imaginarias. Si se prescinde de la imposibilidad numérica que entraña $\sqrt{-1}$, el concepto y la definición que dimos de la multiplicación algebraica (13,36), así como las reglas operativas que entonces se dedujeron, pueden aplicarse desde luego á las expresiones imaginarias, con tanto más motivo cuanto que dichas reglas son de pura transformación, é independientes de que las cantidades literales expresen ó no operaciones por efectuar. Sólo será necesario saber la manera de multiplicar entre sí los factores iguales á $\sqrt{-1}$, que contienen los términos imaginarios de dichas expresiones; cosa fácil de hacer en el supuesto de que ese radical representa una raíz indicada.

(*) La comparación, por medio del cálculo, de los módulos de la suma y de la diferencia de dos expresiones imaginarias, con la suma y la diferencia de sus módulos respectivos, permite demostrar algebraicamente esta propiedad y la análoga de la suma, así como deducir que los casos de igualdad exigen, como condición necesaria y suficiente, que sea en valor y signo, $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$.

Los resultados algorítmicos, que así se obtengan, podrán comprobarse, considerando á $\sqrt{-1}=i$ como un signo cuya interpretación geométrica ya conocemos; pero entonces, si bien desaparece la dificultad de atribuirle valor cuantitativo, se hace indispensable ampliar el concepto de la multiplicación diciendo que: *multiplicar dos cantidades es obtener una tercera cantidad, formada con la primera, de igual modo que la segunda lo está en magnitud, signo y dirección, respecto de la unidad real y positiva.*

Para mayor sencillez, examinaremos sucesivamente los casos de multiplicar un binomio imaginario por una cantidad real, una imaginaria pura y otro binomio también imaginario; los cuales comprenden á su vez otras multiplicaciones más elementales.

1.° Aplicando la regla de la multiplicación de un polinomio por un monomio, se halla, cualesquiera que sean los valores y signos de las cantidades literales,

$$(a+b\sqrt{-1})\,c=ac+bc\sqrt{-1}.$$

Se encuentra este mismo resultado, notando que trata de obtenerse una expresión que sea, en magnitud, dirección y signo, respecto de $a+b\sqrt{-1}$, lo que c es respecto de la unidad positiva y real; pero suponiendo $c>0$, é imaginando, para fijar las ideas, que su valor numérico es entero, se ve que contiene c veces á dicha unidad, luego el producto deberá contener c veces cada uno de los elementos componentes del multiplicando tomados con su mismo signo y dirección, es decir, las dos partes de que consta el producto antes hallado.

Si el valor numérico de c fuese la fracción $\frac{p}{q}$, habría que tomar p veces la $q^{\text{ésima}}$ parte de a y otras tantas la $q^{\text{ésima}}$ parte de b, y se tendría:

$$(a+b\sqrt{-1})c=(a+b\sqrt{-1})\frac{p}{q}=a.\frac{p}{q}+b.\frac{p}{q}\sqrt{-1}=ac+bc\sqrt{-1}\,;$$

y si c fuera inconmensurable, llamando $\frac{m}{n}$ una fracción variable que se aproxime á c tanto como se quiera, c sería, respecto de la unidad, el límite de $\frac{m}{n}$; luego de la igualdad

$$(a+b\sqrt{-1})\frac{m}{n}=a.\frac{m}{n}+b.\frac{m}{n}\sqrt{-1},$$

cuyos miembros variables son siempre iguales, se deduciría:

$$(a+b\sqrt{-1})\,\text{lím}\,\frac{m}{n}=a.\text{lím}\,\frac{m}{n}+b.\text{lím}\,\frac{m}{n}\sqrt{-1},$$

ó, lo que es lo mismo,

$$(a+b\sqrt{-1})\,c=ac+bc\sqrt{-1}.$$

Cuando $c<0$, se obtendría de igual modo, suponiendo $c=-l$,

$$(a+b\sqrt{-1})\,c=(a+b\sqrt{-1})(-l)=-al-bl\sqrt{-1}=$$
$$=a(-l)+b(-l)\sqrt{-1}=ac+bc\sqrt{-1}.$$

2.° La regla, antes citada, de la multiplicación de un polinomio por un monomio da:

$$(a+b\sqrt{-1})\,d\sqrt{-1}=ad\sqrt{-1}+bd(\sqrt{-1})^2;$$

mas como $(\sqrt{-1})^2$ indica que han de efectuarse con -1 dos operaciones sucesivas, é inversa la una de la otra, se tiene evidentemente:

$$(\sqrt{-1})^2=i^2=-1$$

y, por lo tanto,

$$(a+b\sqrt{-1})\,d\sqrt{-1}=-bd+ad\sqrt{-1}.$$

El resultado de la segunda multiplicación parcial, nos dice que el producto de dos factores, puramente imaginarios, es real; pero como, aun considerándolo simplemente como signo de lo imaginario, i puede ser lo mismo positivo que negativo, se deduce el siguiente cuadro:

$$+i.+i=-$$
$$+i.-i=+$$
$$-i.+i=+$$
$$-i.-i=-$$

y por este medio se ve que la regla de los signos imaginarios, aunque siempre da productos reales, es contraria en sus resultados á la de los signos reales.

La significación geométrica de $d\sqrt{-1}$, manifiesta que para efectuar la multiplicación precedente, hay que determinar una cantidad que esté formada, respecto del multiplicando, como

$d\sqrt{-1}$ lo está respecto de la unidad real y positiva; pero como, suponiendo d entero y positivo, $d\sqrt{-1}$ contiene d unidades perpendiculares á la dirección de la unidad positiva y por encima de ésta, ó, sea, en el sentido de derecha á izquierda á partir de la referida unidad, las partes del producto, correspondientes á las del multiplicando, serán líneas de igual magnitud que ad y $bd\sqrt{-1}$, pero perpendiculares á éstas de derecha á izquierda (*), es decir $ad\sqrt{-1}$ y $-bd$, lo cual justifica el resultado antes obtenido.

Análogos razonamientos conducirían á la aplicación de la regla general algorítmica, suponiendo que d fuese fraccionario, inconmensurable ó negativo. (**)

3.º El procedimiento de la multiplicación de los polinomios y lo anteriormente expuesto, conducen al siguiente resultado:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac + bc\sqrt{-1} + ad\sqrt{-1} - bd =$$
$$= (ac-bd) + (ad+bc)\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1};$$

de suerte que el producto de dos binomios imaginarios es, en general, otro binomio imaginario, excepto en el caso de que fuesen cero $p=ac-bd$ ó $q=ad+bc$; pues entonces sería, respectivamente, una imaginaria pura ó una cantidad real. (***)

Las siguientes igualdades conducen á cada uno de los resultados que acabamos de indicar:

$$(5-2\sqrt{-1})(4+3\sqrt{-1}) = 26 + 7\sqrt{-1};$$
$$(3-4\sqrt{-1})(8-6\sqrt{-1}) = -50\sqrt{-1};\quad (3+2\sqrt{-1})(9-6\sqrt{-1}) = 39.$$

(*) En sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj.

(**) Conviene observar que todo lo dicho en este caso, y en el anterior, es independiente de los signos y valores de a y b.

(***) No pueden verificarse al mismo tiempo las igualdades

$$ac - bd = 0 \quad \text{y} \quad ad + bc = 0;$$

porque, suponiendo que a y b fuesen distintos de cero, se tendría:

$$\left.\begin{matrix} ac = bd \\ ad = -bc \end{matrix}\right\} -abc^2 = abd^2;\quad -c^2 = d^2;\quad c^2 + d^2 = 0 \left\{\begin{matrix} c = 0 \\ d = 0 \end{matrix}\right.;$$

lo cual exigiría que el factor $c + d\sqrt{-1}$ se redujese á cero.

Aplicando también la regla se ve que *el producto de dos factores imaginarios conjugados, es el cuadrado del módulo de cualquiera de ellos:* puesto que

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2.$$

Si se considera á $\sqrt{-1}$ como signo geométrico de la perpendicularidad, la multiplicación de los dos binomios imaginarios generales, tendrá por objeto hallar una expresión que esté formada, en magnitud, dirección y signo, respecto de $a+b\sqrt{-1}$, como $c+d\sqrt{-1}$ lo está con relación á la unidad real y positiva; es decir, que deberá ser la suma de dos partes formadas con el binomio multiplicando, como c y $d\sqrt{-1}$ lo están respecto de dicha unidad, ó, sea, de los productos del multiplicando por c y por $d\sqrt{-1}$. Se tendrá, por consiguiente,

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = (a+b\sqrt{-1})\,c + (a+b\sqrt{-1})\,d\sqrt{-1};$$

y efectuando las dos multiplicaciones del segundo miembro, de la manera ya explicada, y reduciendo, se obtiene idéntico resultado que anteriormente.

Claro es que si los factores imaginarios fuesen más de dos, se multiplicarían sucesivamente.

201. Producto de expresiones imaginarias moduladas. Si los factores del producto están modulados, resulta:

$$m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\,.\,m'(\cos\varphi' + i\,\text{sen}\,\varphi') =$$
$$= mm'[(\cos\varphi\cos\varphi' - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi') + i(\text{sen}\,\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi')] =$$
$$= mm'[\cos(\varphi+\varphi') + i\,\text{sen}(\varphi+\varphi')].$$

De esta igualdad, que es fácil generalizar á cualquier número de factores, se deduce que *el producto de varias expresiones imaginarias, es otra expresión imaginaria cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores y cuyo argumento es la suma de todos los argumentos.* (*)

(*) De la expresión del producto obtenido, empleando la forma ordinaria, hubiera podido deducirse la propiedad relativa al módulo, observando que

$$\sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\,.\,\sqrt{c^2+d^2}.$$

Corolario 1.° *La condición necesaria y suficiente, para que el producto de varios factores imaginarios sea cero, es que lo sea uno de los factores.*

Corolario 2.° *Un producto de varios factores imaginarios no se altera invirtiendo el orden de los factores.* La generalización de esta importante propiedad á las expresiones imaginarias, lleva consigo la de todas las proposiciones que de ella se derivan.

202. Interpretación geométrica del producto de expresiones imaginarias. El teorema precedente indica desde luego la manera de representar gráficamente el producto de los factores imaginarios; pues bastará trazar una recta cuya longitud sea el producto de las longitudes ó módulos de los factores y que forme un ángulo, con la recta sobre la cual se cuentan las longitudes reales y positivas, igual á la suma algébrica de los argumentos de dichos factores. (*)

Así: el producto de las expresiones, que representan las rectas OA y OB, (fig. 8), estará representado por la recta OP que forma con OX el ángulo $\varphi+\varphi'$, y cuya longitud se determina llevando sobre OB una longitud OU igual á la unidad lineal, y sobre OP otra $OC=OA$; uniendo el punto U con el C; y trazando, por último, la paralela BP á la línea UC.

Esta construcción manifiesta que, según sea

$$OB \lesseqgtr OU, \qquad \text{así será} \qquad OP \lesseqgtr OA.$$

Se ve también que el ángulo $POX=\varphi+\varphi'$, puede ser tal que la recta OP coincida con una de las dos perpendiculares primeras; siendo entonces el producto real ó puramente imaginario. (**)

(*) Siempre puede suponerse que los argumentos sean positivos, agregando á los arcos correspondientes las circunferencias positivas que sean necesarias, puesto que sabemos que no se alterarán las expresiones dadas; pero si la línea representativa de alguno de los factores estuviese por la parte inferior de $X'X$, sería preferible considerar su argumento como negativo, contándolo en sentido contrario á los que hemos supuesto positivos.

(**) Conviene notar que la representación geométrica del producto, puede deducirse directamente de la definición modificada de la multiplicación, considerando á $c+d\sqrt{-1}$, no como la línea quebrada rectangular que forman los segmentos c y $d\sqrt{-1}$, sino como una recta OB, oblicua respecto del eje de las cantidades reales; pues de este modo el producto será la longitud $OP=OA.OB$ tomada en dirección de la recta que forme con OA un ángulo φ' igual, en magnitud y sentido, al que forma OB con dicho eje OX, del cual se separará en definitiva $\varphi+\varphi'$.

Si al comprobar la multiplicación en la forma ordinaria, no se tomó en cuenta sino la significación geométrica de $\sqrt{-1}$, fué porque el objeto era tan sólo encontrar los términos del producto.

203. División de expresiones imaginarias. Aun cuando para obtener el cociente de la división de dos binomios imaginarios, que es el caso más general, no se consideran por separado los cocientes que corresponden á un dividendo y un divisor de forma monomia, conviene examinar éstos separadamente, por la facilidad de obtener entonces el cociente pedido, sin recurrir á la fórmula que veremos corresponde al citado caso general, suponiendo en ella iguales á cero los términos de que carezcan el dividendo y el divisor.

1.° Es evidente que

$$\frac{a\sqrt{-1}}{b}=c\sqrt{-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=c,$$

designando por c el cociente de dividir a por b; puesto que si se multiplica cada uno de estos resultados por el divisor respectivo, se obtiene el dividendo correspondiente.

2.° Cuando el dividendo sea monomio real y el divisor imaginario, el cociente será necesariamente imaginario, y su signo quedará determinado en virtud de lo dicho en la multiplicación; esto es, que será preciso variar la regla de los signos, explicada en la división de las cantidades reales (14), según indica el siguiente cuadro:

$$\begin{aligned} &+:+i=-i\\ &+:-i=+i\\ &-:+i=+i\\ &-:-i=-i. \end{aligned}$$

De suerte que se tendrá, siendo $c=\frac{a}{b}$,

$$\frac{a}{b\sqrt{-1}}=-c\sqrt{-1}\,; \quad \frac{a}{-b\sqrt{-1}}=c\sqrt{-1}\,; \quad \frac{-a}{b\sqrt{-1}}=c\sqrt{-1}\,;$$

$$\frac{-a}{-b\sqrt{-1}}=-c\sqrt{-1}\,.$$

3.° Si el dividendo y el divisor son binomios imaginarios, se comprende que el cociente será, en general, otro binomio imaginario (*), que se determinará de la manera que sigue:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1} \quad \text{ó} \quad a+b\sqrt{-1}=(cx-dy)+(dx+cy)\sqrt{-1}$$

y por consiguiente,

$$cx-dy=a \quad \text{y} \quad dx+cy=b$$

ecuaciones de las cuales se deduce:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{é} \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2};$$

siendo, por lo tanto,

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

Puede hallarse este resultado, sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones de primer grado, con sólo observar que *una fracción de términos imaginarios no se altera, multiplicando dichos términos por una misma expresión real ó imaginaria.*

Se ve, en efecto, que, cualesquiera que sean los valores de las letras, si $\frac{A}{B}=C$, se tendrá sucesivamente:

$$A=BC; \quad AD=(BD)C; \quad \frac{AD}{BD}=C=\frac{A}{B}.$$

Sabido esto, si se multiplican los dos términos del cociente indicado, por la expresión conjugada del denominador, resulta:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\sqrt{-1}}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1},$$

que es lo mismo que antes se obtuvo.

Si $bc-ad=0$, el cociente será real; y si $ac+bd=0$, imaginario puro. Para que se anule dicho cociente, es preciso y basta

(*) Pronto veremos que para que el cociente sea real, ó imaginario puro, deben existir relaciones particulares entre los términos de las dos expresiones consideradas.

que se verifiquen á la vez estas dos condiciones, sin que c^2+d^2 sea cero, y elevando ambas al cuadrado y sumando resulta, como condición única, $a^2+b^2=0$, de donde $a=0$ y $b=0$; es decir, que *para que sea cero el cociente de dos expresiones imaginarias, es necesario y suficiente que lo sea el dividendo.*

Aplicando la fórmula, ó expresión general obtenida, se halla:

$$\frac{3+46\sqrt{-1}}{4+3\sqrt{-1}}=6+7\sqrt{-1}; \quad \frac{6+10\sqrt{-1}}{9+15\sqrt{-1}}=\frac{2}{3}; \quad \frac{8+6\sqrt{-1}}{3-4\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}.$$

204. Cociente de expresiones imaginarias moduladas. Cuando el dividendo y el divisor están modulados, se deduce de la regla de la multiplicación que

$$\frac{m(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)}{m'(\cos\varphi'+i\operatorname{sen}\varphi')}=\frac{m}{m'}\left[\cos(\varphi-\varphi')+i\operatorname{sen}(\varphi-\varphi')\right];$$

lo cual nos dice que, *el módulo del cociente de dos expresiones imaginarias es igual al cociente de los módulos; y su argumento la diferencia de los del dividendo y divisor.*

205. Interpretación geométrica del cociente de expresiones imaginarias. La proposición anterior, lo mismo que la significación geométrica del producto, proporciona el medio de obtener la recta que designa el cociente de dividir la expresión imaginaria representada por OA, (fig. 9), por la que corresponde á OB; pues su dirección y sentido quedan determinados, trazando una recta OC tal que $COX=\varphi-\varphi'$ (*); y para hallar su longitud se unirá A con B, y por el punto U, que dista de O la unidad lineal, se trazará la paralela UZ á AB, que da un punto Z, tal que el módulo del cociente será $OC=OZ$.

Se comprende que, para ciertos valores del ángulo $\varphi-\varphi'$, la recta OC puede coincidir con la dirección de las cantidades reales, ó con la de las imaginarias puras.

También se observa que según sea

$$OB \gtreqless OU, \quad \text{así será} \quad OC \lesseqgtr OA.$$

(*) Si $\varphi-\varphi'$ fuese negativo, la diferencia absoluta se tomaría por bajo de la recta OX, ó, sea, en sentido contrario.

206. Elevación á potencias de expresiones imaginarias. Antes de obtener la expresión algebraica de la potencia de una expresión imaginaria cualquiera, conviene determinar las potencias sucesivas de la imaginaria simple $\sqrt{-1}=i$; puesto que entrará siempre como factor en uno de los términos de la base de dicha potencia.

1.° De las reglas de la multiplicación resulta desde luego, que

$$(\sqrt{-1})^1 = i = \sqrt{-1}\,; \quad (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1\,;$$
$$(\sqrt{-1})^3 = i^3 = -\sqrt{-1}\,; \quad (\sqrt{-1})^4 = i^4 = +1\,;$$

y como las demás potencias sucesivas se obtienen multiplicando la cuarta, que es la unidad positiva, por las anteriores, se reproducirán estas cuatro primeras, periódica é indefinidamente; de suerte que, si $n = 4k + r$, se tendrá:

$$(\sqrt{-1})^n = (\sqrt{-1})^{4k+r} = (\sqrt{-1})^r \text{ (*)};$$

lo cual nos dice que *una potencia de cualquier grado de* $\sqrt{-1}$, *es igual á la que tiene por exponente el resto aditivo de dividir por* 4, *el número que designa dicho grado.*

Puede, pues, establecerse el cuadro siguiente:

$$\left.\begin{aligned}(\sqrt{-1})^{4p} &= +1\\ (\sqrt{-1})^{4p+1} &= +\sqrt{-1}\\ (\sqrt{-1})^{4p+2} &= -1\\ (\sqrt{-1})^{4p+3} &= -\sqrt{-1}\end{aligned}\right\} \text{ ó, bien, } \left\{\begin{aligned} i^{4p} &= +1\\ i^{4p+1} &= +i\\ i^{4p+2} &= -1\\ i^{4p+3} &= -i\end{aligned}\right.$$

que, verificándose para todo valor de p, constituye un período que podemos denominar *cuaternio potencial.* (**)

(*) Este resultado se halla directamente, observando que:

$$(\sqrt{-1})^{4k+r} = (\sqrt{-1})^{4k}(\sqrt{-1})^r = \left[(\sqrt{-1})^4\right]^k(\sqrt{-1})^r = (\sqrt{-1})^r.$$

Debe igualmente notarse que $(\sqrt{-1})^0 = i^0 = +1$; porque toda potencia de exponente cero puede considerarse como el cociente de otras dos de igual grado, y, por lo tanto, iguales entre sí.

(**) Nos ha parecido propia esta denominación, que no debe confundirse con la empleada por el matemático inglés contemporáneo, Guillermo Ricardo Hamilton, para designar la *expresión analítica de una birradial.*

De lo expuesto se deduce que, siendo

$$(a\sqrt{-1})^n = a^n(\sqrt{-1})^n,$$

las potencias de grado par, de las expresiones imaginarias monomias, son siempre reales; mientras que las potencias de grado impar son imaginarias de igual forma.

2.° La potencia $n^{\text{ésima}}$ de un binomio imaginario es el producto de n factores iguales á dicho binomio; de suerte que puede aplicársele la fórmula del binomio de Newton. Se tiene así, efectuando la separación de los términos reales é imaginarios,

$$(a+b\sqrt{-1})^n =$$
$$= \left[a^n - \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}a^{n-4}b^4 - \ldots\ldots\right] +$$
$$+ \left[na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}a^{n-3}b + \ldots\ldots\right]\sqrt{-1}\,;$$

observándose que los términos comprendidos entre corchetes son alternativamente positivos y negativos, según corresponde á las diversas potencias alternadas de $\sqrt{-1}$; y que la potencia $n^{\text{ésima}}$ de un binomio imaginario es, en general, otra expresión imaginaria de la misma forma; lo cual se indica simbólicamente por la igualdad

$$(a+b\sqrt{-1})^n = A + B\sqrt{-1}.$$

El desarrollo de $(a - b\sqrt{-1})^n$ no puede diferir del precedente sino en el signo de $\sqrt{-1}$; luego se tendrá:

$$(a-b\sqrt{-1})^n = A - B\sqrt{-1}.$$

Claro es que si $B = 0$, lo cual es posible, la potencia sería una cantidad real; y sería puramente imaginaria, siendo $A = 0$.

207. Potencia de una expresión imaginaria modulada. Si la expresión imaginaria, cuya potencia quiera hallarse, está modulada, tendremos, en virtud de lo dicho en la multiplicación,

$$\left[m(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1})\right]^n = m^n(\cos n\varphi + \operatorname{sen} n\varphi\sqrt{-1})\,;$$

y, en el caso particular de ser $m=1$,

$$\left(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{-1}\right)^n=\cos n\varphi+\operatorname{sen} n\varphi\sqrt{-1}. \quad (*)$$

Diremos, por lo tanto, que *el módulo de la potencia* n$^{\text{ésima}}$ *de una expresión imaginaria, es igual á la potencia* n$^{\text{ésima}}$ *de su módulo; y su argumento es* n *veces el argumento de dicha expresión.*

208. Interpretación geométrica de las potencias de expresiones imaginarias. La expresión de las potencias sucesivas de $\sqrt{-1}$ y su periodicidad cuaternaria, se deducen de la representación geométrica de este signo y de lo dicho en la multiplicación; pues si sobre el eje OY, (fig. 10), se fija un punto B, que diste de O la unidad de longitud, será $OB=\sqrt{-1}$; de suerte que para elevar $\sqrt{-1}$ al cuadrado, ó, sea, para multiplicarlo por sí mismo, bastará que gire 90° la magnitud OB, hallándose así $OA'=-1$; otra multiplicación por OB determina un segundo giro rectangular, lo que da $OB'=-\sqrt{-1}$; y multiplicando de nuevo por dicho multiplicador, se tiene $OA=+1$.

Se observa también que la continuación de las potencias, ó giros sucesivos, conduce á los mismos resultados obtenidos, y que éstos se repiten indefinidamente y de cuatro en cuatro.

Para fijar geométricamente la potencia $n^{\acute{e}sima}$ de una imaginaria binomia $a+b\sqrt{-1}$, representada por la línea OC que forma el ángulo φ con OX, se trazará primero una recta indefinida OP, cuya inclinación sea tal que $POX=n\varphi$; y para obtener su longitud, se tomará $OC_1=OC$, se unirá C_1 con el punto U, que dista de O la unidad lineal, y trazando por C la paralela CC_2, se tendrá, en OC_2, el módulo del cuadrado; llevando esta longitud en OC' y trazando otra paralela $C'C_3$, la distancia OC_3 será el módulo del cubo; y, siguiendo de este modo, hallaremos los módulos ó magnitudes absolutas de las potencias sucesivas, hasta llegar á la $n^{\acute{e}sima}$.

Se comprende que, para valores particulares de n y de φ, la recta OP podrá coincidir, en dirección y sentido con alguno de los segmentos de los ejes, y ser dicha potencia, por consiguiente, una cantidad real ó una imaginaria pura.

(*) Esta fórmula se conoce con el nombre de su inventor, que fué Abraham Moivre, famoso matemático francés de principios del siglo XVIII.

Se ve por la misma figura, que según sea $OC \gtrless OU$, así irán creciendo ó decreciendo los módulos de las potencias; y que cuando $OC=OU$, todas ellas tendrán por módulo la unidad.

209. Extracción de raíces de expresiones imaginarias. Siendo siempre la extracción de raíces una operación inversa de la elevación á potencias, para obtener la raíz $n^{\acute{e}sima}$ de $a+b\sqrt{-1}$ (*) habrá que determinar x é y con la condición de que

$$\left(x+y\sqrt{-1}\right)^n=a+b\sqrt{-1} \ (**);$$

pero como el hallar de esta manera dichas incógnitas, exigiría resolver un sistema de dos ecuaciones del grado n, respecto á las mismas, supondremos modulada la expresión imaginaria propuesta y que tenga idéntica forma la raíz que se busca. En tal supuesto será preciso calcular los valores de ρ y ω que hagan

$$\sqrt[n]{m(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)}=\rho(\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega);$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\rho^n(\cos n\omega+i\operatorname{sen} n\omega)=m(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

y esto exige, según sabemos, que

$$\rho^n\cos n\omega=m\cos\varphi \qquad \text{y} \qquad \rho^n\operatorname{sen} n\omega=m\operatorname{sen}\varphi.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, después de elevar sus miembros al cuadrado, se tiene:

$$\rho^{2n}=m^2 \qquad \text{de donde} \qquad \rho=\sqrt[n]{m}.$$

y, por lo tanto, las condiciones anteriores se reducen á

$$\cos n\omega=\cos\varphi \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} n\omega=\operatorname{sen}\varphi;$$

(*) Las raíces de un monomio imaginario no pueden, en general, obtenerse, sino considerándolas como caso particular de las expresiones imaginarias binomias.

(**) Se ve *à priori* que la raíz de cualquier orden de un binomio imaginario, no puede ser una cantidad real ni una imaginaria pura, las cuales, elevadas á una potencia cualquiera, no pueden producir nunca una imaginaria binomia.

las cuales no se verifican sino siendo

$$n\omega = \varphi + 2k\pi \quad \text{ó, bien,} \quad \omega = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

designando por k un número entero cualquiera.

Resulta, pues, en definitiva, que

$$\sqrt[n]{m(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{m}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \ (*)$$

Obtenida esta expresión, observemos que todo número entero, positivo ó negativo, puede ponerse bajo la forma $k = nh + k'$; siendo h otro número entero positivo ó negativo, y k' un número entero positivo y menor que n (**); de modo que el argumento de la raíz se convertirá en

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2nh\pi + 2k'\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k'\pi}{n} + 2h\pi;$$

y como el seno y el coseno no se alteran por la supresión, en el arco que corresponde á un ángulo, de un múltiplo cualquiera de la circunferencia, puede el anterior argumento reducirse á $\frac{\varphi + 2k'\pi}{n}$, ó dejarlo bajo la misma forma que tenía; pero limitando la indeterminación absoluta del valor de k, á los números enteros y positivos menores que el índice n.

Si en la fórmula precedente se dan, pues, á k los valores consecutivos

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots\ldots (n-1),$$

se obtendrán n expresiones imaginarias de módulo igual á $\sqrt[n]{m}$, y cuyos argumentos serán:

$$\frac{\varphi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + 2.\frac{2\pi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + 3.\frac{2\pi}{n};\ \ldots\ldots \frac{\varphi}{n} + (n-1).\frac{2\pi}{n}.$$

Ahora bien: como dos cualesquiera de estos arcos difieren en menos de una circunferencia, no podrán tener á la vez iguales

(*) Debe notarse que, en $\sqrt[n]{m}$, no hay que considerar sino la determinación aritmética del radical.

(**) Si $k > 0$, h es el cociente entero de la división de k por n y k' el resto aditivo: y si $k < 0$, h es el cociente por exceso de dividir el valor absoluto de k por h', tomado negativamente, y k' el resto por exceso de esta división.

seno y coseno, y serán, por lo tanto, diferentes; luego podemos decir que *la raíz* n.$^{\text{ésima}}$ *de una expresión imaginaria tiene* n *formas imaginarias de un mismo módulo, pero de distinto argumento.*

Se ve también fácilmente, por medio de la fórmula antes hallada, que todos los valores de la raíz tienen que ser imaginarios; pues, para que así no fuese, sería preciso que

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = 0,$$

y esto exigiría que el argumento fuese á su vez un múltiplo de la semicircunferencia, es decir, que

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = h\pi \quad \text{de donde} \quad \varphi = (hn - 2k)\pi$$

lo cual es contra el supuesto; porque entonces $\operatorname{sen}\varphi = 0$, y la expresión subradical considerada no sería propiamente imaginaria.

210. Interpretación geométrica de las raíces de expresiones imaginarias. De lo que hemos dicho resulta que para determinar geométricamente la raíz n.$^{\text{ésima}}$ de la expresión imaginaria, representada por OA, (fig. 11), habrá que trazar una recta OR que forme el ángulo $ROX = \frac{\varphi}{n}$; tomar sobre ella una longitud OR_1 igual á $\sqrt[n]{OA}$ (*); describir con ese radio una circunferencia, que se dividirá en n partes iguales á partir de R_1; y unir, por último, el origen O con todos los puntos de división (**). Las líneas OR_1, OR_2, OR_3..... OR_n, constituirán un *sistema radial regular* y representarán los n valores distintos de la raíz.

(*) No hay, ni puede haber, construcción geométrica alguna que permita encontrar exactamente, sirviéndose sólo de la regla y el compás, ni la $n^{\text{ésima}}$ parte de un ángulo, ni la raíz $n^{\text{ésima}}$ de una longitud, si se exceptúa el caso particular de ser n potencia perfecta de 2. En la práctica se divide en partes iguales un arco, por tanteos, y se halla $\sqrt[n]{OA}$, obteniendo la longitud aproximada de OA con una escala, hallando el logaritmo de su medida y buscando el número correspondiente á la $n^{\text{ésima}}$ parte de este logaritmo y la magnitud lineal á que equivalga.

(**) Estos puntos son los vértices de un polígono regular de n lados, inscripto en la circunferencia descripta con OR_1 como radio.

Para que alguno de los radios pudiera coincidir con los segmentos de los ejes, sería preciso que

$$\frac{\varphi}{n} + s.\frac{2\pi}{n} = t.\frac{\pi}{2}, \qquad \text{de donde} \qquad \varphi = (tn - 4s)\frac{\pi}{2},$$

y, en su consecuencia, según que el valor numérico de la cantidad entre paréntesis fuese par ó impar,

$$\operatorname{sen}\varphi = 0 \qquad ó \qquad \cos\varphi = 0;$$

lo cual exigiría que la expresión considerada fuese real ó se redujera á un monomio imaginario (*). Se deduce, pues, por medio de la interpretación geométrica, que *todas las raíces de una expresión imaginaria binomia son de su misma forma.*

Ejercicios.

I. Efectuar las siguientes sumas, y representar geométricamente los resultados

$$\sqrt{-25} + \sqrt{-49} + \sqrt{-121} + \sqrt{-1}; \quad \sqrt{-a^4} + \sqrt{-16a^4}\ (**);$$

$$(2 + \sqrt{-1}) + (3 - 5\sqrt{-1}) + (-8 + \sqrt{-9});$$

$$(7 + 3i) + (8 - i); \quad (a + bi) + (2a + 3bi) + \left(\frac{1}{2}a - 4bi\right).$$

II. Restar las expresiones

$$7 - 11\sqrt{-16} + 5\sqrt{-49} \qquad y \qquad 4 + 2\sqrt{-25} - \sqrt{-81},$$

y representar gráficamente la diferencia.

III. Determinar, algebraica y geométricamente, los productos que siguen:

$$\sqrt{-m^2}.(-\sqrt{-9m^2}); \quad i\sqrt{-28}.i\sqrt{-7}; \quad (3 + 5i)(4 - 7i).$$

IV. Obtener los cocientes de las divisiones que á continuación se indican, y efectuar éstas gráficamente:

$$\frac{a}{\sqrt{-1}}; \quad \frac{z}{\sqrt{-z^2}}; \quad \frac{bi}{\sqrt{-b}}; \quad \frac{m^2 i^3}{\sqrt{-m^2}}; \quad \frac{m+n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}.\sqrt{-1}}; \quad \frac{7-5i}{2+3i}.$$

(*) Conviene observar que esta condición resulta como necesaria, pero que no puede decirse sea suficiente.

(**) El cuadrado de una longitud se determina geométricamente, obteniendo una tercera proporcional á la unidad lineal y á dicha longitud.

V. Hallar, algebraica y geométricamente, las potencias que siguen:

$$(\pm\sqrt{-1})^{19}; \quad (\pm 3\sqrt{-1})^2; \quad (1 + \sqrt{-1})^5; \quad (3 - 4i)^2; \quad (a + bi)^3.$$

VI. Obtener las raíces cuadradas de las expresiones

$$\pm\sqrt{-1} \qquad y \qquad 4 \pm 3i.$$

VII. Hacer desaparecer las imaginarias del denominador, en las fracciones siguientes:

$$\frac{2}{3 + \sqrt{-2}}; \quad \frac{5}{1 + \sqrt{-7}}; \quad \frac{1+i}{(1-i)^2}; \quad \frac{1-i^3}{(1-i)^3}; \quad \frac{1}{7+2i}; \quad \frac{1}{(1-i)^6}.\ (*)$$

III.—Radicales algebraicos.

211. Valores múltiples de un radical algebraico. Al tratar (**59**) de la determinación aritmética de los radicales, vimos que, considerando sólo el valor absoluto de la expresión subradical de la raíz, no podía existir más que un valor de esta raíz, capaz de reproducir la cantidad subradical, al elevarse á la potencia indicada por el índice de la raíz; valor que llamamos determinación aritmética y el cual puede recibir también la denominación de *raíz absoluta*; pero *si se considera la afección de la expresión subradical y todos los valores posibles de una raíz, existen tantos de éstos cuantas son las unidades que contiene el índice.*

Hemos visto, en efecto, que esto se verifica para la raíz $n^{\text{ésima}}$ de toda expresión imaginaria, y como las cantidades reales están incluídas en la forma general imaginaria, suponiendo $\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi = 180°$, según sean positivas ó negativas, queda la proposición generalizada, observando que cuanto entonces se dijo respecto del número y desigualdad de los valores, era independiente del valor particular del argumento. (**)

Haciendo $\varphi = 0$, en la fórmula que obtuvimos, resulta:

$$\sqrt[n]{m} = \rho\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right).$$

(*) Esta transformación se efectúa en igual forma que la racionalización del denominador (**63**).

(**) La única consecuencia especial, correspondiente á la restricción de no ser φ un múltiplo de π, fué la de que entonces todas las raíces eran necesariamente imaginarias.

De esta expresión se deduce que *la raíz algebraica de cualquier orden, de una cantidad positiva, sólo tiene uno ó dos valores reales, según que el índice sea impar ó par; siendo el primer valor positivo, y estos últimos iguales y de signos contrarios.*

Con el fin de justificarlo, observemos que la condición necesaria y suficiente para que $\sqrt[n]{m}$ sea real, es que

$$\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = 0;$$

y, puesto que el argumento $\frac{2k\pi}{n}$ es menor que una circunferencia, aun para el mayor valor, $n-1$, de los que deben darse á k, es indispensable que se verifique una de las igualdades

$$\frac{2k\pi}{n} = 0; \quad \text{ó} \quad \frac{2k\pi}{n} = \pi$$

de las que, respectivamente, resulta:

$$k = 0 \quad \text{ó} \quad k = \frac{n}{2}.$$

Como el primer valor debe recibirlo siempre k, siendo entonces $\sqrt[n]{m} = \rho$, y para que pueda tomar el segundo, que da $\sqrt[n]{m} = -\rho$, es indispensable que n sea par, llegamos á lo que quería demostrarse. (*)

Asignando á m el valor 1, se tiene la fórmula

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n},$$

que da la expresión general de la raíz $n^{ésima}$ de la unidad positiva.

Suponiendo $\varphi = 180°$, en la misma fórmula que comprende las raíces de una expresión de forma imaginaria, se halla:

$$\sqrt[n]{-m} = \rho \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{n} \right];$$

(*) La construcción geométrica para obtener gráficamente las raíces de una expresión, que aun cuando supusimos en general imaginaria puede ser real, conduce también á la proposición enunciada.

y dando á k, en este nuevo resultado, los valores 0, 1, 2... $(n-1)$, se obtendrán todas las raíces de una cantidad negativa. (*)

Por idénticas razones á las antes expuestas, respecto al mayor valor del argumento, las condiciones de realidad de estas raíces son:

$$\frac{(2k+1)\pi}{n} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{(2k+1)\pi}{n} = \pi,$$

de las cuales se deduce, respectivamente:

$$k = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad k = \frac{n-1}{2}.$$

Como k no puede recibir nunca el primero de estos valores, y el segundo exige que n sea impar, siendo, para él, $\sqrt[n]{-m} = -\rho$, podemos decir que *toda raíz algébrica de orden impar, de una cantidad negativa, tiene un sólo valor real, que es negativo; y que la raíz de orden par de una cantidad negativa, no tiene ningún valor real.* (**)

Dando á m el valor 1, se encuentra la fórmula

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

que es la expresión general de la raíz $n^{ésima}$ de la unidad negativa.

Se ve, pues, en resumen, que *los diversos valores de la raíz* n^ésima^ *de una cantidad real, positiva ó negativa, se hallan multiplicando su determinación aritmética, por las* n *raíces de igual orden de la unidad de su mismo signo.*

Por medio de una sencilla transformación **(201)**, resulta también:

$$\sqrt[n]{m(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)} = \rho\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right);$$

y recordando que la forma imaginaria comprende en sí toda clase de cantidades y puesto que el producto de los dos primeros

(*) Es digno de notarse que esta fórmula y la correspondiente á $\varphi = 0$, dan la resolución general trigonométrica de la doble ecuación binomia $x^n \mp A = 0$, de acuerdo con lo que se indicó en la primera parte del álgebra **(117)**.

(**) La construcción gráfica de las raíces deja igualmente percibir estas consecuencias.

factores del segundo miembro es la primera raíz, correspondiente al valor $k=0$, diremos que: *los distintos valores de la raíz* n$^{\text{ésima}}$ *de una expresión algébrica cualquiera, se obtienen multiplicando uno de ellos, por cada una de las* n *raíces* n$^{\text{ésimas}}$ *de la unidad positiva.* (*)

212. Notación de los radicales algebraicos. Con objeto de distinguir cuándo ha de considerarse simplemente la determinación aritmética de un radical, ó la totalidad de sus valores algebraicos, suele emplearse una notación característica convencional, que consiste en indicar dicha multiplicidad de valores, duplicando la línea horizontal del signo radical, en esta forma: $\sqrt{=}$. (**)

La última proposición enunciada, relativa á las raíces de las cantidades reales, podría así expresarse simbólicamente como sigue:

$$\sqrt[n]{\pm m} = \sqrt[n]{m}.\sqrt[n]{\pm 1}.$$

213. Cálculo de los radicales algebraicos. Considerando á las expresiones radicales como elementos de cálculo, se comprende que, desde el momento en que se toman en cuenta todas sus determinaciones algebraicas, será necesario que las transformaciones que se efectúen en dichos radicales, no les hagan perder ninguno de sus múltiples valores; siendo á la vez indispensable examinar si los procedimientos operativos empleados, cuando considerábamos sólo las determinaciones aritméticas de las raíces, necesitan ahora alguna modificación. Con tal propósito, estableceremos los siguientes teoremas.

Teorema I. *Un radical algebraico no se altera, sacando fuera de él, como factor, el que elevado á la potencia de grado igual al índice, multiplica la cantidad subradical.*

(*) Haciendo $m=1$ y $\varphi=\pi$ se tiene:

$$\sqrt[n]{-1} = \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\right)\sqrt[n]{1};$$

relación que puede igualmente hallarse, comparando las expresiones de las raíces de $+1$ y -1.

(**) Cauchy propuso el símbolo $\sqrt[n]{((m))}$; pero este signo, que emplea Laurent, nos parece menos sencillo que el que hemos adoptado, debido á Lefebure de Fourcy.

En efecto: la igualdad

$$\sqrt[n]{a^n.b} = a.\sqrt[n]{b},$$

se verifica sin restricción alguna; pues el segundo miembro tiene n valores algebraicos diferentes que, elevados á la potencia $n^{\text{ésima}}$, reproducen la expresión $a^n.b$.

Teorema II. *Si se multiplican cada uno de los valores de* $\sqrt[n]{A}$, *por cada uno de los de* $\sqrt[n]{B}$, *resultan sólo* n *valores distintos, que son los de* $\sqrt[n]{A.B}$.

Efectivamente: si, de una manera general, suponemos

$$A = a\left(\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{-1}\right) \quad \text{y} \quad B = b\left(\cos\varphi' + \mathrm{sen}\,\varphi'\sqrt{-1}\right),$$

se tendrá:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{sen}\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}\sqrt{-1}.\right),$$

$$\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{b}\left(\cos\frac{\varphi'+2k'\pi}{n} + \mathrm{sen}\,\frac{\varphi'+2k'\pi}{n}\sqrt{-1}\right);$$

y multiplicando miembro á miembro estas igualdades, se halla:

$$\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\left[\cos\frac{\varphi+\varphi'+2(k+k')\pi}{n} + \right.$$
$$\left. + \,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi+\varphi'+2(k+k')\pi}{n}\sqrt{-1}\right];$$

expresión en la cual k y k' representan números enteros cualesquiera; pero que á pesar de esa doble indeterminación, resumida en la de $k+k'$, sólo tiene n valores diferentes.

Combinando del mismo modo las dos igualdades primeras, ó, sea, multiplicándolas ordenadamente, se tiene:

$$AB = ab\left[\cos(\varphi+\varphi') + \mathrm{sen}\,(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}\right];$$

y, por lo tanto,

$$\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{ab}\left(\cos\frac{\varphi+\varphi'+2h\pi}{n} + \mathrm{sen}\,\frac{\varphi+\varphi'+2h\pi}{n}\sqrt{-1}\right);$$

mas como, en este segundo miembro, h representa un número entero cualquiera, lo mismo que $k+k'$, la expresión comprendida entre paréntesis tiene iguales valores distintos que la primera que se halla entre corchetes; y puesto que además (61)

$$\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

resulta, finalmente,

$$\sqrt[n]{A}\,.\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{AB}\,,$$

que es lo que quería demostrarse.

Observando que el segundo miembro no puede tener más de n valores diversos, se deduce que se obtendrán éstos multiplicando un valor cualquiera del primer radical, por cada uno de los n del segundo, ó al contrario.

Claro es que la última igualdad puede extenderse al caso de un producto de cualquier número de radicales del mismo índice.

Corolario. *Si en un producto de varios factores radicales, de índice* n, *se multiplican todos los valores de uno cualquiera de ellos, por uno solo de los* n *valores de cada uno de los demás, se obtendrán* n *productos distintos, que serán los valores de la raíz* n*ésima* *del producto de las expresiones subradicales.*

Teorema III. *Si se dividen cada uno de los valores de* $\sqrt[n]{A}$, *por cada uno de los valores de* $\sqrt[n]{B}$, *se obtienen sólo* n *cocientes diferentes, que son los* n *valores de* $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$.

Este teorema, cuya expresión simbólica es

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\frac{A}{B}}\,,$$

se demuestra directamente de la misma manera que el anterior; deduciéndose, de igual modo, que bastará considerar los n valores de uno de los radicales y uno solo cualquiera de los del otro.

También puede considerarse como una consecuencia de la proposición precedente; pues multiplicando los n valores de $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, por uno de los de $\sqrt[n]{B}$, resultan los n de $\sqrt[n]{A}$.

Teorema IV. *Para elevar un radical á una potencia, cuyo exponente sea primo con el índice, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical; si el exponente es divisor del índice, bastará dividir éste por dicho exponente; y si el índice y el exponente tienen factores comunes, se dividirán por su máximum común divisor, y los respectivos cocientes serán el nuevo índice y el exponente de la cantidad subradical.*

1.° Cuando n y m son primos entre sí, decimos que

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m=\sqrt[n]{A^m}.$$

Si se eleva, en efecto, el primer miembro de esta igualdad á la potencia $n^{\text{ésima}}$, se tiene:

$$\left[\left(\sqrt[n]{A}\right)^m\right]^n=\left(\sqrt[n]{A}\right)^{m.n}=\left[\left(\sqrt[n]{A}\right)^n\right]^m=A^m\,;$$

lo cual manifiesta que todos los n valores de $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m$, se encuentran entre los de $\sqrt[n]{A^m}$; sin que reste por demostrar sino que dichos valores son diferentes.

Designando por $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ los n valores de $\sqrt[n]{A}$, es indudable que los n valores de $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m$, serán $a_1^m, a_2^m, a_3^m, \ldots\ldots a_n^m$, los cuales vamos á ver que son todos distintos. Efectivamente: si dos de ellos, tales como a_1^m y a_2^m, fuesen iguales, se tendría:

$$a_1^m=a_2^m \quad \text{y además} \quad a_1^n=a_2^n;$$

puesto que a_1 y a_2 son raíces $n^{\text{ésimas}}$ de A.

La última de estas igualdades puede escribirse expresando el exponente n en función de m, si es $n>m$; porque en este caso, sería $n=mq+r$, y, por lo tanto,

$$a_1^{mq+r}=a_2^{mq+r}.$$

Elevando á la $q^{\text{ésima}}$ potencia los dos miembros de la primera igualdad, se tendrá también

$$a_1^{mq}=a_2^{mq}$$

y, por consiguiente,

$$a_1^r=a_2^r.$$

Si suponemos que m se divida por r, de modo que $m = rq + r'$, podremos reemplazar, en la igualdad primera, m por su valor; y, procediendo análogamente, se tendrá:

$$a_1^{r'} = a_2^{r'}.$$

Continuando como queda indicado, se encontrarían otras igualdades de la misma forma, en las cuales los exponentes serían los diversos restos obtenidos al hallar el máximo común divisor de los números n y m; mas como estos números son primos entre sí, resultará finalmente

$$a_1 = a_2,$$

lo cual es imposible; porque sabemos que los valores de una misma raíz son distintos.

En el caso de ser $n < m$, partiríamos de la igualdad

$$m = nq + r,$$

y se llegaría á idéntico resultado.

2.° Si el exponente de la potencia es divisor del índice del radical, se tendrá:

$$\left(\sqrt[mn]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A};$$

pues para cualquier valor, x, de $\sqrt[mn]{A}$, habrá de verificarse,

$$x^{mn} = A \quad \text{ó, bien,} \quad (x^m)^n = A;$$

lo cual prueba que todo valor de $\left(\sqrt[mn]{A}\right)^m$ lo es de $\sqrt[n]{A}$; pero como además los mn valores distintos de x, al elevarse á la potencia de grado m, no pueden dar menos de n valores diferentes, porque de otro modo resultaría que más de m cantidades diversas elevadas á la $m^{ésima}$ potencia darían una misma cantidad, cuya raíz de igual orden tendría, por lo tanto, más de m valores, se deduce que el primer miembro, de la igualdad establecida, comprende todos y los únicos valores del segundo.

3.° Cuando el índice del radical y el exponente de la potencia tienen un divisor común, podrán representarse respectivamente por nd y md, siendo d su máximo común divisor, de modo que se tendrá:

$$\left(\sqrt[nd]{A}\right)^{md} = \sqrt[n]{A^m};$$

pues, en virtud de lo dicho en los dos casos precedentes, se tiene:

$$\left(\sqrt[nd]{A}\right)^{md} = \left[\left(\sqrt[nd]{A}\right)^d\right]^m = \left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}.$$

Teorema V. *Si se extraen las raíces* m^ésimas^ *de los* n *valores de* $\sqrt[n]{A}$, *se obtienen los* mn *valores de* $\sqrt[mn]{A}$.

En efecto: se ve, en primer término, que las raíces $m^{ésimas}$ de las raíces $n^{ésimas}$ de A, darán mn valores distintos; porque las m raíces de orden m, de uno cualquiera de los valores de $\sqrt[n]{A}$, serán desde luego diferentes, y dos raíces $m^{ésimas}$ de dos valores diversos de $\sqrt[n]{A}$ no pueden ser iguales; pues entonces no sería posible que, al elevarse ambos á una misma potencia, dieran resultados distintos.

Como, representando por x cualquier valor de $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$, se verifica además que

$$x^m = \sqrt[n]{A} \quad \text{y, por lo tanto,} \quad x^{mn} = A,$$

resulta demostrada la igualdad

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}. \text{ (*)}$$

Teorema VI. *Para multiplicar dos radicales algebraicos de distinto índice, se reducen al mínimo índice común, y se multiplican luego como dos radicales de igual índice.*

Consideremos sucesivamente los dos casos que pueden ocurrir, á saber: que los índices sean primos entre sí, ó que tengan un factor común.

Si m y n son primos entre sí, se verificará que

$$\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n B^m};$$

pues elevando el primer miembro á la potencia mn se tiene:

$$\left(\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[n]{B}\right)^{mn} = \left(\sqrt[m]{A}\right)^{mn} \cdot \left(\sqrt[n]{B}\right)^{mn} = A^n B^m;$$

(*) Podría demostrarse esta proposición, como consecuencia del segundo caso de la que antecede; siendo digno de notarse que es independiente de que los índices m y n sean, ó no, primos entre sí.

lo cual demuestra que entre los valores de $\sqrt[mn]{A^n B^n}$ se hallan todos los del producto indicado; y, como éstos son en número de mn, resta sólo demostrar que son diferentes.

Si representamos por $a_1, a_2, a_3, \ldots.. a_m$ los m valores de $\sqrt[m]{A}$, y, por $b_1, b_2, b_3, \ldots. b_n$ los n valores de $\sqrt[n]{B}$, los mn valores del producto se hallarán multiplicando cada uno de los m del primer radical por cada uno de los n del segundo. Todos estos productos, así formados, serán distintos; pues si fuese, por ejemplo, $a_1 b_1 = a_2 b_2$ (*), se verificaría también que $a_1^n b_1^n = a_2^n b_2^n$; y, ya que por hipótesis $b_1^n = b_2^n = B$, la anterior igualdad se convertiría en

$$a_1^n = a_2^n; \quad \text{siendo además} \quad a_1^m = a_2^m.$$

Como m y n son primos entre sí, podríamos considerar estas igualdades del mismo modo que las del primer caso del teorema IV, llegando, por último, á deducir que $a_1 = a_2$, lo cual no es posible; luego los mn valores, que resultan de multiplicar cada uno de los m valores de $\sqrt[m]{A}$ por cada uno de los n valores de $\sqrt[n]{B}$, son diferentes, y la proposición queda en este caso demostrada.

Si los índices tienen factores comunes, llamando d á su máximo común divisor, se tendrá:

$$\sqrt[md]{A} \,.\, \sqrt[nd]{B} = \sqrt[mnd]{A^n B^m};$$

puesto que

$$\sqrt[md]{A} \cdot \sqrt[nd]{B} = \sqrt[d]{\sqrt[m]{A}} \cdot \sqrt[d]{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[d]{\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[n]{B}} =$$
$$= \sqrt[d]{\sqrt[mn]{A^n B^m}} = \sqrt[mnd]{A^n B^m}.$$

Teorema VII. *Para dividir dos radicales algebraicos de índice distinto, se reducen al mínimo índice común, y se dividen después las cantidades subradicales.*

(*) No pueden suponerse iguales, dos productos que tengan un factor común, y los otros dos diferentes.

Este teorema se demuestra directamente, de idéntico modo que el anterior. (*)

Teorema VIII. *Un radical algebraico se altera, multiplicando ó dividiendo por un mismo número, el índice y el exponente de la cantidad subradical.*

Efectivamente: no puede establecerse la igualdad

$$\sqrt[mn]{A^{nc}} = \sqrt[m]{A^c};$$

porque el primer miembro tiene mn determinaciones algebraicas, todas distintas, y el segundo sólo tiene m. (**)

214. Escolio general. Como síntesis final de lo que dejamos expuesto, observaremos que, exceptuando la transformación aislada de multiplicar ó dividir por un mismo número el índice y el exponente de la cantidad subradical, pueden someterse los radicales algebraicos á las mismas reglas operativas que los radicales aritméticos, ó que sus determinaciones absolutas; si bien es indispensable tener presente, para no llegar á resultados aparentemente contradictorios, que las igualdades que se establecen con los radicales algebraicos, suponen que se consideran en los dos miembros la totalidad ó conjunto de sus valores distintos, y que no implican, por lo tanto, la igualdad de dos valores elegidos de una manera arbitraria en cada uno de ellos.

Sólo en tal sentido puede asegurarse que

$$\sqrt{-2} \,.\, \sqrt{-8} = \sqrt{16} = \pm 4 \,.$$

Esa misma multiplicidad de valores y el tener que operar del mismo modo con todos ellos, impiden que se verifiquen siempre los

(*) No hay posibilidad de demostrarlo como consecuencia suya; porque el producto de uno cualquiera de los valores del cociente, por otro cualquiera de los del divisor, no puede decirse que sea uno de los valores del dividendo. Sólo es posible asegurar que cualquier valor del cociente, multiplicado por un cierto valor del divisor, dará alguno de los valores del dividendo; pues todos los m distintos de $\sqrt[m]{A}$ están contenidos en los mn de $\sqrt[mn]{A^n}$.

(**) Hemos visto, sin embargo, que esta transformación puede transitoriamente efectuarse, para los efectos de la multiplicación y división de los radicales, cuando se reducen al mínimo índice común.

Conviene también notar que, aun cuando la recíproca no sea cierta, todo principios inversos de las operaciones, á pesar de ampliarse el concepto de igualdad á la consideración única de los valores distintos de ambos miembros; pues aun así no puede decirse que el producto de dos factores, dividido por uno de ellos, da necesariamente el otro; que el cociente multiplicado por el divisor, reproduce el dividendo; ni que la raíz de la potencia de un radical, de igual orden que el grado de dicha potencia, es ese mismo radical. (*)

Es también digno de notarse que para establecer la igualdad

$$a\sqrt{p}+b\sqrt{p}-c\sqrt{p}=(a+b-c)\sqrt{p},$$

es decir para sacar $\sqrt{p}$ factor común, hay que suponer implícitamente que se toma un mismo valor de ese radical en todos los términos; pues, de otro modo, la transformación no sería posible.

Ejercicios.

I. Efectuar la suma de $\sqrt{48ab^2}$, $b\sqrt{75a}$ y $\sqrt{3a(a-9b)^2}$.

II. Hallar el resultado de la siguiente substracción:

$$3a\sqrt{bc}+5b\sqrt[3]{a^2b}-7c^3\sqrt[4]{b^3c^2}-\left(3a^4\sqrt{bc}-3b\sqrt[3]{a^2b}+5a^3\sqrt[4]{b^3c^2}\right).$$

III. Determinar los siguientes productos:

$$\sqrt{1-36y^8}\cdot\sqrt{\frac{1+6y^3}{1-6y^4}}\,;\qquad \sqrt[10]{\frac{m^4x^2}{a^3b}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^4b^3}{m^3x^4}}\,;$$

$$\left(3a\sqrt{a+b}+5b\sqrt[3]{a^2-b^2}\right).\left(3a\sqrt{a+b}-5b\sqrt[3]{a^2-b^2}\right).$$

IV. Hallar los cocientes que se indican á continuación:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^5}}:\sqrt{\frac{a}{b^3}}\,;\qquad \sqrt[3]{54a^7}:\sqrt[3]{2a}\,;$$

$$\frac{(a^3-1)\sqrt[4]{8a^3}}{(a+1)\sqrt{2ab}}\,;\qquad \frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$

---

valor del segundo radical lo es del primero; porque reproduce la cantidad subradical de éste, elevado á la potencia mn.

Se ve igualmente que tampoco es posible decir, de un modo general, que una cantidad no se altera elevándola á una cierta potencia y extrayendo de ésta la raíz del mismo orden, ó, sea, que $A=\sqrt[n]{A^n}$.

(*) Esto no obstante, la potencia de la raíz de un radical, del mismo grado que el orden de la raíz extraída, es siempre igual á dicho radical.

V. Efectuar las elevaciones que siguen:

$$\left(-2a\sqrt{b}\right)^4;\quad \left(-\sqrt[4]{x^3-y^3}\right)^6;\quad \left(-\sqrt[9]{a^2-b^2}\right)^3.$$

VI. Extraer las siguientes raíces:

$$\sqrt{ab^2\sqrt{a^3b}}\,;\qquad \sqrt[3]{y\sqrt[3]{y\sqrt[3]{y}}}.$$

IV.—Función de variables imaginarias.

215. Definición. *Cuando la variable ó variables, de que depende una función, son expresiones imaginarias, se dice que la función lo es de variables imaginarias.*

Así: si se tiene $z=x+y\sqrt{-1}$, siendo x é y variables independientes, toda función de z será una función de variable imaginaria; si bien se denominan más particularmente de este modo, las expresiones que pueden reducirse á la forma $U+V\sqrt{-1}$, ó que se presentan desde luego bajo esta forma; siendo U y V funciones cualesquiera de las variables x é y. (*)

Entre las expresiones que pueden tomar la forma expresada, se hallan los polinomios enteros de coeficientes reales ó imaginarios; pues si en el polinomio

$$a_0z^m+a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\cdots\cdots+a_m$$

reemplazamos z por su valor, $x+y\sqrt{-1}$, todas las potencias de z serán de la forma $A+B\sqrt{-1}$ (**206**); y como cada término vendrá á ser el producto de un binomio imaginario por un coeficiente real ó imaginario, afectará la misma forma; de modo que, agrupando los términos reales por una parte y los imaginarios por otra, el polinomio se convertirá en $U+V\sqrt{-1}$.

216. Diversas clases de funciones imaginarias. La clasificación general que hemos hecho de las funciones (**165**), conviene también á las de variables imaginarias; pues para hacer dicha clasificación no se tuvo en cuenta la afección de la magnitud variable,

---

(*) No todos los autores aceptan esta última definición, adoptada por Cauchy como más general.

de cuyo valor depende el de la función. A dichas funciones se las puede distinguir, por tanto, con las denominaciones ya consignadas, si bien cada variable imaginaria debe considerarse, á su vez, como función de otras dos variables.

217. Continuidad de las funciones imaginarias. *Se dice que una función de la forma* $U + V\sqrt{-1}$, *es continua, cuando* U *y* V *son funciones continuas de las variables de que dependen.*

Como el módulo $\sqrt{U^2+V^2}$, de esa forma imaginaria, es una función continua si lo son U y V, por ser siempre la cantidad subradical, finita, positiva y continua, y, en la misma hipótesis, lo es también el argumento φ, cuyo coseno y seno respectivos son las funciones continuas $\frac{U}{\sqrt{U^2+V^2}}$ y $\frac{V}{\sqrt{U^2+V^2}}$ (*); y como, recíprocamente, de ser continuos el módulo y el argumento, deberán serlo los productos U y V de aquél por dichas líneas trigonométricas (168), deducimos que *la condición necesaria y suficiente para que sea continua una función imaginaria modulada, es que su módulo y su argumento sean continuos.*

Sabido esto, se demuestra inmediatamente la proposición que sigue.

Teorema. *La función* z^m *es continua, cuando* z *es una variable imaginaria y* m *un número entero y positivo.*

Designando, en efecto, por r el módulo y por φ el argumento de la imaginaria z, se tiene:

$$z^m = \left[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\right]^m = r^m(\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi),$$

y, en esta expresión, r^m y $m\varphi$, son funciones continuas. (**)

(*) Cuando un arco varía de una manera continua, su seno y su coseno varían también del mismo modo; pues se sabe que

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

de donde resulta:

$$\lim\left[\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x\right] = 0;$$

y siendo el seno función continua del arco, éste lo será también del seno (168). Lo mismo se demuestra para el coseno, bien directamente, bien considerándolo como seno del arco complemetario.

(**) De los desarrollos trigonométricos de $\operatorname{sen} m\varphi$ y $\cos m\varphi$, se deduciría, por otra parte, que son funciones continuas de $\operatorname{sen}\varphi$ y $\cos\varphi$.

Corolario. *Toda función algebraica, racional y entera, de la imaginaria* z, *es una función continua.*

218. Representación geométrica de la función de variable imaginaria. Conocida ya la interpretación geométrica de la forma imaginaria $z = x + y\sqrt{-1}$, es fácil representar gráficamente una función $f(z)$ de esta variable.

Puesto que toda expresión de aquella forma representa un punto cuya abscisa es x y cuya ordenada es y, si para ordenar las variaciones de la variable z, se elige una ecuación á la que deban satisfacer continuamente los valores de x é y, ó una curva fijada *à priori* como lugar geométrico de los puntos sucesivos que designe z, ó que sea la representación de la manera ficticia como se hace á y depender de x, se comprende que á cada par de valores de dichas variables, ó á cada punto de esta curva arbitraria, corresponderá otro par de valores de U y V, ó un punto de otra nueva curva, que será la representación geométrica de la función

$$f(z) = U + V\sqrt{-1}.$$

La naturaleza y la forma de los elementos analíticos que constituyan la expresión *algébrica* ó *transcendente* de la función $f(z)$, manifestarán sus propiedades características; las cuales podrán también á veces deducirse de las dos figuras conjugadas que representan la sucesión de los valores de z y los correspondientes de la función de que se trata. (*)

Puede también demostrarse directamente este teorema, desarrollando $(x + y\sqrt{-1})^m$ por medio de la fórmula de Newton, y viendo que U y V son funciones continuas de x é y.

(*) Conviene notar que así como la ley de variación de una función $y = f(x)$, entre los valores reales $x = a$ y $x = b$ de su variable, se hace gráficamente sensible por una serie de rectas ú *ordenadas*, que suelen constituir en su conjunto un *trapecio curvilíneo*, así la ley de variación de la función $u = f(z)$, siendo $z = x + y\sqrt{-1}$, y variando x de a á a' y simultáneamente y de b á b', ya de un modo cualquiera, ya por una ley arbitrariamente fijada, se representa en general de un modo gráfico, por otra serie de rectas ó *vectores* que parten de un mismo punto y forman un *sector curvilíneo*, correspondiente al de los valores sucesivos de z.

Ambos conceptos se funden en uno solo, no considerando sino los puntos de las líneas que determinan las coordenadas *cartesianas* y *polares* respectivas; siendo notables los resultados que entonces se obtienen, obligando al

Ejercicios.

I. Reducir á la forma $U + V\sqrt{-1}$ la función

$$f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z - 1$$

siendo $$z = x + y\sqrt{-1}.$$

II. Hallar en qué se convierte la función

$$u = z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 6z - 30$$

cuando sea $$z = 1 \pm 3\sqrt{-1}.$$

III. Representar geométricamente la función

$$f(z) = z^2 - 9,$$

estando representada la ley de variación de x é y, por las ecuaciones

$$y = x \quad \text{ó} \quad y = 1 - x^2. \ (*)$$

---

punto móvil, que designa la variable z, á recorrer una cierta curva ó un contorno dado.

Se ve, además, que si es cerrada la línea que representa la marcha de los valores de x é y, lo será de igual modo la que corresponde á la función $f(z)$, aun cuando no podrá deducirse la recíproca: pues para valores distintos de x é y, es posible resulten iguales valores de U y V, y, por lo tanto, de $f(z)$.

(*) La primera de estas ecuaciones es la expresión analítica de la bisectriz del primero y tercer cuadrantes, y la segunda la de una parábola que tiene por eje el de las y.

CAPITULO III

TEORÍA ELEMENTAL DE LAS SERIES

I.—Preliminares.

219. Definición. *Se llama serie á toda expresión, numérica ó literal, compuesta de una sucesión indefinida de términos, que se deducen unos de otros, ó cada uno del número de orden del lugar que ocupa, según una ley determinada.* (*)

Así: las progresiones

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 \ldots\ldots \quad \text{y} \quad \div\div a_1 : a_1c : a_1c^2 : a_1c^3 : \ldots\ldots$$

son series, cuya ley de formación es muy sencilla.

220. Algoritmo de las series. Para representar una serie, en forma simbólica, se escriben los términos, unos á continuación de otros, separados por medio del signo $+$ y expresados generalmente por una misma letra, afectada en cada término de un subíndice, que indica el número del lugar que ocupa.

(*) Puede decirse que las series son conocidas desde que lo fueron las progresiones indefinidas, y es sabido que Arquímedes hizo uso de ellas para la cuadratura ó cálculo del área de una porción de la parábola de Apolonio. Su empleo, como algoritmo capaz de desarrollar en suma indefinida una cantidad cualquiera, no es sin embargo anterior al siglo XVII, en el cual el geómetra alemán Nicolás Mercator, y especialmente Newton y Leibnitz, se sirvieron de esa forma para obtener la generación de las funciones. Con posterioridad, apenas ha habido matemático de nota que no haya llevado su contingente á la fecunda y bella teoría de las series, mereciendo especial mención Juan Bernouilli, Taylor, Maclaurin, Burmann y más recientemente Euler, Lagrange, Wronski y Cauchy, al primero y al último de los cuales se deben las aplicaciones más notables y las ideas más originales y precisas respecto de este importante algoritmo.

La expresión general de una serie es, pues,

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots;$$

pudiendo ser los términos positivos ó negativos, y reales ó imaginarios; pero cuando la serie se componga de términos de esta última clase, convendrá hacer explícita su naturaleza, y, si tienen la forma binomia, encerrarlos dentro de un paréntesis, como se expresa á continuación:

$$(u_1+v_1\sqrt{-1})+(u_2+v_2\sqrt{-1})+(u_3+v_3\sqrt{-1})+\ldots\ldots+$$
$$+(u_n+v_n\sqrt{-1})+\ldots\ldots$$

El término $n^{ésimo}$ de toda serie, ó el que tiene ésta ú otra cualquier letra por subíndice, toma el nombre de *término general.*

221. Clasificación de las series. La división más importante de las series, es la de series *convergentes* y *divergentes.*

Las primeras son aquellas en que la suma de sus n primeros términos tiende hacia un límite determinado, cuando n aumenta indefinidamente, cualquiera que sea la ley de dependencia de dichos términos.

Las series que no cumplen con dicha condición, son las llamadas divergentes.

Así: una progresión por cociente decreciente indefinida, cuya suma de términos tiene por límite $\frac{a_1}{1-c}$ (83), es una serie convergente; y lo mismo sucede con la serie

$$(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\ldots\ldots+(a_{n-1}-a_n)+\ldots\ldots,$$

en la cual a_n designa una expresión que tiene por límite cero, cuando n crece indefinidamente; pues la suma de sus n primeros términos es a_1-a_n, la cual tiene por límite a_1 cuando n tiende hacia el infinito.

Por el contrario: una serie cuyos términos vayan siempre aumentando, tal como una progresión por cociente creciente é indefinida, es de seguro divergente; puesto que la suma de sus términos, á partir del primero, crecerá más allá de todo límite.

Análogamente: la serie

$$1-1+1-\ldots\ldots\pm 1\mp 1\pm\ldots\ldots$$

es divergente; pues la suma de los n primeros términos es alternativamente 0 y 1, y no tiende, por lo tanto, á ningún límite determinado, á medida que va creciendo n. (*)

Hay series que toman denominaciones particulares, según la ley de formación de sus términos. Tales son las llamadas *recurrentes,* que están ordenadas según las potencias enteras y ascendentes de una variable y cuyos coeficientes, á partir de un término cualquiera, se obtienen por medio de un número fijo de coeficientes de potencias anteriores, ó están ligados entre sí por medio de una ecuación, que suele ser lineal ó de primer grado.

Así: la serie

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots,$$

será recurrente cuando, para un valor cualquiera de n, á partir de la unidad, ó mayor que un cierto número, se verifique constantemente que

$$\alpha_0a_{n-m}+\alpha_1a_{n-m+1}+\ldots\ldots+\alpha_{m-1}a_{n-1}+\alpha_ma_n=0;$$

siendo α_0, α_1,....... α_m cantidades constantes, y m un número entero y positivo, no superior á n. La igualdad anterior recibe el nombre de *escala de relación;* y los productos que la forman el de *términos de la escala.* (**)

La serie que sigue

$$1+4x+4x^2+7x^3+11x^4+\ldots\ldots$$

es, pues, una serie recurrente, en la que el coeficiente de cada término, á partir del tercero, es igual á la suma de los dos anteriores. La escala de relación es, en ella,

$$a_{n-2}+a_{n-1}-a_n=0;$$

de modo que

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_2=-1,\quad m=2,\quad n>1.$$

(*) Para distinguir estas series de las propiamente divergentes, que son aquellas cuya suma de términos llega á exceder á todo límite, algunos autores las han dado la denominación de *series indiferentes,* y otros el de *series indeterminadas,* nombre que ha sido adoptado por el sabio profesor de la Universidad de París, Eugenio Catalan.

(**) Como se verá luego en un ejercicio, ciertas relaciones particulares pueden simplificar la ley ó escala de relación que corresponde á una serie recurrente.

Las series toman también denominaciones particulares, según el uso que de ellas se hace, ó las funciones que desarrollan; empleándose en este concepto los nombres de *series exponenciales*, *series logarítmicas* y *series trigonométricas*, según que sirvan para calcular los valores de la función exponencial, de los logaritmos ó de las funciones circulares.

Una serie se llama á su vez *regular*, cuando todos sus términos se forman según una misma ley.

222. Suma y resto de una serie. *El límite hacia el cual tiende la suma de los* n *primeros términos de una serie convergente, cuando* n *crece indefinidamente, toma el nombre de suma ó valor de la serie.*

Dicha suma se representa por la letra S; y cuando quiere expresarse el número de términos de la serie que se han sumado, á partir del primero de ellos, se pone á esa letra el subíndice que así lo indique. De tal manera S_n expresará la suma de los n primeros términos de la serie.

Para designar la suma de los términos que hay desde el de lugar $n+1$ hasta el de lugar p, ambos inclusive, se emplea el signo S^p_n; de suerte que $S^p_n = S_p - S_n$.

La suma de una serie se indica también del siguiente modo:

$$S = \text{lím}\,(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots) \quad \text{para} \quad n = \infty\,;$$

si bien se omite generalmente la abreviatura de la palabra límite.

Las diferencias, $S - S_n$ *y* $S_n - S$, *toman los nombres de restos por defecto ó por exceso de la serie.* Cualquiera de estos restos suele representarse por la letra R; de modo que si la serie es convergente, debe verificarse que

$$\text{lím.}\ R = 0\,;$$

cuando n crezca indefinidamente.

Ejercicios.

I. Determinar los términos sexto, octavo y undécimo de cada una de las series recurrentes

$$x + 3x^2 + x^3 - \cdots\cdots\,; \quad 1 - x + x^2 - \cdots\cdots\,; \quad 5 + 4x + 3x^2 + \cdots\cdots$$

cuyas escalas de relación respectivas son:

$$a_{n-2} - a_{n-1} + 2a_n = 0\,; \quad 3a_{n-2} + 2a_{n-1} - a_n = 0\,; \quad a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0\,;$$

y demostrar que, en la última, los coeficientes forman una progresión por diferencia cuya razón es -1.

II. Obtener la suma de los términos de la serie

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{27}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^n}\right) + \cdots\cdots$$

III. Calcular el resto de la serie progresiva

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \cdots\cdots + \frac{2^n}{5^n} + \cdots\cdots$$

II.—Convergencia.

223. Condiciones generales de convergencia. La definición que se ha dado de serie convergente, manifiesta desde luego que deberán cumplirse ciertas condiciones generales de convergencia, las cuales podrán ser ó no suficientes, para que la serie que las reuna pertenezca á la clase de las que reciben aquella denominación. Conviene, pues, conocer dichas condiciones necesarias, que se hallan expresadas en los siguientes teoremas.

TEOREMA I. *Para que una serie sea convergente, es preciso que su término general tenga por límite cero.*

En efecto: si la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$$

es convergente, las sumas S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, ... deberán tender hacia el mismo límite, cuando n crezca indefinidamente; de modo que se tendrá:

$$\text{lím}\ S_{n-1} = \text{lím}\ S_n = \cdots\cdots = S,$$

y, por lo tanto,

$$\text{lím}\ S_n - \text{lím}\ S_{n-1} = \text{lím}\,(S_n - S_{n-1}) = 0\,,$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\text{lím}\ u_n = 0\,.$$

La recíproca de esta proposición no es cierta; pues hay series en las cuales se verifica que u_n tiene por límite cero, y son, sin embargo, divergentes.

Como ejemplo notable, tenemos la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

cuyo término general, $\frac{1}{n}$, tiene por límite cero, y la cual es fácil demostrar que no es convergente. (*)

Observamos, en efecto, que la suma de los n términos que siguen al $n^{\acute{e}simo}$, es:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdot+\frac{1}{2n}>n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2};$$

de modo que agrupando todos los de la serie en la forma

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{p-1}+1}+\frac{1}{2^{p-2}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^p}\right)+\cdots\cdots(^{**})$$

se ve que siendo la suma de los p primeros grupos, es decir la de sus 2^p primeros términos, mayor que $\frac{p}{2}$, esto es, mayor que cualquier cantidad dada, puesto que p puede ser tan grande como se quiera, la serie es divergente. (***)

(*) Esta serie es conocida con el nombre de *serie armónica*. El motivo de tal denominación consiste, en que al tratar, en la teoría matemática de la música, de la evaluación numérica de los sonidos, se llama *serie de notas armónicas*, al conjunto de aquellas cuya altura relativa, ó cuyo número de vibraciones, puede representarse respectivamente por 1, 2, 3, 4,..... ó, sea, por la serie natural de los números.

(**) En esta descomposición se advierte inmediatamente, que cada grupo, á partir del segundo inclusive, satisface á la condición indicada de tener tantos términos cuantos le preceden. El último de los que se han escrito, que es la forma general de todos ellos, tiene 2^{p-1}; puesto que evidentemente:

$$2^p=2^{p-1}.2=2^{p-1}+2^{p-1};$$

y este número 2^{p-1} es el de los términos que hay antes de él. Todos son, pues, mayores que $\frac{1}{2}$, incluso el primero que contiene además á la unidad.

(***) Aun cuando para demostrar que una proposición no es cierta, basta presentar un solo caso en que no se verifique, puede también observarse, respecto de la proposición recíproca que nos ocupa, que de

$$\lim u_n=\text{lím}\,(S_u-S_{n-1})=0$$

no se deduce que S_n deba tener necesariamente un límite.

Debe observarse que al decir que los terminos de una serie convergente tienen por límite cero, no ha de entenderse que cada uno es menor que el que le precede; porque, aun cuando esto es lo más frecuente, se comprende que, sin dejar de verificarse aquella condición, puede muy bien un cierto término ser menor que el que le sigue.

TEOREMA II. *En toda serie convergente, la suma de un número cualquiera de términos, tomados á continuación de los* n *primeros, tiene por límite cero, cuando* n *es suficientemente grande.*

En efecto: si la serie

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots+u_{n+p}+\cdots\cdots$$

es convergente, se verificará que

$$\lim S_{n+p}=\lim S_n=S;$$

luego

$$\lim S_{n+p}-\lim S_n=\lim\,(S_{n+p}-S_n)=\lim S_n^{n+p}=0;$$

es decir, que la suma de los p términos, siguientes á los n primeros, tendrá por límite cero, según quería demostrarse.

TEOREMA III. *Si una serie satisface á la condición de que, para un valor suficientemente grande de* n, *la suma de un número cualquiera de términos, á continuación de los* n *primeros, tiene por límite cero, dicha serie es convergente.* (*)

Para demostrar este teorema, recíproco del anterior, bastará probar que existe un límite hacia el cual tienden las diversas sumas obtenidas, tomando varios términos á partir del primero.

Según la hipótesis, podemos dar á n un valor suficiente para que la suma S_n^{n+p} de los p términos que siguen al $n^{\acute{e}simo}$, sea menor que α en valor absoluto, siendo p cualquier número entero indeterminado y α una cantidad tan pequeña como se quiera; luego todas las sumas

$$S_{n+1},\quad S_{n+2},\quad S_{n+3},\cdots\cdots\cdots$$

(*) Para evitar dudas sobre este teorema, cuya exactitud ha sido negada por Mr. Catalan, conviene tener presente que, al decir *un número cualquiera*, entendemos un número finito y variable tan grande como se quiera, y no un número fijo ó determinado, por considerable que sea.

estarán comprendidas entre $S_n - \alpha$ y $S_n + \alpha$. Considerando ahora un número n' de términos mayor que n, y que sea tal que la suma de cualquier número de los que haya á continuación de los n' primeros sea menor que α', siendo $\alpha' < \alpha$, se verificará que las sumas

$$S_{n'+1}, \quad S_{n'+2}, \quad S_{n'+3}, \ldots\ldots$$

estarán comprendidas entre $S_{n'} - \alpha'$ y $S_{n'} + \alpha'$, sin dejar de estarlo también entre $S_n - \alpha$ y $S_n + \alpha$.

Ahora bien: si, como generalmente ocurre,

$$S_{n'} - \alpha' > S_n - \alpha \qquad \text{y} \qquad S_{n'} + \alpha' < S_n + \alpha,$$

estas expresiones colocadas por orden de magnitud creciente serán:

$$S_n - \alpha, \quad S_{n'} - \alpha', \quad S_{n'} + \alpha', \quad S_n + \alpha;$$

lo cual evidencia que, respecto de las nuevas sumas, se ha reducido el intervalo numérico que comprendía á las sumas precedentes.

Cuando sea $S_{n'} + \alpha' > S_n + \alpha$, entonces las sumas

$$S_{n'+1}, \quad S_{n'+2}, \ldots\ldots$$

que son desde luego menores que $S_n + \alpha$, estarán comprendidas entre $S_{n'} - \alpha'$ y $S_n + \alpha$; y si fuese, por último, $S_{n'} - \alpha' < S_n - \alpha$ dichas sumas deberían hallarse entre $S_n - \alpha$ y $S_{n'} + \alpha'$. (*)

Se ve, pues, que de todos modos queda demostrada la existencia de un límite para las sumas sucesivas de los términos de la serie á partir del primero; porque los intervalos entre los cuales se encuentran comprendidas dichas sumas van reduciéndose cada vez más, sin dejar de formar parte de los anteriores, y pueden estrecharse cuanto se quiera, considerando números crecientes n'', n''',..... tan grandes como sea necesario, para que las sumas de cualquier número de términos, posteriores á los que ocupan

(*) No puede verificarse al mismo tiempo que

$$S_{n'} - \alpha' < S_n - \alpha \qquad \text{y} \qquad S_{n'} + \alpha' > S_n + \alpha;$$

pues, restando estas desigualdades miembro á miembro, resultaría:

$$2\alpha' > 2\alpha \qquad \text{ó, bien,} \qquad \alpha' > \alpha;$$

lo cual es contra el supuesto.

esos lugares, vayan siendo menores que los números decrecientes α'', α''',....., que haremos tender hacia cero.

Dicho límite es evidentemente el mismo para todas las sumas; pues se tiene por hipótesis y de una manera general:

$$\lim S_n^{n+p} = 0$$

y, por consecuencia, en virtud de lo demostrado,

$$\lim S_{n+p} - \lim S_n = 0 \qquad \text{ó} \qquad \lim S_{n+p} = \lim S_n.$$

Este teorema comprueba la convergencia de toda progresión por cociente, decreciente indefinida; porque considerando la progresión

$$\div\!\div a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots\ldots$$

en la cual supondremos la razón, c, menor que la unidad, se tiene:

$$S_n^{n+p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\cdots + a_{n+p} = \frac{a_{n+1} - a_{n+p}c}{1-c};$$

y esto nos dice que, cualquiera que sea el valor de p,

$$S_n^{n+p} < \frac{a_{n+1}}{1-c};$$

y como $1-c$ es una cantidad constante, y, para valores suficientemente grandes de n, el numerador, $a_{n+1} = a_1 . c^n$, puede ser tan pequeño como se quiera, se deduce que

$$\lim S_n^{n+p} = 0,$$

y, por lo tanto, que la serie formada por los términos de la progresión es convergente.

224. Caracteres de convergencia. Se llaman así, los signos distintivos que permiten reconocer que una serie es convergente (*); mas como hay diversos medios de deducir la convergencia, daremos á conocer los caracteres comprendidos en las proposiciones que siguen, que suelen bastar en la mayoría de los casos.

(*) El teorema, que acaba de demostrarse, es sin duda un carácter de convergencia, que podría hacerse sensible tomando las diversas sumas sobre una recta y á partir de un mismo punto, suponiéndolas referidas á una cierta unidad lineal; pero su extremada generalidad, no lo hace aplicable sino muy raras veces.

Teorema I. *Si todos los términos de una serie son positivos, y la suma de los* n *primeros permanece siempre inferior á una cantidad determinada, cuando* n *aumenta tanto como se quiera, dicha serie es convergente.*

En efecto: puesto que todos los términos son positivos, la suma de los n primeros términos aumentará con n; pero como dicha suma es siempre inferior á una cantidad fija, tendrá necesariamente un límite, y la serie será convergente.

Teorema II. *Una serie es convergente, cuando tiene todos sus términos positivos y menores, respectivamente, que los de otra serie convergente.*

Siendo S_n y S'_n las sumas respectivas de los n primeros términos de las dos series, se tendrá:

$$\lim S'_n = S';$$

pero como este límite es superior, deducimos que cuando n aumente indefinidamente, se verificará que $S_n < S'_n < S'$; luego S_n es una cantidad continuamente creciente y que se conserva menor que otra cantidad fija S'; lo cual prueba, según el teorema anterior, que dicha serie es convergente. (*)

Teorema III. *Si en una serie, cuyos terminos son positivos, el límite de la relación de un término al que le precede es inferior á la unidad, dicha serie es convergente.*

Sea la serie

$$u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots\cdots\cdots$$

Puesto que $lim\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, se verificará que podrá tomarse n bastante grande para que se tenga

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha < 1;$$

(*) Este teorema es de una aplicación frecuente y muy sencilla; pues, para hacer la comparación, basta hacer uso de una progresión geométrica decreciente cualquiera.

designando por α cualquier cantidad comprendida entre la unidad y el expresado límite, de suerte que

$$u_{n+1} < \alpha u_n,$$

y, análogamente,

$$u_{n+2} < \alpha u_{n+1}; \quad u_{n+3} < \alpha u_{n+2}; \cdots\cdots$$

siendo, por lo tanto,

$$u_{n+1} < \alpha u_n; \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n; \quad u_{n+1} < \alpha^3 u_n; \cdots\cdots$$

La serie considerada tiene, pues, sus términos, á partir del $(n+1)$^ésimo^, respectivamente menores que los de la progresión geométrica, decreciente, indefinida,

$$\div\, \alpha u_n : \alpha^2 u_n : \alpha^3 u_n : \cdots\cdots\cdots$$

luego dicha serie será, de seguro, convergente. (*)

Si la relación $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tuviese por límite una cantidad mayor que la unidad, se verificaría, desde un cierto término, que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k > 1;$$

siendo k una cantidad cualquiera, comprendida entre el expresado límite y la unidad; y como lo mismo pasaría para las demás relaciones, se tendrían las desigualdades

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k; \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > k; \cdots\cdots\cdots$$

ó, bien,

$$u_{n+1} > ku_n; \quad u_{n+2} > k^2 u_n; \quad u_{n+3} > k^3 u_n; \cdots\cdots\cdots$$

y como entonces los términos de la serie resultarían, á partir de u_{n+1}, mayores que los de la progresión creciente indefinida

$$\div\, ku_n : k^2 u_n : k^3 u_n : \cdots\cdots\cdots$$

(*) Para que una serie sea convergente, se comprende que basta que lo sea á partir de cualquiera de sus términos; pues la suma de los que le preceden será constante y finita.

cuya suma puede ser mayor que cualquier cantidad dada (**83**), la serie sería divergente.

Cuando el límite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sea precisamente la unidad, no podrá ya decirse que, á partir de un cierto término, la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se conserve siempre, y respectivamente, inferior ó superior á una cantidad menor ó mayor que la unidad, ni afirmarse, por consecuencia, si la serie es ó no convergente; así es que, en este *caso dudoso,* deberán emplearse otros medios para dilucidarlo. (*)

Si, en la hipótesis del enunciado de la proposición que nos ocupa, se toma por valor aproximado de la serie la suma de sus n primeros términos, es fácil determinar un límite superior del resto ó del error cometido; pues siendo éste la suma de la serie complementaria,

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots\ldots\ldots$$

que es menor que

$$u_{n+1}+\alpha u_{n+1}+\alpha^2 u_{n+1}+\ldots\ldots=\frac{u_{n+1}}{1-\alpha},$$

dicho límite de error será *el primer término despreciado, partido por el exceso de la unidad sobre cualquier cantidad menor que ella y mayor que la relación de dos términos consecutivos cualesquiera de los que se desprecian.*

Para fijar las ideas, examinaremos diversos ejemplos.

1.° Sea la serie

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}+\frac{x^n}{\lfloor n}+\ldots\ldots\ \ (**)$$

(*) Cauchy y Liouville han establecido varias proposiciones, por medio de las cuales se logra muchas veces la desaparición de la ambigüedad del presente caso y de otros análogos.

(**) En esta serie, que ya veremos es el desarrollo de la función exponencial e^x, se ha puesto la unidad por denominador al segundo término, para mayor analogía con los que le siguen; y aun hubiera podido ponerse $\frac{x}{\lfloor 1}$, y al primero también bajo la forma $\frac{x^0}{\lfloor 0}$; conviniendo, como ya se hizo anteriormente (**67**), que $\lfloor 0=1$, lo mismo que lo es $\lfloor 1$.

Se ve en ella que la relación del término general al que le antecede es $\frac{x}{n}$, cuyo límite es cero cuando n aumenta indefinidamente; y esto prueba que dicha serie es convergente para cualquier valor de x. Observamos, sin embargo, que en el caso de recibir x valores mayores que la unidad, los términos de la serie empezarán creciendo; pero, á partir de un cierto lugar, no podrán menos de disminuir, dado el límite de la relación.

2.° Consideremos la serie

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{n-1}+\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots\ \ (*)$$

La relación del término general al que le precede es

$$\frac{n-1}{n}.x=\left(1-\frac{1}{n}\right)x,$$

que tiene por límite x, cuando n crece indefinidamente.

Resulta, pues, que la serie anterior será convergente ó divergente, según sea x menor ó mayor que la unidad. Cuando $x=1$ la serie se transforma en la que ya hemos considerado con la denominación de armónica, y es divergente. (**)

3.° Sea la serie

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)^m}+\frac{1}{n^m}+\ldots\ldots\ \ (***)$$

cuyos términos son las $m^{ésimas}$ potencias de los de la serie armónica. La relación general de un término al precedente es

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^m=\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,$$

la cual tiene por límite la misma unidad, cuando n aumenta indefinidamente. Es por lo tanto dudosa la convergencia de esta serie, y será necesario atender á otros caracteres para cerciorarse de si es ó no convergente.

(*) Más adelante demostraremos que esta serie es precisamente el desarrollo de $-l(1-x)$.

(**) Como comprobación de este resultado, basta notar que la función $-l(1-x)$ se convierte, para $x=1$, en $-l\,0=\infty$.

(***) El primer término podría haberse puesto bajo la forma de $\frac{1}{1^m}$.

Descomponiéndola, á partir de su segundo término, en grupos de la forma

$$\left(\frac{1}{2^p}\right)^m + \left(\frac{1}{2^p+1}\right)^m + \left(\frac{1}{2^p+2}\right)^m + \dots\dots + \left(\frac{1}{2^{p+1}-1}\right)^m <$$

$$< \left(\frac{1}{2^p}\right)^m . 2^p = \left(\frac{1}{2^p}\right)^{m-1} (*),$$

es decir, que principien por las $m^{ésimas}$ potencias de las unidades fraccionarias cuyos denominadores sean potencias de 2, se nota que, siempre que m sea mayor que la unidad, dichos grupos decrecerán con más rapidez que los términos de la progresión geométrica, decreciente indefinida, que tenga por razón y por primer término $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$; y que la serie considerada será convergente en tal hipótesis (**).

Debe observarse que la relación de un término al anterior no siempre tiende hacia un límite determinado, como sucede en la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2.3} + \frac{1}{2^2.3^2} + \dots\dots +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}.3^{n-1}} + \frac{1}{2^n.3^{n-1}} + \frac{1}{2^n.3^n} + \dots\dots$$

en la cual dicha relación es alternativamente $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ y no tiende, por consecuencia, hacia ningún límite fijo. Esto no obstante, en el presente caso se deduce la convergencia de la serie, notando que la referida relación es constantemente inferior á cualquier número comprendido entre 1 y $\frac{1}{2}$.

No es además necesario, para que una serie sea convergente, que la relación de un término al que le precede sea constantemente inferior á un número fijo menor que la unidad; pues hay

(*) Se obtiene el número de los términos, observando que

$$2^p = 2^p + 0 \quad \text{y} \quad 2^{p+1} - 1 = 2^p + (2^p - 1).$$

(**) Cuando $m = 1$, sabemos que la serie es divergente, y con mayor razón debe serlo si $m < 1$; pues entonces sus términos serán mayores que los de la serie armónica, desde el segundo de ellos inclusive.

series convergentes, que no tienen el carácter de convergencia comprendido en este teorema.

Se ve, en efecto, que permutando de dos en dos los términos de la progresión decreciente indefinida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots\dots$$

toma la forma

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots\dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots\dots$$

y que entonces la relación de un término al anterior es alternativamente 2 y $\frac{1}{8}$; siendo sin embargo convergente, lo mismo que antes.

TEOREMA IV. *Cuando á partir de un cierto lugar, la expresión* $\sqrt[n]{u_n}$ *tiene un valor constantemente igual ó inferior á un número fijo menor que la unidad, la serie es convergente.*

Puesto que $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, á partir de un cierto término, se tendrá la desigualdad

$$u_n < k^n,$$

la cual indica que los términos de la serie serán, desde dicho término, respectivamente menores que los de la progresión geométrica decreciente indefinida

$$\div k^n : k^{n+1} : k^{n+2} : \dots\dots$$

y, por consecuencia, que dicha serie es convergente.

Claro es que si en vez de referirnos á la expresión $\sqrt[n]{u_n}$, hubiéramos considerado su límite, la serie sería convergente cuando este límite fuese menor que la unidad, y divergente en el caso contrario; habiendo ambigüedad si el límite fuese la unidad misma.

TEOREMA V. *Una serie, cuyos términos están afectados de signos cualesquiera, es convergente, cuando lo sea la que forman los valores absolutos de dichos términos.*

Puesto que los n primeros términos de la serie llevarán unos el signo + y otros el signo —, si se representa la suma de los positivos por P_n y la de los negativos por Q_n, se tendrá $S_n = P_n - Q_n$; pero cuando se consideren sólo los valores absolutos, la suma de los n primeros términos de la nueva serie será $S'_n = P_n + Q_n$; y como entonces suponemos que es convergente, podrá ponerse:

$$\lim S'_n = \lim (P_n + Q_n) = S'.$$

Ahora bien: siendo éste un límite superior, P_n y Q_n serán menores que S', y como crecen constantemente con n, deberán tener límites que representaremos respectivamente por P y Q; de suerte que

$$\lim S_n = \lim (P_n - Q_n) = P - Q.$$

y, por lo tanto, la primera serie será también convergente.

Teorema VI. *Si á partir de un cierto término de una serie, los que siguen son alternativamente positivos y negativos, y decrecen teniendo por límite cero, la serie es convergente.*

En efecto: supongamos que la serie

$$u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \cdots\cdots \pm u_{n+p} \mp u_{n+p+1} \pm \cdots\cdots\cdots$$

cumple las condiciones indicadas en el enunciado, á partir del término u_n.

Como los términos van disminuyendo constantemente, las diferencias

$$u_{n+2} - u_{n+3};\ u_{n+4} - u_{n+5};\ \cdots\cdots\ u_{n+2q-2} - u_{n+2q-1};\cdots\cdots$$

serán todas positivas y, por consiguiente, se verificará que

$$S_{n+1} < S_{n+3} < S_{n+5} < \cdots\cdots < S_{n+2q-1} < \cdots\cdots$$

pero siendo negativas las expresiones

$$-u_{n+3} + u_{n+4};\ -u_{n+5} + u_{n+6};\ \cdots\cdots\ -u_{n+2q-1} + u_{n+2q};\cdots\cdots$$

se tendrá:

$$S_{n+2} > S_{n+4} > S_{n+6} > \cdots\cdots > S_{n+2q} > \cdots\cdots$$

y como

$$S_{n+2q} = S_{n+2q-1} + u_{n+2q}$$

será:

$$S_{n+2q} > S_{n+2q-1};$$

y, por último, en virtud de las primeras desigualdades:

$$S_{n+2q} > S_{n+1};$$

relación que manifiesta que cualquiera de las segundas sumas es mayor que S_{n+1}; mas como van decreciendo constantemente, deberán tener un cierto límite y se verificará que, cuando q tienda al infinito,

$$\lim S_{n+2q} = S.$$

Observando ahora que el primer miembro de la igualdad

$$S_{n+2q} - u_{n+2q} = S_{n+2q-1}$$

tiene ese mismo límite S, puesto que el de u_{n+2q} es igual á cero, se deduce también

$$\lim S_{n+2q-1} = S,$$

y, por consiguiente que, de cualquier manera que el entero m crezca, S_m tendrá un límite fijo y determinado, y la serie será convergente.

Como el valor total de la serie está comprendido entre dos sumas consecutivas, S_{n+p} y S_{n+p+1}, el error cometido, tomando S_{n+p} por expresión de la suma de sus términos, será en valor absoluto menor que u_{n+p+1}, ó, sea, que el primer término despreciado.

Debe observarse que si bien una serie, cuyos términos estén afectados de signos distintos, será convergente cuando lo sea la obtenida tomando todos sus términos con el signo +, esta condición no es necesaria, como lo evidencia la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots\cdots$$

que siendo convergente, según el teorema anterior, no lo es cuando se transforma en la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots\cdots$$

la cual ya sabemos que es divergente.

Teorema VII. *Una serie, cuyos términos son imaginarios, será convergente, cuando las dos series formadas con los términos reales y con los coeficientes de los imaginarios sean convergentes.*

Sea la serie considerada

$$(u_1+v_1\sqrt{-1})+(u_2+v_2\sqrt{-1})+(u_3+v_3\sqrt{-1})+\cdots\cdots+$$
$$+(u_n+v_n\sqrt{-1})+\cdots\cdots\cdots$$

y formemos las series parciales

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots \quad \text{y} \quad v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

Vamos á demostrar que si éstas son convergentes, también lo será la propuesta.

En efecto: siendo S_n, σ_n y τ_n las sumas respectivas de los n primeros términos de las series anteriores, se tendrá:

$$S_n=\sigma_n+\tau_n\sqrt{-1} \quad \text{de donde} \quad \lim S_n=\sigma+\tau\sqrt{-1},$$

llamando σ y τ los límites de σ_n y τ_n; luego la serie propuesta es convergente.

Corolario. *Una serie imaginaria es convergente, si la que forman los módulos de sus términos satisface dicha condición;* pues siendo, en la expresión $a+b\sqrt{-1}$, los valores absolutos de a y de b, menores que el módulo $\sqrt{a^2+b^2}$, las series que formen las partes reales y los coeficientes de $\sqrt{-1}$ serán convergentes, en virtud de lo demostrado en los teoremas II y V de los caracteres de convergencia.

225. Operaciones que pueden efectuarse con las series, sin que su convergencia se altere. Como las series se emplean en el cálculo con diversos propósitos, conviene saber qué clase de operaciones pueden efectuarse con ellas, de modo que los resultados constituyan nuevas series convergentes. En tal concepto estableceremos los teoremas que siguen.

Teorema I. *Si se suman ó restan, término á término, varias series convergentes, la que resulta es también convergente, y tiene por límite la suma algébrica de los límites de las propuestas.*

En efecto: consideremos las series convergentes

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots\cdots$$
$$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n+\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1+c_2+c_3+\cdots\cdots+c_n+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

cuyas sumas ó valores respectivos representaremos por $A, B, C, \ldots$

Sumando ó restando al mismo tiempo todos los términos de cada serie, combinados con los del mismo lugar de las demás, se obtendrá una serie cuyo término general tendrá por expresión:

$$u_n=\pm a_n\pm b_n\pm c_n\pm\cdots\cdots\cdots$$

y se verificará que

$$\Sigma_1^n u=\pm\Sigma_1^n a\pm\Sigma_1^n b\pm\Sigma_1^n c\pm\cdots\cdots\cdots$$

pero cuando n aumenta indefinidamente, cada término del segundo miembro de esta igualdad tiene un límite; por consiguiente

$$\lim \Sigma_1^n u=\pm A\pm B\pm C\pm\cdots\cdots$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema II. *Si se multiplican todos los términos de una serie convergente por un número, a, la nueva serie obtenida es convergente, y tiene por límite el producto del límite de la propuesta por dicho número.*

En efecto: sea la serie convergente, de suma S,

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots$$

Multiplicando todos sus términos por a, se obtendrá la nueva serie

$$au_1+au_2+au_3+\cdots\cdots+au_n+\cdots\cdots\cdots$$

en la cual se verificará que

$$\Sigma_1^n(au)=a\Sigma_1^n u;$$

pero cuando n aumenta indefinidamente, el segundo miembro tiene un límite, que es $a.\lim\Sigma_1^n u$, luego:

$$\lim\Sigma_1^n(au)=aS.$$

TEOREMA III. *Si en una serie convergente de términos positivos, se multiplican éstos respectivamente por números positivos, que no crezcan más allá de todo límite, se obtendrá otra serie convergente.*

Siendo la primera serie considerada

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots\cdots$$

decimos que la nueva serie

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \cdots\cdots + a_n u_n + \cdots\cdots\cdots$$

es también convergente, si los números $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ no pueden exceder á cualquier límite.

Efectivamente: si representamos por A una cantidad mayor que todos los mencionados números, vemos que la última serie tiene sus términos respectivamente menores que los de la serie

$$Au_1 + Au_2 + Au_3 + \cdots\cdots + Au_n + \cdots\cdots$$

la cual, según acaba de verse, es convergente; luego la referida serie lo es también de igual modo.

Ejercicios.

I. Examinar si las dos series

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots + nx^{n-1} + \cdots\cdots\cdots;$$

$$1 + x + 3x^2 + 6x^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1} + \cdots\cdots$$

son, ó no, convergentes, para los valores $x < 1$, $x = 1$ y $x > 1$.

II. Demostrar que la serie

$$1 + \frac{a+c}{b+c} + \frac{(a+c)(2a+c)}{(b+c)(2b+c)} + \cdots\cdots + \frac{(a+c)(2a+c)\ldots\ldots[(n-1)a+c]}{(b+c)(2b+c)\ldots\ldots[(n-1)b+c]} + \cdots\cdots$$

en la cual a, b y c son cantidades positivas, es convergente si $a < b$, y divergente cuando no se verifica esta condición.

III.—Desarrollo de las funciones en series

226. Definición. *Desarrollar en serie una función de una sola variable, es hallar una serie, ordenada según las potencias enteras y ascendentes de dicha variable, que pueda substituir á la referida función.*

Claro es que debiendo equivaler la suma de los términos de la serie á la función desarrollada, es indispensable que sea convergente.

227. Posibilidad ó imposibilidad del desarrollo. Una función cualquiera no es siempre desarrollable en serie, de la forma indicada, si bien ocurre más generalmente que lo es tan sólo para valores de la variable, comprendidos entre ciertos límites.

En el primer caso suele combinarse dicha variable con una constante, á fin de hacer posible la transformación de la función, en serie ordenada según las potencias de una nueva función de su variable; y en el segundo es necesario determinar los valores de la variable referida, para los cuales puede la serie substituir á la función considerada.

Se comprende fácilmente lo expuesto, observando que acaso no sea compatible con la naturaleza de una función dada, la forma particular de desarrollo que hemos indicado, ó que, aun no existiendo esa incompatibilidad esencial, la convergencia indispensable de la serie exija que la variable, que entra en sus diversos términos, cumpla con condiciones determinadas que limiten los valores que pueda recibir; mas para mayor claridad presentaremos algunos ejemplos.

Se ve desde luego que la función $log\, x$ no es susceptible de desarrollarse en la forma mencionada; pues si fuera

$$\log x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$$

haciendo $x = 0$, se tendría $log\, 0 = a_0$, lo cual no es posible; pues sabemos que $log\, 0 = \mp\infty$, según que la base del sistema sea mayor ó menor que la unidad. (*)

Si consideramos ahora la función fraccionaria $\frac{1}{1-x}$, que indica un cociente imposible de obtener exactamente, y efectuamos la división del numerador por el denominador hasta llegar al término $n^{ésimo}$, se tendrá:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

(*) Oportunamente veremos que el logaritmo de x puede desarrollarse en serie, ordenada según las potencias de $x - 1$.

De esta igualdad se deduce que si n crece indefinidamente, el término complementario tendrá por límite cero, siempre que x esté comprendida entre $+1$ y -1, y que, en caso contrario, tenderá hacia $\pm\infty$.

Resulta, pues, que para valores absolutos de la variable x, menores que la unidad, la serie indefinida, que forman los términos del cociente entero, será convergente (*) y equivaldrá á la función propuesta; es decir, que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots\cdots$$

pero que para valores de esa variable mayores que la unidad, en valor absoluto, la suma de los términos de la serie diferirá tanto más de la función cuanto mayor número de ellos se considere. Así: para $x=2$, la función se convierte en -1, y la serie en la suma indefinida

$$1+2+4+8+\cdots\cdots\cdots$$

que es de distinto signo, y que cada vez se diferencia más de dicho valor. (**)

En términos generales, diremos que una serie no puede reemplazar á una función, sino en el caso de que sea equivalente á ésta, para lo cual es necesario que, deteniendo la serie en un término cualquiera, su resto tenga por límite cero, cuando el número de los que le precedan tienda al infinito; pero como tan sólo las series convergentes satisfacen siempre á tal condición, son las únicas que se emplean en el cálculo; así pues, al *hacer uso de una serie para representar una función dada, es preciso cerciorarse de su convergencia; indicando los límites de los valores que puede recibir la variable, para que se conserve la identidad entre la función y dicha serie.* (*)

(*) Notando que la relación de un término al anterior es x, ó que la serie es una progresión geométrica que tiene por razón la variable, se deduce también la condición de convergencia.

(**) El desarrollo es igualmente aplicable al caso de ser $x=1$, en el sentido de que

$$\frac{1}{0}=1+1+1+\cdots\cdots=\infty.$$

228. Objeto de la transformación. El desarrollo en serie de una función tiene generalmente dos objetos: unas veces se emplea con el propósito de deducir ciertas leyes de generación indefinida, ó demostrar determinadas relaciones abstractas, y para lograrlo se transforman las funciones en series apropiadas al fin de que se trata; no importando en tal caso que sea mayor ó menor el grado de convergencia, ó el número de términos de la serie que deban tomarse, para obtener un valor suficientemente aproximado de la función á que reemplaza. (**)

Otras veces, por el contrario, se hace el desarrollo en serie con objeto de determinar valores numéricos de la función, no fáciles de calcular directamente; y entonces es necesario que pueda obtenerse la aproximación deseada, sin que para ello sea indispensable tomar un número considerable de términos. Claro es que, en este segundo caso, no deben emplearse sino series cuya convergencia sea bastante rápida, para los valores que se atribuyan á la variable. (***)

229. Procedimiento operativo directo. Si la función que se trata de desarrollar en serie, ordenada según las potencias crecientes de su variable, es algebraica, deberá ser de forma fraccionaria ó irracional; y si entonces no se verifican las condiciones necesarias para

(*) Aunque no es lo general, hay series que son iguales á una función, independientemente de los valores de la variable. Así sucede con la que pronto obtendremos para el desarrollo de e^x, que es convergente cualquiera que sea el valor asignado á x.

(**) Pueden citarse como ejemplos: la *serie de Leibnitz* que, aun cuando en forma poco convergente, da una bella generación indefinida de la relación de la circunferencia al diámetro; la demostración de que el límite de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es la unidad, cuando el arco tiende hacia cero; la deducción de la *fórmula de Moivre*, ya conocida (**207**); y la forma general del *logaritmo de un número cualquiera*; de todo lo cual nos ocuparemos más adelante.

(***) Como aplicaciones importantes, basta citar las *series logarítmicas* y los desarrollos muy convergentes que dan ciertos *números inconmensurables*, tales como e y π.

En el cálculo infinitesimal se emplean también con frecuencia los desarrollos en serie, para eludir la dificultad ó imposibilidad de integración de ciertas funciones diferenciales.

que dé un resultado exacto, al efectuar las operaciones indicadas, la ordenación ascendente con respecto á la variable, y la aplicación continuada de la regla operativa que corresponda, conducirán á un desarrollo en serie más ó menos fácil de obtener, pero que generalmente podrá reemplazar á la función para ciertos valores de dicha variable. Así hemos procedido con la función $\frac{1}{1-x}$, antes considerada, y puede procederse, por ejemplo, con $\sqrt{1+x}$. (*)

Como no siempre es fácil efectuar directamente la operación ú operaciones que la función indique, daremos á conocer el procedimiento general de desarrollo, que se funda en el uso de los coeficientes indeterminados.

230. Proposiciones fundamentales. Con tal propósito, conviene demostrar antes las siguientes proposiciones.

TEOREMA I. *Si una serie, ordenada según las potencias crecientes de la variable* x, *es convergente para el valor* $x = x_1$, *lo será también para cualquier otro de menor valor absoluto.*

Sea la serie de que se trata

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots\cdots;$$

claro es que si esta serie es convergente para $x = x_1$, el límite de $a_n x_1^n$ deberá ser cero, cuando n crezca indefinidamente; así es que podrá asegurarse entonces, que todos sus términos serán en valor absoluto menores que un cierto número positivo K, suficientemente grande.

Sabido esto, si se hace $x = x_2$, siendo x_2 menor en valor absoluto que x_1, se tendrá la nueva serie:

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots\cdots + a_n x_2^n + \cdots\cdots\cdots$$

que es idéntica á

$$a_0 + a_1 x_1 \left(\frac{x_2}{x_1}\right) + a_2 x_1^2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \cdots\cdots + a_n x_1^n \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n + \cdots\cdots\cdots$$

(*) Cuando la división ó la extracción de una raíz originan una sucesión indefinida de términos, y el divisor ó la cantidad subradical son binomios, suele ser preferible considerarlas como potencias de exponente negativo ó fraccionario, y efectuar el desarrollarlo del modo que indicaremos en el artículo que sigue.

El desarrollo en serie de las funciones transcendentes, exige conocimientos que aun no hemos adquirido, y de que oportunamente trataremos.

Bajo tal forma se observa, que siendo el valor absoluto de $\frac{x_2}{x_1}$, que llamaremos r, menor que la unidad, los términos de esta serie serán también en valor absoluto respectivamente menores que los de la progresión decreciente indefinida

$$K + Kr + Kr^2 + \cdots\cdots + Kr^n + \cdots\cdots;$$

y siendo todos estos positivos, resulta, como consecuencia de los teoremas II y V de los caracteres de convergencia, que la serie considerada será convergente para $x = x_2$.

COROLARIO. *Cuando una serie, ordenada con relación á las potencias ascendentes de* x, *es divergente para el valor* $x = x_1$, *lo será á su vez para cualquier otro de mayor valor absoluto.*

Se ve, en efecto, que si la serie fuera convergente para $x = x_2$, teniendo x_2 mayor valor absoluto que x_1, lo sería también para $x = x_1$, en virtud del teorema que acaba de demostrarse, lo cual es contrario al supuesto.

De este corolario, y de la proposición anterior se deduce, que todos los valores de x que hagan convergente cualquier serie de la forma de que tratamos, serán siempre los de valor absoluto menor que un cierto límite. (*)

TEOREMA II. *Una serie, ordenada con respecto á las potencias*

(*) Pudiera creerse que para que sea cero el límite de $a_n x^n$, es indispensable que el valor absoluto de x no exceda á la unidad; pero tal condición no es siempre necesaria, si a_n disminuye al crecer n. Se ha visto, en efecto, que la serie cuyo término general es $\frac{x^n}{\lfloor n} = \frac{1}{\lfloor n} \cdot x^n$ es convergente para cualquier valor de x, mientras que sólo cuando el valor absoluto de dicha variable es menor que la unidad, lo es la que tiene por término general $\frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} \cdot x^n$.

Debe también notarse que lo mismo el corolario que el teorema á que corresponde, debidos al malogrado matemático Nicolás Abel, pueden extenderse á las series de variable y coeficientes imaginarios, sin más que substituir *valor absoluto* por la palabra *módulo*. Así generalizados, y recordando la significación geométrica de las expresiones imaginarias, se llaman, respectivamente, *radio de convergencia* y *círculo de convergencia*, al límite de los módulos de la variable, y al lugar que contiene todos los puntos para los cuales la serie es convergente.

crecientes de x, *es una función continua, en tanto que es convergente.*

Si se representa por $f(x)$ el valor de la serie, se tendrá:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots\cdots;$$

y, designando por $\varphi(x)$ la suma de sus $n+1$ primeros términos y por $\psi(x)$ la de todos los restantes, serán:

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n\ ;\quad \psi(x)=a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots\cdots$$

y, á su vez,

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

Dando á x el incremento h, se tiene evidentemente:

$$f(x+h)-f(x)=[\varphi(x+h)-\varphi(x)]+[\psi(x+h)-\psi(x)]\ ;$$

pero si la serie es convergente para los valores considerados de x, siempre se podrá tomar n bastante grande para que $\psi(x+h)$ y $\psi(x)$, y por lo tanto su diferencia, sean tan pequeñas como se quiera; y como $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ es el incremento de una función limitada y continua (**175**), podrá ser también menor que cualquier cantidad, para valores suficientemente pequeños de h; luego, en esta última hipótesis,

$$f(x+h)-f(x)<\varepsilon$$

siendo ε tan pequeño como se quiera; quedando así demostrado que la serie es una función continua de x.

TEOREMA III. *Una función de una variable no admite más que un solo desarrollo en serie convergente, ordenada según las potencias enteras y crecientes de dicha variable.*

En efecto: si la función $\varphi(x)$ pudiese admitir los dos desarrollos expresados por las series convergentes

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots \quad \text{y} \quad b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots\cdots$$

cada una de éstas tendría por suma $\varphi(x)$, mientras subsistiera la convergencia; luego en tal caso

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots\cdots;$$

y como, para valores suficientemente pequeños de la variable y para $x=0$, sabemos que la convergencia y la igualdad deben

subsistir, y las series se reducen á sus primeros términos (*), será $a_0=b_0$, y, por lo tanto,

$$x(a_1+a_2x+\cdots\cdots\cdots)=x(b_1+b_2x+\cdots\cdots\cdots)$$

ó, suprimiendo el factor común á los dos miembros,

$$a_1+a_2x+\cdots\cdots\cdots=b_1+b_2x+\cdots\cdots\cdots$$

Ahora bien: estas series, obtenidas restando de las dos primeras sus términos constantes y dividiendo por x, deberán seguir siendo convergentes é iguales para valores suficientemente pequeños de dicha variable, y, como según se ha demostrado, serán al propio tiempo funciones continuas, subsistirá la igualdad para $x=0$, no obstante la división efectuada, que parece excluir tal valor. Resultará, en su consecuencia, $a_1=b_1$. (**)

Como del mismo modo se continuaría demostrando que

$$a_2=b_2;\quad a_3=b_3;\ \ldots\ldots\ a_n=b_n;$$

se deduce, que los dos desarrollos deberán ser idénticos.

(*) Aun cuando no puede decirse en general, que el límite de la suma de un número indefinido de términos que tienden todos hacia cero, sea también cero, esto se verifica para las expresiones de la forma $mx+nx^2+px^3+\ldots..$, siempre que los coeficientes $m, n, p\ldots..$, sean todos finitos; pues el valor absoluto del límite de esa suma, no será mayor que el de $k(x+x^2+x^3\ldots\ldots)$, designando k una cantidad positiva cualquiera mayor que dichos coeficientes, y esta última suma, que es igual á $\frac{kx}{1-x}$, para todos los valores absolutos de x menores que la unidad, tiene por límite cero cuando $x=0$.

Que el límite de la suma de un número indefinido de términos que tienden todos hacia cero, no es siempre cero, lo comprueba la serie

$$x(1-x)+x^2(1-x^2)+\cdots\cdots+x^n(1-x^n)+\cdots\cdots$$

que es el desarrollo de

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}$$

y cuya suma, cuando x se aproxima á la unidad, crece ilimitadamente; viéndose además que multiplicando todos los términos de dicha serie por el factor $1-x$, tenderían con mayor razón hacia cero, y que, sin embargo, su suma tendría por límite $\frac{1}{2}$.

(**) Si los coeficientes a_1 y b_1, fuesen distintos, asignando á x un valor h bastante pequeño para que los resultados de su substitución en las dos series continuas, se diferenciaran respectivamente de a_1 y b_1, en menos de la mitad de la diferencia que existiera entre estas constantes, dichos resultados no podrían ser iguales, en contra de lo que debe suceder.

231. Método de los coeficientes indeterminados. Pasemos ahora á explicar cómo puede desarrollarse en serie una función, $\varphi(x)$, sirviéndose de coeficientes indeterminados.

Consiste el procedimiento en suponer, desde luego, que la función sea susceptible de tomar la forma:

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots\cdots$$

siendo $A, B, C, D, \ldots.$ coeficientes por determinar, los cuales han de calcularse con la condición de que sus valores sean finitos y determinados y que la serie sea convergente, al menos para valores de x comprendidos entre ciertos límites.

Para lograr tal objeto, se efectúan con los miembros de la igualdad condicional anterior, transformaciones convenientes para que, subsistiendo dicha igualdad, se convierta ésta en la de dos expresiones

$$N + Px + Qx^2 + \cdots\cdots \quad \text{y} \quad N' + P'x + Q'x^2 + \cdots\cdots$$

cuyos coeficientes $N, N', P, P', Q, Q', \ldots.$ sean en su conjunto funciones de $A, B, C, D, \ldots\ldots$; y como estos desarrollos deberán ser también convergentes, por equivaler á las funciones finitas y determinadas correspondientes á los dos miembros de la última transformada de la primera igualdad, serán idénticos, en virtud del teorema anterior, y se tendrán las igualdades parciales:

$$N = N'; \quad P = P'; \quad Q = Q'; \ldots\ldots$$

que servirán, en general, para determinar los valores desconocidos de $A, B, C, D\ldots.$

Propongámonos, como ejemplo, desarrollar en serie, ordenada según las potencias ascendentes de x, la función $\dfrac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$. (*)

Estableceremos desde luego la igualdad,

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots\cdots$$

(*) Gran número de funciones fraccionarias pueden identificarse con la de esta forma, dando valores convenientes á las constantes a, b, a', b' y c'.

la cual, después de quitar el denominador del primer miembro, se convierte en

$$a + bx = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots\cdots)(a' + b'x + c'x^2)$$

é igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, en ambos miembros, se formarán las ecuaciones de condición:

$$a'A - a = 0; \quad a'B + b'A - b = 0; \quad a'C + b'B + c'A = 0; \ldots\ldots$$

siendo fácil deducir que, desde el tercer coeficiente de la serie, se tendrá, entre tres consecutivos cualesquiera, que designaremos por M, N, y P, la relación

$$a'P + b'N + c'M = 0.$$

De las dos primeras igualdades se despejarán los valores de A y B, los cuales, substituídos en la tercera, nos darán el de C; y desde este momento podrán calcularse tantos coeficientes como se quieran, por medio de la última igualdad, que es una escala de relación.

No debe olvidarse, sin embargo, que todo lo dicho se basa en la hipótesis de que los valores de los coeficientes desconocidos son finitos y determinados, y en que la serie supuesta es convergente; de suerte que será indispensable examinar en cada caso si efectivamente así sucede, ó entre qué límites se verifica. (*)

Ejercicios.

I. Hallar, por medio de la división, los desarrollos de las funciones

$$\frac{1}{1+x^2}; \quad \frac{1+x}{1-x}; \quad \frac{x}{x^3-1}; \quad \frac{x^m}{x-a}; \quad \frac{1+x-x^2}{1+x-x^3}.$$

II. Obtener, por medio de la extracción de raíces, el desarrollo de la función $\sqrt{1-x}$.

(*) Como aplicación de la teoría de las *funciones derivadas* obtendremos la *fórmula* ó *serie de Maclaurin*, ya citada, que permite desarrollar todas las funciones continuas de una variable, lo mismo algebraicas que transcendentes, en series ordenadas según las potencias crecientes de dicha variable, cuando, además de otras condiciones, su término complementario tiene por límite cero.

III. Desarrollar en serie, por el método de los coeficientes indeterminados, las expresiones

$$\sqrt{1+x}\,; \quad \frac{1}{1-x^2}\,; \quad \frac{1}{6-5x+x^2}\,; \quad \frac{1}{2-2x+x^2}.$$

IV.—Adición de las series, nuevos desarrollos y aplicaciones importantes.

232. Definiciones y procedimiento aditivo. *Adicionar una serie es hallar la suma algebraica del número indefinido de sus términos.*

Según esta definición, las series convergentes serán las únicas que podrán sumarse; pero como el resultado de la adición debe ser el límite de la suma de los n primeros términos, cuando n crece indefinidamente, es claro que se hallará dicho resultado si, haciendo $n=\infty$, se obtiene en forma finita el valor de S_n, que suele denominarse *expresión sumatoria* de la serie.

Este método, que es el más general, presenta muchas veces dificultades insuperables, por conducir á formas indeterminadas, ó por exigir artificios que no suelen ocurrirse al calculador sino después de observación detenida.

Consideremos, por ejemplo, la serie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots\cdots$$

Observando que sus términos son respectivamente menores que los de la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots$$

cuya convergencia nos es ya conocida (**224**), deducimos que es también convergente.

Ahora bien: la expresión sumatoria, reducidos todos los términos á un común denominador, es

$$S_n=\frac{3.4\ldots\ldots(n+1)+4.5\ldots\ldots(n+1)+2.5\ldots\ldots(n+1)+\cdots\cdots+2.3\ldots\ldots(n-1)}{\lfloor n+1},$$

la cual se convierte en el símbolo indeterminado $\frac{\infty}{\infty}$, para $n=\infty$; pero si notamos que el término general de la serie puede ponerse bajo la forma

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

se ve fácilmente que la expresión de la suma de los n primeros términos se reducirá á

$$S_n=1-\frac{1}{n+1},$$

cuyo límite, para $n=\infty$, ó, sea, el resultado de la adición de la serie, es $S=1$.

Careciendo de un método práctico general para sumar las series convergentes (*), nos concretaremos á examinar varias series de frecuente uso y á determinar su suma, sirviéndonos de consideraciones especiales para cada caso. Este examen nos conducirá á nuevos desarrollos funcionales, y á aplicaciones y consecuencias de la mayor importancia.

233. Límite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, cuando m crece ilimitadamente en valor absoluto. Suponiendo, por ahora, que m sea entero y positivo, la fórmula del binomio de Newton (**67**) da:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\left(\frac{x}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{m}\right)^2+\cdots\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p+1)}{\lfloor p}\left(\frac{x}{m}\right)^p+\cdots\cdots+\left(\frac{x}{m}\right)^m;$$

y si, en cada término, se dividen los factores del numerador de la primera fracción, por el número igual de factores m que, en forma de potencia, contiene el denominador de la segunda, se halla:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+x+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{\lfloor p}+\cdots\cdots(^{**})$$

(*) El cálculo infinitesimal tiene métodos propios y expeditos para adicionar las series, especialmente el de las *integrales definidas*.

(**) Después de esta transformación, el último término del desarrollo será el que figura como término general, poniendo m en lugar de p; lo cual se

A medida que aumenta m, el número de términos del segundo miembro crece, y, cuando aumente ilimitadamente, todos los factores binomios y sus productos sucesivos tendrán por límite la unidad; así es que dicho segundo miembro se convertirá en la serie

$$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{x^p}{\underline{|p}}+\cdots\cdots\cdots;$$

pero no puede afirmarse, desde luego, que la suma de esta serie sea el límite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$; porque, en la hipótesis hecha, consta el desarrollo de un número infinito de términos, y ya sabemos que en tal caso no hay seguridad de que el límite de la suma sea igual á la suma de los límites de los sumandos. Es indispensable, por tanto, hacer ver de una manera directa que el límite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ es efectivamente el resultado de adicionar la referida serie; la cual, según se ha dicho, es convergente para todo valor positivo ó negativo de x, puesto que la relación $\frac{x}{p}$ tiene por límite cero, cuando p crece indefinidamente.

Para conseguirlo, empecemos por demostrar que si α, β,...... λ, son varios números positivos menores que la unidad, puede establecerse siempre la igualdad:

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots\ldots(1-\lambda)=1-\theta_p(\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda),$$

representando simbólicamente por θ_p, un cierto número comprendido entre 0 y 1, correspondiente al número, p, de factores binomios del primer miembro, ó, lo que es lo mismo, al número de sumandos que hay dentro del paréntesis del segundo.

Claro es, en efecto, que cuando $\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda\geq 1$, será necesariamente θ_p positiva y menor que la unidad; porque de otra

---

comprueba observando que el producto de los factores que en él preceden á $\frac{x^p}{\underline{|p}}$, se convierte entonces en $\frac{\underline{|m-1}}{m^{m-1}}=\frac{\underline{|m}}{m^m}$, y esa fracción en $\frac{x^m}{\underline{|m}}$; obteniéndose para el producto total: $\frac{x^m}{m^m}=\left(\frac{x}{m}\right)^m$.

suerte su producto por dicha suma, no cumpliría también con ambas condiciones.

Si $\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda<1$, deduciremos de la igualdad anterior:

$$\theta_p=\frac{1-(1-\alpha)(1-\beta)\ldots\ldots(1-\lambda)}{\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda};$$

y como es evidente que

$$1>(1-\alpha)(1-\beta)>1-(\alpha+\beta)$$

y, con mayor razón,

$$1>(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)>[1-(\alpha+\beta)](1-\gamma)>1-(\alpha+\beta+\gamma)$$

y así sucesivamente, se tendrá, de un modo general:

$$1>(1-\alpha)(1-\beta)\ldots\ldots(1-\lambda)>1-(\alpha+\beta+\cdots\cdots+\lambda).$$

Restando de la unidad los miembros de esta limitación, resulta la que sigue:

$$0<1-(1-\alpha)(1-\beta)\ldots\ldots(1-\lambda)<\alpha+\beta\ldots\ldots+\lambda;$$

la cual manifiesta que el numerador de θ_p es mayor que cero y menor que su denominador; siendo también en este caso, $0<\theta_p<1$, según quería demostrarse.

En virtud, pues, de lo que precede, será:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)=1-\theta_{p-1}\frac{p(p-1)}{2m};$$

una vez que (**79**)

$$\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\cdots\cdots+\frac{p-1}{m}=\frac{p(p-1)}{2m},$$

y, en su consecuencia, el término general de la potencia del binomio tomará la forma:

$$\left(1-\theta_{p-1}\frac{p(p-1)}{2m}\right)\frac{x^p}{\underline{|p}}=\frac{x^p}{\underline{|p}}-\theta_{p-1}\frac{x^p}{2m\,\underline{|p-2}}.$$

Dando sucesivamente á p los valores 2, 3, 4, ... m, y ya que $\theta_1=1$, el desarrollo potencial podrá escribirse como sigue, después de separar los términos aditivos y substractivos, y sacar en los segundos $-\frac{x^2}{2m}$ factor común:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots+\frac{x^m}{\underline{|m}}-$$

$$-\frac{x^2}{2m}\left(1+\theta_2\frac{x}{1}+\theta_3\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\theta_{m-1}\frac{x^{m-2}}{\underline{|m-2}}\right).$$

Si ahora suponemos $m=\infty$, el factor $\frac{x^2}{2m}$ se convierte en cero, y como el que está comprendido entre paréntesis es entonces una serie convergente, por ser sus términos, á partir del segundo, menores que los de otra serie que cumple con esa condición, tendrá un valor finito que, multiplicado por cero, dará también cero por producto, de suerte que se tendrá:

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\lim\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{x^m}{\underline{|m}}\right)$$

ó, bien,

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots=S.$$

Idéntico límite se halla cuando m es un número cualquiera; pues si suponemos que sea $x>0$ y m fraccionario y positivo, se podrá establecer la limitación $n<m<n+1$, y será:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^n$$

ó, lo que es igual,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)>\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{x}{n+1}}.$$

Ahora bien: n y $n+1$ son números enteros y positivos, luego $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ y $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ tendrán el mismo límite S, cuando n tienda hacia el infinito; y como las expresiones, $1+\frac{x}{n}$ y $1+\frac{x}{n+1}$ tienen por límite la unidad, se deduce que, estando comprendida la potencia $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ entre dos variables cuyo límite común es S, debe tener también por límite esta cantidad.

Si fuese $x<0$, la demostración sería análoga, con sólo cambiar el sentido de las desigualdades.

En el caso de ser m negativo é igual á $-n$, siendo n entero ó fraccionario, se tendrá:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-x}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n=$$

$$=\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^{n-x}\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^x;$$

pero el límite del factor $\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^{n-x}$, para n ó $n-x$ igual á infinito, es S, mientras que el de $\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^x$ es la unidad; luego, en todos casos,

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

Si, en esta fórmula, hacemos $x=1$ se tiene:

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots$$

La expresión $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ puede también ponerse bajo la forma $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, haciendo $m=\frac{1}{\alpha}$, de donde, $\alpha=\frac{1}{m}$; de manera que cuando el valor absoluto de m tienda al infinito, α tenderá hacia cero. Así podemos decir que, cumpliéndose esta condición,

$$\lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\cdots\cdots\cdots$$

(*) Es digno de notarse que el límite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, cuando m crece ilimitadamente en valor absoluto, y el cual acaba de demostrarse que es siempre esta misma serie, toma la forma simbólica 1^∞ que, según más adelante veremos, es una de las *formas indeterminadas potenciales*.

ó, bien (180),

$$e = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{|n}} + \cdots\cdots\cdots \; (*)$$

234. Cálculo del número e. Para determinar este importante número, base del sistema de los logaritmos neperianos, y cuyo desarrollo acabamos de obtener, observaremos que, en la serie

$$1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{|n}} + \cdots\cdots\cdots$$

la suma de los términos que siguen á los dos primeros, es inferior á la de los términos de la progresión geométrica indefinida,

$$\div\, \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^3} : \cdots\cdots : \frac{1}{2^{n-1}} : \cdots\cdots\cdots$$

que es la unidad; luego el número e está comprendido entre 2 y 3 y no puede, por consiguiente, ser entero. Demostrando que tampoco es fraccionario, quedará evidenciada su inconmensurabilidad.

Si pudiera ser e una fracción tal como $\frac{m}{n}$, se tendría:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{|n}} + \frac{1}{\underline{|n+1}} + \frac{1}{\underline{|n+2}} + \cdots\cdots\cdots,$$

y agrupando los $n+1$ primeros términos, y reuniendo los demás bajo la forma,

$$\frac{1}{\underline{|n}}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \cdots\cdots\right]$$

resultaría:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{|n}} +$$
$$+ \frac{1}{\underline{|n}}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \cdots\cdots\right]$$

Multiplicando ahora los dos miembros de esta igualdad por

(*) Por el procedimiento seguido para obtener esta expresión, se ve que el valor de e es independiente de que α sea una cantidad positiva ó negativa, siempre que tenga por límite cero.

$\underline{|n}$, los $n+1$ primeros términos del segundo miembro se convertirán en números enteros, cuya suma representaremos por N, de suerte que

$$m\,\underline{|n-1} = N + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \cdots\cdots\right]$$

Como la expresión encerrada en los corchetes se compone de términos que son, desde el segundo, menores que los de la progresión geométrica decreciente indefinida

$$\div\, \frac{1}{n+1} : \frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{(n+1)^3} : \cdots\cdots\cdots$$

resulta que su suma será menor que la unidad; puesto que la de los términos de esta progresión es precisamente $\frac{1}{n}$ (83); así es que un número entero, sería igual á otro número entero aumentado en una fracción menor que la unidad; y, como esto es imposible, el número e no puede ser tampoco fraccionario. (*)

Si tomamos la suma de los $n+1$ primeros términos de la serie, por valor aproximado de e, se cometerá un error

$$\varepsilon = \frac{1}{\underline{|n}}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \cdots\cdots\right];$$

y, como la cantidad comprendida entre corchetes hemos visto que es inferior á $\frac{1}{n}$, se deduce que

$$\varepsilon < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\underline{|n}};$$

luego puede decirse que, cuando se toman $n+1$ términos, se comete un error inferior á la $n^{\text{ésima}}$ parte del último término calculado.

Si queremos calcular S_{12}, será fácil determinar el valor de cada

(*) El primero que demostró la inconmensurabilidad del número e, fué el matemático alemán, de mediados del siglo anterior, Juan Enrique Lambert; pero la ingeniosa demostración, que hemos dado, se debe á Juan Bautista Fourier, uno de los más célebres matemáticos franceses de principios de este siglo.

término, en virtud de la ley de formación de la serie, según indica el siguiente cuadro:

$$
\begin{aligned}
& \ 2\\
\frac{1}{\underline{|2}} &= 0{,}5\\
\frac{1}{\underline{|3}} &= 0{,}1666666\underline{7}\\
\frac{1}{\underline{|4}} &= 0{,}0416666\underline{7}\\
\frac{1}{\underline{|5}} &= 0{,}00833333\\
\frac{1}{\underline{|6}} &= 0{,}0013888\underline{9}\\
\frac{1}{\underline{|7}} &= 0{,}00019841\\
\frac{1}{\underline{|8}} &= 0{,}00002480\\
\frac{1}{\underline{|9}} &= 0{,}0000027\underline{6}\\
\frac{1}{\underline{|10}} &= 0{,}0000002\underline{8}\\
\frac{1}{\underline{|11}} &= 0{,}0000000\underline{3}\\
\hline
S_{12} &= 2{,}71828184\ (*)
\end{aligned}
$$

Estos diversos valores se han obtenido por divisiones sucesivas, y, al prescindir de la parte restante de la serie, se ha cometido un error por defecto inferior á la undécima parte del último término calculado, y con mayor razón menor que $\frac{3}{10^9}$ ó que $\frac{1}{2.10^8}$. Además: como los tres primeros términos son exactos, y seis se han calculado por exceso y tres por defecto, en menos de media unidad del octavo orden decimal, resulta que para corregir la suma encontrada, hay que disminuirla en menos de tres uni-

(*) Los trazos, colocados debajo de las últimas cifras, denotan que los valores correspondientes son aproximados por exceso.

dades de dicho orden, y aumentarla en menos de dos; luego se tendrá:

$$e > 2{,}71828181 \quad \text{y} \quad e < 2{,}71828186$$

y, por lo tanto,

$$e = 2{,}7182818,$$

con siete cifras decimales exactas.

235. Desarrollo de e^x. Puesto que, según hemos demostrado,

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

cuando el valor absoluto de m tiende hacia el infinito, se verificará, en la misma hipótesis,

$$e^x = \left[\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^x = \lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx}.$$

Si hacemos, ahora,

$$mx = \mu \quad \text{de donde} \quad m = \frac{\mu}{x},$$

se tendrá:

$$e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{\mu}\right)^\mu;$$

y, como el valor absoluto de μ tiende al infinito al mismo tiempo que el de m, se deduce que

$$e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots;\ (*)$$

expresión que, según debía suceder, da el valor del número e, haciendo $x = 1$.

236. Desarrollo de $(1+x)^m$. Sabemos que, cuando m es un número entero y positivo, se tiene:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2 + \cdots\cdots + x^m$$

resultando, como desarrollo, una expresión compuesta de $m+1$ términos. (**)

(*) Este desarrollo, siempre convergente, es debido al insigne Euler.

(**) La demostración que se dió de la fórmula del binomio de Newton (**67**), supuso implícitamente que m era entero y positivo, al igualar el desarrollo buscado á un polinomio que, si bien tenía coeficientes por determinar, era de forma racional y entera, y del grado m.

En el caso de ser m fraccionario ó negativo, la aplicación de la fórmula precedente ó, mejor dicho, la ley de sucesión de sus términos, da una serie indefinida, que ignoramos si equivale también á la potencia indicada.

Para dilucidar este punto, que es del mayor interés, conviene ante todo cerciorarse de que la suma de dicha serie tiene un límite. Observaremos, con tal propósito, que la relación del término $(p+1)^{\acute{e}simo}$ al $p^{\acute{e}simo}$, es

$$r = \frac{m-p+1}{p}x = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right)x$$

y que, por lo tanto,

$$\lim r = -x;$$

lo cual nos dice que para que sea convergente la serie, es completamente indispensable que

$$\text{mod.}^{\circ}\, x < 1. \text{ (*)}$$

Debemos, pues, concretarnos á determinar el límite de la serie

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}x^3 + \cdots\cdots$$

cuando, siendo m un número cualquiera, el valor absoluto de x sea menor que la unidad.

Sabido esto, designemos dicho límite por $\varphi(m)$, y establezcamos la igualdad

$$\varphi(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2 + \cdots\cdots$$

considerando á m como una variable.

Si se da á esta cantidad numérica un valor diferente, n, deberá verificarse del mismo modo que

$$\varphi(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2 + \cdots\cdots$$

(*) Por consideraciones, que no pueden tener aquí cabida, se demuestra que la serie considerada es todavía convergente cuando $x = \pm 1$, siempre que m sea positivo; y que cuando este exponente es negativo, tiene que estar comprendido precisamente entre 0 y -1, para que subsista la convergencia en el único caso de ser $x = 1$.

Ahora bien: cuando m y n sean números enteros y positivos, el producto de los segundos miembros, de las dos igualdades anteriores, será $(1+x)^{m+n}$; puesto que entonces los primeros son respectivamente $(1+x)^m$ y $(1+x)^n$; es decir, que dicho producto tendrá la misma forma que cada uno de los factores, sin más diferencia que la de substituir m ó n por su suma $m+n$.

Si, en tal supuesto, se imaginan ordenados con relación á las potencias ascendentes de x, el producto $\varphi(m).\varphi(n)$ y la función $\varphi(m+n)$, los coeficientes de las mismas potencias, que son polinomios enteros, respecto de m y de n, deberán ser iguales para una infinidad de valores enteros de m y cualquier valor también entero de n, es decir, para un número de valores seguramente superior al mayor de sus grados con respecto á la primera variable; luego serán á su vez iguales para valores cualesquiera de m, combinados con el ya referido de n (54, teor. IV). Sabido esto, vemos análogamente que dando á m cualquier valor, los dos polinomios considerados serán iguales para un número de valores enteros de n superior á sus grados con relación á esta segunda variable; siéndolo, por lo tanto, para todo valor que se le asigne.

Resulta así que, para valores cualesquiera de m y de n, será:

$$\varphi(m).\varphi(n) = \varphi(m+n),$$

y, por consiguiente, designando por k un número entero y positivo, se tendrá:

$$[\varphi(m)]^k = \varphi(mk).$$

Obtenida esta igualdad, supongamos que sea m una fracción positiva cualquiera, tal como $\frac{q}{r}$, y tendremos:

$$[\varphi(m)]^r = \varphi(mr) = \varphi(q);$$

mas como q es entero y positivo, deberá ser $\varphi(q) = (1+x)^q$ y, en su consecuencia,

$$[\varphi(m)]^r = (1+x)^q$$

de donde se deduce

$$\varphi(m) = (1+x)^{\frac{q}{r}} \quad \text{ó, bien,} \quad \varphi(m) = (1+x)^m$$

para todo valor positivo de m.

Si en la hipótesis de ser m un número negativo cualquiera, entero ó fraccionario, hacemos $n = -m$, resulta:

$$\varphi(m).\ \varphi(-m) = \varphi(0);$$

y, como evidentemente $\varphi(0) = 1$, se verificará que

$$\varphi(m) = \frac{1}{\varphi(-m)};$$

pero, siendo $-m$ positivo, se tiene $\varphi(-m) = (1+x)^{-m}$ y, por lo tanto,

$$\varphi(m) = \frac{1}{(1+x)^{-m}} \quad \text{ó, lo que es lo mismo,} \quad \varphi(m) = (1+x)^m,$$

para cualquier valor negativo de m.

Resulta, pues, de un modo general, que

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2 + \cdots\cdots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{\underline{|p}}x^p + \cdots\cdots\cdots;$$

siempre que el módulo, ó el valor absoluto de x, sea inferior á la unidad. (*)

237. Generalización de la fórmula del binomio (**). El desarrollo que acaba de obtenerse permite generalizar la fórmula de la potencia de un binomio cualquiera $x+a$, sin otra restricción que la de ser $mod.^o \frac{a}{x} < 1$.

Se tiene, en efecto,

$$(x+a)^m = \left[x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]^m = x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m;$$

y, por consiguiente, para todo valor de m, siempre que el valor absoluto de a sea menor que el de x, se verificará:

(*) Según Todhunter, el procedimiento demostrativo, que hemos empleado, se debe también á Euler.

(**) Sin demostrarla, el famoso Newton anunció la generalidad de la fórmula á que dió nombre, la cual está grabada sobre su tumba, en la abadía de Westminster, como uno de los descubrimientos más notables de la inteligencia humana.

$$(x+a)^m = x^m\left[1 + m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \cdots\cdots +\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{\underline{|p}}\left(\frac{a}{x}\right)^p + \cdots\cdots\cdots\right]$$

ó, efectuando la multiplicación,

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}a^2x^{m-2} + \cdots\cdots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{\underline{|p}}a^px^{m-p} + \cdots\cdots\cdots;$$

que es la fórmula del binomio de Newton generalizada. (*)

Conviene observar que, cuando m es un número entero, el primero y el segundo miembro, es decir, la potencia y su desarrollo, no tienen sino un solo valor. Si, por el contrario, m es una frac-

(*) Debe notarse que cuando m sea negativo ó fraccionario, los términos del desarrollo serán alternativamente positivos y negativos, á partir de un cierto término, si x y a son del mismo signo; puesto que la relación ó factor

$$\frac{m-p+1}{p} \cdot \frac{a}{x}$$

será desde luego, ó llegará á ser, menor que cero. Por el contrario, dichos términos sucesivos serán ó llegarán á ser de igual signo, cuando x y a los tengan distintos.

Si, en la misma hipótesis respecto de m, el valor absoluto del segundo término del binomio no es menor que el primero, hemos visto que la fórmula de Newton deja de ser general, excepto en los casos particulares antes indicados, y da origen á series divergentes. Por tal motivo su aplicación conduce entonces á igualdades imposibles, tales como:

$$\frac{1}{2} = (1+1)^{-1} = 1-1+1-1+\cdots\cdots \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} = (1-3)^{-1} = 1+3+3^3+3^2+\cdots\cdots$$

Lo dicho, respecto á la *generalidad restringida* del desarrollo de la potencia de un binomio, permite resolver la dificultad que algunos presentan, haciendo en la forma limitada del mismo $x = a = 1$ y $m = 0$, lo cual da $2^0 = 1 + 1$, ó, bien, $1 = 2$.

Para explicar este resultado absurdo, basta observar que el exponente cero debe considerarse como límite, no de un número entero, sino de una fracción positiva cuyo denominador tienda al infinito; y como siendo el exponente fraccionario, el desarrollo carece de último término, se ve que al hacer las hipótesis anteriores, se obtiene solamente 1 por límite de dicho desarrollo, y la identidad $1 = 1$.

ción positiva ó negativa, $\frac{q}{r}$, en la cual siempre puede considerarse que $r>0$, notaremos que

$$\overline{(x+a)}^{\frac{q}{r}}=\sqrt[r]{(x+a)^q}=\sqrt[r]{x^q\left(1+\frac{a}{x}\right)^q}; \ (*)$$

y como, según hemos demostrado (**213**), la raíz algebraica de un producto de dos factores, se obtiene multiplicando todos los valores de la raíz, del mismo orden, de uno de ellos, por cualquiera de los valores de la raíz del otro, se tendrá:

$$\overline{(x+a)}^{\frac{q}{r}}=\sqrt[r]{x^q}\,.\,\sqrt[r]{\left(1+\frac{a}{x}\right)^q}=\overline{x}^{\frac{q}{r}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{q}{r}}$$

ó substituyendo, en lugar de $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{q}{r}}$, el único valor que da el desarrollo antes encontrado, resultará:

$$\overline{(x+a)}^{\frac{q}{r}}=\overline{x}^{\frac{q}{r}}\left[1+m\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{a}{x}\right)^3+\cdots\cdots\right];$$

bajo cuya forma se ve fácilmente la manera de conseguir una identidad absoluta entre la potencia indicada y el desarrollo, haciendo que comprenda éste todos los valores de la potencia fraccionaria. (**)

(*) Por analogía á lo anteriormente convenido, respecto de un radical, convendremos en colocar una línea horizontal encima de la cantidad que se eleva á una potencia fraccionaria, cuando quiera considerarse la multiplicidad de valores de dicha potencia.

(**) La fórmula de Leibnitz, que da la potencia de un polinomio (**68**), supone que el exponente ha de ser entero y positivo, y, en tal concepto, no es susceptible de generalización; pero si el valor absoluto del primer término del polinomio excede al de la suma algébrica de los demás, el desarrollo de Newton, permite hacer depender la potencia de exponente fraccionario ó negativo, de las potencias enteras y positivas de un polinomio que contenga un término menos.

Ejercicios.

I. Adicionar la serie convergente

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$$

observando que el término general puede ponerse bajo la forma

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

II. Desarrollar en serie, por la fórmula del binomio, las expresiones:

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}; \quad \sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}; \quad 1=\sqrt{2-1}=(2-1)^{\frac{1}{2}};$$

$$2=\sqrt[3]{7+1}=(7+1)^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{5}{9}=5(2+1)^{-2}.$$

LIBRO IV

ANÁLISIS COMBINATORIO

CAPÍTULO PRIMERO

OPERACIONES COORDINATORIAS

I.—Preliminares

238. Definiciones. *Se llama coordinación matemática á un conjunto de letras ó de números, dispuestos unos á continuación de los otros.* (*)

Así: $abcd$, 13705, $\gamma 2 0 \alpha \beta 9$,

son tres grupos que representan otras tantas coordinaciones.

Cada una de las letras ó números, que forman la coordinación, recibe el nombre de *elemento*. (**)

239. Clasificación de las coordinaciones. Las coordinaciones se clasifican por el número de elementos que contienen, y por la naturaleza de éstos.

En el primer concepto, hay coordinaciones *unitarias, binarias, ternarias, cuaternarias*, etc., según constan, respectivamente, de uno, dos, tres, cuatro, etc. elementos. Tales son, por ejemplo:

$$a, \quad bc, \quad 123, \quad \alpha 2 \lambda \beta.$$

(*) Coordinación, en su sentido general, es la acción y efecto de coordinar; esto es, de disponer en cierto orden algunas cosas.

(**) No es costumbre establecer separación alguna entre las letras ó los números que forman una coordinación; pero si estos últimos constaran de más de una cifra, se deberían subrayar ó encerrarse entre paréntesis, enunciándose como tales en la lectura.

El número de elementos de cada coordinación determina su *grado*.

Respecto á la calidad de los elementos constitutivos de una coordinación, puede suceder que, en coordinaciones de igual grado, no haya siquiera dos formadas por los mismos elementos, y entonces se denominan *combinaciones* ó *productos diferentes*; y, si no existe dicha limitación, y son también de igual grado, se las distingue con el nombre de *variaciones*.

En tal concepto

$$abcd, \quad achm, \quad bdcl$$

son combinaciones; y

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad abd, \quad acd$$

son variaciones.

Resulta, pues, que todas las combinaciones de un mismo grado se distinguen entre sí por uno, al menos, de los elementos que las forman; mientras que las variaciones pueden diferenciarse en esto mismo, ó únicamente en el orden de colocación de sus elementos; debiendo haber grupos de una y otra clase en el conjunto, siempre que no entren uno solo ó todos los elementos en cada variación.

Se llaman *permutaciones* las coordinaciones que resultan de permutar todos los elementos de una agrupación cualquiera, esto es, de hacer que cada uno de ellos ocupe sucesivamente todos los lugares posibles.

Así: si en la coordinación abc, hacemos que sus elementos ocupen todas las posiciones posibles, respecto de los demás, se tendrán las permutaciones

$$abc, \quad acb, \quad cab, \quad bac, \quad bca, \quad cba;$$

deduciéndose, por consiguiente, que las permutaciones no son sino variaciones de unos mismos elementos, cuyo grado es el número total de los que se coordinan. (*)

(*) Según las definiciones dadas, no hay permutaciones sino desde el segundo grado en adelante, y en nada difieren las variaciones y las combinaciones de primer grado.

240. Coordinaciones con repetición. Cuando en las coordinaciones hay uno ó varios elementos que se repiten, se obtienen las *combinaciones y variaciones con repetición.*

Las *permutaciones con repetición* son las que se derivan de una coordinación que contiene elementos repetidos.

Si en las coordinaciones puede repetirse cada elemento tantas veces como unidades tiene el número que expresa su grado, se dice que la repetición es *ilimitada* ó *completa*; pero si no han de repetirse dichos elementos más que un número de veces señalado con antelación, é inferior á su grado, entonces es *limitada* ó *incompleta*. Mientras no se indique lo contrario, se entiende que la repetición es ilimitada.

241. Sucesiones é inversiones. Cuando, en una coordinación cualquiera, se atiende al orden en que están dispuestos sus elementos, respecto de una cierta disposición fundamental, decimos que dos elementos forman una *sucesión* ó una *inversión*, según que se hallen colocados en el mismo orden ó en orden inverso al que tenían en dicha disposición primera.

En tal concepto, si en la coordinación

$$hrlnp$$

consideramos como disposición fundamental la que tienen las letras en el alfabeto, diremos que h forma sucesión con l, n y p; mientras que r forma inversión con las mismas letras.

242. Notación simbólica en las operaciones coordinatorias. Para representar simbólicamente el número de coordinaciones sin repetición, del grado n, y de cualquier clase, que pueden formarse con m objetos, se emplea la letra inicial correspondiente, afectada del índice que expresa el grado, y del subíndice que indica el número total de objetos con que se opera.

Así: V_m^n y C_m^n representan, respectivamente, el número de variaciones y de combinaciones, del grado n, que pueden formarse con m objetos; y P_m indica el número de permutaciones que es posible efectuar en una coordinación de m elementos; suprimiéndose aquí el índice, puesto que ha de ser igual al número de objetos considerados.

Cuando las variaciones y combinaciones son con repetición, se subraya el índice en esta forma: $V_m^{\underline{n}}$ y $C_m^{\underline{n}}$; y en las permutaciones se ponen los índices que manifiestan las veces que está repetido un mismo elemento; de modo que $P_m^{\alpha\beta}$ indica que, en las permutaciones cuyo número representa, hay dos elementos que se repiten, respectivamente, α y β veces. (*)

Ejercicios.

I. Tomando como términos de comparación, ó disposiciones fundamentales, el orden alfabético y el numérico ascendente, obtener el número de sucesiones y el de inversiones de los grupos que siguen:

lpadzb ; *ehmq* ; 2754163 ; 1311975.

II. Hallar el número total de inversiones y sucesiones que contiene una coordinación de n letras, cualquiera que sea el orden ó disposición primitiva.

II.—Variaciones.

243. Formación y número de variaciones sin repetición. La definición que hemos dado de *variación*, indica el medio de obtener todas las del grado n que pueden formarse con m letras; pues es evidente que las de primer grado se hallarán escribiendo separadamente cada una de dichas m letras, en esta forma:

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ h,\ k.$$

y, por lo tanto, $V_m^1 = m$.

Para obtener las binarias, se ponen sucesivamente, y á continuación de cada letra, cada una de las demás, lo que da el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{l} ab,\ \ ac,\ \ ad,\ldots\ldots\ldots ak, \\ ba,\ \ bc,\ \ bd,\ldots\ldots\ldots bk, \\ ca,\ \ cb,\ \ cd,\ldots\ldots\ldots ck, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ka,\ \ kb,\ \ kc,\ldots\ldots\ldots kh, \end{array}$$

(*) Siempre que en el lenguaje corriente no se dice lo contrario de un modo explícito, ó no resulta así del enunciado de un problema, se entiende que las coordinaciones, de cualquier clase, lo son sin repetición.

La primera fila contiene, efectivamente, todas las variaciones que empiezan por a, la segunda las que empiezan por b, etc.; de modo que tendremos evidentemente todas las variaciones binarias; y como cada fila contiene $m-1$, sin que haya dos iguales, y hay m filas, resulta:

$$V_m^2 = m(m-1).$$

Si á la derecha de cada una de estas variaciones binarias, escribimos sucesivamente cada una de las $m-2$ letras restantes, claro es que se habrán formado todas las variaciones ternarias, hallándose éstas contenidas en el cuadro que sigue:

$$\begin{array}{l} abc,\ \ abd,\ldots\ldots\ldots abk, \\ acb,\ \ acd,\ldots\ldots\ldots ack, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bac,\ \ bad,\ldots\ldots\ldots bak, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ kab,\ \ kac,\ldots\ldots\ldots kah, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

pues una variación ternaria ha de estar compuesta de una binaria, seguida de una cierta letra distinta; y no habrá ninguna repetida, porque las variaciones de una misma fila se diferencian en la tercera letra, y las contenidas en dos filas diversas se diferencian, por lo menos, en la variación binaria. Como cada fila tiene $m-2$ variaciones, y hay $m(m-1)$ filas, se deduce que

$$V_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

Prosiguiendo la operación del mismo modo, hasta formar las variaciones de grado n, se comprende que llegaríamos á establecer la fórmula

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots\ (m-n+1).$$

Esta fórmula, que es completamente general, obtenida por inducción, se demuestra fácilmente por análogos razonamientos á los antes empleados.

Suponiendo, en efecto, formadas todas las variaciones del grado $n-1$, es claro que para obtener las del grado n, bastará escribir, á la derecha de cada una, sucesivamente las $m-n+1$

letras restantes; pues una variación del grado n se compone por precisión, de otra del grado $n-1$ seguida de una letra, lo cual prueba que no faltará ninguna, y todas las variaciones obtenidas serán distintas, porque se diferenciarán en la última letra ó en la variación del grado $n-1$ que la preceda. Como cada variación del grado $n-1$, produce así $m-n+1$ del grado n, se tendrá la expresión general

$$V_m^n = V_m^{n-1}(m-n+1).$$

Dando á n los valores sucesivos 2, 3, 4.....n, resultan las igualdades siguientes:

$$V_m^2 = V_m^1(m-1) = m(m-1)$$
$$V_m^3 = V_m^2(m-2)$$
$$V_m^4 = V_m^3(m-3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_m^n = V_m^{n-1}(m-n+1)$$

que, multiplicadas miembro á miembro, dan

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Esta expresión puede traducirse en lenguaje, diciendo que *el número de variaciones sin repetición, del grado* n, *que pueden formarse con* m *elementos, es igual al producto de los* n *factores decrecientes y consecutivos, de la serie numérica que empieza por* m.

En tal concepto, el número de variaciones ternarias que pueden formarse con siete letras, es

$$V_7^3 = 7.6.5 = 210;$$

y el de números diferentes, compuestos de tres cifras significativas distintas, será:

$$V_9^3 = 9.8.7 = 504.$$

244. Variaciones con repetición. Es evidente que se obtendrán las variaciones con repetición, del grado n, formadas con m elementos, uniendo cada uno de éstos á las variaciones de la misma especie del grado $n-1$; de manera que su número será:

$$\overline{V}_m^{n} = \overline{V}_m^{n-1} m.$$

La misma ley aplicada á $\overline{V}_m^{n-1}$ da:

$$\overline{V}_m^{n-1} = \overline{V}_m^{n-2} m$$

y, substituyendo en la primera igualdad, se obtiene:

$$\overline{V}_m^{n} = m^2 \overline{V}_m^{n-2}.$$

Continuando del mismo modo, puede establecerse la relación general

$$\overline{V}_m^{n} = m^p \overline{V}_m^{n-p};$$

y suponiendo en ella $p = n-1$, y observando que indudablemente

$$\overline{V}_m^{1} = V_m^1 = m,$$

resulta la fórmula:

$$\overline{V}_m^{n} = m^n.$$

Traducida ésta en lenguaje, manifiesta que *el número de variaciones con repetición, del grado* n, *que pueden formarse con* m *elementos, es igual á la potencia de* m *cuyo exponente es el número que indica el grado de dichas variaciones.* (*)

Ejercicios.

I. ¿Cuántas variaciones pueden formarse con doce objetos, tomados dos á dos?

II. Una persona tiene dos sortijas de diferente forma: ¿de cuántas maneras diversas puede ponérselas, ya en la mano derecha, ya en la izquierda, ya en ambas, colocando una sola sortija en un dedo y exceptuando el pulgar de cada mano?

III. ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse á lo más con veinte consonantes y cinco vocales, sabiendo que cada palabra ha de contener tres consonantes y dos vocales, y que éstas no han de ocupar sino los lugares segundo y cuarto?

(*) Hubieran también podido multiplicarse, miembro á miembro, todas las igualdades sucesivas y diversas.

IV. Guardando el número de variaciones de m objetos, tomados tres á tres, con el de variaciones de los mismos objetos, tomados cuatro á cuatro, la relación de uno á veinte, hallar dicho número m.

III.—Permutaciones.

245. Permutaciones sin repetición. Como las permutaciones son variaciones, en las que entra la totalidad de los elementos considerados, se deduce que para obtener el número de permutaciones que pueden formarse con m elementos, bastará hacer, $n=m$, en la fórmula que da V_m^n, de modo que se tendrá:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 2.1 = \underline{|m}.$$

Esta nueva fórmula expresa que *el número de permutaciones, que pueden formarse con* m *elementos, es igual al producto de los* m *primeros números.*

Demostraremos directamente esta proposición, enseñando á la vez un procedimiento expedito para formar las permutaciones.

Es evidente que con dos letras, a y b, no pueden formarse sino dos permutaciones:

$$ab, \qquad ba,$$

por lo tanto,

$$P_2 = 2 = 2.1 \ (*)$$

Si á la derecha de cada permutación de dos letras, escribimos la tercera, y hacemos que ocupe todos los lugares posibles, se obtendrán de seguro las permutaciones de tres letras, á saber:

$$\begin{matrix} abc, & acb, & cab, \\ bac, & bca, & cba, \end{matrix}$$

pues toda permutación ternaria tiene que estar compuesta de otra de dos elementos y de un tercero colocado en un cierto lugar; no resultando así permutaciones repetidas, porque dos cualesquiera de ellas se diferenciarán en el lugar que ocupe la tercera letra ó, á lo menos, en la disposición de las otras dos. Como cada permutación de dos elementos origina así tres, será:

$$P_3 = P_2 . 3 = 3.2.1.$$

(*) Según ya se ha indicado, un elemento solo no puede originar ninguna permutación.

Procediendo de igual manera se hallaría:

$$P_4 = P_3 . 4 = 4.3.2.1,$$

y, por último,

$$P_m = m(m-1)\ldots\ldots 2.1 = \underline{|m}. \ (*)$$

Según esta fórmula, el número de agrupaciones diferentes que se podrán formar con cuatro letras, es

$$P_4 = 1.2.3.4 = 24;$$

y el de maneras distintas como pueden colocarse en fila diez soldados, será:

$$P_{10} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800.$$

246. Permutaciones con repetición. Hasta ahora hemos supuesto que todos los elementos de una permutación eran distintos. Para obtener más fácilmente, en el caso de haberlos iguales, el número de permutaciones que pueden formarse, consideraremos, en orden sucesivo, la igualdad de los elementos componentes.

Si entre las m letras que han de entrar en cada permutación, hay α iguales á a, siendo distintas las restantes $b, c\ldots\ldots k$, se observa que, conservando la disposición de estas últimas y alterando sólo el de las α letras a, obtendremos grupos que no se diferenciarán unos de otros; pero si á dichos elementos iguales se les pone un subíndice numérico distinto, quedarán representados por $a_1, a_2, \ldots\ldots a_\alpha$, de modo que cuando estas letras, así modificadas, se permuten en las primitivas permutaciones, cada una de ellas producirá P_α diferentes; mas como así se habrán formado todas las permutaciones de m elementos diversos, se tendrá:

$$P_m = P_m^\alpha . P_\alpha \qquad \text{de donde} \qquad P_m^\alpha = \frac{P_m}{P_\alpha} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha}}.$$

Si suponemos que además de α letras iguales á a haya β iguales á b, observamos análogamente que, afectando á cada elemento b de un subíndice y permutando después estos elementos de todas

(*) Aunque menos brevemente que por el método inductivo, el valor de P_m podría deducirse por medio de la relación general $P_n = P_{n-1} n$.

las maneras posibles, en cada una de las permutaciones cuyo número representamos por $P^{\alpha\beta}_m$, se obtendrán $P^{\alpha\beta}_m \cdot P_\beta$ permutaciones, en las cuales habrá sólo α elementos iguales á a, y, por lo tanto,

$$P^{\alpha\beta}_m \cdot P_\beta = P^{\alpha}_m = \frac{P_m}{P_\alpha} \quad \text{de donde} \quad P^{\alpha\beta}_m = \frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha} \cdot \underline{|\beta}}.$$

Razonando de igual modo, se deduce que cuando entre los m elementos haya α iguales á a, β iguales á b, γ iguales á c, etc., el número de permutaciones con repetición estará determinado por la fórmula

$$P^{\alpha\beta\gamma\cdots\cdots}_m = \frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \cdots\cdots} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha} \cdot \underline{|\beta} \cdot \underline{|\gamma} \cdots\cdots};$$

expresión que puede traducirse en lenguaje.

Como aplicación de esta fórmula, resulta que el número de permutaciones distintas que podrán formarse con once elementos, entre los cuales haya tres iguales á a, cinco á b, dos á c y uno á d, será:

$$P^{3,5,2}_{11} = \frac{\underline{|11}}{\underline{|3} \cdot \underline{|5} \cdot \underline{|2} \cdot \underline{|1}} = 27720.$$

Ejercicios.

I. ¿De cuantas maneras pueden colocarse en fila los 30 alumnos de una clase?

II. En una de las tablas de un estante hay 30 volúmenes, de los cuales 10 están encuadernados en pergamino, 9 en pasta, 6 á la holandesa y los otros 5 en rústica; ¿de cuántos modos distintos pueden colocarse con relación á las encuadernaciones?

IV.—Combinaciones.

247. Combinaciones sin repetición. La fórmula que da el número de combinaciones, se deduce fácilmente de las que se han obtenido para las variaciones y permutaciones.

Si suponemos, en efecto, formadas todas las combinaciones del

grado n, que pueden producir m elementos, y en cada una de ellas efectuamos la permutación completa de los n elementos que contiene, habremos formado todas las variaciones del grado n de que son susceptibles m elementos distintos; pues toda variación es una combinación cuyos elementos están colocados en un cierto orden y, por consiguiente, no podrá faltar ninguna; pudiendo además asegurarse que no resultarán variaciones iguales, porque las procedentes de una misma combinación se diferenciarán en el orden de sus elementos, y las que provengan de combinaciones distintas diferirán, por lo menos, en uno de dichos elementos. Como, de la manera expuesta, cada combinación debe producir P_n permutaciones, se verificará que

$$V^n_m = C^n_m \cdot P_n$$

y despejando:

$$C^n_m = \frac{V^n_m}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}};$$

fórmula que, traducida en lenguaje, manifiesta que *el número de combinaciones que pueden formarse con* m *elementos, tomados* n *á* n, *es igual á la fracción que tiene por numerador el número de variaciones de igual grado, y por denominador el de permutaciones de* n *elementos.* (*)

De lo expuesto resulta que, para obtener las combinaciones, deberían formarse primero las variaciones de igual grado, agrupar después todas las que sólo se diferenciaran en el orden de sus elementos, y, por fin, tomar una de cada grupo para formar combinación; pero como este procedimiento sería en extremo prolijo, explicaremos otro más aceptable.

Observamos, desde luego, que si una vez dispuestos en un

(*) Podría decirse, en forma más explícita, que dicho número *está expresado por una fracción cuyo numerador es el producto de* n *números consecutivos decrecientes á partir de* m, *y su denominador el de los* n *primeros números.*

Conviene igualmente advertir, que debiendo ser C^n_m un número entero, se deduce la propiedad numérica de que *el producto de* n *números consecutivos, es divisible por el producto de los* n *primeros números.*

cierto orden todos los elementos considerados y los de las combinaciones del grado $n-1$, se ponen sucesivamente á continuación de cada una de ellas, todos los elementos que siguen al último de los que comprenden, se obtendrán las combinaciones del grado n. La demostración es inmediata, notando que no podrá faltar ninguna combinación de ese grado; pues, si así fuese, colocando sus elementos en el orden referido y prescindiendo del último de ellos, se hallaría una combinación del grado $n-1$, no comprendida entre las que suponemos formadas; y como, por otra parte, todas las que se obtengan serán distintas, por diferenciarse en el último elemento ó en alguno de los anteriores, queda probado lo que quería demostrarse.

Se ve, en su consecuencia, que para formar las combinaciones de grado n, de m letras diferentes, bastará disponerlas por orden alfabético, y se tendrán así las combinaciones de un elemento; agregando después á éstas, una á una, todas las letras que las siguen, se hallarán las combinaciones binarias; y, continuando de igual modo, llegarán á obtenerse las del orden considerado. (*)

Si queremos, pues, formar las combinaciones ternarias de las cuatro letras

$$a,\ b,\ c,\ d,$$

empezaremos por formar las combinaciones binarias

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

y agregando sucesivamente, á cada una de éstas, las letras que siguen á la última de las que contienen, resultará:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd,$$

que son las combinaciones pedidas.

Entre los números que representan las combinaciones, existen relaciones notables que conviene conocer, y las cuales se expresan en los siguientes teoremas.

TEOREMA I. *El número de combinaciones, del grado* n, *de* m *elementos, es igual al de sus combinaciones del grado* m — n.

(*) Claro es que deberá prescindirse de las combinaciones que terminen en la última de las m letras.

En efecto: si las dos expresiones

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots[m-(m-n)+1]}{\underline{|m-n}} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(n+1)}{\underline{|m-n}}$$

que representan, en forma fraccionaria, dichos números de combinaciones, se reducen á un común denominador, veremos que los dos numeradores se convertirán en el producto

$$m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots 3.2.1 = \underline{|m}\ ;$$

y que, por lo tanto,

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|n}\ .\ \underline{|m-n}}.\ (*)$$

TEOREMA II. *El número de combinaciones del grado* n, *de* m *elementos, es igual á la suma de las combinaciones de* m—1 *elementos, de los grados* n *y* n—1.

Efectivamente: las combinaciones del grado n, de m elementos $a, b, c, \ldots. k$, pueden clasificarse en dos categorías, á saber: unas en que no entra un cierto elemento h, y otras que lo contienen. En la primera categoría estarán todas las combinaciones del grado n, de m—1 elementos; y evidentemente se obtendrán las de la segunda, formando las combinaciones del grado $n-1$, de los $m-1$ elementos distintos de h, y agregándoles después este último; luego

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}\ ;$$

resultado que se comprueba fácilmente, sumando las expresiones que dan los valores de C_{m-1}^n y de C_{m-1}^{n-1}.

(*) De la igualdad demostrada, se deduce que el número representado por el símbolo C_m^n no se altera, dejando el mismo subíndice y poniendo en lugar del índice el exceso sobre él del subíndice. Así: $C_{10}^7 = C_{10}^3$.

La proposición podría también demostrarse, considerando el grupo total de los m elementos, y observando que á cada combinación de orden n corresponde otra del $m-n$, y recíprocamente; y que, por lo tanto, los números de dichas combinaciones deben ser iguales.

248. Combinaciones con repetición. Será fácil determinar el número de combinaciones con repetición, del grado n, si hallamos dos expresiones iguales que contengan dicho número.

Para lograr este objeto, supongamos reunidas en un cuadro todas las mencionadas combinaciones con repetición, del grado n, que pueden formarse con m elementos.

Como cada combinación, de las $\overset{n}{C}_m$, contiene n elementos entre iguales y desiguales, y es evidente que todos los m deben entrar en el conjunto de ellas el mismo número de veces, un cierto elemento cualquiera aparecerá en dicho cuadro tantas veces repetido como indica la expresión $\dfrac{n\overset{n}{C}_m}{m}$.

Este mismo número puede obtenerse de otro modo; pues si se separan las combinaciones que contienen al elemento considerado, y de cada una de ellas se quita una vez dicho elemento, se hallarán las combinaciones con repetición, del grado $n-1$, de los m elementos (*); de suerte que, en virtud del resultado anterior, el elemento referido entrará en dichas combinaciones un número de veces expresado por $\dfrac{(n-1)\overset{n-1}{C}_m}{m}$. Si agregamos ahora el elemento suprimido á cada una de las $\overset{n-1}{C}_m$ combinaciones, tendremos el número total de los que hay en las $\overset{n}{C}_m$, esto es,

$$\frac{(n-1)\overset{n-1}{C}_m}{m}+\overset{n-1}{C}_m=\frac{(m+n-1)\overset{n-1}{C}_m}{m};$$

y como esta expresión y la anteriormente hallada, representan el mismo número, se tendrá:

$$\frac{n\overset{n}{C}_m}{m}=\frac{(m+n-1)\overset{n-1}{C}_m}{m},$$

(*) No podrá faltar ninguna de éstas; porque agregando á la que faltase el elemento separado, se tendría una combinación con repetición del orden n, que no entraría entre las que se suponen formadas. Por otra parte, todas las obtenidas serán distintas; pues resultan de quitar un mismo elemento, de combinaciones diferentes.

de donde se deduce

$$\overset{n}{C}_m=\overset{n-1}{C}_m\cdot\frac{m+n-1}{n}.$$

Dando ahora á n los valores numéricos sucesivos 2, 3,.... n, y teniendo en cuenta que $\overset{1}{C}_m=\overset{1}{C}_m=m$, se tendrá:

$$\overset{2}{C}_m=\overset{1}{C}_m\cdot\frac{m+1}{2}=m\cdot\frac{m+1}{2}$$

$$\overset{3}{C}_m=\overset{2}{C}_m\cdot\frac{m+2}{3}$$

$$\overset{4}{C}_m=\overset{3}{C}_m\cdot\frac{m+3}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{C}_m=\overset{n-1}{C}_m\cdot\frac{m+n-1}{n}.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades y suprimiendo factores comunes, se halla finalmente:

$$\overset{n}{C}_m=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{\underline{|n}}.$$

Conviene observar que *el numerador de esta forma fraccionaria es el producto de* n *números consecutivos y crecientes, á partir de* m, *y el denominador el producto de los* n *primeros números*; debiendo notarse también que si, en las combinaciones sin repetición, n no podía ser mayor que m, nada se opone ahora á que se verifique lo contrario. (*)

(*) Pudiendo considerarse el numerador de $\overset{n}{C}_m$, como el producto de n factores decrecientes, á partir de $m+n-1$, se deduce que

$$\overset{n}{C}_m=\overset{n}{C}_{m+n-1}=\overset{m-1}{C}_{m+n-1}=\overset{m-1}{C}_{n+1};$$

doble fórmula que permite pasar del número de combinaciones con repetición al de combinaciones de elementos distintos, y recíprocamente; y que da además el teorema, fácil de traducir en lenguaje, que, en las combinaciones con repetición, corresponde al primero antes demostrado.

Se ve, en efecto, que en el símbolo $\overset{n}{C}_m$ puede suprimirse el trazo del índice, dándole por subíndice la suma del que ya contiene y dicho índice, dis-

Ejercicios.

I. Un capitán, cuya compañía tiene 60 hombres, debe dar una guardia de 8 hombres. ¿De cuántas maneras puede nombrarla?

II. Un hombre tiene cinco pantalones, ocho chalecos y siete levitas. ¿Cuántos trajes distintos puede llevar?

III. Teniendo m objetos diferentes, calcular el valor de n para el cual sea el mayor posible el número de combinaciones.

---

minuída esta suma en una unidad; y que, inversamente, en el símbolo C^{n}_{m} puede ponerse trazo al índice, substituyendo el subíndice por su exceso sobre aquél, aumentado este exceso en una unidad. Así: $C^{3}_{\overline{10}} = C^{3}_{12}$ y $C^{5}_{8} = C^{5}_{\overline{4}}$.

La igualdad extrema manifiesta, á su vez, que el número representado por el símbolo $C^{n}_{\overline{m}}$ no varía permutando el índice y el subíndice, después de aumentar el primero y disminuir el segundo en una unidad. Así: $C^{3}_{\overline{10}} = C^{9}_{\overline{4}}$.

Claro es que no sólo esta última, sino todas las demás propiedades, podrían enunciarse en forma de teoremas.

CAPÍTULO II

APLICACIONES DE LA TEORÍA COORDINATORIA

I.—Fórmula de la potencia de un binomio.

249. Producto de varios factores binomios. El análisis combinatorio proporciona el medio de obtener el producto de m factores binomios, de la forma

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+h)(x+k),$$

ordenado según las potencias crecientes de x; pues, según la regla de la multiplicación, se ve que dicho producto será la suma de los que se obtengan tomando, de todos los modos posibles, un término en cada binomio. Así: considerando los primeros términos, se obtendrá x^{m}, que es el primero del producto; si se toma el segundo término a del primer binomio, y los primeros de los demás, se hallará el producto ax^{m-1}; tomando el término b del segundo y los primeros de los otros, se encontrará análogamente bx^{m-1}; y como el segundo término de un binomio cualquiera, combinado con los primeros de los demás, da un producto de igual forma, si se reunen todos estos productos, se hallará que el coeficiente de x^{m-1} será la suma $a+b+c+\cdots\cdots+k$; de modo que, sirviéndonos de una notación ya conocida, se tendrá para el conjunto de ellos, ó, sea, para segundo término del producto total, la expresión $x^{m-1}\Sigma a$.

Si se consideran ahora los productos parciales que provienen de tomar los segundos términos de dos binomios cualesquiera, y los primeros de todos los otros, se hallarán productos de la forma

abx^{m-2}, acx^{m-2},......., que sumados darán el término de grado $m-2$ del producto, y cuyo coeficiente será la suma de los productos binarios de las m cantidades a, b,..... k; de suerte que podrá representarse por $x^{m-2}\Sigma ab$.

Si se toman los segundos términos en tres binomios cualesquiera, y los primeros en los demás, obtendremos los términos de grado $m-3$, que sumados darán $x^{m-3}\Sigma abc$.

Considerando, en general, los segundos términos en n binomios cualesquiera, y los primeros de los restantes, se tendrán los productos parciales de grado $m-n$, cuya suma dará el término de dicho grado del producto total, y cuyo coeficiente será la suma de los productos de las m cantidades a, b, c,..... k, tomadas n á n, y podrá representarse por $x^{m-n}\Sigma abc.....f$.

Si de esta forma general quiere obtenerse el conjunto de los términos de primer grado, bastará suponer que n es igual á $m-1$, y entonces el coeficiente será la suma de los productos, $m-1$ á $m-1$, de a, b, c,..... h, k, quedando representado dicho término por $x\Sigma abc..... h$; y, por último, el término independiente se obtendrá haciendo $n=m$, esto es, tomando los segundos términos en todos los binomios, y será igual á $abc.....hk$.

El producto de los m factores binomios será, pues, de la forma:

$$x^m+x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab+\cdots\cdots+x^{m-n}\Sigma ab....f+\cdots\cdots+x\Sigma ab....h+abc...hk$$

ó, más sencillamente,

$$(x+a)(x+b)(x+c).....(x+k)=x^m+\sum_{n=1}^{n=m} ab....f\,x^{m-n};$$

resultado que puede traducirse en lenguaje.

250. Potencias de un binomio. La expresión que acaba de hallarse, da el medio de obtener de nuevo la fórmula de Newton **(67)**, para el caso de ser el exponente de la potencia un número entero y positivo; pues si se hacen iguales los segundos términos de todos los binomios, el producto indicado se transforma en $(x+a)^m$, y es fácil ver en lo que se convierten entonces los diversos términos del desarrollo.

Desde luego,

$$\Sigma a=ma;$$

Σab representa la suma de los productos que pueden formarse con m elementos, tomados dos á dos; de suerte que siendo ahora cada producto igual á a^2 y su número $\frac{m(m-1)}{\lfloor 2}$, será:

$$\Sigma ab=\frac{m(m-1)}{\lfloor 2}a^2;$$

Σabc designa la suma de los productos ternarios de todos los segundos términos de los m binomios y, por lo tanto, cada producto será igual á a^3, y su número á $\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}$; de modo que

$$\Sigma abc=\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}a^3.$$

En general: $\Sigma abc....f$ representa la suma de los diversos productos, de n factores, que pueden formarse con m elementos; luego, en el caso que consideramos, cada uno de dichos productos será igual á a^n y su número á $\frac{m(m-1)(m-2).......(m-n+1)}{\lfloor m}$; siendo, por consiguiente,

$$\Sigma abc.....f=\frac{m(m-1).......(m-n+1)}{\lfloor m}a^n;$$

expresión de la cual pueden deducirse todos los términos que se deseen, si bien se ve, directamente, que el último se convierte en a^m.

Reemplazando los resultados obtenidos, en la fórmula del producto de los m factores binomios, se halla:

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{\lfloor 2}a^2x^{m-2}+\cdots\cdots+$$
$$+\frac{m(m-1)\,.....\,(m-n+1)}{\lfloor n}a^nx^{m-n}+\cdots\cdots+a^m;$$

que es la misma fórmula ya conocida, y la cual puede ahora ponerse bajo la forma:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \cdots\cdots +$$
$$+ C_m^n a^n x^{m-n} + \cdots\cdots + a^m \; (*).$$

Aun cuando no hay necesidad de repetir aquí todas las observaciones hechas respecto de la ley de formación de los términos del desarrollo de la potencia, y de las relaciones que guardan entre sí los coeficientes, insistiremos sobre algunas de ellas que tienen explicación y aun interpretación distinta, y daremos á conocer otras nuevas.

1.ª *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales*; pues, según lo ya demostrado, se tiene:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

2.ª *Los coeficientes son números enteros*; porque representan siempre el número de combinaciones del grado n, que pueden formarse con m elementos.

3.ª Si, en el desarrollo, se hace $a=1$ y $x=1$, se tendrá:

$$2^m - 1 = C_m + C_m^2 + \cdots\cdots + C_m^n + \cdots\cdots + C_m^m;$$

lo cual indica que *el número total de combinaciones de todos los grados, que pueden formarse con* m *elementos, es la* m^{ésima} *potencia de 2, disminuída en una unidad.*

4.ª Si, en el mismo desarrollo, se supone $x=1$ y $a=-1$, se halla:

$$0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \cdots\cdots \pm C_m^n \mp \cdots\cdots,$$

de donde se deduce

$$C_m^1 + C_m^3 + \cdots\cdots = 1 + \left(C_m^2 + C_m^4 + \cdots\cdots\right);$$

ó, sea, que *si se forman todas las combinaciones posibles con* m *elementos, el número de las que contienen un número impar de éstos, excede siempre en una unidad al de las que contienen un*

(*) La expresión del último término podría ser $C_m^m a^m$; puesto que $C_m^m = 1$.

número par. Representando respectivamente por I y por P dichos dos números, se tendrá:

$$I + P = 2^m - 1 \quad \text{é} \quad I - P = 1;$$

ecuaciones de las que resulta

$$I = 2^{m-1} \quad \text{y} \quad P = 2^{m-1} - 1.$$

La fórmula de Leibnitz, que da la potencia de un polinomio, y que sabemos (68) se deduce de la del binomio, que hemos obtenido de nuevo, podría hallarse ahora directamente, como una aplicación inmediata del cálculo combinatorio. (*)

(*) Si se quiere obtener el desarrollo de $(a+b+c+\cdots\cdots+l)^m$, observaremos que el producto de varios polinomios es la suma de los productos que se obtienen tomando un término en cada uno de ellos, de todos los modos posibles. En tal concepto, si se toma el término a en α factores, el b en β de los otros, el c en γ de los demás, y así sucesivamente, se formará el término del producto, $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ....., en el cual la suma de los exponentes habrá de ser igual á m; pero es indudable que este término se hallará tantas veces cuantos grupos puedan formar α elementos a, β iguales á b, γ elementos c, ..., etc., y como el número de esos grupos es precisamente el de permutaciones con repetición, reuniendo dichos términos en uno solo, tendremos:

$$\frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma \cdots\cdots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots \quad \text{ó, bien,} \quad \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha} \cdot \underline{|\beta} \cdot \underline{|\gamma} \cdots\cdots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$$

Así, pues, el desarrollo pedido tomará la forma:

$$(a+b+c+\cdots\cdots+l)^m = \sum \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha} \cdot \underline{|\beta} \cdot \underline{|\gamma} \cdots\cdots \underline{|\lambda}} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda$$

siendo $\alpha + \beta + \gamma + \cdots\cdots + \lambda = m$.

Se ve además, suponiendo descompuesta la potencia en un producto de m factores, que el número de sus términos será el de productos parciales desemejantes, es decir, el de combinaciones con repetición de los términos del polinomio, tomados m á m. Designando, en su consecuencia, por n el número de esos términos del polinomio, el correspondiente al desarrollo deberá ser:

$$C_{\overline{n}}^{m} = C_{\overline{m+1}}^{n-1}$$

es es, el número dado por cualquiera de las formas

$$\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}{\underline{|m}}; \quad \frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{\underline{|n-1}};$$

que, para $n=2$, se convierten ambas en $m+1$, según debía suceder.

251. Suma de las potencias semejantes de los términos de una progresión aritmética. El desarrollo de la potencia de un binomio da el medio de obtener la suma de las potencias, de igual grado, de los diversos términos de una progresión aritmética. Sea ésta

$$\div\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots . \, a_m \,.\, a_{m+1} \ldots\ldots$$

cuya razón es r y cuya suma de potencias, de los m primeros términos, quiere determinarse. Si representamos por n un número entero cualquiera, se tendrán las siguientes igualdades:

$$a_2^{n+1} = (a_1+r)^{n+1} = a_1^{n+1} + (n+1)a_1^n r + \frac{(n+1)n}{\underline{|2}} a_1^{n-1} r^2 + \cdots\cdots + r^{n+1}$$

$$a_3^{n+1} = (a_2+r)^{n+1} = a_2^{n+1} + (n+1)a_2^n r + \frac{(n+1)n}{\underline{|2}} a_2^{n-1} r^2 + \cdots\cdots + r^{n+1}$$

....

....

$$a_{m+1}^{n+1} = (a_m+r)^{n+1} = a_m^{n+1} + (n+1)a_m^n r + \frac{(n+1)n}{\underline{|2}} a_m^{n-1} r^2 + \cdots\cdots + r^{n+1}.$$

Sumando estas igualdades, miembro á miembro, suprimiendo términos comunes y pasando a_1^{n+1} al primer miembro, se halla:

$$a_{m+1}^{n+1} - a_1^{n+1} = (n+1)\,r\,(a_1^n + a_1^n + \cdots\cdots + a_m^n) +$$
$$+ \frac{(n+1)n}{\underline{|2}} r^2 (a_1^{n-1} + a_n^{n-1} + \cdots\cdots + a_m^{n-1}) + \cdots\cdots + m r^{n+1},$$

y, empleando la notación sumatoria, se deduce:

$$a_{m+1}^{n+1} - a_1^{n+1} = (n+1)\,r \sum_{p=1}^{p=m} a_p^n + \frac{(n+1)n}{\underline{|2}} r^2 \sum_{p=1}^{p=m} a_p^{n-1} +$$
$$+ \frac{(n+1)\,n(n-1)}{\underline{|3}} r^3 \sum_{p=1}^{p=m} a_p^{n-2} + \cdots\cdots + r^{n+1} \sum_{p=1}^{p=m} a_p^0 \quad (*)$$

(*) Es fácil ver que el factor que multiplica á r^{n+1} es precisamente m, puesto bajo idéntica forma que los factores de los demás términos.

de donde resulta:

$$\sum_{p=1}^{p=m} a_p^n = \frac{a_{m+1}^{n+1} - a_1^{n+1}}{(n+1)r} - \frac{n}{\underline{|2}} r \sum_{p=1}^{p=m} a_p^{n-1} - \frac{n(n-1)}{\underline{|3}} r^2 \sum_{p=1}^{p=m} a_p^{n-2} - \cdots\cdots -$$
$$- \frac{1}{n+1} r^n \sum_{p=1}^{p=m} a_p^0;$$

fórmula que permite calcular la suma de las potencias $n^{\text{ésimas}}$ de los m primeros términos de una progresión aritmética, cuando se conocen las sumas de las potencias de todos los grados inferiores. (*)

Si quiere hallarse, por ejemplo, la suma de los cuadrados de los p primeros números de la serie natural, se hará en la fórmula anterior $a_1 = 1$, $r = 1$ y $n = 2$, y tendremos:

$$\sum_{a=1}^{a=p} a^2 = \frac{(p+1)^3 - 1}{3} - \sum_{a=1}^{a=p} a - \frac{1}{3} \sum_{a=1}^{a=p} a^0;$$

pero

$$\sum_{a=1}^{a=p} a = \frac{p(p+1)}{2} \quad \textbf{(79)} \qquad \text{y} \qquad \sum_{a=1}^{a=p} a^0 = p,$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{a=1}^{a=p} a^2 = \frac{(p+1)^3 - 1}{3} - \frac{p(p+1)}{2} - \frac{p}{3}$$

que, después de las operaciones y reducciones, se convierte, en

$$\sum_{a=1}^{a=p} a^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

(*) En esta fórmula podría substituirse en lugar de a_{m+1}, $a_m + r$, ó, bien, $a_1 + mr$; y en vez del coeficiente $\frac{1}{n+1}$, su valor igual $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{\underline{|n+1}}$.

Como medio mnemotécnico del procedimiento seguido, conviene también notar, que se ha considerado en la progresión un término más que aquellos cuya suma de potencias semejantes quiere obtenerse, y que, á partir del segundo, se han elevado todos á la potencia de grado inmediatamente superior.

Estas fórmulas, que á pesar de su forma fraccionaria deben representar números enteros, siempre que lo sean los términos de la progresión considerada, tendrán una aplicación notable en el artículo que sigue.

Ejercicios.

I. ¿Cuál es el mayor coeficiente del desarrollo de $(1+x)^m$?

II. Desarrollar la expresión $a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$.

III. Hallar, en los siguientes desarrollos, los términos que se indican: el 7.º de $(2+a)^{16}$; el 6.º de $(3+2x^2)^9$; y el 11.º de $(a+d)^{21}$.

IV. Desarrollar en orden ascendente, respecto de x, las potencias:

$$(a+bx+cx^2)^4\ ;\quad (1+2ax+3a^2x^2)^3\ ;\quad (1+x+2x^2+3x^3)^5.$$

V. Demostrar que la suma de los cubos de los p primeros números, es el cuadrado de la suma de dichos números.

II.—Pilas de balas.

252. Cálculo del número de proyectiles cilindro-ojivales, contenidos en una pila. *Se da el nombre de pila de balas, al grupo de proyectiles colocados con arreglo á un cierto orden.*

Los proyectiles cilindro-ojivales se disponen de la manera siguiente: se forma una fila con n proyectiles, colocándolos de modo que tengan una generatriz de contacto; sobre esta fila se coloca de igual modo otra que contenga un proyectil menos; sobre ésta una tercera; y así sucesivamente hasta terminar en un solo proyectil. Se forma entonces una especie de triángulo que contiene el número de proyectiles que expresa la suma de los n primeros números y que, por lo tanto, estará representado por

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Con el fin de dar más consistencia á esta pila elemental, se adosan varias de ellas; formándose así una pila prismática triangular, cuyo número total de proyectiles estará representado por

$$P_o = \frac{pn(n+1)}{2}\ (*)$$

(*) Este número debe ser entero; y así es en efecto, puesto que el producto de dos números consecutivos es siempre par.

siendo p el número de proyectiles que hay á lo largo, y n el que corresponde al lado del triángulo.

253. Número de proyectiles esféricos de una pila. Los proyectiles esféricos se disponen de varios modos; resultando así pilas denominadas triangulares, cuadrangulares y rectangulares, cuyos números de proyectiles vamos á calcular sucesivamente.

Pila triangular. La base de esta pila se forma colocando en una fila n proyectiles; á su lado, y en el mismo plano horizontal, otra segunda fila de $n-1$ proyectiles; después otra que contenga un proyectil menos; y así sucesivamente hasta poner un solo proyectil. De este modo resulta un triángulo equilátero, que tendrá un número de proyectiles expresado por la fórmula que da la suma de los términos de la progresión aritmética $\div 1.2.3.\ldots.n$, esto es:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Sobre esta base se coloca otra capa ó lecho triangular, pero cuyo lado tenga $n-1$ proyectiles; de modo que contendrá

$$\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}.$$

El lecho que sigue deberá tener, á su vez,

$$\frac{(n-2)^2+(n-2)}{2},$$

y así sucesivamente; de suerte que designando por P_t el número total de proyectiles contenido en la pila, será:

$$P_t = \frac{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2}{2} + \frac{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1}{2}$$

ó, lo que es lo mismo,

$$P_t = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{a=n} a^2 + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{a=n} a = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.\ (*)$$

(*) La pila triangular ocupa relativamente mucho espacio, por lo cual no suele emplearse sino para un pequeño número de proyectiles.

Es fácil comprobar que la expresión obtenida representa un número en-

PILA CUADRANGULAR. En esta pila, la base es un cuadrado de n proyectiles de lado y que contendrá por lo tanto, n^2; la capa siguiente tendrá $(n-1)^2$; la superior inmediata $(n-2)^2$; y la última constará solamente de un proyectil ó 1^2. El número total de proyectiles contenidos en la pila lo dará, pues, la fórmula:

$$P_c = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2 = \sum_{a=1}^{a=n} a^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ . (*)}$$

PILA RECTANGULAR. La base de esta pila es un rectángulo, y termina en una fila de proyectiles. Si $p+1$ es el número de dichos proyectiles, el lecho inmediato inferior constará de dos filas compuestas cada una de $p+2$, ó, sea, de un número de proyectiles igual á $2(p+2)$; el lecho siguiente se compondrá de tres filas de $p+3$ proyectiles cada una, y, por lo tanto, contendrá $3(p+3)$ proyectiles. Como la misma ley se observa hasta llegar á la base, ésta se compondrá de n filas con $p+n$ proyectiles cada una, conteniendo así, $n(p+n)$. El número total de proyectiles de la pila será por consiguiente:

$$P_r = (p+1) + 2(p+2) + 3(p+3) + \cdots + n(p+n)$$

ó, bien,

$$P_r = p(1+2+3+\cdots+n) + (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2);$$

y, haciendo uso de la notación sumatoria,

$$P_r = p\sum_{a=1}^{a=n} a + \sum_{a=1}^{a=n} a^2 = \frac{pn(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

---

tero, no obstante su forma fraccionaria; porque uno de los números n ó $n+1$ debe ser par, y, bien sea $n = \dot{3}$, $n = \dot{3}+1$ ó $n = \dot{3}+2$, siempre habrá un factor del numerador divisible por 3. Se sabe, por otra parte, que el producto de tres números enteros consecutivos, es siempre divisible por el producto de los tres primeros números.

(*) La forma de esta pila, como la de la anterior, es una pirámide. Se demuestra también, fácil y directamente, que, cualquiera que sea n, esta expresión es un número entero.

ó, después de sencillas transformaciones,

$$P_r = \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6} \text{. (*)}$$

Ejercicios.

I. Hallar el número de balas cilindro-ojivales de una pila que, en la base, tiene doce balas en el sentido de su longitud y cinco en el de su ancho.

II. Obtener el número de balas cilindro-ojivales de una pila truncada (**), que contiene en los lados de su lecho inferior quince y siete balas, y en los del superior quince y cuatro, respectivamente.

III. Calcular el número de balas esféricas de una pila triangular, y de una cuadrangular, completas, cuyos lechos inferiores tengan once balas de lado; y los de las pilas truncadas de esas mismas bases, con seis balas en el lado del lecho superior.

IV. Determinar el número de balas esféricas de una pila rectangular, cuya base contiene en su lado mayor veinte balas, y siete en el lado menor.

V. Obtener el número de balas esféricas de una pila rectangular truncada, cuyo lecho inferior tiene en sus lados diecisiete y ocho balas, y en el superior doce y tres, respectivamente.

(*) La forma de esta pila es un tronco de prisma triangular; pudiéndose comprobar directamente, de un modo análogo al antes indicado, que el numerador de la fórmula será siempre divisible por 6.

Debe advertirse, por último, que en vez de los subíndices t, c y r de P, suelen ponerse, respectivamente, un pequeño triángulo, un cuadrado y un rectángulo.

(**) Pila truncada, en las de base rectangular, es aquella cuyo lecho superior no es una fila de balas; y, en las de base triangular y cuadrangular, las que no terminan en una sola bala.

CAPÍTULO III

DETERMINANTES

I.—Preliminares

254. Matrices. Si varias series de igual número de objetos, representados generalmente por letras ó por números, se colocan unas debajo de otras, de modo que se correspondan sus términos, y éstos han de combinarse luego entre sí según ciertas reglas, resulta lo que se llama *cuadro generador* ó *matriz*. Esta será *cuadrada*, si el número de series es igual al de términos de que constan; y *rectangular*, cuando dichos números sean diferentes. Así:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{cccc} \alpha & 1 & 4 & \beta \\ -2 & \gamma & \delta & -3 \\ \beta & \lambda & \psi & \rho \\ \omega & 5 & 7 & \varepsilon \end{array}$$

son dos matrices cuadradas, y

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ -6 & 2 & -1 & 3 \\ m & n & p & q \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ a & f & k \\ x & y & z \end{array}$$

son dos matrices rectangulares, en sentido diverso.

255. Elementos, filas y columnas. Los objetos, ó sus símbolos representativos, que componen una matriz, se denominan *elementos*, y pueden suponerse agrupados en líneas horizontales ó verticales; dándose á las primeras el nombre de *filas*, y á las segundas el de *columnas*. Así: la última de las matrices consideradas tiene doce elementos, que forman cuatro filas y tres columnas.

En dos matrices distintas, dos líneas de igual denominación se llaman *homónimas*; y dos elementos se titulan *correspondientes*, cuando el orden de sus lugares es el mismo, en las filas ó columnas donde se encuentran.

Dos líneas homónimas son *idénticas*, cuando los elementos de la una son respectivamente iguales á los correspondientes de la otra; y se dice que una es *múltipla* de otra, si sus elementos son los de ésta, multiplicados por una misma cantidad.

256. Clasificación de las matrices y de sus elementos. Matrices *semejantes* son aquellas que tienen igual número de filas é igual número de columnas. En estas matrices las filas ó las columnas, expresadas por el mismo número ordinal, se llaman *homólogas*; y reciben también el calificativo de *homólogos*, los elementos que, en una y otra matriz ocupan idéntico lugar, es decir, los que están á la vez en filas y columnas homólogas.

En una matriz cuadrada, se dice que una fila y una columna son *conjugadas*, cuando tienen el mismo número de orden; como, por ejemplo, la tercera fila y la tercera columna.

Dos elementos de una matriz cuadrada son *conjugados* si ocupan igual lugar en dos líneas conjugadas. Tales son, el cuarto elemento de la tercera fila, y el cuarto de la tercera columna. (*)

Los elementos de la diagonal que desciende de izquierda á derecha, en una matriz cuadrada, se llaman *elementos principales;* y gozan de la propiedad de ser conjugados de sí mismos. Tales son α, γ, ψ y ε, en la segunda de las matrices cuadradas que antes consideramos. Dicha línea se denomina á su vez *primera diagonal* ó *diagonal principal;* y la que desciende de derecha á izquierda, *segunda diagonal* ó *diagonal secundaria.* (**)

(*) Los elementos de las filas se cuentan de *izquierda á derecha;* y los de las columnas de *arriba abajo.*

(**) Si ninguno de los elementos de la primera diagonal es cero, se dice que la matriz es de *diagonal llena;* y cuando son todos nulos, que es de *diagonal vacía.*

Una matriz cuadrada toma el nombre de *simétrica* si son iguales todos sus pares de elementos conjugados, como sucede en la

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & d & e & f \\ c & e & g & h \\ d & f & h & i \end{matrix} \quad (*)$$

El número de filas, ó de columnas, que contiene una matriz cuadrada, se llama *grado de la matriz*. De modo que si una matriz consta de n filas y de n columnas, será del grado n; siendo n^2, por consiguiente, el número de sus elementos.

257. Notación simbólica. Para distinguir, en las demostraciones, la posición de un elemento cualquiera de una matriz, es indispensable afectarlo de algún signo que marque el lugar que ocupa en la fila y columna donde se encuentre; y esto se logra por medio de notaciones diversas, que vamos á dar á conocer.

Notación ordenada de Cauchy. En esta notación, los elementos de cada fila se designan por letras diferentes, con un subíndice que marca el orden de dicha fila. Las letras siguen el orden alfabético, y son las mismas para todas las filas; estando encerradas entre dos líneas verticales, llamadas *barras*, en la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots\cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots\cdots & l_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots\cdots & l_n \end{vmatrix}$$

Cada elemento resulta así determinado por su letra, que indica la columna donde se encuentra, y por el subíndice, que marca la fila á que pertenece.

Para un reducido número de elementos, suelen emplearse las

(*) Cuando, siendo la diagonal vacía, los elementos conjugados son iguales y de signos contrarios, la matriz se denomina *semisimétrica*; y es *disimétrica* ó *pseudosimétrica*, si sólo se verifica esta última condición.

letras acentuadas, en reemplazo de los subíndices, y aun se escriben en la primera fila letras sencillas, ó sin acento alguno.

Notación de Leibnitz. Esta notación consiste en representar todos los elementos con una sola letra, afectada de dos subíndices, el primero de los cuales señala la fila á que pertenece el elemento, y el segundo la columna. Así: la matriz cuadrada de orden n será:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

representando a_{rs} el elemento que se encuentra en la fila r y en la columna s. (*)

Cuando la matriz es de orden superior al noveno, hay necesidad de separar, con una coma, los dos subíndices.

Notación de índices superpuestos. Algunos autores han modificado la notación de Leibnitz, poniendo los segundos índices á manera de exponentes; resultando así la notación de índices superpuestos, en la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots\cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots\cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots\cdots & a_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots\cdots & a_n^n \end{vmatrix} \quad (**)$$

258. Característica. Cualquiera que sea la notación que se

(*) Esta notación es la más usada en el análisis superior.
(**) En esta nueva notación se distinguen de un modo más marcado los números indicadores de los órdenes de fila y de columna, y ocupan menos espacio los elementos; pero, á pesar de tales ventajas, no es muy usada.

emplee para representar una determinante, á la suma de los números que expresan la fila y la columna á que un elemento pertenece, se denomina su *característica*.

259. Definición de las determinantes. *Se llama determinante, de una matriz cuadrada* (*), *la suma algebraica de los diversos productos que se obtienen multiplicando, de todas las maneras posibles, un elemento de cada fila y uno de cada columna, con tal que en ninguno de dichos productos entren dos elementos de una misma línea; y afectando cada uno del signo + ó del signo —, según que sean de igual ó de distinta clase la permutación que en él formen los primeros subíndices ó números indicadores del lugar de las filas, y la que á su vez constituyan los segundos, ó los índices ó letras que dicho término contenga, y designen el orden de las columnas.*

Suponiendo reunidos los mencionados productos, resultará un polinomio que será una función determinada de los elementos de la matriz ó cuadro generador, y el cual, por este motivo, se titula *función determinante* ó simplemente *determinante*. (**)

Debe observarse, sin embargo, que á fin de que la definición anterior fije de un modo preciso el signo de los términos del polinomio resultante, es indispensable demostrar que cualquiera que sea el orden de los elementos ó factores de cada uno de ellos, siempre le corresponderá el mismo signo.

Llamando, con tal objeto, *permutaciones de primera clase* las que contienen un número par de inversiones, *y permutaciones de segunda clase* las que presentan un número impar, estableceremos el siguiente principio.

(*) Las matrices rectangulares sólo se consideran como agrupación de las cuadradas en que pueden descomponerse, prescindiendo de ciertas filas ó columnas. En tal concepto, las proposiciones no se refieren sino á determinantes cuyas matrices tienen dicha última forma.

(**) Gauss y Jacobi dieron á esta función el nombre de determinante; pero Cauchy y Pedro Simón Laplace, uno de los más ilustres geómetras y astrónomos franceses de principios de este siglo, la denominaron *resultante*, siguiendo en esto á Cramer. En cuanto á la teoría, puede decirse que Leibnitz fué el primero que dió idea de tales funciones, y que Cramer y Bezout fijaron la ley de su formación y establecieron sus principales propiedades.

El nombre de determinante, que adoptamos, puede ir precedido indistintamente de los artículos *el* ó *la*, según se considere como abreviación de *el polinomio determinante* ó de *la función determinante*.

TEOREMA. *Si en la permutación que forman diversos elementos, numéricos ó literales, se permutan dos cualesquiera de ellos, la permutación cambia de clase.*

Consideremos la permutación $A\alpha B\beta C$, en la cual α y β son las letras ó números que se permutan y A, B y C las agrupaciones de los demás elementos. (*)

Para demostrar que la permutación $A\beta B\alpha C$ es de distinta clase que la anterior, notaremos, ante todo, que los elementos de A formarán entre sí, y con los que le siguen, el mismo número de inversiones en ambas permutaciones, y que otro tanto sucederá con los elementos de C, comparados entre sí y con los que le preceden; de suerte que podemos prescindir por completo de ellos.

Reducidas las dos permutaciones á los grupos $\alpha B\beta$ y $\beta B\alpha$, y haciendo también abstracción de las inversiones que formen entre sí los elementos de B, que son las mismas en ambos, designemos por m el número de estos elementos y supongamos que, referidos al orden fundamental ó primitivo, haya en ellos p anteriores á α y q posteriores á β, siendo α anterior á β. (**)

En tal hipótesis, el número de inversiones de $\alpha B\beta$, sin contar aquellas de que hemos prescindido, será $p+q$; y como de haber, en B, p elementos anteriores á α y q posteriores á β, habrá necesariamente $m-p$ posteriores á α y $m-q$ anteriores á β, se deduce que, en la misma hipótesis, el número de inversiones de $\beta B\alpha$ será $2m-(p+q)+1$; número que sumado con el anterior da $2m+1$ ó, sea, un número impar. Como esto se verificará

(*) Si no hubiera elementos comprendidos entre α y β, la demostración del teorema sería inmediata; puesto que, al permutar α y β, el número de inversiones aumentaría ó disminuiría en una unidad; y si no hubiese elementos anteriores ó posteriores á éstos, bastaría no considerarlos.

(**) Puesto que es indiferente tomar por punto de partida cualquiera de las dos permutaciones, siempre es posible suponer que el primero de los dos elementos permutados es anterior al otro. Conviene también notar que, además de los elementos que se consideran en B, puede haber, entre los m, algunos comprendidos entre α y β, de suerte que $p+q \overset{=}{<} m$; y debe igualmente observarse que uno de los números p y q, ó ambos, podrían ser cero.

Importa advertir, por fin, que, con respecto á una determinante cualquiera, forman los órdenes fundamentales los signos indicadores de los lugares sucesivos de las filas y las columnas; y que, en la matriz primitiva, dichos órdenes son el correlativo de los números, ó éste y el alfabético de las letras.

de igual modo agregando el número total de inversiones, de que hemos prescindido y que entrarían por duplicado en la suma, resulta que, de las permutaciones consideradas, la una presenta un número par, y la otra un número impar de inversiones, siendo, por lo tanto, de distinta clase, según se quería demostrar.

Partiendo de este principio, observamos que en cualquiera de los productos que componen una determinante, se puede pasar de una cierta disposición de los elementos á otra distinta, efectuando una serie de permutaciones de elementos de dos en dos; pero como al permutarse dos elementos, la permutación que forman los primeros subíndices cambiará de clase, y lo mismo sucederá, al propio tiempo, á la formada por los segundos ó por las letras, se deduce que esas permutaciones, que fijan el signo de cada uno de los productos ó términos, serán siempre de la misma ó diferente clase, quedando determinado dicho signo.

260. Formación de las determinantes. Para formar una determinante, suponiendo representados sus elementos matrices por medio de la notación ordenada de Cauchy, observaremos que el producto $a_1 b_2 c_3 \ldots . k_n$, cuyos factores son los elementos de la primera diagonal, será de seguro un término de dicha determinante, que deberá ir afectado del signo $+$; puesto que ni las letras ni los subíndices presentan inversión alguna.

Dicho producto se llama *término principal*, porque de él se derivan los demás de la determinante, permutando de todas las maneras posibles las letras, sin que en los subíndices se altere el orden ascendente, y poniendo á cada término el signo $+$ ó el $-$, según sea par ó impar el número de inversiones de la permutación que forman las letras; ó, bien, por el contrario, permutando los subíndices, siguiendo las letras por orden alfabético, y afectando cada término del signo $+$ ó $-$, según sea de primera ó segunda clase la permutación que forman los subíndices. (*)

Es indudable que, de cualquiera de estos dos modos, se obtendrá la determinante; porque los $\underline{n|}$ términos, que así resultan, serán diferentes, satisfaciendo todas las condiciones de la definición antes dada; y no faltará ninguno de los términos que debe contener, puesto que los elementos de cualquiera de sus términos pueden suponerse colocados por orden de subíndices ó de letras (*), y la falta de uno de esos términos llevaría entonces consigo la de la permutación correspondiente de las letras ó de los subíndices, y suponemos que todas están formadas.

(*) El primer procedimiento es el más frecuentemente usado.

El procedimiento, ya explicado, para formar las permutaciones (245), permitirá conocer fácilmente el signo que corresponda á cada término. Se sabe, en efecto, que al pasar de las permutaciones de un grado á las del inmediato superior, la agregación en cada una del elemento que siga á todos los demás, no alterará el número de inversiones, ni por tanto el signo; mientras que cada vez que ese elemento corra un lugar á la izquierda, aumentará en una unidad el número de inversiones y deberá variar dicho signo. (**)

Aplicando la regla á la determinante de segundo grado

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

deberán formarse, con su correspondiente signo, las permutaciones

$$ab - ba \quad \text{ó} \quad 12 - 21;$$

y entonces será:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Con la determinante de tercer grado

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(*) Según la definición, en todos los términos deben entrar una vez, y sola una, todos los subíndices, que representan los órdenes de fila, y todas las letras, que designan los órdenes de columna.

(**) Claro es que los números de términos positivos y negativos serán iguales.

formaremos primero cualquiera de los anteriores grupos de permutaciones, y después los términos correspondientes, como sigue:

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba \qquad \text{ó} \qquad 123-132+312-213+231-321;$$

siendo, por lo mismo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 \text{ (*)}$$

Si los elementos del cuadro generador son de doble subíndice, entonces no habrá sino referir, á los que ocupen el segundo lugar, lo que acaba de decirse para las letras; permutando sólo en el término principal $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$, los primeros ó segundos subíndices y dejando los otros en orden sucesivo. Así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{31} a_{22} a_{13}.$$

(*) Hay un procedimiento empírico, muy útil en la práctica, para formar la determinante de tercer grado. Consiste en escribir, debajo de la matriz correspondiente, las dos primeras filas, y tomar luego los productos de los elementos que se encuentran en la diagonal principal y en las dos que le son paralelas, afectados del signo $+$, y los de los elementos que se hallan en la segunda diagonal y en las dos paralelas á ésta, con el signo $-$.

Se tendrá, de este modo, el cuadro

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right\} \text{ y, por consiguiente, } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2.$$

Este procedimiento se conoce con la denominación de *regla de Sarrus*, derivada del nombre del matemático francés á quien se debe.

Cuando se haga uso de la notación de índices superpuestos bastará, por las razones anteriormente indicadas, conservar los subíndices, permutando los índices de todas las maneras posibles, en el término principal $a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n$, ó, bien, proceder al contrario.

Se hallará, por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3;$$

obteniéndose de ambos modos idéntico resultado.

261. Notaciones abreviadas de las determinantes. Una determinante primitiva cualquiera, suele representarse abreviadamente por la letra Δ, y por esta misma con acentos ó índices, otras análogas ó que guarden con ella cierta relación de dependencia; pero si se quiere conocer el grado y la expresión de los elementos de su matriz, se pone el término principal entre paréntesis, ó precedido del signo $\pm$ y de la letra Σ, en esta forma:

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3 \dots k_n) = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \dots k_n,$$

$$\Delta = (a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}) = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}. \text{ (*)}$$

Todavía, para mayor sencillez, pueden escribirse sólo las letras distintas sin subíndice alguno, colocadas entre paréntesis ó pequeñas barras, ó la letra única que se emplee, comprendida por corchetes y con un subíndice indicador del grado. Así se tiene:

$$\Delta = (a\,b\,c\,d) = |\,a\,b\,c\,d\,| \qquad \text{ó} \qquad \Delta = [a]_n. \text{ (**)}$$

(*) Notaciones frecuentemente usadas por Baltzer, Salmon, Dostor, Serret, Rubini, Vincenzo Mollame y otros autores.

(**) Algunos consideran á Δ, no como el valor, sino como la característica de la función determinante, que escriben abreviadamente $\Delta(a\,b\,c\,d)$. Así lo hace Giorgio Foscolo, en la aplicación de este algoritmo á la resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado.

262. Determinantes menores. Cuando en una matriz cuadrada se suprimen iguales números de filas y de columnas, la determinante correspondiente al nuevo cuadro, que resulta aproximando los elementos contenidos en las líneas que quedan, se llama *determinante menor*.

El número de filas ó de columnas suprimidas, es el *orden* de la determinante menor; de suerte que al suprimir una fila y una columna se obtendrá una determinante menor de primer orden; si se suprimen dos filas y dos columnas, una de segundo; y cuando se supriman p filas y p columnas, se hallará una determinante menor de orden $p^{ésimo}$; pudiendo decirse que un elemento cualquiera, es una determinante menor de orden $n-1$. (*)

Las determinantes menores se representan con la misma letra Δ, afectada de un subíndice que contenga los números de orden de las filas suprimidas y con un índice que exprese los de las columnas de que se haya prescindido; si bien, en las determinantes de primer orden, suelen ponerse los dos números indicadores, uno á continuación de otro, en forma de doble subíndice.

Según esto, Δ_{135}^{246} será una determinante menor de tercer orden, resultante de suprimir, en la primitiva Δ, las filas primera, tercera y quinta y las columnas segunda, cuarta y sexta; mientras que Δ_2^7 ó Δ_{27}, representan la determinante menor de primer orden que se obtiene prescindiendo, en Δ, de la segunda fila y la séptima columna.

Dos determinantes menores son *complementarias*, cuando una cualquiera de ellas resulta de suprimir, en el cuadro generador de la determinante propuesta ó primitiva, las líneas que entran en la formación de la otra.

(*) Se ve fácilmente que el número de determinantes menores de orden de una determinante de grado n, será igual al de determinantes menores de orden $n-p$, y que ambos están expresados por

$$\left[C_n^p\right]^2=\left[C_n^{n-p}\right]^2.$$

En tal concepto, si consideramos la matriz cuadrada

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

son menores complementarias

$$\Delta_{34}^{14}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_{12}^{23}=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Se deduce de esta definición, que la suma de los órdenes de las determinantes menores complementarias, es igual al grado de la determinante principal de que proceden; y que la menor complementaria de cualquier elemento, será la de primer orden que resulte al suprimir la fila y la columna donde dicho elemento se encuentre.

Dos menores complementarias son *conjugadas*, cuando los números de orden que indican las filas y columnas suprimidas, ó aquellas que concurren á formar la primera, son respectivamente los mismos que indican, por el contrario, las columnas y filas suprimidas, ó las que constituyen la segunda.

Así: serán menores conjugadas, en la determinante anterior,

$$\Delta_{24}^{13}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_{13}^{24}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Una determinante menor se llama *principal*, cuando los elementos de su primera diagonal lo son también de la primera diagonal de la determinante de que procede. Deben por consiguiente ser los mismos, los números de orden de las horizontales y verticales que formen una determinante de esa clase; y la menor complementaria de una menor principal, será principal también.

$$\Delta_{34}^{34}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_{12}^{12}=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

son, pues, menores complementarias principales.

Recibe el nombre de *característica*, de una determinante menor, la suma de los números de orden de sus filas y columnas, tomados sobre la determinante primitiva. Será, por lo tanto, siempre par, la característica de un elemento ó de una menor principal.

Se llama *complemento ordinario* de una determinante menor, á su menor complementaria correspondiente; y *complemento algebraico*, al complemento ordinario tomado con el signo + ó con el signo —, según que su característica sea par ó impar.

Como la suma de las características, de dos menores complementarias, es evidentemente igual al doble de la suma de los n primeros números, siendo n el grado de la determinante primitiva, se deduce que ambas características serán números pares ó impares; y que, para determinar el signo que corresponde al complemento algébrico de una menor cualquiera, ó de un solo elemento, es indiferente considerar su característica misma, ó la de la menor ó elemento que complementa. (*)

Ejercicios.

I. Escribir una matriz cuadrada de quinto grado, en la que los elementos sean numéricos, y los de dos líneas conjugadas iguales á cero.

II. Determinar, en una matriz de cuarto grado, todos los elementos cuya característica sea el número seis.

III. Escribir una matriz cuadrada cuyos elementos numéricos conjugados sean iguales ó de signo contrario.

IV. Formar la determinante $\Delta = [a]_4$, en la notación de índices superpuestos.

V. Hallar la menor complementaria algebraica de Δ^{134}_{125}, en la determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & -2 & 8 & 0 \\ 1 & -5 & -4 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

y obtener su valor por la regla de Sarrus.

(*) Cuando en una determinante se reemplazan todos los elementos por sus complementos algébricos, se forma la *determinante recíproca* de la primera.

II.—Propiedades, desarrollo, transformación y cálculo de las determinantes.

263. Teoremas fundamentales. La distinta disposición que pueden tomar los elementos de una matriz, es causa de que su determinante experimente, ó no, alteración, según manifiestan las siguientes proposiciones.

TEOREMA I. *Si en una matriz cuadrada se permutan todas las filas y columnas conjugadas, la determinante no varía.*

Adoptando la notación de Leibnitz, se ve que, efectivamente,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

porque estas dos matrices tienen la misma primera diagonal, que constituye el término $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots\cdots a_{nn}$; y como, dada la disposición de los elementos, la determinante se formará en ambas, permutando en este término principal los primeros ó los segundos subíndices, los desarrollos deberán ser idénticos.

TEOREMA II. *Si en una matriz cuadrada se permutan entre sí dos filas ó dos columnas, su determinante cambia de signo.* (*)

Sea, en efecto, $\pm a_{11}\cdots\cdots a_{pq}\cdots\cdots a_{rs}\cdots\cdots a_{2n}$ un término cualquiera de la determinante que se considera. Si se permutan en él los subíndices p y r, y se recuerda lo dicho al definir la determinante (259), se deduce que ese término variará necesariamente de signo; y como en todos los demás entran los expresados subíndices una vez, y sólo una, resulta que la determinante total deberá también cambiar de signo. Observando, ahora, que la permutación de los

(*) Esta importante proposición, se atribuye á Vandermonde, distinguido matemático francés de fines del siglo último.

subíndices, p y r, equivale á permutar en la matriz las filas $p^{\text{ésima}}$ y $r^{\text{ésima}}$, queda demostrada la proposición; puesto que el mismo razonamiento puede aplicarse á los subíndices q y s, representantes de órdenes de columnas.

Corolario 1.° *Si una línea se permuta* p *veces sucesivas con cualesquiera otras de las que le son paralelas ú homónimas, la determinante cambiará ó no de signo, según que* p *sea impar ó par.*

Corolario 2.° *La permutación simultánea de dos filas y de dos columnas, no altera el signo de la determinante; y cuando se permutan* m *pares de columnas y* n *pares de filas la determinante varía ó no de signo, según que* m + n *sea impar ó par.*

Teorema III. *Si los elementos de dos líneas paralelas de una matriz cuadrada son iguales, su determinante es nula.*

Efectivamente: suponiendo que sean iguales los elementos de las columnas que ocupan los lugares s y u, observamos que si en la determinante existe un término de la forma $Aa_{rs}Ba_{tu}C$, en el cual las letras A, B y C representan los grupos de elementos no explícitos, de que consta el término considerado, habrá seguramente otro $Aa_{ru}Ba_{ts}C$ (*), que deberá tener signo contrario al anterior; pero como en virtud de la hipótesis es

$$a_{rs} = a_{ru} \qquad \text{y} \qquad a_{ts} = a_{tu},$$

deducimos que cada dos términos de la determinante serán iguales y de signos contrarios, y que, por lo tanto, dicha determinante se reducirá á cero (**).

Puede demostrarse también esta importante proposición, como consecuencia de la precedente, notando que, al permutar las dos líneas idénticas, la determinante no se alterará; mas como ha de variar de signo, según dicho teorema, deberá verificarse que

$$\Delta = -\Delta \qquad \text{ó, bien,} \qquad 2\Delta = 0 \qquad \text{y} \qquad \Delta = 0.$$

(*) Cualquier agrupación posible de elementos, en la que entre uno solo de cada fila y otro de cada columna, tiene que formar parte de la determinante, con arreglo á su definición.

(**) Siendo n igual ó mayor que 2, el número $\lfloor n$ de los términos, es necesariamente par.

Corolario. *Si en los términos de una determinante, se substituye en lugar de uno de los primeros ó segundos subíndices, otro cualquiera de los que entran en ella, ó en vez de una letra otra de las que representan elementos, suponiendo la notación ordenada, la determinante se anulará;* pues efectuando la misma substitución en el cuadro matriz, dos líneas homónimas se harán iguales.

264. Desarrollo de las determinantes. Se entiende por desarrollar una función determinante, el obtener, en forma ordenada, la serie de términos que la componen.

Para conseguir tal propósito, en distintas formas, se utilizan diversas propiedades, de las que sólo demostraremos la siguiente.

Teorema. *Toda determinante es la suma algebraica de los productos de los elementos de una misma línea, por sus respectivos complementos algébricos.*

Consideremos, en efecto, la determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y supongámosla ordenada con relación á los elementos de su primer columna, llamando A_{11}, A_{21}, A_{31}, ... A_{n1} los coeficientes de los elementos de igual notación minúscula. Tendremos así:

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22} \cdots\cdots a_{nn} = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} + \cdots\cdots + A_{n1}a_{n1}.$$

(*) Se comprende que, prescindiendo de cualquier elemento, en los términos del desarrollo de una determinante en que esté contenido, y abstracción hecha de los signos, quedarán los de la determinante menor complementaria de ese elemento; pues los grupos así hallados cumplirán con las condiciones necesarias para formar parte de dicha determinante menor, y no faltará ningún término de ésta, porque, de otro modo, faltaría también en la determinante propuesta el que se obtuviere agregando dicho elemento suprimido. Además, como al prescindir del elemento especial de que ahora se trata, no se alterarán las inversiones, cada uno de los términos resultantes quedará con el signo que le corresponde, en la determinante menor referida.

Erigiendo en principio lo que acaba de demostrarse, puede decirse que *en el desarrollo de una determinante cualquiera, el coeficiente del primer elemento es su menor complementaria, afectada del signo* +.

Imaginando transitoriamente, que $a_{21}=a_{31}=\cdots\cdots=a_{n1}=0$, el segundo miembro se convertirá en $A_{11}a_{11}$, y, en el primero, sólo quedarán los términos que contengan el elemento a_{11}, el cual debe multiplicar á todos los de la determinante $\Sigma\pm a_{22}a_{33}\ldots\ldots a_{nn}$, con los mismos signos que á estos correspondan; puesto que precediendo á los demás elementos, las inversiones no variarán al prescindir de a_{11} (*). La igualdad anterior se transformará así, en

$$a_{11}(\Sigma\pm a_{22}a_{33}\ldots\ldots a_{nn})=A_{11}a_{11}\ (*)$$

y, suprimiendo el factor común a_{11}, se hallará:

$$\Sigma\pm a_{22}a_{33}\ldots\ldots a_{nn}=A_{11};$$

luego este coeficiente A_{11}, es la determinante complementaria algébrica del elemento a_{11}, cuya característica es par.

Si, en la matriz cuadrada, se permutan la primera y segunda fila, la determinante cambiará de signo; por consiguiente:

$$\Delta=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ó, lo que es lo mismo,

$$-(\Sigma\pm a_{21}a_{12}a_{33}\ldots\ldots a_{nn})=A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31}+\cdots\cdots+A_{n1}a_{n1};$$

y, si se hace en ambos miembros $a_{11}=a_{31}=\ldots\ldots=a_{n1}=0$, se tendrá, en virtud de análogos razonamientos á los anteriores,

$$-a_{21}(\Sigma\pm a_{12}a_{33}\ldots\ldots a_{nn})=A_{21}a_{21},\ (**)$$

(*) Claro es que deben ser siempre iguales, los resultados de hacer una misma hipótesis cualquiera, en los dos miembros de una igualdad.

(**) Cuando los elementos ordenados de una primer determinante varían de lugar, no debe confundirse, en las que corresponden á las nuevas matrices, los subíndices y el orden alfabético de las letras, con los números que designan las líneas donde se encuentran, que pueden ser diferentes. El orden fundamental de las filas es ahora 2, 1, 3,....n; pero lo más sencillo es servirse del principio antes enunciado, relativo al primer elemento.

de donde

$$-(\Sigma\pm a_{12}a_{33}\ldots\ldots a_{nn})=A_{21};$$

igualdad cuyo primer miembro es la determinante complementaria algébrica del elemento a_{21}, de característica impar.

Al permutar sucesivamente la tercera fila con las dos anteriores, hasta que llegue á ser primera (*), la determinante propuesta no cambiará de signo, y resultará, en forma parecida,

$$\Sigma\pm a_{12}a_{23}a_{44}\ldots\ldots a_{nn}=A_{31};$$

es decir, que A_{31} es el complemento algebraico del elemento a_{31}, cuya característica es par.

Como lo mismo podríamos decir de los demás elementos de la primera columna, queda el teorema demostrado con respecto á esta línea.

Para generalizar por completo la demostración, sea a_{pq} un elemento cualquiera, y A_{pq} su coeficiente en la determinante propuesta, que supondremos ordenada según los elementos de la fila p ó de la columna q.

Hagamos que dicho elemento ocupe el primer lugar del cuadro generador, para lo cual permutaremos sucesivamente la $p^{ésima}$ fila con cada una de las que le preceden, y después la $q^{ésima}$ columna con todas las anteriores. Recordando, entonces, que el coeficiente del primer elemento es, con su signo, la determinante menor correspondiente, y que, si se exceptúan la fila p y la columna q permutadas, todas las demás están en el mismo orden sucesivo que en la determinante primitiva Δ, se deduce que el coeficiente de a_{pq}, en la nueva determinante, será Δ_{pq}; pero como el número total de permutaciones efectuadas para llegar á ésta, es

$$(p-1)+(q-1)=p+q-2$$

resulta, por último, que

$$A_{pq}=(-1)^{p+q-2}.\,\Delta_{pq}=(-1)^{p+q}.\,\Delta_{pq}=\pm\Delta_{pq};$$

(*) Se supone que las permutaciones son sucesivas, cuando no quiere alterarse el orden de las demás líneas. La determinante menor complementaria de un elemento cualquiera de la línea permutada, es entonces la misma que en la determinante primitiva.

según sea par ó impar la característica, $p+q$, del elemento considerado.

Aplicando el desarrollo, que es consecuencia del teorema que acaba de demostrarse, á una determinante de tercer grado, ordenada según los elementos de su primera columna, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Corolario. *Si los elementos de una línea, menos uno, son cero, la determinante es igual á dicho elemento, multiplicado por su complemento algébrico; y cuando todos lo son, la determinante es nula.*

265. Transformación de determinantes. Las matrices de las determinantes suelen someterse á transformaciones diversas, que facilitan su desarrollo, ó la demostración de ciertas proposiciones; siendo las más usuales, las consignadas en los siguientes teoremas.

Teorema I. *Si los elementos de una línea tienen un factor común, éste lo es de la determinante.*

En efecto: ordenando la determinante por los elementos de dicha línea, que supondremos tengan el factor común f, y sea la fila α, de lugar impar, se tendrá:

$$\Delta = \Delta_{\alpha 1} f a_{\alpha 1} - \Delta_{\alpha 2} f a_{\alpha 2} + \cdots + (-1)^{\alpha+n} \Delta_{\alpha n} f a_{\alpha n} = f\Delta';$$

llamando Δ' la determinante que resulta al suprimir el factor común que tienen los elementos referidos.

Corolario 1.º *Para multiplicar ó dividir una determinante por una cantidad cualquiera, basta multiplicar ó dividir, por dicha cantidad, todos los elementos de una misma línea; y, recíprocamente, cuando los elementos de una fila ó de una columna tienen un factor ó divisor común, puede sacarse fuera de las barras, afectando á toda la determinante.* Así:

$$f\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ fa_{21} & fa_{22} & fa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y también:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} : d = \begin{vmatrix} a_{11}:d & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}:d & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}:d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Corolario 2.º *Un factor ó divisor común á todos los elementos de una línea, puede trasladarse á los elementos de otra cualquiera; ó, más en general, una determinante no varía multiplicando los elementos de una línea y dividiendo los de otra por una misma cantidad.* (*)

Según esto, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \\ 10 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 14 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & 12 & 8 \end{vmatrix} \quad (^{**})$$

Corolario 3.º *Una determinante cambia de signo, variando los de todos los elementos de una misma línea* (***)*; y si alguna de ellas es múltipla de otra homónima, ó sus elementos correspondientes guardan entre sí la misma relación, la determinante es nula.* Así:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

y, evidentemente,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 15 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Claro es que si las líneas no son homónimas, debe quedar invariable el elemento común á ambas.

(**) Al comparar sucesivamente con la propuesta las tres determinantes transformadas, conviene respectivamente prescindir, de las últimas columnas, de los elementos extremos de las dos últimas filas, y de los que corresponden á los ángulos. Debe también notarse que aun cuando, para mayor sencillez, procuramos en los ejemplos numéricos que todos los elementos sean enteros, nada se opone á que tengan cualquier valor.

(***) Esta propiedad, resulta á la vez del teorema relativo al desarrollo de una determinante.

TEOREMA II. *Si todos los elementos de una fila ó columna son polinomios de igual número de términos, puede descomponerse la determinante total en otras tantas parciales, que se forman de la primitiva, substituyendo sucesivamente á la línea compleja considerada, cada uno de los términos que la componen.* (*)

Para demostrar, en efecto, que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & (b_1+b'_1+b''_1) & c_1 \\ a_2 & (b_2+b'_2+b''_2) & c_2 \\ a_3 & (b_3+b'_3+b''_3) & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b'_1 & c_1 \\ a_2 & b'_2 & c_2 \\ a_3 & b'_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b''_1 & c_1 \\ a_2 & b''_2 & c_2 \\ a_3 & b''_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ordenaremos la determinante propuesta, con relación á los elementos de la segunda columna, y se hallará:

$$\Delta = -\left(b_1+b'_1+b''_1\right)\Delta_{12}+\left(b_2+b'_2+b''_2\right)\Delta_{22}-\left(b_3+b'_3+b''_3\right)\Delta_{32}$$

ó, bien,

$$\Delta = \left[-b_1\Delta_{12}+b_2\Delta_{22}-b_3\Delta_{32}\right]+\left[-b'_1\Delta_{12}+b'_2\Delta_{22}-b'_3\Delta_{32}\right]+$$

$$+\left[-b''_1\Delta_{12}+b''_2\Delta_{22}-b''_3\Delta_{32}\right] = \Delta'+\Delta''+\Delta''';$$

debiéndose observar que, aun cuando referida á un caso particular, la demostración que acaba de darse es general.

TEOREMA III. *El valor de una determinante no se altera agregando á los elementos de una línea, los de otra homónima multiplicados por una cantidad positiva ó negativa cualquiera; ó bien la suma de los de varias líneas que le sean paralelas, multiplicados por cantidades iguales ó diferentes.* (**)

Suponiendo que á los elementos de la primera columna de la

(*) Poniendo cero en lugar de los términos que falten, puede suponerse siempre que los elementos polinomios tienen igual número de aquéllos.

(**) Al decir cantidades iguales ó diferentes, se hace referencia á los elementos de líneas distintas; porque los de cada una deben multiplicarse siempre por un mismo factor.

determinante de grado n, se les hayan agregado los de la segunda, multiplicados por p, se tendrá, según los precedentes teoremas:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}+pa_{12}) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ (a_{21}+pa_{22}) & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{n1}+pa_{n2}) & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y, como la última determinante es cero, y lo mismo ocurriría con las correspondientes á los elementos de cualquier número de líneas homónimas, queda el teorema demostrado.

COROLARIO 1.° *El valor de una determinante no varía cuando á los elementos de una línea se les suma, ó resta, los de otra línea paralela.* (*)

COROLARIO 2.° *Cuando, en una determinante, un elemento es múltiplo de alguno de su misma fila ó columna, puede reemplazarse por otra en la que dicho elemento múltiplo se reduce á cero;* pues bastará restar, de los elementos de la columna ó fila en que esté el referido, los productos de los de la homónima, que contenga al divisor, por el cociente de dividir el primero por el segundo. (**)

(*) Es digno de notarse que la suma de dos líneas homónimas puede reemplazar á cualquiera de ellas, mientras que su diferencia sólo puede substituir á la que sirve de minuendo; pues para reemplazar á la otra debería cambiar de signo.

(**) En las determinantes numéricas, esta consecuencia no tiene ventajosa aplicación, sino cuando dicho cociente es entero; pero, dada la generalidad del concepto algebraico de múltiplo, puede aplicarse también cuando dicho primer elemento sea realmente divisor, ó en un caso cualquiera. Por igual razón pueden substituirse, una por otra, las palabras *múltiplo* y *divisor*, en varias otras proposiciones.

COROLARIO 3.º *Si un elemento de una determinante es divisor de todos los demás de una de las líneas en que se encuentra, puede convertirse en otra en la que estos elementos múltiplos sean iguales á cero.* La condición exigida quedará evidentemente satisfecha, por todo elemento cuyo valor absoluto sea la unidad.

TEOREMA IV. *Toda determinante puede transformarse en otra que tenga los elementos, de una cierta línea, iguales á la unidad, siempre que ninguno de ellos fuese antes cero.*

Se ve, efectivamente, que multiplicando los elementos de cada línea, perpendicular á la que se considera, por el producto de los elementos de esta última línea, excepto por el que se halla á la vez en ambas, vendrán á ser iguales los elementos que deben reducirse á la unidad; y que no se alterará la determinante propuesta dividiéndola por el producto de las cantidades, por las que se hayan multiplicado todas las líneas de distinta denominación que la que debe modificarse. Sacando luego factor común el producto de todos los elementos primitivos de dicha línea, quedarán éstos reducidos á la unidad, según se quería demostrar. (*)

Tendremos, por ejemplo, que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ a'bc & acb' & abc' \\ a''bc & acb'' & abc'' \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & acb' & abc' \\ a''bc & acb'' & abc'' \end{vmatrix}$$

Podría también hacerse uso del mínimo común múltiplo de los elementos de la línea elegida; multiplicando cada uno de ellos, y todos los de la otra línea en que se encuentre, por el cociente de dividir, por él, dicho mínimo común múltiplo, que luego podrá sacarse por factor común; si bien será siempre necesario dividir la determinante que resulte, por el producto de los factores parciales, por los cuales se haya multiplicado cada línea. (**)

(*) Después de esta última transformación, el divisor de la determinante, ó el denominador de la unidad fraccionaria que la multiplique, será la potencia del producto de los elementos modificados, de grado igual al de dicha determinante, disminuído en dos unidades.

(**) El factor fraccionario por el que finalmente deberá multiplicarse la determinante propuesta, para que su valor no se altere, tendrá por numerador el producto de los elementos á los cuales substituye la unidad, y por denominador la potencia del mínimo común múltiplo, cuyo exponente sea el número inmediato inferior al grado de dicha determinante.

Debe notarse que, en virtud del teorema anterior, *cuando en una determinante sean ya iguales á la unidad los elementos de una línea, se puede sumar ó restar una misma cantidad á todos los elementos de cualquier línea homónima.*

COROLARIO. *Toda determinante puede transformarse en otra en la que una cierta línea tenga todos sus elementos, menos uno, iguales á cero, y ese otro elemento igual á la unidad;* puesto que, una vez verificada la transformación precedente, bastará restar los elementos de una cualquiera de las líneas perpendiculares, á la que se considera, de todas las que le sean paralelas. (*)

Esta nueva transformación permite reducir una determinante á otra de grado inmediatamente inferior; pues la que cumpla con la última condición expresada, será igual al complemento algébrico del referido elemento igual á la unidad ó, abstracción hecha del signo, á una determinante menor de grado $n-1$.

TEOREMA V. *Toda determinante se transforma en otra de grado inmediatamente superior, anteponiéndole una fila y una columna cuyo primer elemento sea la unidad, siendo los demás elementos, de una de esas líneas, iguales á cero, y los de la otra, cantidades cualesquiera, que pueden ser también cero.*

Se ve, en efecto, que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & c & \ldots\ldots & l \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pudiendo asignarse á b, c, ... l, valores cualesquiera, ó ser $b=c=\ldots\ldots=l=0$; pues desarrollando la nueva determinante, con relación á los elementos de la primera columna, se volvería á encontrar la determinante propuesta. (**)

(*) Conviene observar que si todos los elementos, menos uno, de una línea son ceros, pueden reemplazarse los demás de la otra, donde esté el elemento distinto de cero, por cantidades cualesquiera y también por ceros.

(**) Esta transformación no suele emplearse sino cuando hay que combinar dos determinantes de grados diferentes, y la operación exige que sean del

266. Cálculo de las determinantes. El cálculo de una determinante cualquiera puede efectuarse, bien por medio de la ley de formación, lo cual exige obtener la determinante general de su mismo grado y substituir después en lugar de los elementos representativos sus valores particulares, ó bien desarrollándola, en forma ordenada, según los elementos de una misma línea. (*)

Este último procedimiento es el que se sigue con más frecuencia, porque no obliga á pasar por las determinantes de término generales y porque su repetición conduce, al fin, á determinantes de segundo ó de tercer grado, que se calculan inmediatamente; pero cuando existen ciertas relaciones entre los elementos del cuadro matriz, y, sobre todo, cuando dichos elementos son numéricos, es fácil simplificar ó abreviar el cálculo, quitando los denominadores ó sacando los factores comunes que pueda haber, eligiendo convenientemente las líneas según las cuales se haya de efectuar el desarrollo, ó reduciéndola, por último, á otra de grado inferior.

Para hacer desaparecer los denominadores, se comprende que bastará multiplicar los elementos de las líneas que contengan fracciones, por el mínimo común múltiplo de sus denominadores respectivos; y que la determinante no se alterará poniendo fuera de las barras, como factor, la unidad fraccionaria cuyo denominador sea el producto de todos los mínimos comunes múltiplos parciales.

mismo grado. Claro es que, por medio de sumas ó restas de líneas paralelas, pueden hacerse desaparecer todos los elementos iguales á cero y también la unidad, quedando una determinante sin particularidad alguna perceptible; mas generalmente es preferible conservarla bajo la primera forma.

Pueden también intercalarse una fila y una columna de cualquier orden, siempre que tengan la unidad por elemento común y que los demás de una de estas líneas sean nulos, y en un todo arbitrarios los de la otra; dando á la determinante el signo que corresponda al complemento algebraico de ese elemento común igual á la unidad. Esta última condición es innecesaria cuando ambas líneas sean conjugadas, porque siendo en tal caso dicho elemento común principal, su característica será par.

(*) Aunque no se ha explicado, por no ser de aplicación frecuente, conviene saber que es posible desarrollar una determinante en suma algebraica de productos de menores complementarias de cualquier orden. El teorema que así lo expresa y del que es caso particular el referente al desarrollo según los elementos de una línea, se enuncia como sigue: *toda determinante es la suma de los productos de las determinantes menores de grado* p, *que pueden formarse con los elementos de* p *filas ó* p *columnas, multiplicadas por los respectivos complementos algébricos.*

Siendo ya los términos enteros, se verá si en los elementos de una misma fila ó columna hay factores comunes ó si pueden aparecer sumando ó restando ordenadamente líneas homónimas; y en tal caso convendrá sacar dichos factores fuera de la determinante, simplificándose así su cálculo.

Es por otra parte evidente que, pudiendo tomarse cualquier línea como base del desarrollo, convendrá elegir la que tenga mayor número de elementos nulos; puesto que, por cada uno que sea cero, el número de los términos del desarrollo se reducirá en tantos cuantos tenga la determinante de grado inmediatamente inferior á la que se considera.

Si ninguno de los elementos es cero, apenas habrá caso en que no pueda conseguirse que alguno de ellos se anule, transformando la determinante por medio de sumas ó restas de líneas de igual denominación ó de múltiplos convenientes de ellas; es sin embargo preciso, cuando se multiplique por un factor la línea que lleve el elemento que ha de reducirse á cero, dividir por ese factor toda la determinante, la cual no se alterará por las multiplicaciones de los elementos de las otras líneas. (*)

La transformación más ventajosa para el cálculo, es indudablemente la que anula todos los elementos, menos uno, de una misma línea; porque de ese modo, según sabemos, se rebaja el grado de la determinante. Esto puede conseguirse, como ya se ha dicho, haciendo primero iguales los elementos de la referida línea; pero tal procedimiento suele presentar el inconveniente de aumentar demasiado el valor de los demás. Es preferible convertir un elemento en la unidad positiva ó negativa, de la manera que acaba de indicarse para anularlo, si es que ninguno de ellos tiene ese valor, y proceder luego, como también dijimos en las transformaciones, fundándonos en que la unidad es divisor de todos los números.

Finalmente: conviene observar que, cuando en una determi-

(*) También se hace uso de esta transformación, con el único fin de reducir el valor de algunos elementos.

nante de grado n, se anula un elemento del cuadro generador, el número de sus términos disminuye en la $n^{\acute{e}sima}$ parte, de suerte que $\underline{|n}$ queda disminuído en $\underline{|n-1}$; mientras que al convertirse en una determinante de grado inmediatamente inferior, el número de los términos se convierte en la $n^{\acute{e}sima}$ parte, es decir que $\underline{|n}$ se reduce á $\underline{|n-1}$.

Sea, por ejemplo, la determinante de cuarto grado,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -9 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -8 \\ 7 & 9 & -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -9 & 3 \\ 5 & -8 & 2 & -8 \\ 7 & -5 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$

que se obtiene restando, de los elementos de la segunda columna, los productos por 2 de sus correspondientes de la primera.

Se halla, por medio de transformaciones sucesivas,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -7 & -2 \\ 3 & 1 & -9 & 3 \\ 29 & 0 & -70 & 16 \\ 22 & 0 & -52 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 & -2 \\ 29 & -70 & 16 \\ 22 & -52 & 18 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & -7 & -2 \\ 29 & -70 & 16 \\ 11 & -26 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 29 & -41 & 16 \\ 11 & -15 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 357 & -41 & -66 \\ 131 & -15 & -21 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 357 & -66 \\ 131 & -21 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 119 & -22 \\ 131 & -21 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 119 & -22 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times 383 = -2298. \ (*)$$

(*) Las transformaciones efectuadas, á partir de la segunda matriz, son, por su orden, las que siguen: sumar á la primera fila la segunda y, respectivamente, á la tercera y á la cuarta el óctuplo y el quíntuplo de la segunda; obtener la determinante equivalente de tercer grado; sacar 2 factor común en la tercera fila; añadir á la segunda columna la primera; restar de la primera columna el óctuplo de la segunda y sumar el duplo de ésta á la tercera; reducir á la determinante de segundo orden; sacar 3 factor común de los elementos de la primera fila; restar de la segunda la primera; y calcular, por fin, directamente la última determinante de segundo grado.

Ejercicios.

I. Obtener el desarrollo de las determinantes que siguen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -m & n & 1 \\ -1 & c & a \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ m & 1 & n \\ 0 & p & \alpha \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \cos a \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{vmatrix}$$

II. Permutar las filas y las columnas homólogas, efectuando, antes y después, el desarrollo de las determinantes

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 3 & b & c \\ 4 & c & a \end{vmatrix}$$

III. Llevar á la cabeza del cuadro matriz los elementos subrayados, por cambios convenientes de líneas; y ver si se altera, ó no, el signo de la determinante propuesta.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \underline{a_2} & b_2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 7 & 9 & 2 \\ 11 & \underline{3} & 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & m_1 \\ a_2 & k_2 & \underline{m_2} \\ a_3 & k_3 & m_3 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 15 & 2 & 4 \\ 1 & 12 & 7 \\ 6 & 9 & \underline{8} \end{vmatrix}$$

IV. Sacar factores comunes y quitar denominadores, en las determinantes

$$\begin{vmatrix} 3a^2 & 12b \\ 5a^2 & 15b^2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 2\frac{1}{4} \\ 7 & 8 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 15 & 24 & 33 \\ 20 & 32 & 44 \\ 35 & 56 & 77 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 4\frac{1}{2} & 3\frac{1}{2} & 5 \\ 8 & 3 & 6\frac{2}{3} \\ 2 & 1\frac{1}{9} & 10 \end{vmatrix}$$

V. Demostrar que cuando son ceros todos los elementos situados á un lado de la primera diagonal, la determinante se reduce al término principal.

VI. Transformar las determinantes siguientes, de modo que sean iguales á la unidad todos los elementos de una misma fila ó columna.

$$\begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 8 & 7 \\ 16 & 4 & 15 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & -6 & 5 \\ 9 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

VII. Hacer ver que son nulas las determinantes que siguen:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 15 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} b & a^{n-1} & \frac{1}{a} \\ c & a^n & 1 \\ d & a^{n+1} & a \end{vmatrix}$$

VIII. Simplificar las determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & 0 & z_2 \\ x_3 & 0 & z_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 9 & 8 \\ 17 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

IX. Reducir, á otras de dos términos, las determinantes de cuarto grado

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -6 & 10 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & -16 \\ 9 & 11 & 2 & 72 \\ 6 & -3 & 5 & 40 \\ 10 & 7 & 8 & -39 \end{vmatrix}$$

III.—Operaciones con las funciones determinantes.

267. Ventajas de operar con las determinantes bajo su forma matriz. Las funciones determinantes aparecen muchas veces en el análisis por las frecuentes aplicaciones que de ellas se hacen; pero como su cálculo ó desarrollo es bastante penoso, conviene saber encontrar una determinante que sea equivalente al resultado que se hallaría al efectuar, con los desarrollos ó valores numéricos, la operación á que se someten tales funciones, dejando para el final el cálculo ó desarrollo de la determinante obtenida, si no conviniera conservarla bajo esa forma.

Debe, pues, examinarse si es ó no posible operar con las determinantes, combinando entre sí los elementos de sus matrices respectivas.

268. Adición y substracción. Hasta ahora no se conoce el medio de encontrar una determinante que sea la suma ó diferencia de otras dos cualesquiera, no pudiendo conseguirse este propósito, sino cuando las determinantes son de igual grado, y sólo difieren en los elementos de dos líneas homólogas; porque entonces puede aplicarse el segundo de los teoremas demostrados, al tratar de la transformación de estas funciones. Se tendrá así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} \pm \alpha_{11}) & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ (a_{21} \pm \alpha_{21}) & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{n1} \pm \alpha_{n1}) & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

También pueden sumarse ó restarse dos determinantes de igual grado, cuando los elementos de todas las líneas homónimas, menos una, no difieren sino en un mismo factor, entero ó fraccionario, de sus correspondientes en las de igual orden; pues todos esos factores pueden trasladarse á las líneas cuyos elementos son diferentes y que no guardan entre sí relación alguna, quedando ya las demás completamente iguales (*); pero, en general, es indispensable prescindir de la forma matriz, haciendo explícito el valor ó desarrollo de cada determinante, y efectuar después la suma ó resta algebraicas.

269. Multiplicación.—El procedimiento para multiplicar dos determinantes, se deduce inmediatamente de la proposición que sigue.

TEOREMA. *El producto de dos determinantes, de grado* n, *es otra determinante del mismo grado, cuyos elementos son las sumas de los productos que se obtienen multiplicando los elementos de cada fila de la primera, por los elementos de igual número de orden de las columnas sucesivas de la segunda.*

(*) Si las únicas líneas homónimas distintas no fuesen homólogas, bastaría variar una de ellas de modo que esa condición se verificase y observar si la determinante correspondiente había ó no cambiado de signo.

Sean, en efecto, las determinantes

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Haciendo las representaciones siguientes:

$$p_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1};\quad p_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2};\ldots\ldots$$

$$p_{1n}=a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn}$$

$$p_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1};\quad p_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2};\ldots\ldots$$

$$p_{2n}=a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n1}=a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1};\quad p_{n2}=a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2};\ldots\ldots$$

$$p_{nn}=a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn}$$

se tendrá la determinante

$$P=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

en la cual el elemento general p_{gk}, ó, sea, el que se halla á la vez en la fila g y en la columna k, designa la suma de los productos de los elementos de la $g^{ésima}$ fila de la determinante multiplicando, multiplicados por los del mismo número orden de la $k^{ésima}$ columna del multiplicador, es decir que

$$p_{gk}=a_{g1}b_{1k}+a_{g2}b_{2k}+\cdots\cdots+a_{gn}b_{nk}.\ (*)$$

(*) Conviene notar que, en todos los términos de p_{gk}, g y k son los subíndices extremos, y que los intermedios son sucesivamente iguales á la serie de los números desde 1 hasta n.

Teniendo presente el teorema, ya citado, de la transformación de las determinantes, cuyos elementos son polinomios de igual número de términos, se deduce que la determinante P podrá descomponerse en la suma de n^n determinantes del mismo grado y de elementos monomios, que se obtendrían separando sucesivamente los términos que se corresponden en cada una de su n columnas; mas si observamos que todos esos términos correspondientes tienen como factor común la letra b, afectada de un primero y segundo subíndices, respectivamente iguales á los segundos de a y del elemento p, de que proceden, se podrá establecer la igualdad:

$$P=\Sigma\begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & \cdots\cdots & a_{1z} \\ a_{2r} & a_{2s} & \cdots\cdots & a_{2z} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nr} & a_{ns} & \cdots\cdots & a_{nz} \end{vmatrix} b_{r1}b_{s2}\cdots\cdots b_{zn};$$

expresión en la cual deben asignarse á cada uno de los subíndices, $r, s, \ldots\ldots z$, todos los n valores $1, 2, \ldots. n$ (*); pero cuando reciban valores iguales siquiera dos de esas letras, el factor determinante se anulará por contener dos ó más columnas idénticas; así es que no quedarán sino los sumandos que correspondan á sistemas de valores distintos de dichos números.

Ahora bien: siempre que sea par el número de inversiones de la permutación que formen $r, s, \ldots\ldots z$, ó sea de primera clase, dicha determinante factor no diferirá de A; puesto que se podrá llegar á ésta por un número par de permutaciones de columnas, y el factor producto $b_{r1}b_{s2}\ldots\ldots b_{zn}$ será, con su signo, un término de la determinante B; y si el número de inversiones, que formen los valores numéricos de $r, s, \ldots\ldots z$, es impar, ó la permutación es de segunda clase, el factor determinante será $-A$, y el factor producto un término de B con signo contrario; de suerte que asignando á los referidos subíndices todos los sistemas de valores dis-

(*) Esto dará un número de sumandos, en el segundo miembro, igual á n^n, que es el número de variaciones con repetición de n cantidades, cuando entran todas en cada una de ellas.

tintos que corresponden á las $\lfloor n$ permutaciones de los números $1, 2, 3, \ldots\ldots n$, y sacando luego A como factor común, se tendrá:

$$P = A \, . \, \Sigma \pm b_{11} \, b_{22} \ldots \, b_{nn} = A \, . \, B,$$

que es lo que se quería demostrar.

Pudiendo permutarse en una determinante las líneas homólogas, no habrá inconveniente en multiplicar los elementos de cada línea de la primera determinante por sus correspondientes de todas las líneas homónimas de la segunda, y en colocar ordenadamente, en fila ó en columna, los productos que provengan de una misma línea de cualquiera de las determinantes propuestas. (*)

En tal concepto se halla:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & -5 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 6 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 22 \\ 23 & 35 & 9 \\ -15 & 6 & 22 \end{vmatrix}$$

obteniéndose los elementos de la primera fila de la determinante producto, por medio de las igualdades:

$$3.7 + 1.2 - 4.5 = 3 \, ; \quad 3.6 - 1.1 - 4.3 = 5 \, ; \quad 3.4 - 1.2 + 4.3 = 22 \, ;$$

y de una manera parecida la de las filas segunda y tercera de la misma.

Cuando las dos determinantes consideradas sean de grado distinto, bastará elevar el grado de la que lo tenga menor ó reducir el de la otra, del modo ya explicado; siendo también fácil obtener el producto de cualquier número de determinantes, por medio de multiplicaciones sucesivas.

270. División. Puesto que la operación de dividir es inversa

(*) Es posible, según esto, modificar el enunciado del teorema, ó la regla dada para la multiplicación, en la cual ha convenido establecer una identidad absoluta entre los órdenes de fila y de columna de cualquier elemento de la determinante producto, y los de las líneas homónimas de los factores determinantes de que procede. Resulta así, que el producto de dos determinantes A y B puede ordenarse de cuatro maneras diversas; primera, según queda explicado, ó, sea, combinando las filas de A con las columnas de B; segunda, procediendo inversamente, es decir, combinando las columnas de A con las filas de B; tercera, combinando dichas columnas de A con las de B; y cuarta, las filas de A con las filas de B, que es como suele hacerse en la práctica.

de la de multiplicar, puede considerarse la determinante dividendo, como el producto de dos determinantes de igual grado, una de las cuales sea el divisor y la otra el cociente buscado.

Se tendrá de este modo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots\ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots\ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots\ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

y efectuando la multiplicación indicada, resultará una determinante que deberá ser igual al dividendo.

Identificando seguidamente, en ambas, los elementos homólogos y agrupando las igualdades que correspondan á sus columnas homólogas, se hallarán n sistemas de n ecuaciones de primer grado, con n incógnitas, cada uno de los cuales permitirá encontrar los valores de los elementos de las distintas filas del cociente.

Si se quiere, por ejemplo, efectuar la división

$$\begin{vmatrix} 2 & 93 & 96 \\ 6 & -23 & -28 \\ 5 & -71 & -79 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 10 & 19 \\ 11 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

deberá obtenerse el producto

$$\begin{vmatrix} 10 & 19 \\ 11 & 20 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 19 \\ 0 & 11 & 20 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} ;$$

é identificando el resultado

$$\begin{vmatrix} x & 10y + 19z & 11y + 20z \\ x' & 10y' + 19z' & 11y' + 20z' \\ x'' & 10y'' + 19z'' & 11y'' + 20z'' \end{vmatrix}$$

con la determinante dividendo, se deducen los siguientes sistemas de valores

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -4 \\ z = 7 \end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{l} x' = 6 \\ y' = -8 \\ z' = 3 \end{array}\right\} ; \quad \begin{array}{l} x'' = 5 \\ y'' = -9 \\ z'' = 1 \end{array}$$

que dan para el cociente, la determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 6 & -8 & 3 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix} \text{(*)}$$

271. Elevación á potencias. La regla de la multiplicación permite obtener potencias de las determinantes, cuyos exponentes sean números enteros y positivos. Así:

$$(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3)^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 & a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_3 a_2 + b_3 b_2 + c_3 c_2 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

y, análogamente,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 14 & -11 & -1 \\ -11 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 14 \end{vmatrix};$$

debiendo observarse que el cuadrado, y, por consiguiente, *toda potencia de grado par de una determinante, tiene que ser otra determinante simétrica.* (**)

(*) Puede comprobarse este cociente, calculando todas las determinantes por la regla de Sarrus y efectuando la división numérica.

(**) La extracción de raíces parece que podría efectuarse de un modo análogo al de la división; pero el establecimiento del sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas, y la resolución de éste, suelen exigir cálculos tan penosos, que no compensan la conservación de la forma matriz. Dicha resolución es además generalmente imposible, cuando los elementos de la determinante propuesta no son todos numéricos.

Ejercicios.

I. Efectuar las sumas y restas de determinantes que se indican:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha_2 & y_2 & z_2 \\ \alpha_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 5 & -2 & 8 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

II. Multiplicar las siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 2 \\ 5 & 9 & 11 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 19 & 8 \end{vmatrix} \text{(*)}$$

III. Obtener los cocientes que siguen:

$$\begin{vmatrix} 24 & 140 & -209 \\ 159 & 54 & 39 \\ 150 & 87 & 39 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 211 & 112 \\ 6 & 171 & 160 \\ 5 & 366 & 224 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 12 & 23 \\ 17 & 6 \end{vmatrix}$$

IV. Hallar las potencias expresadas á continuación:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2; \quad \begin{vmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}^2; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}^3$$

(*) No debe olvidarse que las prolijas operaciones de multiplicación, división y elevación á potencias de determinantes, se facilitan notablemente simplificando estos últimos, siempre que sea posible hacerlo desde luego, ó sacando al menos los factores comunes que pueda haber en los elementos de una misma línea.

IV.—Aplicación de las determinantes á la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

272. Procedimiento resolutivo. Cuando se tiene un sistema de ecuaciones de primer grado, con igual número de incógnitas, puede efectuarse simultáneamente la eliminación de todas las incógnitas, menos una, empleando las funciones determinantes de sus coeficientes, de la manera que vamos á explicar.

Sea el sistema de n ecuaciones de primer grado, con igual número de incógnitas,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = k_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = k_n \; (*)$$

Designando por Δ la determinante de la matriz cuadrada que forman los n^2 coeficientes de este sistema, claro es que cuando Δ no sea cero, tampoco podrán serlo todas las determinantes menores que resultan al ordenar dicha determinante, con relación á los elementos de una cualquiera de sus líneas.

Suponiendo que esta línea ordenatriz sea la primera columna, se tendrá:

$$\Delta = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \cdots\cdots + A_{n1}a_{n1};$$

siendo en general A_{rs} el coeficiente de a_{rs}, es decir, la determinante menor algebraica que corresponde á ese elemento.

Multiplicando ahora los dos miembros de cada una de las ecuaciones del sistema por el complemento algébrico del elemento de la primera columna, que se halle en la misma fila que la ecuación considerada, y sumándolas término á término, se hallará una ecuación que podrá reemplazar seguramente á alguna de las propuestas (*), y que será:

$$\Delta x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \cdots\cdots + A_{n1}a_{n2})\,x_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ (A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \cdots\cdots + A_{n1}a_{nn})\,x_n =$$
$$= A_{11}k_1 + A_{21}k_2 + \cdots\cdots + A_{n1}k_n;$$

pero como los coeficientes de $x_2, \ldots\ldots x_n$ son iguales á cero, puesto que representan determinantes que tienen dos columnas iguales (**), esta ecuación se reduce á

$$\Delta x_1 = A_{11}k_1 + A_{21}k_2 + \cdots\cdots + A_{n1}k_n,$$

de donde

$$x_1 = \frac{A_{11}k_1 + A_{21}k_2 + \cdots\cdots + A_{n1}k_n}{\Delta}.$$

Análogamente se hallaría el valor de una incógnita cualquiera, x_p; pues bastaría ordenar la determinante Δ por los elementos de la columna $p^{\text{ésima}}$, y sumar las ecuaciones, después de multiplicarlas, respectivamente, por las menores complementarias algébricas de los elementos de dicha columna $p^{\text{ésima}}$, situados en las mismas filas que ocupen las ecuaciones consideradas, obteniéndose así:

$$x_p = \frac{A_{1p}k_1 + A_{2p}k_2 + \cdots\cdots + A_{np}k_n}{\Delta}.$$

(*) Siempre puede suponerse que las n incógnitas entran en cada ecuación del sistema, poniendo cero por coeficiente á las que pudieran faltar en algunas de ellas.

(*) Del teorema II de las transformaciones aisladas que cada ecuación puede experimentar (**117**), y del corolario del teorema I de las transformaciones de combinación (**122**), se deduce, según allí se indicó, que *una ecuación de un sistema puede substituirse por la suma de los productos de todas ellas por cualesquiera cantidades finitas é independientes de las incógnitas, siempre que, por lo menos, no sea cero el factor por el cual dicha ecuación se multiplique.* Es también muy fácil demostrar directamente, que en el sistema formado por las ecuaciones,

$$A_1 = 0,\; A_2 = 0,\; \ldots\ldots A_p = 0,\; \ldots\ldots A_m = 0,$$

puede reemplazarse la ecuación $A = 0$, por la

$$A_1 a_1 \pm A_2 a_2 \pm \ldots\ldots \pm A_p a_p \pm \ldots\ldots \pm A_m a_m = 0,$$

con tal que el factor a_p sea seguramente distinto de cero.

(**) El coeficiente de x_g, por ejemplo, comparado con el desarrollo de Δ, se ve que es esta misma determinante, substituyendo los elementos de la columna $g^{\text{ésima}}$, en lugar de sus correspondientes de la primera.

Se ve, por lo tanto, que todas las fracciones, que representan los valores de las incógnitas, tienen el denominador común Δ, y por numerador la determinante que resulta reemplazando los elementos de la columna, que forman las coeficientes de la incógnita de que se trata, por los segundos miembros respectivos, ó, sea, por los situados en las filas donde aquéllos se encuentran.

Podrán, pues, ponerse bajo la forma abreviada

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots\ldots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

designando en general por Δ_p la determinante que se obtiene substituyendo los elementos de la $p^{ésima}$ columna de Δ, por los correspondientes términos conocidos de las ecuaciones.

En la práctica se dejan, á veces, dichas determinantes bajo su forma matriz, quedando sin efectuar los desarrollos.

273. Discusión de las fórmulas obtenidas. Sabemos que, si ninguna de las n^2 determinantes menores de primer orden de Δ fuesen iguales á cero, cada una de las ecuaciones, que han dado los valores de las incógnitas, podría reemplazar á cualquiera de las del sistema propuesto; de modo que formarían un sistema equivalente á éste, y los valores obtenidos serían los únicos que podrían satisfacerlo; pero como, aun suponiendo Δ distinta de cero, es posible que sean nulas todas las determinantes menores, menos una, relativas á los coeficientes de una misma incógnita, no puede asegurarse sino que cada una de las ecuaciones resultantes de la eliminación es capaz de substituir á una de las propuestas, que acaso sea la misma que aquella á la cual substituye la que da el valor de otra de las incógnitas (*). Se deduce, por consiguiente, que sólo podrá afirmarse que, siendo $\Delta \gtrless 0$, los valores de las incógnitas que verifiquen al sistema propuesto, deberán satisfacer á todas las ecuaciones procedentes de las sucesivas eliminaciones, y, por lo tanto, que no podrán ser otros que los que de ellas han resultado.

(*) Si la única determinante menor que no fuese cero, de las que corresponden á los elementos de la primera columna de Δ, fuese Δ_{31} y la única que tampoco se anulara, de las relativas á los elementos de la segunda columna, fuese Δ_{32}, las ecuaciones que dan x_1 y x_2, no podrían reemplazar seguramente sino á la misma tercera ecuación de las propuestas.

Para comprobar, en fin, que el sistema de valores obtenido verifica á las ecuaciones consideradas, bastará substituirlo en cada una de ellas y ver si se hacen idénticos sus dos miembros.

Substituyendo los valores de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, en la primera ecuación, por ejemplo, sacando $\frac{1}{\Delta}$ factor común y ordenando con relación á $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$, su primer miembro se convertirá en

$$\frac{1}{\Delta}\Big[(A_{11}a_{11}+A_{12}a_{12}+\cdots\cdots+A_{1n}a_{1n})k_1+(A_{21}a_{11}+A_{22}a_{12}+\cdots\cdots+A_{2n}a_{1n})k_2+$$
$$+\cdots\cdots+(A_{n1}a_{11}+A_{n2}a_{12}+\cdots\cdots+A_{nn}a_{1n})k_n\Big];$$

pero el coeficiente de k_1 es precisamente la determinante Δ, ordenada por los elementos de su primera fila, y los coeficientes de $k_2, \ldots\ldots k_n$ son todos cero, puesto que representan determinantes que tienen dos líneas paralelas iguales (*); luego dicho primer miembro se reduce á $\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta k_1 = k_1$; lo cual demuestra que la ecuación queda verificada.

Como igual comprobación puede hacerse en todas las demás ecuaciones, deducimos que *cuando en un sistema de* n *ecuaciones de primer grado con* n *incógnitas, la determinante de los coeficientes es distinta de cero, el sistema de ecuaciones admite una solución única, dada por valores finitos y determinados.*

Si $\Delta = 0$, pueden ocurrir dos casos, á saber: que alguna, al menos, de las n^2 determinantes menores de primer orden no sea cero; ó que lo sean todas (**). En el primer caso, supongamos que Δ_{11} (***) sea distinta de cero; entonces el sistema propuesto es equi-

(*) El coeficiente de k_p es el resultado de substituir en la determinante Δ, ordenada según los elementos de la $p^{ésima}$ fila, los elementos de ésta por sus correspondientes de la primera.

(**) Conviene observar que generalmente no será cero ninguna.

(***) Disponiendo convenientemente las ecuaciones y las incógnitas, lo cual no altera el sistema, siempre puede suponerse que Δ_{11} es la determinante menor de primer orden distinta de cero.

valente al que se obtiene reemplazando la primera de las ecuaciones propuestas por

$$\Delta x_1 = \Delta_{11} k_1 - \Delta_{21} k_2 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \Delta_{n1} k_n .$$

Si el segundo miembro de esta ecuación no es cero, como lo es el primero, hay imposibilidad de satisfacerla, y el sistema será imposible; pero si es cero, entonces se reduce á una identidad, y el sistema se compondrá sólo de $n-1$ ecuaciones con n incógnitas, que podrán verificarse por una infinidad de valores arbitrarios de x_1 juntamente, cada uno, con un sistema correspondiente de valores determinados de x_2, $x_3, \ldots\ldots x_n$. (*)

En el caso de que todas las determinantes menores de primer orden sean cero, no pueden utilizarse para transformar el sistema considerado, y hay que acudir á las de segundo orden.

Admitamos que la menor Δ^{12}_{12} no sea nula (**), y ordenemos, con relación á los elementos de su columna primera, las cuatro de primer orden que provienen de suprimir sucesivamente una de las dos primeras filas y una de las dos primeras columnas. Se tendrá así:

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \Delta^{12}_{12} a_{22} - \Delta^{12}_{13} a_{32} + \cdots\cdots + (-1)^n \Delta^{12}_{1n} a_{n2} \\
\Delta_{12} &= \Delta^{21}_{12} a_{21} - \Delta^{21}_{13} a_{31} + \cdots\cdots + (-1)^n \Delta^{21}_{1n} a_{n1} \\
\Delta_{21} &= \Delta^{12}_{21} a_{12} - \Delta^{12}_{23} a_{32} + \cdots\cdots + (-1)^n \Delta^{12}_{2n} a_{n2} \qquad (***) \\
\Delta_{22} &= \Delta^{21}_{21} a_{11} - \Delta^{21}_{23} a_{31} + \cdots\cdots + (-1)^n \Delta^{21}_{2n} a_{n1}
\end{aligned}$$

(*) En el sistema de las $n-1$ ecuaciones, con estas últimas incógnitas, que resultan al atribuir un valor cualquiera á x_1, la determinante de los coeficientes será Δ_{11}, la cual suponemos diferente de cero.

(**) Si hay alguna determinante de segundo orden, distinta de cero, siempre puede suponerse que sea Δ^{12}_{12}, sirviéndose de cambios ó permutaciones convenientes.

(***) Se obtienen con gran facilidad estos desarrollos, escribiendo la matriz formada por todos los coeficientes, y borrando, para cada uno, las líneas respectivas. En ellos se ha puesto, en vez de $(-1)^{n-2}$, su igual $(-1)^n$.

Sumando la primera de las ecuaciones propuestas y las $n-2$ últimas, después de multiplicadas respectivamente por

$$\Delta^{21}_{21},\ -\Delta^{21}_{23},\ \ldots\ldots\ (-1)^n \Delta^{21}_{2n},$$

y, teniendo en cuenta las expresiones precedentes, se hallará la ecuación

$$\Delta_{22} x_1 + \Delta_{21} x_2 = \Delta^{21}_{21} k_1 - \Delta^{21}_{23} k_3 + \cdots\cdots + (-1)^n \Delta^{21}_{2n} k_n ;$$

puesto que los coeficientes de x_3, $x_4, \ldots\ldots x_n$ serán todos cero, por representar desarrollos de matrices que tienen dos columnas iguales (*); y la cual puede reemplazar á la primera de las propuestas, que ha sido multiplicada por una cantidad, Δ^{12}_{12}, distinta de cero.

Si combinamos ahora la segunda ecuación con las $n-2$ que le siguen, después de multiplicadas respectivamente por

$$\Delta^{21}_{12},\ -\Delta^{21}_{13},\ \ldots\ldots\ (-1)^n \Delta^{21}_{1n}$$

se hallará la ecuación

$$\Delta_{12} x_1 + \Delta_{11} x_2 = \Delta^{21}_{12} k_2 - \Delta^{21}_{13} k_3 + \cdots\cdots + (-1)^n \Delta^{21}_{1n} k_n ,$$

que puede, á su vez, reemplazar á dicha segunda.

Los primeros miembros de estas dos ecuaciones son cero, de modo que si alguno de los segundos miembros no lo fuese, habría imposibilidad en el sistema; pero en el caso de que sean iguales á cero, el sistema se reducirá á $n-2$ ecuaciones con n incógnitas; y x_1 y x_2 podrán recibir valores arbitrarios á los cuales corresponderán otros determinados para $x_3, \ldots\ldots x_n$, puesto que no es nula la determinante Δ^{12}_{12} de sus coeficientes.

Si todas las determinantes menores de segundo orden fueran cero, procederíamos del modo indicado hasta llegar á una determinante menor que no lo fuese; y si ésta es del orden p, podríamos suponer que tanto las ecuaciones como sus términos, se habían dispuesto de modo que esa determinante menor provinie-

---

(*) El coeficiente de x_r, por ejemplo, será cualquiera de las determinantes Δ_{21} ó Δ_{22}, reemplazando los elementos de su primera columna, por los de la que ocupa en ellas el lugar $r-1$.

se de suprimir las p primeras filas y las p primeras columnas.

Con el fin de facilitar la notación de dichas determinantes, representaremos por σ el conjunto de los índices 1, 2, 3,..... p, y por $\frac{\sigma}{\alpha}$ y $\frac{\sigma}{\beta}$ la agrupación de los expresados índices, después de haber suprimido en ella los designados por α y β.

En tal supuesto, para aplicar el procedimiento explicado, será necesario ordenar las determinantes del orden $p-1$, que se obtienen suprimiendo $p-1$ de las p primeras filas y $p-1$ de las p primeras columnas, por los elementos de su columna primera; y aquella en la que subsista la fila α y la columna β, tomará la siguiente forma:

$$\Delta^{\frac{\sigma}{\beta}}_{\frac{\sigma}{\alpha}} = \Delta^{\sigma}_{\sigma} a_{\alpha\beta} - \Delta^{\sigma}_{\frac{\sigma}{\alpha}, p+1} a_{p+1,\beta} + \Delta^{\sigma}_{\frac{\sigma}{\alpha}, p+2} a_{p+2,\beta} - \cdots\cdots + (-1)^{n-p} \Delta^{\sigma}_{\frac{\sigma}{\alpha}, n} a_{n\beta}$$

Ahora bien; sumando algebraicamente los productos de multiplicar la ecuación de lugar α y las $n-p$ que siguen á la $p^{\text{ésima}}$, por las menores de orden p, que figuran en la expresión anterior, con los signos de que están afectadas, se obtendrá la nueva ecuación

$$\Delta^{\frac{\sigma}{1}}_{\frac{\sigma}{\alpha}} x_1 + \Delta^{\frac{\sigma}{2}}_{\frac{\sigma}{\alpha}} x_2 + \cdots\cdots + \Delta^{\frac{\sigma}{p}}_{\frac{\sigma}{\alpha}} x_p = \Delta^{\sigma}_{\sigma} k_\alpha -$$

$$- \Delta^{\sigma}_{\frac{\sigma}{\alpha}, p+1} k_{p+1} + \Delta^{\sigma}_{\frac{\sigma}{\alpha}, p+2} k_{p+2} - \cdots\cdots + (-1)^{n-p} \Delta^{\sigma}_{\frac{\sigma}{\alpha}, n} k_n$$

que podrá reemplazar á la referida de lugar α, la cual se ha multiplicado por el factor Δ^{σ}_{σ}, que suponemos no es cero. (*)

Dando, pues, á α los valores sucesivos 1, 2,..... p, se obtendrán

(*) Teniendo á la vista el cuadro matriz de todos los coeficientes, é incluyendo en él la fila α, la columna β, y las dobles líneas de los órdenes p y $p+1$, es fácil observar que los coeficientes que, respectivamente, resultan para x_1, x_2, ... x_p, son los valores del desarrollo de la determinante que precede, para $\beta=1$, $\beta=2$, ... $\beta=p$; y que el coeficiente de cualquier otra incógnita, tal como x_{p+q}, será el resultado de substituir en dicha determinante los elementos de su primera columna, por los correspondientes de la que ocupa en la misma el lugar $q+1$, es decir cero.

p ecuaciones que reemplazarán á las p primeras del sistema propuesto; pero siendo, por hipótesis, sus primeros miembros iguales á cero, se ve que si alguno de los segundos no lo fuera, el sistema sería imposible; y que, si todos son nulos, quedará reducido dicho sistema al formado por las $n-p$ últimas ecuaciones con n incógnitas; de modo que asignando á x_1, x_2, ... x_p valores arbitrarios, las incógnitas restantes tendrían valores correspondientes finitos y determinados, por ser distinta de cero Δ^{σ}_{σ}, que es la determinante de sus coeficientes.

Resulta, en definitiva, de las precedentes consideraciones, que *cuando la determinante Δ es igual á cero, hay imposibilidad ó indeterminación en el sistema; y que esta última es del mismo orden que el de la primera determinante menor que no se anula.* (*)

(*) Según lo expuesto, se ve que generalmente habrá imposibilidad, y que son tanto mayores las probalidades de que así ocurra, cuanto mayor sea el orden de la primera determinante menor distinta de cero.

Se observa, al propio tiempo, que los dos casos finales de la discusión anterior, serían: que una al menos de las determinantes de orden $n-1$ fuese distinta de cero, y que se anularan todas ellas. Como dichas determinantes menores son precisamente los coeficientes de las incógnitas, se deduce que, siendo todos cero, el sistema carecería de solución, si uno al menos de los segundos miembros fuese distinto de cero; y que, anulándose igualmente éstos, el sistema sería totalmente indeterminado.

Como complemento de lo dicho en la última nota de la discusión de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (**133**), puede añadirse que en el formado por tres ecuaciones é igual número de incógnitas, los casos que constituyen la discusión serán: 1.º, que la determinante de los coeficientes, ó el denominador común de los valores de las incógnitas, no sea cero; 2.º, que dicha determinante se anule, no siendo cero uno al menos de los nueve binomios que representan las determinantes menores de primer orden; 3.º, que estas determinantes menores se reduzcan todas á cero, sin que se anule uno por lo menos de los coeficientes, es decir, las determinantes menores de segundo orden; y 4.º, que todos los coeficientes sean iguales á cero.

Las consecuencias respectivas de tales casos, son: 1.ª, el sistema de ecuaciones es entonces soluble por valores finitos y determinados; 2.ª, el sistema será imposible, si no es cero el numerador de la incógnita cuyos coeficientes no sean ninguno de los elementos de la menor que es distinta de cero, ó indeterminado si ese numerador se anula; 3.ª, el referido sistema será imposible, cuando no sea cero alguno de los dos resultados que se obtienen reemplazando en las determinantes menores de primer orden, donde entre el elemento que se supone distinto de cero, los de su primera columna por los términos conocidos, siendo dicho sistema doblemente indeterminado, en caso contrario; y 4.ª, si alguno de los segundos miembros no es también cero, las ecuaciones serán imposibles y, si todos se anulan, el sistema será completamente indeterminado.

274. Resolución de un sistema homogéneo. Un sistema homogéneo, de n ecuaciones lineales con n incógnitas, puede representarse por

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = 0$$

Este sistema tiene desde luego la solución

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 0;\quad \ldots\ldots\ x_n = 0;$$

pero si se dividen los dos miembros de cada ecuación por una de las incógnitas x_n, por ejemplo, resultarán las $n-1$ relaciones

$$\frac{x_1}{x_n},\quad \frac{x_2}{x_n},\quad \ldots\ldots\ \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

que podrán considerarse como otras tantas incógnitas, cuyos valores se deducirán de $n-1$ de las ecuaciones del sistema

$$a_{11}\frac{x_1}{x_n} + a_{12}\frac{x_2}{x_n} + \cdots\cdots + a_{1,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{1n}$$
$$a_{21}\frac{x_1}{x_n} + a_{22}\frac{x_2}{x_n} + \cdots\cdots + a_{2,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{2n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}\frac{x_1}{x_n} + a_{n2}\frac{x_2}{x_n} + \cdots\cdots + a_{n,n-1}\frac{x_{n-1}}{x_n} = -a_{nn}$$

Designando, como antes, por Δ la determinante de los coeficientes de las ecuaciones propuestas, bajo su forma primitiva, y suponiendo, para fijar las ideas, que sea n impar, es fácil ver, aplicando á las $n-1$ ecuaciones, que siguen á la primera, la regla ya deducida para formar el valor de cada incógnita, que

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1n}};$$

pues el denominador común será la determinante de grado $n-1$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots\ldots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = \Delta_{1n}$$

y el numerador de x_1,

$$\begin{vmatrix} -a_{2n} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2,n-1} \\ -a_{3n} & a_{32} & \ldots\ldots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{nn} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & -a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_{11}$$

Análogamente se tendrá:

$$\frac{x_2}{x_n} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{1n}};\quad \frac{x_3}{x_n} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{1n}};\quad \ldots\ldots\ \frac{x_{n-1}}{x_n} = -\frac{\Delta_{1,n-1}}{\Delta_{1n}}.$$

Ahora bien: para que las ecuaciones transformadas puedan tener por solución un sistema de valores finitos y determinados, lo cual exige necesariamente que el valor de x_n sea distinto de cero (*), es preciso y basta que los valores obtenidos satisfagan á la primera ecuación, que no se ha considerado; de modo que substituyéndolos se hallará la condición necesaria y suficiente que debe existir entre los coeficientes para que haya compatibilidad (**138**).

Efectuando dicha substitución en la ecuación mencionada, se convertirá en

$$a_{11}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{1n}} - a_{12}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{1n}} + \cdots\cdots - a_{1,n-1}\frac{\Delta_{1,n-1}}{\Delta_{1n}} = -a_{1n}$$

(*) La división por x_n, de los dos miembros de cada ecuación, supuso también implícitamente que el valor de esa incógnita era distinto de cero.

y, quitando el denominador Δ_{1n} y transponiendo, se halla:

$$\Delta_{11}a_{11} - \Delta_{12}a_{12} + \cdots\cdots + \Delta_{1n}a_{1n} = 0 \qquad \text{ó, bien,} \qquad \Delta = 0.$$

Si el número n fuese par, los valores de las incógnitas serían, con signo contrario, los mismos que hemos encontrado, de suerte que afectando del signo — al denominador común Δ_{1n} y haciendo análogas transformaciones resultará, en dicho caso:

$$\Delta_{11}a_{11} - \Delta_{12}a_{12} + \cdots\cdots - \Delta_{1n}a_{1n} = 0 \qquad \text{ó, sea,} \qquad \Delta = 0.$$

Satisfecha, pues, la condición $\Delta = 0$, podrá encontrarse un valor finito y determinado para cada una de las relaciones, y como se puede entonces asignar á x_n un valor cualquiera, distinto de cero, las demás incógnitas adquirirán valores correspondientes, que constituirán tantos sistemas de valores proporcionales, cuantos sean los valores diversos de esa indeterminada.

En tal concepto, *para que un sistema homogéneo, de* n *ecuaciones con* n *incógnitas, tenga una solución distinta de valores iguales á cero, es preciso y basta que la determinante de los coeficientes sea nula; y si esta condición se verifica, el sistema es indeterminado, si bien las relaciones de los valores de las incógnitas serán constantes.* (*)

Exceptuando esta última propiedad, de ser invariables las relaciones de los valores de las incógnitas al de una cualquiera de ellas, los resultados obtenidos podrían deducirse de lo dicho al ocuparnos de la resolución del sistema general de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas; pues observamos que si los segundos miembros se reducen á cero, los numeradores de todas las incógnitas se anularán también, de suerte que si el denominador común Δ no es cero, los únicos valores que podrán verificar al sistema serán

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ \ldots\ldots x_n = 0;$$

mientras que si es además $\Delta = 0$, dicho sistema deberá ser indeterminado; ya que teniendo, en todos casos, la anterior solución, nunca podrá ser imposible.

(*) La relación entre los valores de dos incógnitas cualesquiera, se ve que es la de los complementos algébricos de sus coeficientes, en la determinante que todos ellos forman.

Ejercicios.

I. Aplicar las determinantes á la resolución de los siguientes sistemas numéricos de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 40 \\ 5x + y &= 27 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 5y &= -25 \\ 7x - 4y &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= 22 \\ 4x - 2y + 5z &= 18 \\ 6x + 7y - z &= 63 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y + 5z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 7 \\ x - 6y + 16z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ 5x + y - 4z &= 8 \\ x + 7y - 6z &= 6 \end{aligned}$$

II. Resolver, por determinantes, los sistemas de ecuaciones incompletas que siguen:

$$\begin{aligned} 4y - 3z &= 1 \\ 3x - 2z &= 8 \\ 5x - 7y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x - 3y + 2u &= 9 \\ 2x + 6z &= 28 \\ 4u - 2y &= 14 \\ 3x + 4u &= 26 \end{aligned}$$

III. Hallar los valores de las incógnitas en el sistema literal de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z + a^3 &= 0 \\ x + by + b^2z + b^3 &= 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 &= 0 \end{aligned}$$

IV. Resolver, por determinantes, los sistemas de ecuaciones homogéneas:

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 7z &= 0 \\ 5x + y - 3z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y + 5z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 4x + y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

LIBRO V

FUNCIONES DERIVADAS

CAPÍTULO PRIMERO

DERIVADAS EN GENERAL Y DE LAS FUNCIONES DE FORMA OPERATIVA

I.—Nociones preliminares.

275. Definición. *Se llama derivada de una función, al límite de la relación del incremento de la función al de la variable de que depende, cuando el incremento de ésta tiende hacia cero.* (*)

Según la definición anterior, se comprende que únicamente las funciones continuas son capaces de tener derivadas para cualquier valor de su variable; pues si llamamos k y h los incrementos respectivos de la función y de la variable, la derivada estará representada por $lím \frac{k}{h}$; de modo que, si la función no fuese continua, cuando h tendiese hacia cero, el incremento k podría no ser tan pequeño como se quisiera, y, para ciertos valores de la variable, ó una sucesión de ellos, se verificaría que $lím \frac{k}{h} = \infty$, lo cual es contrario á toda idea de límite.

(*) En esta definición, que supone implícitamente que la función lo es de una sola variable, debe entenderse que el incremento de ésta es algebraico, es decir, que puede estar afectado del signo + ó del signo —, y que, por lo tanto, su nombre no implica precisamente la idea de aumento; el incremento de la función no es tampoco sino la variación que corresponde al incremento ó variación de la variable.

Sea, por ejemplo, la función continua $y=3x^2$. Se tiene evidentemente:

$$k=3(x+h)^2-3x^2=6xh+3h^2 \quad \text{y} \quad \frac{k}{h}=6x+3h;$$

y como el límite del valor de esta última relación, cuando h tiende hacia cero, es su primer término, se deduce que $6x$ es la derivada de la función propuesta.

No debe creerse, sin embargo, que las funciones continuas han de tener necesariamente una derivada, para todos los valores de su variable; pues no puede afirmarse que la relación $\frac{k}{h}$ tienda siempre hacia un límite único, finito y determinado, cualquiera que sea el valor de x, y la manera de tender hacia cero el incremento h. (*)

Las funciones, consideradas con respecto á sus derivadas, se llaman *funciones primitivas*.

276. Derivadas de distintos órdenes y su notación simbólica. La derivada de una función continua, $y=f(x)$, es generalmente otra función de la misma variable que se representa por y' ó, bien, por $f'(x)$, y se dice que es la *derivada de primer orden* de dicha función; ésta puede tener á su vez una derivada, que se representa por y'', ó, bien, por $f''(x)$, y que es la *derivada de segundo orden* de la primera función. Si esta derivada tuviese otra, se representaría por y''' ó por $f'''(x)$, y así sucesivamente, aun cuando,

(*) Prescindiendo de las funciones que no están perfectamente definidas, como veremos que ocurre con las *circulares inversas*, y de la ambigüedad que, por tal motivo, suele afectar á sus derivadas, hay otras funciones que aun siendo determinadas y continuas para un cierto valor de la variable, no dan un límite único para $\frac{k}{h}$, cuando h tiende hacia cero, ó en las que dicha relación crece ilimitadamente en valor absoluto, ó, bien, carece de límite determinado. A estos tres casos corresponden, en igual orden, suponiendo $x=0$, las funciones siguientes:

$$y=x\frac{\sqrt[x]{e}+1}{\sqrt[x]{e}-1}; \qquad y=1+\sqrt[3]{x}; \qquad y=x\operatorname{sen}\frac{1}{x};$$

en las que, para dicho valor de x, es fácil obtener la expresión del incremento funcional respectivo. Claro es, por otra parte, que el valor $x=0$ podrá ser $x=1$, ó, en general, $x=a$, reemplazando en ellas x, por $x-1$ ó $x-a$.

para mayor sencillez, es costumbre hacer uso de los números romanos á partir de la *derivada de cuarto orden*, en esta forma, y^{IV} ó $f^{\text{IV}}(x)$; representándose en general la *derivada de orden* $n^{\text{ésimo}}$ por $y^{(n)}$ ó $f^{(n)}(x)$, y colocándose en tales notaciones el índice entre paréntesis, para diferenciarlo de otro cualquiera y del exponente de la potencia.

Se ve, pues, que el índice de la letra, que representa la función, ó el de su característica, expresan el orden de la derivada. (*)

277. Formas diversas del incremento de una función. El incremento de una función se expresa de diversos modos.

Desde luego puede afectar la forma

$$f(x+h)-f(x)=h\,[f'(x)+\varepsilon]$$

siendo ε una variable que se anula con h; pues, según la definición de derivada, se tiene:

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \quad \text{ó, bien,} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon;$$

de donde resulta inmediatamente la expresión primera.

El incremento de la función toma también otra forma, que exige demostrar las dos proposiciones siguientes.

TEOREMA I. *Si la función* f(x) *es continua, cuando la variable* x *pasa por todos los valores comprendidos entre* a *y* b, *y en este in-*

(*) Lagrange fué quien propuso la notación que acaba de indicarse, en su *Teoría de las funciones analíticas;* pero Leibnitz y Newton, creadores del *cálculo infinitesimal*, al que, el primero dió el nombre de *cálculo diferencial é integral*, y el segundo el de *cálculo de las fluxiones y fluentes*, adoptaron otras notaciones. Refiriéndose á la función $y=f(x)$, Leibnitz representa la relación $\frac{k}{h}$ por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y su límite, ó, sea, lo que Lagrange llamó luego derivada, por $\frac{dy}{dx}$, titulándolo *coeficiente diferencial;* mientras que Newton lo representaba por $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, es decir, por la relación de la función y á la variable x, colocando un punto encima de estas letras.

Las derivadas de órdenes superiores las indicaba Leibnitz afectando la letra d de los índices 2, 3....., y Newton empleando dos, tres, etc. puntos; pero esta última notación ha caído completamente en desuso, porque se presta á equivocaciones y por la dificultad de su empleo cuando se trata de derivadas de un orden superior.

tervalo tiene dicha función, para cada valor de x, *una derivada* f′(x), *determinada y finita, se verificará que si* f(a) = 0 *y* f(b) = 0, *habrá por lo menos un valor* c, *comprendido entre* a *y* b, *tal que* f′(c) = 0.

Suponiendo, en efecto, que sea $a < b$, observamos que al variar x entre esas cantidades, $f(x)$ parte de cero y vuelve luego á reducirse á cero; de suerte que no permaneciendo constante esa función, es necesario que crezca primero para decrecer después ó, por el contrario, que decrezca en un principio y sea negativa, para crecer luego y anularse; teniendo que pasar, por consiguiente, una vez al menos, por un cierto valor, $f(c)$, más grande ó más pequeño que los que le precedan y sigan inmediatamente, es decir, por un valor tal que

$$f(c+h)-f(c) \quad \text{y} \quad f(c-h)-f(c)$$

sean del mismo signo, para valores de h tan pequeños como sea preciso. Resulta, así, que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

tendrán signos distintos; y como $f'(c)$ es el límite común de estas dos expresiones, será necesariamente $f'(c) = 0$. (*)

Teorema II. *Si la función* f(x) *conserva una derivada bien determinada, entre los valores* x *y* x + h *de su variable, será*

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h),$$

representando θ *un cierto número positivo, comprendido entre cero y la unidad.*

Efectivamente: haciendo $x+h = X$, de donde $X - x = h$, y

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x} = A \qquad \text{de donde} \qquad f(X)-f(x)-A(X-x) = 0,$$

se deduce que la función

$$f(X)-f(z)-A(X-z),$$

que es idénticamente nula para $z = X$, se anulará también para

(*) Esta proposición, un tanto generalizada, es la que, en la *teoría general de las ecuaciones*, se conoce con el nombre de *teorema de Rolle*.

$z = x$; luego su derivada con respecto á esta variable, en virtud del teorema anterior, se reducirá igualmente á cero, para un cierto valor λ de z comprendido entre x y X.

Dicha derivada es

$$\lim \frac{[f(X)-f(z+\varepsilon)-A(X-z-\varepsilon)]-[f(X)-f(z)-A(X-z)]}{\varepsilon}$$

cuando ε tiende hacia cero, ó, lo que es lo mismo, hechas las reducciones convenientes,

$$\lim\left[-\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}+A\right] = -f'(z)+A.$$

Reemplazando en esta expresión z por λ, deberá ser, según lo antes dicho,

$$-f'(\lambda)+A = 0 \qquad \text{ó, bien,} \qquad A = f'(\lambda),$$

y, por consiguiente,

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x} = f'(\lambda);$$

de modo que substituyendo en vez de X su expresión $x+h$ y en lugar de λ, que por hipótesis está comprendida entre x y $x+h$, la expresión $x+\theta h$, siendo θ mayor que cero y menor que la unidad, resultará, por último,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h) \qquad \text{ó} \qquad f(x+h)-f(x) = hf'(x+\theta h);$$

que es la expresión del incremento funcional, que debía justificarse.

El incremento de la función, y, se representa también por Δy, y es correspondiente al incremento Δx de la variable. (*)

278. Significación geométrica de la derivada. Así como una función continua tiene una representación lineal ó gráfica (167), también su derivada tiene una significación geométrica.

Sea, en efecto, la curva $MM'Z$, (fig. 12), la representación gráfica de la función continua, $y = f(x)$.

Si damos á la variable x un incremento h, representado por

(*) Estos incrementos se denominan *diferencia* y y *diferencia* x, ó, simplemente, *delta* y y *delta* x.

PP', la función experimentará el incremento k, indicado por la diferencia $M'D$ entre las dos ordenadas MP y $M'P'$, y trazando la secante MM', se verificará, en el triángulo rectángulo $MM'D$,

$$\frac{k}{h} = \operatorname{tang} SMD = \operatorname{tang} \beta.$$

Ahora bien: cuando h tienda hacia cero, el punto M' irá aproximándose indefinidamente á M; de suerte que si $f(x)$ admite una derivada, la relación $\frac{k}{h}$, ó, bien, tang β, tenderá hacia un cierto límite; y como, al mismo tiempo, la secante MS, girando alrededor de M, tenderá hacia la tangente MT, que forma con el eje XX el ángulo α, se tendrá:

$$f'(x) = \operatorname{tang} \alpha\,;$$

lo cual manifiesta, que *cuando una función está representada por una línea continua, la derivada, correspondiente á cada uno de sus puntos* (*), *es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica, con la parte positiva del eje de las* x.

Ejercicios.

I. Obtener, por medio de la significación geométrica, los valores que toman las derivadas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ é $y = \sqrt{1 - x^2}$, respectivamente, para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

II. Hallar, sirviéndose de la significación geométrica, el valor de la derivada de la función $y = x + p$, para cualquier valor de x.

II.—Derivadas de las funciones expresadas en forma de operación.

279. Derivada de una suma algebraica. La derivada de una suma, de varias funciones, se obtiene por medio de la siguiente proposición. (**)

(*) Es decir, para el valor de x que corresponde á cada punto.

(**) En todo este artículo supondremos que las funciones parciales tienen derivadas; siendo su determinación especial objeto de los artículos que siguen.

TEOREMA. *La derivada de la suma algebraica de un número limitado de funciones, es igual á la suma de las derivadas de cada una de ellas, afectadas de su mismo signo.*

Sea, en efecto,

$$y = u + v - z + \cdots\cdots + t$$

una función que proviene de sumar algebraicamente varias funciones continuas, de una misma variable x. Si representamos por Δx el incremento de esta variable, por Δu, Δv, Δz los incrementos respectivos de las funciones parciales, y por Δy el incremento que resulta para la función total y, se tendrá evidentemente:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z + \cdots\cdots + \Delta t \quad (*)$$

y como dichos incrementos pueden ser menores que cualquier cantidad, Δy será también tan pequeña como se quiera; luego y variará igualmente de una manera continua, según ya también demostramos (**168**).

Dividiendo ambos miembros por Δx, se halla:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x} + \cdots\cdots + \frac{\Delta t}{\Delta x}\,;$$

y suponiendo que Δx tiende hacia cero, los sumandos tenderán hacia las derivadas u', v', z',.... t', y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenderá también hacia y'; luego:

$$y' = u' + v' - z' + \cdots\cdots + t'\,;$$

que es lo que se quería demostrar.

280. Derivada de un producto. Una función puede ser producto de dos ó más funciones, y aun contener algún factor constante. En cada uno de estos casos, la función total tiene una derivada, según manifiestan las proposiciones que siguen.

TEOREMA I. *La derivada del producto de dos funciones, de la misma variable, es igual al primer factor, multiplicado por la deriva-*

(*) Para obtener esta igualdad, basta substituir, en la que da el valor de y, $x + \Delta x$ en lugar de x, y restar luego ésta, miembro á miembro, de la que así se halla, que es

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (z + \Delta z) + \cdots\cdots + (t + \Delta t)$$

da del segundo, más el segundo factor, por la derivada del primero.

Consideremos el producto $y = uv$, de dos funciones continuas. Recibiendo cada función un incremento, correspondiente al de la variable, se tendrá:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

de donde se deduce, efectuando operaciones y suprimiendo términos comunes, que

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

Ahora bien: Δx puede hacerse tan pequeño como sea necesario, para que los incrementos de las funciones, y por lo tanto Δy, puedan ser tan pequeños como se quiera; de modo que dividiendo los dos miembros de la igualdad precedente por Δx, se hallará:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v,$$

y, tomando los límites, resulta:

$$y' = uv' + vu';$$

puesto que el límite de $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ es u' y el de Δv es cero.

Corolario. *La derivada del producto de una función por una constante, es la derivada de la función multiplicada por dicha constante.* Basta observar, en efecto, que una constante puede considerarse como una función cuya derivada es nula.

Se puede también demostrar directamente, observando que si $y = au$, será:

$$\Delta y = a\Delta u, \quad \text{de donde} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

y, por consiguiente, $y' = au'$. (*)

(*) Fundándose en el teorema que acaba de demostrarse, y en el anterior, se obtendría:

$$(uv)'' = uv'' + 2u'v' + vu''; \quad (uv)''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + vu''';$$

y, dada la manera como se forman las derivadas sucesivas, se deduce la derivada general $(uv)^{(n)}$, de la potencia $(v + u)^n$, conviniendo en cambiar los exponentes por órdenes de derivación, y multiplicando el primero y el último términos, respectivamente, por las potencias de grado cero de u y v, que, según dicho convenio, vendrán á ser en la derivada esas mismas funciones.

Teorema II. *La derivada del producto de varias funciones, es igual á la suma de los productos obtenidos multiplicando la derivada de cada factor, por el producto de todos los demás.*

En virtud del teorema anterior, se comprende que bastará demostrar que si éste se verifica para un producto de n factores, se verificará también para uno de $n+1$.

Sea, por ejemplo, $y = tuv.....z$, un producto de $n+1$ factores. Agrupando todos los que siguen al primero se tendrá:

$$y = t(uv.....z) \quad \text{de donde} \quad y' = t'(uv.....z) + t(uv.....z)';$$

pero como la proposición suponemos que se verifica para el producto comprendido entre paréntesis, será:

$$(uv.....z)' = u'v.....z + uv'.....z + \cdots + uv.....z';$$

y, substituyendo en la igualdad precedente,

$$y' = t'uv.....z + tu'v.....z + tuv'.....z + \cdots + tuv.....z';$$

que es lo que quería demostrarse.

281. Derivada de un cociente. El siguiente teorema y sus corolarios manifiestan cuál es la derivada de una función expresada en forma de cociente.

Teorema. *La derivada del cociente de dos funciones, de una misma variable, es igual al resultado que se obtiene dividiendo, por el cuadrado del divisor, la derivada del dividendo multiplicada por el divisor y disminuído el producto en el del dividendo por la derivada del divisor.*

Sea, en efecto, el cociente $y = \frac{u}{v}$, de dos funciones continuas. Dando á x el incremento Δx, se tiene:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

y, por lo tanto,

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

De esta expresión se deduce que pudiendo ser Δu y Δv tan pequeños como se quiera, Δy lo será también, mientras que el denominador v sea distinto de cero; lo cual muestra, de conformidad con lo ya indicado (**168**), que, con esa restricción única, y es función continua de x; luego dividiendo los dos miembros par Δx, se tendrá:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

y, pasando á los límites,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

según quería demostrarse.

Considerando sucesivamente á u y á v como constantes, se deducen las dos consecuencias que siguen.

COROLARIO 1.° *La derivada del cociente de una constante, dividida por una función, es, con signo contrario, el producto de dicha constante multiplicada por la derivada de la función, dividido por el cuadrado de ésta.* De modo que si $y = \frac{a}{v}$, será:

$$y' = -\frac{av'}{v^2}.$$

COROLARIO 2.° *La derivada del cociente de una función, dividida por una constante, es la derivada de la función dividida por dicha constante.* Así: siendo $y = \frac{u}{a}$, será $y' = \frac{u'}{a}$; resultado al cual se llega también, observando que $y = \frac{u}{a} = \frac{1}{a}u$. (*)

282. Derivada de una potencia. La derivada de la forma potencial de exponente cualquiera, se obtiene en virtud del siguiente principio.

TEOREMA. *La derivada de la potencia de una función, es igual al producto del exponente multiplicado por la función, elevada al mismo exponente disminuído en una unidad, y por la derivada de dicha función.*

Sea $y = u^m$. Si el exponente m es entero y positivo, puede considerarse la potencia como un producto, y resulta desde luego (**280**), $y' = mu^{m-1}u'$.

(*) Esta proposición y la anterior podrían deducirse directamente.

Si $m = \frac{p}{q}$, siendo p y q números positivos y enteros, se tiene:

$$y = u^{\frac{p}{q}}, \qquad \text{ó, bien,} \qquad y^q = u^p,$$

y, tomando las derivadas de los dos miembros,

$$qy^{q-1}y' = pu^{p-1}u' \qquad \text{de donde} \qquad y' = \frac{pu^{p-1}u'}{qy^{q-1}}.$$

Substituyendo ahora en lugar de y su valor, se halla:

$$y' = \frac{pu^{p-1}u'}{qu^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}u';$$

lo cual está conforme con el enunciado.

Cuando el exponente sea negativo, es decir, cuando $m = -n$, siendo n entero ó fraccionario, pero positivo, se tendrá:

$$y = u^{-n} = \frac{1}{u^n},$$

y, tomando las derivadas (**281**),

$$y' = -\frac{nu^{n-1}u'}{u^{2n}} = -nu^{-n-1}u';$$

que es precisamente lo que se quería demostrar.

283. Derivada de una raíz. Este caso está comprendido en el anterior; pues se sabe que $y = \sqrt[m]{u}$ equivale á $y = u^{\frac{1}{m}}$.

Sin embargo, si quiere conservarse la forma radical, tendremos:

$$y' = \frac{1}{m}u^{\frac{1}{m}-1}u' = \frac{1}{m}u^{\frac{1-m}{m}}u' = \frac{u'}{mu^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}};$$

resultado que nos dice, que *la derivada de un radical es igual á la derivada de la cantidad subradical, dividida por el producto del índice por la raíz del mismo orden de dicha cantidad subradical, elevada á un exponente expresado por el índice, disminuído en una unidad.*

Si fuera $y' = \sqrt{u}$, resultaría:

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

fórmula que es de frecuente aplicación, y que también puede traducirse en lenguaje.

Ejercicios.

I. Hallar las derivadas de los productos

$$(u - x)(y + z); \quad a(u^2 + v^2); \quad 2u\left(\frac{1}{z} - y\right).$$

II. Obtener las derivadas de los cocientes

$$\frac{u}{y - z}; \quad \frac{ay}{u^3 - v^3}; \quad \frac{u + v}{u - v}.$$

III. Determinar las derivadas de las potencias

$$\left(\frac{y}{z}\right)^m; \quad (y^2 - z^2)^3; \quad \left(\sqrt[3]{u - v + y}\right)^2.$$

CAPÍTULO II

DETERMINACIÓN DE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SIMPLES Y DE LAS FUNCIONES DE FORMA ENTERA

I.—Derivadas de las funciones potencial, entera, exponencial y logarítmica.

284. Derivada de la función potencial simple. Siendo evidentemente la unidad la derivada de la variable independiente x (*), la derivada de la función elemental x^m será mx^{m-1}, cualquiera que sea el valor de m (**282**); pero puede llegarse directamente á este resultado de la manera siguiente.

Sea la función $y = x^m$. Si se da á la variable el incremento h, la función se convierte en

$$(x + h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}} x^{m-2}h^2 + \cdots\cdots$$

y el incremento funcional tomará la forma

$$k = (x + h)^m - x^m = mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}} x^{m-2}h^2 + \cdots\cdots$$

que podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad, cuando h sea suficientemente pequeño.

(*) Considerando á la variable independiente como función de ella misma, el incremento funcional será igual al de la variable, es decir, que $k = h$, y, por lo tanto, la relación $\frac{k}{h}$ y su límite, serán iguales á la unidad.

Dividiendo por h los dos miembros de esta igualdad, se tendrá:

$$\frac{k}{h} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\, x^{m-2} h + \cdots\cdots ;$$

y como todos los términos del segundo miembro, que contienen h como factor, tienen coeficientes finitos y por límite cero, cuando ese incremento tiende á anularse, se deduce que

$$\lim \frac{k}{h} = y' = mx^{m-1}.$$

Resulta así, que *la derivada de la función,* x^m, *se obtiene multiplicando dicha función por el exponente de la variable, y disminuyendo este exponente en una unidad.*

La regla es general cualquiera que sea m; pues la fórmula del binomio es ahora también general, por ser

$$\lim \frac{h}{x} = 0 < 1 \ \textbf{(237)}. \ (*)$$

Si la función estuviese multiplicada por una constante, lo estaría igualmente su derivada (**280**); de modo que si $y = ax^m$, será $y' = max^{m-1}$.

En el supuesto de ser m entero y positivo, en esta última expresión, se halla fácilmente:

$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\, ax^{m-n} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-n}}\, ax^{m-n};$$

$$y^{(m-1)} = \underline{|m}\, ax; \qquad y^{(m)} = \underline{|m}\, a;$$

pero si m fuese fraccionario ó negativo, aunque las derivadas sucesivas se hallarían del mismo modo, su número sería ilimitado.

(*) Además de lo antes dicho (**230**), es evidente que tendiendo hacia cero todos los términos que siguen al segundo de $\frac{k}{h}$, su límite será también cero, aunque el número de ellos sea infinito; pues la condición, $lim \frac{h}{x} = 0 < 1$, manifiesta que la serie que forman esos términos es convergente; así es que $lim\, S_n = S$, y como para todo valor de n se verifica que $lim\, S_n = 0$, tendrá que ser $S = 0$.

285. Derivada de la función racional y entera. Toda función racional y entera del grado m, es de la forma

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m,$$

siendo m un número entero y positivo; de suerte que, considerándola como una suma algebraica de funciones, tendremos (**279**):

$$f'(x) = m A_0 x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1},$$

que es, á su vez, otra función racional y entera del grado $m - 1$.

Derivando de nuevo esta función, se halla:

$$f''(x) = m(m-1) A_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) A_1 x^{m-3} + \cdots\cdots$$

que es una función entera del grado $m - 2$.

Procediendo de igual manera se obtendrían las derivadas de los diversos órdenes; y como en cada derivación desaparece el último término y el grado disminuye en una unidad, la derivada del orden $m - 1$ será de primer grado, y la del orden m independiente de x; siendo sus expresiones las que siguen:

$$f^{(m-1)}(x) = \underline{|m}\, A_0 x + \underline{|m-1}\, A_1 \quad \text{y} \quad f^{(m)}(x) = \underline{|m}\, A_0 .$$

Aplicando el procedimiento á la función

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$$

se tiene sucesivamente:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7; \qquad f''(x) = 6x - 10; \qquad f'''(x) = 6.$$

286. Derivada de la función exponencial simple. Ya hemos visto (**178**) que la función exponencial $y = a^x$, en la cual a representa un número positivo y constante, es continua; y vamos á determinar su derivada.

Dando á la variable el incremento h, la función tomará el incremento

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1),$$

y la relación de ambos incrementos será:

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Haciendo

$$a^h - 1 = \alpha, \qquad \text{de donde} \qquad a^h = 1 + \alpha,$$

y tomando los logaritmos neperianos de los dos miembros, se tiene:

$$h . \mathrm{l}a = \mathrm{l}(1+\alpha) \quad \text{ó} \quad h = \frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\mathrm{l}a};$$

así es que para la expresión de la relación de los incrementos, resulta:

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{\alpha\,\mathrm{l}a}{\mathrm{l}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{l}a}{\frac{1}{\alpha}\mathrm{l}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{l}a}{\mathrm{l}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Ahora bien: cuando h tienda hacia cero, α tenderá también á anularse, y la expresión $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tendrá por límite e (**181**); mas como $\mathrm{l}e = 1$, se encuentra finalmente:

$$y' = a^x \mathrm{l}a;$$

lo cual nos dice, que *la derivada de una función exponencial simple es esta misma función, multiplicada por el logaritmo neperiano de su base.* (*)

Según esto, la derivada de la función exponencial, $y = e^x$, será

$$y' = e^x \mathrm{l}e = e^x,$$

es decir, la función misma.

287. Derivada de la función logarítmica simple. Sabemos que la función $y = \log x$, es continua para valores positivos de la variable x.

Para determinar su derivada observaremos que

$$k = \log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

y, por consiguiente,

$$\frac{k}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

(*) Si quisiera expresarse el logaritmo en otro sistema cualquiera, bastaría poner en vez de $\mathrm{l}a$ su igual $\frac{\log a}{\log e}$ (**182**).

Representando por α la relación $\frac{h}{x}$, se tendrá:

$$\frac{h}{x} = \alpha \qquad \text{de donde} \qquad h = \alpha x,$$

y, substituyendo en la expresión anterior, se halla:

$$\frac{k}{h} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)}{x} = \frac{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}.$$

Suponiendo ahora que h tienda hacia cero, y observando que α se anula al mismo tiempo que h, resulta:

$$y' = \frac{\log e}{x};$$

luego *la derivada de la función logarítmica simple, es el logaritmo de la base del sistema neperiano, tomado en el sistema á que pertenece la función, dividido por su variable.*

Si la función considerada correspondiese al sistema neperiano, es decir, si $y = \mathrm{l}x$, sería $y' = \frac{1}{x}$.

Ejercicios.

I. Calcular las derivadas sucesivas de las funciones

$$f(x) = x^4 + ax^3 - 3a^2x - a^3x + 2a^4; \quad f(x) = x^8 - 4x^5 - 2x^2 + 7.$$

II. Obtener las derivadas de los productos

$$x^3(x^2+4)(3x-2); \quad x^{-m}e^x \log x.$$

III. Determinar las derivadas de

$$\frac{x^2-7}{x^3-5x+8}; \quad \frac{x^m}{(d+x)^n}; \quad \frac{\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3-1}}.$$

IV. Hallar las derivadas de las funciones

$$y = (a - bx^2)^{\frac{4}{5}}; \quad y = \sqrt{a^x}; \quad y = \sqrt{\mathrm{l}x}.$$

II.—Derivadas de las funciones circulares.

288. Derivada del seno. Considerando la función $y = \text{sen}\, x$, se tiene:

$$k = \text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\, x = 2\, \text{sen}\, \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right);$$

y esta expresión manifiesta, de conformidad con lo visto en la trigonometría, que para valores suficientemente pequeños de h, puede ser k menor que cualquier cantidad asignable, es decir, que *sen$x$* es una función continua.

Dividiendo por h y transformando, se halla:

$$\frac{k}{h} = \frac{2\, \text{sen}\, \frac{h}{2}}{h} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{\text{sen}\, \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right);$$

y, pasando á los límites, resulta (*):

$$y' = \cos x;$$

lo cual manifiesta, que *la derivada del seno de un arco es el coseno del mismo arco.* (**)

289. Derivada del coseno. Procediendo de un modo análogo con la función $y = \cos x$, se tiene:

$$k = \cos(x+h) - \cos x = -2\, \text{sen}\, \frac{h}{2}\, \text{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right);$$

expresión de la que se deduce que la función considerada es también continua.

Dividiendo por h los dos miembros y tomando los límites, resulta análogamente:

$$y' = -\text{sen} x,$$

es decir, que *la derivada del coseno de un arco es el seno del mismo arco, tomado con signo contrario.*

(*) Se demuestra en la trigonometría, y comprobaremos más adelante, que la relación del seno de un arco al arco, cuando éste tiende hacia cero, tiene por límite la unidad.

(**) Debe, sin embargo, entenderse, en esta función circular directa y en las que siguen, que el arco es la variable independiente.

290. Derivadas sucesivas del seno y del coseno. Si se forman las derivadas sucesivas del seno y del coseno de un arco, se obtienen los cuadros que siguen:

$$\begin{array}{ll} y = \text{sen}\, x & y = \cos x \\ y' = \cos x & y' = -\text{sen}\, x \\ y'' = -\text{sen}\, x & y'' = -\cos x \\ y''' = -\cos x & y''' = \text{sen}\, x \\ y^{\text{IV}} = \text{sen}\, x & y^{\text{IV}} = \cos x \end{array}$$

observándose que dichas derivadas se reproducen periódicamente de cuatro en cuatro, y que, después de dos derivaciones, las funciones, *sen$x$* y *cos$x$*, se reproducen con distinto signo.

291. Derivada de la tangente. Siendo la tangente igual al cociente del seno por el coseno, y teniendo estas funciones sus respectivas derivadas, se deduce que también la tendrá la tangente, y que podrá determinarse por medio de la regla ya establecida (**281**).

Así: de la igualdad

$$y = \text{tang}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

se deduce, derivando,

$$y' = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\ (*)$$

292. Derivada de la cotangente. Se halla la derivada de esta función de la misma manera; pues de la igualdad

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen} x},$$

se obtiene

$$y' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -\text{cosec}^2 x.$$

293. Derivada de la secante. La secante puede ponerse también en forma de cociente, y, por lo tanto, para determinar su derivada

---

(*) Esta derivada y la de las tres funciones circulares siguientes, pueden traducirse en lenguaje; si bien conviene recordar que la secante y la cosecante, inversas del coseno y del seno, son líneas trigonométricas poco usadas.

se procederá de igual modo que en los casos anteriores. Así: siendo

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

resulta, derivando,

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \operatorname{tang} x.$$

294. Derivada de la cosecante. La derivada de esta función se determina análogamente, deduciéndose de la igualdad,

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

que

$$y' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x \cot x.$$

295. Derivadas de las funciones circulares inversas. Las derivadas de esta clase de funciones, como las de todas aquellas que son inversas de otras cualesquiera, pueden obtenerse en virtud del siguiente principio.

TEOREMA. *Dos funciones inversas, una de otra, tienen sus derivadas recíprocas.*

Sean, en efecto, $y = \varphi(x)$ y $x = \psi(y)$ dichas funciones inversas, cuyas variables independientes son, en igual orden, x é y. Puesto que ambas proceden de una misma ecuación de relación, $f(x, y) = 0$, se tiene la identidad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 : \frac{\Delta x}{\Delta y};$$

y, tomando los límites,

$$\varphi'(x) = 1 : \psi'(y) \qquad \text{ó, bien,} \qquad \varphi'(x) . \psi'(y) = 1$$

según se quería demostrar. (*)

Sabido esto, conviene observar que, en las funciones circulares inversas, á cada valor de la línea trigonométrica variable, corresponde una infinidad de arcos y, por consiguiente, que si quiere

(*) La ecuación primitiva de relación podría ser precisamente una de las dos inversas, en las que ya y ó x son explícitas. Entonces la otra sería una transformada directa suya; pero siempre unos mismos, por lo tanto, los pares de valores de x é y que las verifican.

determinarse cualquiera de ellas, es preciso fijar el valor que tiene el arco para un valor particular de la línea trigonométrica considerada. Así: si en la función $y = arc\ tang\ x$ (*), se supone que y se anula al mismo tiempo que x, esta función quedará determinada; pudiendo decirse entonces que y variará de 0 á $+\frac{\pi}{2}$, cuando x varíe de 0 á $+\infty$, y de 0 á $-\frac{\pi}{2}$, cuando la variación de x sea de 0 á $-\infty$. (**)

Veremos, sin embargo, que aun consideradas de un modo general estas funciones, sus derivadas no tienen más que un solo valor, ó dos valores iguales y de signos contrarios; porque, según se demuestra en la trigonometría, la suma ó diferencia de dos cualesquiera de los arcos correspondientes, es siempre un múltiplo de la semicircunferencia, ó, sea, una magnitud constante, respecto de la línea trigonométrica de que dependen.

1.° Sea la función inversa

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$$

de la cual se deduce

$$x = \operatorname{sen} y.$$

En razón al teorema demostrado, será:

$$y' = \frac{1}{\cos y};$$

y como $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, reemplazando este valor en la expresión anterior, resultará para la derivada pedida:

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$$

Para determinar el signo del radical, será preciso saber donde cae el extremo del arco; pues si éste termina en el primero ó en

(*) Esta función, como las demás análogas, podría escribirse con más propiedad, aunque menos sencillamente, $y = arc\ (tang = x)$. Su enunciación es *y igual arco cuya tangente es x*, ó, tan sólo, *arco tangente x*.

(**) Podría suponerse que, cuando $x = 0$, era $y = \pi$, ó, en general, $y = n\pi$, siendo n cualquier número entero.

el cuarto cuadrante, se tomará el signo $+$, y si termina en el segundo ó tercero deberá afectarse del signo $-$. (*)

2.° Consideremos la función

$$y = \text{arc}\cos x,$$

de la que inmediamente resulta

$$x = \cos y;$$

se tendrá, por lo tanto,

$$y' = -\frac{1}{\text{sen}\, y} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}};$$

debiéndose, en cada caso, afectar el radical del signo que corresponda á *sen y*, según donde se encuentre el extremo del arco.

3.° Sea la función

$$y = \text{arc}\,\text{tang}\, x$$

de la cual se deduce

$$x = \text{tang}\, y.$$

En virtud del principio fundamental, será:

$$y' = \cos^2 y;$$

pero como

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

resultará en definitiva:

$$y' = \frac{1}{1+x^2};$$

derivada en la cual no existe ambigüedad. (**)

(*) Esta consecuencia se funda en la consideración del signo del coseno, del cual procede; y, más en general, en que cuando el incremento, h, de la variable y el incremento funcional, k, tienen el mismo signo, la relación $\frac{k}{h}$ y su límite, es decir, la derivada, será positiva; mientras que sucederá lo contrario cuando dichos incrementos tengan signos diferentes.

(**) El motivo de que no exista ambigüedad en este caso, consiste en que sólo hay una condición para que dos arcos tengan igual tangente; y es que sea un múltiplo de π su diferencia, ó cero la de sus derivadas.

4.° Las derivadas de las otras funciones circulares inversas se determinan análogamente, hallándose que á las funciones

$$y = \text{arc}\cot x, \quad y = \text{arc}\sec x, \quad y = \text{arc}\,\text{cosec}\, x,$$

corresponden, en el mismo orden, las derivadas

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad y' = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}, \quad y' = -\frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}. \text{ (*)}$$

Ejercicios.

I. Obtener las derivadas de las funciones

$$y = \text{sen}^3 x; \quad y = \sqrt[5]{\text{tang}\, x}; \quad y = \frac{1}{\text{tang}\, x}; \quad y = \frac{\sec x}{\text{cosec}\, x}.$$

II. Hallar las derivadas de

$$y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x; \quad y = x\,\text{sen}\, x + \cos x; \quad y = \text{sen}\, x - x\cos x.$$

III. Determinar las derivadas de las funciones

$$y = (\text{arc}\cos x)^{\frac{4}{5}}; \quad y = x\,\text{arc}\sec x; \quad y = \frac{\text{arc}\,\text{tang}\, x}{x^2}.$$

(*) La proposición general, relativa á las derivadas de las funciones inversas, permite también obtener la derivada de la función logarítmica, por medio de la correspondiente á la función exponencial, ó al contrario.

Así: siendo $y = \log x$, se deduce $x = a^y$, designando por a la base del sistema logarítmico; luego

$$y' = \frac{1}{a^y\, \text{l}\, a} = \frac{1}{x\, \text{l}\, a} = \frac{\log e}{x}. \quad \textbf{(182)}$$

Recíprocamente: de $y = a^x$, resulta $x = \log y$, en el sistema de base a, y, por lo tanto,

$$y' = 1 : \frac{\log e}{y} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e} = a^x\, \text{l}\, a$$

CAPÍTULO III

DETERMINACIÓN DE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES MÚLTIPLES, DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS, DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES Y DE LAS FUNCIONES IMPLÍCITAS

I.—Derivadas de las funciones múltiples y compuestas.

296. **Derivadas de las funciones múltiples.** Si una función se somete á distintas operaciones, se obtiene lo que hemos llamado (**165**) función de función ó función doble, y si ésta es elemento variable de otra función, la que así se obtiene es una función triple de la variable independiente. Las derivadas de estas funciones múltiples se determinan por medio de la proposición que sigue.

TEOREMA. *La derivada de una función múltiple, es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones, tomadas con relación á la variable de la cual dependen inmediatamente.*

Supongamos que $u = f(x)$ admite la derivada $u' = f'(x)$ y que $y = f(u)$ es una función continua de u, que admite á su vez la derivada $y' = f'(u)$. Resulta que y es entonces función continua de x; pues si x recibe un incremento tan pequeño como se quiera, Δx, el incremento Δu cumplirá con la misma condición y á este incremento corresponderá otro, también infinitamente pequeño, para y, que representaremos por Δy.

Partiendo ahora de la identidad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

observamos que cuando Δx tienda hacia cero, la relación $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendrá por límite u', y $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ tenderá hacia $f'(u)$; luego el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es el

producto $f'(u)u'$; de suerte que, considerando á y como función de x, su derivada será:

$$y' = f'(u)u'.$$

El teorema puede generalizarse razonando de un modo análogo.

En efecto: si $y = f(v)$, $v = F(u)$, $u = \varphi(x)$, son funciones continuas, y admiten las respectivas derivadas $f'(v)$, $F'(u)$, $\varphi'(x)$, á un incremento suficientemente pequeño de x, corresponderá, según hemos dicho, otro tan pequeño como se quiera para v, y, por consiguiente, otro análogo para y; luego esta última es una función continua de x. Se tiene, pues,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y, pasando á los límites, cuando Δx tienda hacia cero,

$$y' = f'(v)F'(u)u';$$

que es lo que se quería demostrar. (*)

Para familiarizarse con el teorema precedente, lo aplicaremos á varios ejemplos, que muestran la manera de proceder.

1.° Sea la función, $y = \text{sen}\, x^2$. Haciendo $x^2 = u$, será $y = \text{sen}\, u$, viéndose de este modo que y es una función de función; luego:

$$y' = \cos u \,.\, u' = 2x \,.\, \cos x^2.$$

(*) Poniendo x bajo la forma de función de función de ella misma, y por medio de este principio, puede también obtenerse el de las derivadas de las funciones inversas; pues de $y = \varphi(x)$ y $x = \psi(y)$ se deduce:

$$\psi[\varphi(x)] = x; \quad \text{y derivando} \quad \psi'(y) \cdot \varphi'(x) = 1.$$

Como la clasificación de las funciones no afecta generalmente sino á la forma externa, y ésta es muchas veces susceptible de variar, puede obtenerse la derivada de una misma función, partiendo de principios diversos.

Vemos, por ejemplo, que la derivada de la función simple ó elemental $y = \cos x$, se halla también considerándola como función de función, de la manera siguiente:

$$y = \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

de donde

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot -1 = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}\, x.$$

Se encuentra fácilmente, este mismo resultado, partiendo de la igualdad $\cos x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$; y otro tanto ocurre con $u^m v^m = (uv)^m$, suponiendo, sucesivamente, que se trata de una función producto ó compuesta, ó, bien, de una función múltiple.

2.° Propongámonos derivar $y = e^{\operatorname{sen} x^2}$. Si se hace $x^2 = u$, y $\operatorname{sen} u = v$, será $y = e^v$, así es que para esta función triple, se tendrá:

$$y' = e^v . \cos u . 2x = 2x e^{\operatorname{sen} x^2} \cos x^2.$$

3.° Consideremos, por último, la función $y = \mathrm{l}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$. Haciendo $x + \sqrt{1 + x^2} = u$, resulta la función doble $y = \mathrm{l}u$, cuya derivada es:

$$y' = \frac{1}{u} . u' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

297. Derivadas de las funciones compuestas. Cuando una función es el resultado de combinar entre sí diversas funciones, es decir, cuando es una función compuesta de otras varias, se obtiene su derivada por medio de la siguiente proposición.

Teorema. *La derivada de una función compuesta, es igual á la suma de sus derivadas, con relación á cada una de las funciones de que consta, multiplicadas respectivamente por las derivadas de las mismas funciones componentes.*

Si se considera, por ejemplo, la función $f(u,v,z)$ en la que u, v y z son funciones de x, la relación del incremento funcional al de la variable, será:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z)}{\Delta x} \quad (*) ;$$

pero esta expresión se transforma idénticamente en

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v + \Delta v, z + \Delta z)}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{f(u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z + \Delta z)}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{f(u, v, z + \Delta z) - f(u, v, z)}{\Delta x} .$$

Siendo el numerador de la primera fracción del segundo miembro de esta igualdad, el incremento que toma $f(u, v + \Delta v, z + \Delta z)$

(*) Cuando no hay lugar á duda, puede designarse abreviadamente una función, por la letra que representa su característica.

cuando u se cambia en $u + \Delta u$, si se le aplica la fórmula del incremento de la función

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h),$$

que antes establecimos (**277**), puede transformarse dicha fracción en

$$f'_u(u + \theta_1 \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) \frac{\Delta u}{\Delta x} ;$$

bien entendido que la derivada con respecto á u, f'_u, se ha de tomar como si $v + \Delta v$ y $z + \Delta z$ fuesen constantes.

Poniendo los otros dos términos del segundo miembro bajo forma análoga, se tendrá:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_u\left(u + \theta_1 \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z\right) \frac{\Delta u}{\Delta x} +$$
$$+ f'_v\left(u, v + \theta_2 \Delta v, z + \Delta z\right) \frac{\Delta v}{\Delta x} + f'_z\left(u, v, z + \theta_3 \Delta z\right) \frac{\Delta z}{\Delta x} .$$

Ahora bien: cuando Δx decrece indefinidamente, los incrementos respectivos Δu, Δv, Δz tienden todos hacia cero, y las relaciones $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, hacia u', v', y z'; de suerte que, pasando á los límites, resultará:

$$f'_x(u, v, z) = f'_u(u, v, z)u' + f'_v(u, v, z)v' + f'_z(u, v, z)z' ,$$

ó, más abreviadamente,

$$f'_x = f'_u u' + f'_v v' + f'_z z';$$

que es lo que se quería demostrar. (*)

(*) Observando que $f'_u u'$, $f'_v v'$ y $f'_z z'$, son las derivadas de $f(u, v, z)$, suponiendo, respectivamente, que sólo u, v y z sean funciones variables, se deduce que el teorema demostrado podría enunciarse en forma más científica, aunque menos fácil de comprender desde luego, diciendo: *la derivada de una función compuesta, es igual á la suma de sus derivadas, con relación á cada una de las funciones de que consta, considerándolas sucesivamente como única función variable.*

Conviene también consignar que la aplicación de este principio á la suma, al producto y al cociente de varias funciones, permite reproducir los teoremas referentes á sus derivadas. Es además muy digna de notarse la simplificación que resulta tomando antes los logaritmos en los dos últimos casos, lo mismo que en el de la potencia y la raíz de una función; logaritmos que pueden corresponder á cualquier sistema, pero que empleados solamente como artificio, conviene para más sencillez que sean neperianos.

Aplicando este principio á la función $y = u^v$, en la cual u y v son funciones de la variable x, se tiene:

$$y' = v u^{v-1} u' + u^v \mathrm{l} u v' = u^{v-1}(v u' + u v' \mathrm{l} u). \text{ (*)}$$

En el caso particular de ser

$$y = x^x \qquad \text{resulta} \qquad y' = x^x - x^x \mathrm{l} x = x^x(1 - \mathrm{l} x).$$

298. Derivada de una serie. La frecuencia con que aparecen y se emplean las series ordenadas con respecto á las potencias crecientes de una misma variable, da importancia al teorema que sigue.

TEOREMA. *Si una serie ordenada según las potencias ascendentes de la variable,* x, *es convergente, las derivadas de sus términos forman, para los mismos valores de dicha variable, otra serie convergente, que es á su vez la derivada de la primera.*

Sea la serie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

que suponemos convergente para todos los valores de x menores en valor absoluto que un cierto límite.

Según ya se ha demostrado (**230**), la función $\varphi(x)$, será continua para dichos valores, de suerte que la función incrementada

$$\varphi(x + h) = a_0 + a_1(x + h) + a_2(x + h)^2 + \cdots\cdots + a_n(x + h)^n + \cdots\cdots$$

que para los mismos valores de x y los que sean suficientemente pequeños de h, será también convergente, podrá diferenciarse en tan poco como se quiera de $\varphi(x)$; y esto exige que la suma de todos los términos en h, tengan por límite cero.

(*) Aunque no muy propiamente, suele denominarse *doble exponencial*, á la función $y = u^v$.

Tomando los logaritmos, antes de derivar, da

$$\mathrm{l} y = v \mathrm{l} u \qquad \text{de donde} \qquad \frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \mathrm{l} u$$

y quitando denominadores y poniendo en vez de y lo que representa, se halla el mismo resultado obtenido.

Restando estos desarrollos, término á término, se halla la serie

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = a_1 h + a_2(2xh + h^2) + \cdots\cdots +$$
$$+ a_n\left(n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} h^2 x^{n-2} + \cdots\cdots + h^n\right) + \cdots\cdots$$

la cual será convergente, á su vez, para valores de h tan pequeños como sea necesario, y para idénticos valores de x que la primera (**225**, teor. I).

Otro tanto podrá asegurarse que ocurre con la serie

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = a_1 + a_2(2x + h) + \cdots\cdots +$$
$$+ a_n\left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} h x^{n-2} + \cdots\cdots + h^{n-1}\right) + \cdots\cdots$$

siendo el incremento h suficientemente pequeño, aunque distinto de cero, y x menor que el límite superior de convergencia de la serie propuesta (**225**, teor. II); pero como, al decrecer h, los dos miembros permanecerán constantemente iguales, los límites que corresponden á $h = 0$, deberán serlo también; y como el del primero es la derivada de $\varphi(x)$, y al tomar el del segundo desaparecen los términos que contienen h, por tender todos hacia cero y ser sus coeficientes los mismos que llevan las potencias inmediatamente superiores en $\varphi(x + h)$, resulta:

$$\varphi'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots\cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots\cdots$$

para todos los valores de x ya indicados, según se quería demostrar. (*)

Como el ser la convergencia y la continuidad simultáneas, es propiedad característica de la clase de series que hemos considerado, y para una serie cualquiera podría faltar una ú otra de estas condiciones, se comprende que la proposición demostrada no

---

(*) Que esta serie es convergente siempre que lo sea la propuesta, y recíprocamente, se comprueba observando que el límite de la relación del término general al anterior, cuando n tiende al infinito, es en ambas $\frac{a_n}{a_{n-1}} x$.

puede aplicarse de un modo general, por más que en muchos casos se verifique. (*)

299. Derivada de una determinante. Suponiendo que sean funciones de una misma variable, todos ó algunos de los elementos de una determinante, y recordando que ésta es una función compuesta de dichos elementos, en la que el coeficiente de cada uno es su complemento algébrico, se deduce, en virtud del principio de las derivadas de las funciones compuestas, que *la derivada de una determinante es la suma de los productos que se obtienen multiplicando la derivada de cada elemento, por su complemento algebraico correspondiente.*

Por tal razón, si el elemento general de la determinante Δ se representa por y_{rs}, será:

$$\Delta' = \sum y'_{rs}(-1)^{r+s}\Delta_{rs}.$$

Claro es que para aquellos elementos que sean constantes, sus derivadas y los productos correspondientes serán iguales á cero.

Como la agrupación de los términos que procedan de los elementos de una línea cualquiera, equivaldrá evidentemente al resultado de substituir éstos por sus derivadas en la determinante primitiva, puede también decirse, que *la derivada de una determinante de grado* n, *es la suma de las* n *determinantes que resultan reemplazando sucesivamente los elementos de cada fila, ó los de cada columna, por sus derivadas respectivas.*

(*) Aun restringido el teorema á las *series potenciales*, permite deducir de una serie convergente otras varias de igual radio de convergencia, ya pasando á las derivadas, ya á las funciones primitivas correspondientes. El que dicho teorema no se verifica para otra cualquiera, lo comprueba la serie

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots\cdots$$

que es convergente para todos los valores de x; puesto que sus términos no son mayores que los cuadrados de los que constituyen la serie armónica (**224**). En tal concepto, si la proposición le fuese aplicable, las segundas derivadas de sus términos deberían formar una serie también convergente; y

$$-\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \cdots\cdots - \cos nx - \cdots\cdots$$

no lo es; porque la condición primordial, de que sus términos tiendan hacia cero, no se verifica.

Según esto, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix}$$

Ejercicios.

I. Derivar las funciones múltiples que siguen:

$$y = \mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})\,; \quad y = (a+bx^m)^n\,; \quad y = \mathrm{l}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,;$$

$$y = \left(\mathrm{arc\ tang}\,\frac{a+x}{1-ax}\right)^3; \quad y = \sqrt{\mathrm{l}\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,.$$

II. Derivar las siguientes funciones compuestas:

$$y = x(\mathrm{l}x-1)\,; \quad y = e^x(x-1)\,; \quad y = x^{nx}\,; \quad y = \mathrm{tang}\,x + \frac{1}{3}\mathrm{tang}^3 x\,;$$

$$y = \mathrm{l}(x-a) - \frac{a(2x-a)}{(x-a)^2}\,; \quad y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)\mathrm{sen}\,x\,;$$

$$y = e^x\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\,; \quad y = (\cos x)^{\mathrm{sen}\,x}\,;$$

$$y = (\mathrm{l}x-1)\sqrt{a^2+x^3} - \frac{a}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a}\,.$$

III. Obtener otras series convergentes para $x<1$, de la

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots;$$

y comprobar, por medio del desarrollo respectivo, que las derivadas sucesivas de e^x, son todas esta misma función.

IV. Hallar las derivadas de primero y segundo orden de las determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ x^3 & 4 & x \\ 5 & x^2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} u & v & z \\ u' & v' & z' \\ u'' & v'' & z'' \end{vmatrix};$$

en la segunda de las cuales los elementos de las dos últimas filas, son las derivadas de los correspondientes de la fila anterior.

II.—Derivadas de las funciones de varias variables y de las funciones implícitas.

300. Derivadas parciales. El modo como varía una función $f(x, y, z, \ldots..)$, que contiene diversas variables independientes, se aprecia por la variación sucesiva de esta función, con respecto á cada una de dichas variables.

Sabido esto, si consideramos la función $u = f(x, y)$ de dos variables, y, suponiendo á y como constante, se toma la derivada con relación á x, tendremos lo que se llama la *derivada parcial con respecto á* x; y si imaginamos que esta última es constante y hallamos la derivada con relación á y, resultará la derivada parcial correspondiente á esta otra variable. Tales derivadas parciales de primer orden, suelen representarse por u'_x y u'_y ó por f'_x y f'_y.

Si se toman dos derivadas sucesivas de la función propuesta, ya sean ambas con respecto á x, una con relación á x y otra con relación á y, ó las dos respecto de y, se obtendrán las derivadas parciales de segundo orden que, respectivamente, se designan por

$$u''_{x^2},\ u''_{xy},\ u''_{y^2} \quad \text{ó, bien, por} \quad f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}.$$

De una manera análoga se representan las derivadas parciales de órdenes superiores, en las funciones de dos ó más variables.

Como complemento de las notaciones que preceden, debe demostrarse que no importa alterar el orden de las derivaciones parciales, es decir, que *los resultados de derivar sucesivamente una función con respecto á sus variables independientes* x *é* y, *son los mismos, cualquiera que sea aquella por la cual se empiece.*

Sea $f(x, y)$ una función de dichas variables, y h y k sus incrementos respectivos. Vamos á hacer ver que f''_{xy} y f''_{yx} son iguales.

Atendiendo primero á la sola variación de x, se tiene, en virtud de lo ya demostrado (277, teor. II),

$$f(x+h, y) - f(x, y) = hf'_x(x + \theta h, y);$$

y considerando después que no varía sino y, en este incremento funcional, tendremos, fundándonos en el mismo principio,

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y) = khf''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k).$$

En la hipótesis de que el orden de las variaciones sucesivas de x é y, se verifique en sentido inverso, se hallará análogamente:

$$f(x, y+k) - f(x, y) = kf'_y(x, y+\theta_1 k)$$

y también

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y) = hkf''_{yx}(x+\theta'_1 h, y+\theta_1 k).$$

Los primeros miembros de esta igualdad y de la anteprecedente son idénticos, de modo que deberá ser:

$$f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k) = f''_{yx}(x+\theta'_1 h, y+\theta_1 k);$$

y pasando á los límites, cuando h y k tiendan hacia cero,

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad \text{ó, más sencillamente,} \quad f''_{xy} = f''_{yx};$$

que es lo que se quería demostrar.

Observando que en la demostración que acaba de darse, nada se opone á que la función considerada contenga otras variables independientes, además de x é y, y que la inversión de dos derivaciones consecutivas es bastante para modificar como se quiera el orden de las que se efectúen, se deduce que pueden suponerse agrupadas todas las derivaciones respecto de una misma variable, dando á ésta, en el subíndice de f, el exponente que le corresponda, según la notación antes indicada, y pudiendo ocupar el lugar que se quiera en dicho subíndice.

Si se tiene, por ejemplo, la función

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 7x + 4y + 2$$

será evidentemente:

$$f'_x = 6x - 5y - 7; \qquad f'_y = -5x + 2y + 4;$$

y, por lo tanto,

$$f''_{x^2} = 6; \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = -5; \qquad f''_{y^2} = 2.$$

301. Derivada de las funciones de varias variables. La definición que hemos dado de derivada, supone, de una manera implícita, que la función no depende sino de una sola variable independiente.

Sabiendo ya lo que se entiende por derivadas parciales, diremos que *se llama derivada de una función de varias variables, la suma de las derivadas parciales de dicha función, con respecto á cada una de sus variables.*

Según esto, si se considera la función

$$u = f(x, y)$$

será:

$$u' = f'_x + f'_y$$

y, por consiguiente,

$$u'' = f''_{x^2} + 2f''_{xy} + f''_{y^2}.$$

Considerando, análogamente, la función

$$u = f(x, y, z),$$

se tendrá:

$$u' = f'_x + f'_y + f'_z$$

y para la derivada de segundo orden

$$u'' = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2} + 2f''_{xy} + 2f''_{xz} + 2f''_{yz}. \; (*)$$

302. Principio de las funciones homogéneas. Si á una función homogénea, de varias variables, se le aplica el procedimiento explicado para hallar sus derivadas parciales, y combinamos éstas entre sí, resulta una proposición importante, por las frecuentes aplicaciones que de ella se hacen en el cálculo algebraico y aun en el análisis superior.

Sea la función homogénea, del grado m, $f(x, y, z.....)$, la cual se compondrá de términos que serán de la forma $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma .....$ y en los que $\alpha + \beta + \gamma + ... = m$.

Pondremos así:

$$f(x, y, z,.....) = \Sigma A x^\alpha y^\beta z^\gamma .....$$

(*) Es fácil observar que, en las derivadas sucesivas de una función de dos variables, los coeficientes numéricos son los de la fórmula del binomio de Newton, y los órdenes de derivación proceden también como los exponentes de la parte literal de $(x + y)^m$; mientras que en las funciones de tres ó más variables, ocurre lo mismo respecto de la fórmula de Leibnitz para la potencia de un polinomio (68).

y derivando sucesivamente con relación á cada una de las variables, resultará:

$$f'_x = \Sigma \alpha A x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma .....$$

$$f'_y = \Sigma \beta A x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma .....$$

$$f'_z = \Sigma \gamma A x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1} .....$$

$$.....................$$

Si multiplicamos ahora los dos miembros de cada una de estas igualdades, respectivamente por $x, y, z,....$, y sumamos los productos, miembro á miembro, se halla:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + ... = \Sigma(\alpha + \beta + \gamma + ...) A x^\alpha y^\beta z^\gamma ......$$

ó, bien,

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + ... = \Sigma m A x^\alpha y^\beta z^\gamma ...... = mf(x, y, z.....);$$

de donde se deduce que *la suma de los productos de las derivadas parciales de una función homogénea de varias variables, multiplicadas cada una por su variable correspondiente, es igual á la función multiplicada por su grado.* (*)

Observando que la derivación, con respecto á cada una de las variables, disminuye en una unidad el exponente que ésta tiene en cada término, y conserva inalterables los exponentes de las demás, haciendo desaparecer al propio tiempo los términos independientes de ella, vemos que cada una de las referidas derivadas parciales será á su vez función homogénea del grado $m - 1$. El mismo razonamiento demuestra que las derivadas parciales de segundo orden, serán funciones homogéneas del grado $m - 2$, y, en general, que *las derivadas parciales de orden $n^{\text{ésimo}}$ de una función homogénea, del grado* m, *son también funciones homogéneas del grado* m — n.

303. Derivadas de las funciones implícitas. Si se tiene la función implícita y, dada por la ecuación $f(x, y) = 0$, es claro que podrá hallarse su derivada haciéndola explícita, después de resolver la ecuación que la liga con su variable; pero ni esto es siempre posible, ni es tampoco necesario para obtenerla desde luego.

(*) Esta proposición se atribuye á Euler.

La ecuación $f(x, y) = 0$, debe reducirse, en efecto, á una identidad, cuando en ella se reemplace y por su valor, expresado en función de x; de suerte que siendo entonces $f(x, y)$ idénticamente igual á cero, su derivada también lo será; luego aplicándole el teorema de las derivadas de las funciones compuestas, y en razón á que la derivada de x es la unidad, se hallará:

$$f'_x + y'f'_y = 0 \quad \text{de donde} \quad y' = -\frac{f'_x}{f'_y};$$

lo cual nos dice, que *la derivada de una función implícita es, con signo contrario, el cociente de las derivadas parciales, con relación á* x *y con respecto á* y, *del primer miembro de la ecuación que la liga con su variable.* (*)

Si dos funciones y y z estuviesen dadas por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

aplicaríamos á cada una de estas ecuaciones el referido teorema, y se obtendrían las siguientes:

$$\varphi'_x + \varphi'_y\, y' + \varphi'_z\, z' = 0$$
$$\psi'_x + \psi'_y\, y' + \psi'_z\, z' = 0$$

las cuales permiten calcular y' y z'.

Considerando, por ejemplo, la función implícita y, ligada con x por la ecuación

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0,$$

se tendrá, según la regla anterior,

$$y' = -\frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}.$$

Puede comprobarse este resultado, despejando y en función de x de la ecuación propuesta, y, obteniendo directamente la derivada; pues de este modo se llegará á la expresión deducida, después de substituir en ella dicho valor de y.

(*) En esta proposición se supone implícitamente que el segundo miembro de la ecuación es cero. Debe también notarse que aun cuando función implícita, en general, es toda aquella cuya expresión analítica no es dada, hallándose sin embargo perfectamente definida, no consideramos sino las funciones que están ligadas con su variable por ecuaciones no resueltas.

Ejercicios.

I. Determinar las derivadas parciales de distintos órdenes de las funciones

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y^2 + y^4; \quad f(x, y, z) = x^3 - 6xyz + 5x^2y - y^2z - 2y^3.$$

II. Obtener las derivadas totales de primer orden de las funciones siguientes:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad u = \operatorname{tang} x^y; \quad u = \frac{2xy}{x^3 - y^3};$$

$$u = \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}; \quad u = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x - y}{x}};$$

$$u = x \operatorname{tang} y + y \operatorname{tang} x.$$

III. Hallar las derivadas de primer orden de la función y, dada implícitamente por las ecuaciones que siguen:

$$y^3 - 2xy + x^2 = 0; \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0;$$

$$\operatorname{tang} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 - x}}; \quad y = x^{y+x}.$$

IV. Deducir del sistema de ecuaciones

$$\cos x + \cos y + \cos z = a$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = b$$

las derivadas de primer orden, con respecto á x, de las dos funciones implícitas y y z.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES USUALES DE LAS FUNCIONES DERIVADAS

I.—Variación de las funciones.

304. **Crecimiento y decrecimiento de una función.** Si para un incremento positivo y suficientemente pequeño de la variable x, la función continua $f(x)$ toma también un incremento positivo, se dice que esa función es *creciente;* pero en el caso de que para dicho incremento de la variable, la función adquiera un valor menor que el que antes tenía, se dice, por el contrario, que es *decreciente.*

Poniendo el incremento funcional bajo la forma

$$f(x+h)-f(x)=h\,[f'(x)+\varepsilon]$$

en la que sabemos que ε es una función de h y de x, que se anula al mismo tiempo que h, se ve que, si $f'(x)$ no es cero, puede tomarse h bastante pequeña para que ε sea, en valor absoluto, menor que $f'(x)$. El signo de la cantidad entre corchetes será entonces el de $f'(x)$, y lo mismo sucederá respecto del primer miembro de la igualdad anterior; puesto que h es una cantidad positiva.

Resulta así, que *una función continua será creciente ó decreciente, en tanto que su derivada sea positiva ó negativa.*

Claro es que la recíproca de esta proposición es igualmente verdadera. (*)

Conviene observar que la representación gráfica de las funciones y la significación geométrica de la derivada, comprueban la

(*) Debe notarse que ambas consecuencias subsisten, aun cuando entre los valores considerados se anule una ó varias veces la derivada, siempre que no llegue á variar de signo.

importante propiedad que acaba de demostrarse; pues si la función es creciente desde A hasta B, (fig. 13), los ángulos que formarán sus tangentes geométricas con la parte positiva del eje de las x serán agudos, y las tangentes trigonométricas de éstos positivas; mientras que si la función es decreciente, entre dichos puntos, (fig. 14), los referidos ángulos serán obtusos, y sus tangentes trigonométricas negativas. (*)

305. **Máximo y mínimo de las funciones.** Cuando á un valor particular de la variable de una función continua, corresponde un valor de esa función, mayor ó menor que aquellos que le preceden y le siguen inmediatamente, se dice que tal valor es un *máximo* ó un *mínimo*.

Con arreglo á esta definición, no deben confundirse los máximos y mínimos relativos, á los cuales se refiere, con el máximo y el mínimo absolutos que, caso de existir, serían respectivamente el mayor y el menor de los valores de una función.

En el concepto expresado es fácil ver que si, para $x=a$, la función $f(x)$ toma un valor máximo, esa función será creciente para valores de x menores que a y decreciente para valores mayores de la variable. La derivada será, pues, primero positiva y luego negativa, debiendo cambiar de signo cuando, creciendo x de una manera continua, pase por el valor a.

Análogamente: si, para $x=a$, la función $f(x)$ adquiere un valor mínimo, la marcha de sus valores exigirá que la derivada cambie de signo, pasando de negativa á positiva.

En virtud de lo expuesto se deduce, que *si la derivada de una función es continua, los únicos valores de* x *que pueden hacer máximo ó mínimo el valor de esa función, son los que anulan su derivada.*

La recíproca de esta proposición no es, sin embargo, cierta; porque hay funciones, tales como $y=(x-a)^{2n}$, que pasan por cero sin cambiar de signo, que es la condición esencial que debe verificarse en la derivada.

Resulta, en definitiva, que *si se determinan los valores de* x *que*

(*) Se ve también gráficamente, (fig. 16), que la función puede ser en su conjunto creciente, aun cuando la derivada pase por cero.

verifican la ecuación $f'(x)=0$, *aquellos para los cuales la derivada pase de positiva á negativa, corresponderán á un máximo de* $f(x)$; *y los que hagan que la derivada pase de negativa á positiva corresponderán á un mínimo de esa función.*

Puede, además, observarse que cuando hay máximo para $x=a$ y $f'(a)=0$, la derivada es sucesivamente positiva, nula y negativa, es decir, decreciente; luego su primera derivada $f''(x)$, ó, sea, la de segundo orden de la función propuesta, será negativa para dicho valor. Si, por el contrario, hay mínimo, la derivada, que es primero negativa, pasa por cero y viene luego á ser positiva, de modo que siendo una función creciente, $f''(x)$ será positiva para el valor considerado de x.

Como la recíproca es verdadera, deducimos, por último, que *la condición necesaria y suficiente para que corresponda á un máximo ó á un mínimo de* $f(x)$, *el valor* $x=a$, *que hace* $f'(a)=0$, *es que sea* $f''(a)\lessgtr 0$. (*)

(*) Esta consecuencia final, supone implícitamente que $f''(x)$ no se anula también para $x=a$. En el caso de ser $f''(a)=0$, observaremos que, según se verá más adelante como consecuencia de la *fórmula de Taylor*, si $f^{(n)}(x)$ es la primera derivada que no se reduce á cero para el expresado valor, el incremento de la función tendrá la forma

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a+\theta h)\ ;$$

deduciéndose, por consiguiente, que si n es impar no podrá haber máximo ni mínimo, y que si n es par, habrá máximo ó mínimo según sea $f^{(n)}(a)\lessgtr 0$.

Lo dicho supone, á la vez, que la función propuesta y sus derivadas son siempre continuas. Cuando esto no sucede, como suele ocurrir con la forma fraccionaria ó transcendente, la derivada puede cambiar de signo pasando por infinito, de suerte que deberán examinarse además los valores de x que hagan $f'(x)=\infty$. En tal caso se encuentra la función

$$f(x)=1+x^{\frac{2}{3}} \qquad \text{de la cual resulta} \qquad f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\ ;$$

viéndose que esta derivada, que no se anula por ningún valor finito de x, es infinita para $x=0$; y como además es negativa para $x<0$, y positiva para $x>0$, $f''(0)=1$ será un mínimo de la función.

Por último: puesto que lo esencial para que haya máximo ó mínimo, es que la primera derivada cambie de signo, y su paso por infinito, lo mismo que su paso por cero, no implica que tal condición se cumpla de seguro, habrá que ver en cada caso si en efecto se verifica, ya por medio de las derivadas de orden superior, ya directamente.

Cuanto hemos dicho se comprueba plenamente por medio de la representación geométrica de las funciones; pues observamos que el valor máximo, $y=AP$, (fig. 15), no es el mayor de los que adquiere la función, ni el mínimo, $y=BQ$, es tampoco el menor de sus valores; pudiendo hasta haber un máximo, AP, menor que un mínimo DS. Se ve también que, para los valores máximo y mínimo, las tangentes geométricas son paralelas al eje de las x; de suerte que, siendo nulo el ángulo que con él forman, la derivada será igual á cero; y se justifica, finalmente, que no basta esta última condición, observando que, en la función que corresponde á la curva AMB, (fig. 16), para $x=OP$, la derivada es nula, y, sin embargo, la función no pasa ni por un máximo ni por un mínimo. (*)

Si se quiere, por ejemplo, hallar los valores de x que conviertan en un máximo ó en un mínimo la función

$$f(x)=x(a-x)$$

observaremos que de la ecuación

$$f'(x)=a-2x=0 \qquad \text{resulta} \qquad x=\frac{a}{2}\ ;$$

y como $f''(x)=-2$, es negativa para cualquier valor de x, resulta que á $x=\frac{a}{2}$, corresponde un máximo $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$.

Notando que la suma de x y $a-x$ es la constante a, se deduce, finalmente, que *para descomponer un número en dos sumandos cuyo producto sea máximo, basta dividirlo en dos partes iguales.* (**)

Si se somete al mismo estudio la función

$$f(x)=x+\frac{a}{x}$$

y se observa que el valor $x=\sqrt{a}$, que verifica la ecuación

$$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}=0,$$

(*) El punto M, en que ocurre esta particularidad, es lo que se llama *un punto de inflexión.*

(**) Esta propiedad es también consecuencia del principio geométrico de que *la perpendicular á un diámetro, trazada desde un punto cualquiera de la circunferencia, es media proporcional entre los dos segmentos en que divide á dicho diámetro.*

hace positiva la derivada de segundo orden

$$f''(x) = \frac{2a}{x^3},$$

resulta que á dicho valor corresponde un mínimo $f(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}$; y observando, por último, que el producto $x \cdot \frac{a}{x}$ es siempre la constante a, puede decirse que *para descomponer un número en dos factores cuya suma sea un mínimo, basta descomponerlo en dos factores iguales.* (*)

Ejercicios.

I. Estudiar la variación de las funciones

$$x^2 - 4x + 25\,; \quad x^2 - 5x + 11\,; \quad x^x\,; \quad x - lx.$$

II. Hallar los valores de x que hacen máximo ó mínimo las funciones:

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 1\,; \quad m \operatorname{sen} x + n \cos x; \quad \sqrt[x]{x}\,; \quad \frac{x}{a^x}\,; \quad \frac{\log x}{x}\,; \quad x^m + (a-x)^m.$$

II.—Formas indeterminadas. (**)

306. Forma matriz de la indeterminación. Se dijo en la primera parte del álgebra, que al dar valores particulares á las letras que entraban en una fracción, podía ésta adquirir la forma $\frac{0}{0}$; y encontramos en algunos casos su verdadero valor, suprimiendo un factor que se anulaba por la hipótesis hecha y que era común á los dos términos de dicha fracción (52).

Nos proponemos ahora exponer el procedimiento general para deducir el valor que se oculta bajo esa forma indeterminada, y hacer ver, además, cómo pueden llevarse á ella todas las otras formas de la indeterminación.

(*) De esta proposición resulta, como propiedad geométrica, que *de todos los rectángulos de igual área, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.*

(**) Ha parecido oportuno ampliar esta nueva edición con la presente teoría, que es una de las aplicaciones analíticas de mayor importancia y más frecuente uso de las funciones derivadas. Por tal motivo, sin duda, figura en la mayoría de las obras de texto; pero puede, sin embargo, omitirse, si así se creyera conveniente.

Imaginemos que $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ se convierta en $\frac{0}{0}$ para $x = a$. Claro es que podrá ponerse

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$$

suponiendo que h tienda hacia cero.

Empleando la primera expresión hallada para el incremento funcional (277), se tendrá:

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim \frac{\varphi(a) + h[\varphi'(a) + \varepsilon]}{\psi(a) + h[\psi'(a) + \varepsilon_1]} = \lim \frac{\varphi'(a) + \varepsilon}{\psi'(a) + \varepsilon_1} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}\,;$$

pero como $\varphi'(a)$ y $\psi'(a)$ podrían reducirse también á cero, y habría que aplicar entonces á la fracción $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ el procedimiento seguido para la primera, se deduce en definitiva, que *el verdadero valor de una fracción cuyos términos se anulan al asignar á la variable un cierto valor determinado, es el cociente de las derivadas del mismo orden de sus términos, que sean las primeras que no se anulen simultáneamente por tal supuesto* (*).

Consideremos, por ejemplo, la fracción $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^m - a^m}{x - a}$, que para $x = a$ toma la forma $\frac{0}{0}$.

Se tiene desde luego

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = mx^{m-1} \quad \text{y, por lo tanto,} \quad \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = ma^{m-1};$$

valor verdadero que puede comprobarse efectuando la división y la substitución mencionada.

Análogamente: $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ se convierte en $\frac{0}{0}$ haciendo

(*) Conforme ya se vió en la discusión de las ecuaciones de primer grado, y según puede demostrarse como aplicación de la *fórmula de Taylor* extendida á las funciones de varias variables, de que nos ocuparemos muy en breve, cuando la relación de dos de éstas funciones se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$, para diversas hipótesis ó ecuaciones de condición en que entran dichas variables, tal forma, en general, es realmente indeterminada.

$x = 0$; pero derivando dos veces seguidas sus términos, resulta:

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{2x}; \qquad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{\cos x}{2};$$

y en su consecuencia,

$$\frac{\varphi(0)}{\psi(0)} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}. \text{ (*)}$$

La fracción $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{lx}{x-1}$, es á su vez $\frac{0}{0}$ para $x = 1$; y puesto que la relación de las primeras derivadas es

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{será} \quad \frac{\varphi(1)}{\psi(1)} = 1. \text{ (**)}$$

307. Relación de infinitos. Cuando al hacer $x = a$ se convierten en infinito los dos términos de la fracción propuesta, puede transformarse como sigue:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1 : \psi(x)}{1 : \varphi(x)};$$

(*) Observando que $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$, se podría obtener el mismo resultado trasladando la indeterminación á otra cuyo valor verdadero es ya conocido; pues la multiplicación y división simultáneas de un seno ó de una tangente por su arco, cuando éste tiende hacia cero, es un artificio que conduce á relaciones de forma indeterminada, equivalentes á la unidad.

(**) Debe observarse que para determinar los verdaderos valores de las fracciones

$$\frac{\sqrt[5]{2x-2}}{\sqrt{x}-4}; \quad \frac{x}{e^x-1}; \quad \frac{3x}{l(1-x)}; \quad \frac{x}{4\operatorname{tang} x};$$

todas las cuales se convierten en $\frac{0}{0}$, la primera por $x = 16$, y las demás por $x = 0$, basta obtener los cocientes de las dos primeras derivadas, que ordenadamente se reducen á

$$\frac{1}{5}; \quad 1; \; -3; \quad \frac{1}{4}.$$

Además de estos ejemplos, mencionados en la nota relativa á la transformación que consiste en hacer desaparecer los denominadores de los dos miembros de una ecuación, cuando éstos contienen las incógnitas y no son algebraicos racionales y enteros (**117**), se comprueba igualmente que, para $x = 0$, equivale á la unidad la relación $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, á que también se ha hecho referencia (**288**), así como $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$, en la misma hipótesis.

y bajo esta nueva forma se reduce á $\frac{0}{0}$ por igual supuesto. (*)

El verdadero valor de dicha fracción será, por consiguiente,

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = -\frac{\psi'(a)}{\psi^2(a)} : -\frac{\varphi'(a)}{\varphi^2(a)} = \left[\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right]^2 \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}; \text{ (**)}$$

y llamando A ese valor buscado

$$A = A^2 \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \quad \text{ó, bien,} \quad A = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

Se obtiene, de este modo, idéntico resultado que para la forma matriz de la indeterminación; pero como la demostración dada supone implícitamente que A no es cero ni infinito (**117**), debemos considerar tales casos por separado.

Si para $x = a$, el verdadero valor de la fracción fuese cero, el de

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + K = \frac{\varphi(x) + K\psi(x)}{\psi(x)}$$

debería ser la cantidad arbitraria K; luego se tendría:

$$K = \frac{\varphi'(a) + K\psi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} + K \quad \text{lo cual exige que} \quad \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = 0;$$

viéndose así, que la relación de las derivadas sigue representando el verdadero valor de la fracción.

Si, análogamente, fuese

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \infty \quad \text{sería} \quad \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} = 0$$

y entonces, según acaba de demostrarse para el supuesto anterior,

$$\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \infty.$$

El verdadero valor de la fracción cuyos términos se convierten en infinito, resulta ser en todos casos la relación de sus derivadas; pero esta consecuencia es puramente teórica para los valores finitos de x, porque á la función que se hace infinita, correspon-

---

(*) Cuando los términos de la fracción son á su vez fraccionarios, basta efectuar la división que la fracción general indica, y obtener la fracción equivalente de términos enteros.

(**) Para más sencillez, se pone en vez de $[\varphi(x)]^2$ la expresión $\varphi^2(x)$.

derá una variación, y, por consiguiente, una derivada también infinita, trasladándose sólo la dificultad á otra fracción análoga. Será, pues, preferible pasar á la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ · (*)

Sea, por ejemplo, la fracción

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{3\pi x}{2}}{\sec\frac{\pi x}{2}} \quad \text{que da} \quad \frac{\varphi(1)}{\psi(1)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Pasando, según hemos dicho, á la forma matriz $\frac{0}{0}$, se halla:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1 : \sec\frac{\pi x}{2}}{1 : \operatorname{tang}\frac{3\pi x}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\cot\frac{3\pi x}{2}}$$

y de esta transformada se deduce

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{-\frac{3\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi x}{2}} = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{3\pi x}{2}$$

obteniéndose, en su consecuencia, como verdadero valor de la fracción propuesta, para $x = 1$,

$$\frac{\varphi(1)}{\psi(1)} = \frac{\varphi'(1)}{\psi'(1)} = \frac{1}{3}.$$

(*) Debe observarse que aun en el caso de ser $x = \infty$, y carecer de sentido la incrementación de x en h, para suponer luego que este incremento tiende hacia cero, la relación de las derivadas equivale á la fracción propuesta. Se ve, en efecto, que haciendo transitoriamente $x = \frac{1}{y}$, será:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)};$$

y como la forma indeterminada corresponderá en esta última fracción á $y = 0$, y sus términos son funciones múltiples de y, su verdadero valor estará dado por el cociente

$$-\frac{1}{y^2}\varphi'\left(\frac{1}{y}\right) : -\frac{1}{y^2}\psi'\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi'\left(\frac{1}{y}\right) : \psi'\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

subsistiendo también entonces dicha propiedad; puesto que las derivadas con relación á $\frac{1}{y}$, que son las indicadas, serán las mismas que respecto á x.

La fracción $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\operatorname{tang} x}{l\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ se convierte también en $\frac{\infty}{\infty}$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

La relación de las primeras derivadas, después de efectuar la división, se reduce á

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos^2 x} \quad \text{de donde} \quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = -\frac{1}{2\cos x \operatorname{sen} x}$$

y como esta última fracción no es ya indeterminada, el valor verdadero de la propuesta será ahora $-\infty$.

Vemos, finalmente, que $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^m}{e^x}$ se hace $\frac{\infty}{\infty}$ para $x = \infty$; pero como la relación de las derivadas de orden $m^{ésimo}$ de sus dos términos es

$$\frac{\varphi^{(m)}(x)}{\psi^{(m)}(x)} = \frac{\underline{|m}}{e^x} \quad \text{resulta} \quad \frac{\varphi(\infty)}{\psi(\infty)} = 0.$$

Cuando las derivadas sucesivas de los términos de la fracción que se considera, son todas cero ó todas infinito, para $x = a$, conviene poner $a + h$ en lugar de x, y después de suprimir la potencia de h que pueda resultar como factor común á los dos términos, ó de emplear artificios adecuados, se hará $h = 0$, para obtener el verdadero valor de dicha fracción.

Así, por ejemplo, $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ toma la forma $\frac{0}{0}$ suponiendo $x = -1$; y las relaciones sucesivas de las derivadas de sus términos, se convierten en $\frac{\infty}{\infty}$ en la misma hipótesis.

Haciendo $x = -1 + h$, se tiene:

$$\frac{\varphi(h-1)}{\psi(h-1)} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{h(2-h)}} = \frac{h^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2-h}} = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2-h}};$$

y esta última fracción se anula evidentemente para $h = 0$. (*)

(*) La observación que precede, y aun más este ejemplo, parece que corresponden á la forma indeterminada anterior; pero su enlace con la que estamos considerando, obliga á darles este lugar.

Observaremos, por fin, respecto de la forma que nos ocupa, que si es resultado de hacer $x = \infty$, y esta variable no entra tan sólo como exponente ó como índice, ó bien afectada de signos transcendentes, lo más sencillo suele ser dividir los dos términos de la fracción por la mayor potencia de x que contengan, y suponer después $x = \infty$.

Si consideramos, por ejemplo, las fracciones

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{3x^2 + 5}, \quad \frac{x^2 - 4x + 7}{2x^3 - 1}, \quad \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \cos x},$$

que para $x = \infty$ adquieren la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, y se dividen sus términos respectivamente por x^2, x^3 y x, haciendo luego $x = \infty$, se ve que, por igual orden, vienen á ser $\frac{1}{3}$, 0 y 1. (*)

308. Producto y diferencia indeterminados. La forma $0 . \infty$, que para $x = a$ puede tomar un producto, se convierte en $\frac{0}{0}$, observando que

$$\varphi(x) . \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{1 : \psi(x)} .$$

Sea, por ejemplo, $\varphi(x) . \psi(x) = (1 - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2}$, que para $x = 1$ adquiere la forma $0 . \infty$. Se tiene evidentemente

$$(1 - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2} = \frac{1 - x}{\cot \frac{\pi x}{2}};$$

y hallando la relación de las primeras derivadas de los términos de esta última fracción, resulta:

$$-1 : -\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2} \qquad \text{de donde} \qquad \varphi(1) . \psi(1) = \frac{2}{\pi} .$$

(*) Las fracciones $\frac{\sqrt[5]{2x - 2}}{\sqrt{x - 4}}$ y $\frac{x}{e^x - 1}$, que son las dos primeras de las cuatro antes consideradas, con motivo de la nota referente á la operación, que permite quitar los denominadores de una ecuación, se convierten en $\frac{\infty}{\infty}$ al hacer $x = \infty$; pero dividiendo por $x^{\frac{1}{2}}$ los dos términos de la primera, y hallando la relación de las derivadas de los términos de la segunda, se ve que cero es el verdadero valor de ambas, en la expresada hipótesis.

La forma $\infty - \infty$ se reduce á su vez á $\frac{0}{0}$, del modo que sigue:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{1 : \varphi(x)} - \frac{1}{1 : \psi(x)} = \frac{1 : \psi(x) - 1 : \varphi(x)}{1 : \varphi(x) . \psi(x)}; \text{ (*)}$$

y también efectuando la substracción indicada, si el minuendo y el substraendo son fraccionarios.

Según esto, observamos que para $x = 0$, la diferencia

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{tang} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tang} x}{x \operatorname{tang} x}$$

afecta la forma $\infty - \infty$ en el primer miembro, y $\frac{0}{0}$ en el último.

La relación de las primeras derivadas de los términos de la fracción equivalente, es

$$\frac{1 - \sec^2 x}{\operatorname{tang} x + x \sec^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x \cos x + x};$$

y como todavía toma la forma indeterminada, pasaremos á las de segundo orden que dan

$$\frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1} = -\operatorname{tang} x;$$

siendo, por lo tanto, en este caso,

$$\varphi(0) - \psi(0) = 0.$$

Análogamente: para $x = 1$ se convierte en $\infty - \infty$ la diferencia

$$\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{1x} = \frac{x 1x - x + 1}{(x - 1) 1x};$$

la cual bajo esta última forma, y en esa hipótesis, se reduce á $\frac{0}{0}$.

Como la relación de las primeras derivadas es $\frac{x 1x}{x 1x + x - 1}$, y la de las segundas $\frac{1x + 1}{1x + 2}$, será, en definitiva, en tal supuesto,

$$\varphi(1) - \psi(1) = \frac{1}{2} .$$

(*) Conviene notar, que aun cuando se emplea á veces el signo de la división, con el fin de ocupar menos espacio en sentido vertical, como ya se ha hecho anteriormente, puede conservarse, sin embargo, la notación fraccionaria.

309. Formas potenciales de la indeterminación. Cuando para un cierto valor $x=a$, de la variable x, la función $y=\varphi(x)^{\psi(x)}$ toma cualquiera de las formas $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$, se ve desde luego que es aparentemente indeterminada; pues $\mathrm{l}y=\psi(x).\mathrm{l}\varphi(x)$, se convierte, en los tres casos, en $0.\infty$.

Presentándose el logaritmo bajo ese símbolo indeterminado, ya conocido, no sólo deducimos que ocurrirá otro tanto con las funciones de que procede, sino que el verdadero valor de cada una, será la base, *e*, del sistema neperiano, elevada al valor correspondiente de dicho logaritmo. (*)

Ocupándonos primero de la forma 1^{∞}, sea por ejemplo la expresión $y=(1+mx)^{\frac{1}{x}}$, que para $x=0$ adquiere dicha forma.

Tomando los logaritmos de ambos miembros, se tendrá:

$$\log y=\frac{1}{x}.\mathrm{l}(1+mx)=\frac{\mathrm{l}(1+mx)}{x};$$

y como esta fracción se reduce á $\frac{0}{0}$, en la misma hipótesis, y la relación de las primeras derivadas de sus términos es

$$\frac{m}{1+mx}=m \qquad \text{será} \qquad y=e^m$$

para cualquier valor numérico del coeficiente de x. (**)

Suponiendo también $x=0$, la función $y=\sqrt[x^2]{\cos x}=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, se convierte á su vez en 1^{∞}.

La aplicación de los logaritmos da:

$$\mathrm{l}y=\frac{1}{x^2}.\mathrm{l}\cos x=\frac{\mathrm{l}\cos x}{x^2};$$

y hallando las derivadas sucesivas de los términos de esta fracción, que toma la forma $\frac{0}{0}$ en igual supuesto, se tiene, para cociente de las de primer orden,

$$-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}:2x=-\frac{\operatorname{tang} x}{2x} \quad \text{y, para las de segundo,} \quad -\frac{1}{2\cos^2 x};$$

deduciéndose de esta última relación, que el verdadero valor del logaritmo será:

$$\mathrm{l}y=-\frac{1}{2} \qquad \text{y, por lo tanto,} \qquad y=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}. \; (*)$$

De un modo análogo, la función $y=\operatorname{tang} x^{\operatorname{tang} 2x}$, cuando $x=\frac{\pi}{4}$, se presenta bajo la forma 1^{∞}.

La expresión de su logaritmo es

$$\mathrm{l}y=\operatorname{tang}2x.\mathrm{l}\operatorname{tang}x=\frac{\mathrm{l}\operatorname{tang}x}{\cot 2x};$$

y el cociente de las primeras derivadas de los términos de esta fracción,

$$\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tang} x}:-\frac{2}{\operatorname{sen}^2 2x}=\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}:-\frac{2}{\operatorname{sen}^2 2x}=-\operatorname{sen} 2x;$$

luego, para $x=\frac{\pi}{4}$, se tendrá:

$$\mathrm{l}y=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1 \qquad \text{de donde} \qquad y=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

De la forma indeterminada 0^0, examinaremos los dos ejemplos que siguen.

La función $y=x^x$, al hacer $x=0$, adquiere dicha forma, y su logaritmo

$$\mathrm{l}y=x.\mathrm{l}x=\frac{\mathrm{l}x}{\frac{1}{x}}$$

se convierte en $\frac{\infty}{\infty}$ en la misma hipótesis.

(*) El logaritmo de la función puede tomarse en cualquier sistema; pero se elige el neperiano, por ser el natural desde el punto de vista algébrico, y el que conduce á derivadas más sencillas.

(**) De este modo resulta comprobado que, cuando α tiende hacia cero, se verifica la igualdad, $lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

(*) Aun cuando la relación de las primeras derivadas afecta todavía la forma $\frac{0}{0}$, para $x=0$, es fácil ver que equivale á $-\frac{1}{2}$; porque, en tal caso, se sabe que $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$ es igual á la unidad.

En tal concepto, la relación de las primeras derivadas de los términos de esta fracción, es

$$\frac{1}{x} : -\frac{1}{x^2} = -x \quad \text{y, por lo mismo,} \quad 1y = 0$$

siendo $y = 1$ el valor verdadero de la función propuesta.

Parecidamente, para $x = \infty$, la expresión $y = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{1x}}$, se convierte en 0^0.

Tomando los logaritmos, se tiene:

$$1y = \frac{1}{1x} . 1\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = -\frac{1(x^2-1)}{1x}$$

y la relación correspondiente de las derivadas de primer orden será:

$$-\frac{2x}{x^2-1} : \frac{1}{x} = -\frac{2x^2}{x^2-1} ;$$

fracción que, sin necesidad de pasar á las derivadas de segundo orden, vemos que se reduce á -2 para $x = \infty$. Resulta así

$$1y = -2 \quad \text{y, en su consecuencia,} \quad y = e^{-2} = \frac{1}{e^2} .$$

Respecto á la forma ∞^0, consideremos los siguientes ejemplos.

La función $y = (\tang x)^{\cos x}$, cuando se hace $x = \frac{\pi}{2}$, se presenta bajo dicha forma indeterminada.

Su logaritmo es

$$1y = \cos x . 1 \tang x = \frac{1 \tang x}{\sec x}$$

y, el cociente de las derivadas de primer orden de los términos de esta fracción,

$$\frac{\sec^2 x}{\tang x} : \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\tang x \operatorname{sen} x} ;$$

de modo que, para $x = \frac{\pi}{2}$, será:

$$1y = 0 \quad \text{y, por lo tanto,} \quad y = e^0 = 1 .$$

Sea, finalmente, la función $y = (1 + x)^{\frac{1}{1x}}$, que también se convierte en ∞^0 haciendo $x = \infty$.

Tomando los logaritmos se halla:

$$1y = \frac{1}{1x} . 1(1+x) = \frac{1(1+x)}{1x} ;$$

y como esta fracción adquiere la forma $\frac{\infty}{\infty}$, en la misma hipótesis, se obtiene para la relación de las primeras derivadas,

$$\frac{1}{1+x} : \frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} ;$$

y ya sea dividiendo por x sus dos términos, ó pasando á la relación de las derivadas de segundo orden, resulta que, para $x = \infty$, esta nueva fracción equivale á la unidad; de manera que

$$1y = 1 \quad \text{y, por consiguiente,} \quad y = e . \text{ (*)}$$

(*) Las dos últimas formas indeterminadas, de que hemos tratado, son recíprocas entre sí; pues de

$$y = \varphi(x)^{\psi(x)} \quad \text{se deduce} \quad \frac{1}{y} = \left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\psi(x)} .$$

Es digno también de notarse que el verdadero valor de las funciones que, suponiendo $x = a$, se presentan bajo una de las formas 0^0 é ∞^0, suele ser la unidad. Se ve, en efecto, que para ambas

$$1y = \frac{1\varphi(x)}{1 : \psi(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{de donde} \quad 1y = -\frac{\varphi'(a)\psi^2(a)}{\varphi(a)\psi'(a)} ;$$

y como, al hacer $x = a$, la relación de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, que son cero en el primer caso, y la de $\varphi(x)$ y $\frac{1}{\psi(x)}$, que son infinito en el segundo, debe ser la misma que la de sus derivadas respectivas, se deduce que el cociente de ambas relaciones será generalmente la unidad, resultando en su virtud $1y = \mp \psi(a) = 0$ y, por lo tanto, $y = e^0 = 1$.

Tan sólo cuando las relaciones citadas se conviertan á la vez en 0 ó en ∞, su cociente tendrá una de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$; y como estas últimas pueden ser en realidad infinito, su producto por $\mp \psi(a)$ se convertirá entonces en $1y = 0.\infty$, que á su vez es de forma indeterminada, siendo en general distinto de cero, y la función correspondiente distinta de la unidad.

En confirmación de cuanto decimos, es fácil ver que todas las particularidades que acaban de indicarse, ocurren en los segundos ejemplos propuestos, al tratar de cada una de las expresadas formas.

Ejercicios.

I. Hallar los verdaderos valores de las fracciones que siguen, cada una de las cuales se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$.

$$\frac{a^{x}-1}{x},\ \frac{\operatorname{tang} x}{x^2},\ \frac{\operatorname{tang} x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x},\ \frac{x^2}{\sqrt{\operatorname{sen} x}},\ \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2},\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x},$$

$$\frac{x^3}{1(1-x)},\ \frac{\sqrt{x}}{x},\ \frac{1a^{x}}{\operatorname{tang} x^2},\ \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3},\ \frac{1(1+x)}{x},\ \frac{x^{m}}{\operatorname{sen} x} \text{ cuando } m>0,$$

y $\frac{a^{x}-b^{x}}{x^{n}}$, en los tres casos de ser $n \gtreqless 1$, suponiendo en todas ellas $x=0$;

así como $x=1$ en $\frac{1-x^2}{1-x^3}$, $\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{x}}$, $\frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{1-x}}$, $\frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}}$ y $\frac{1x}{x^2-1}$.

II. Obtener los valores verdaderos de las expresiones siguientes:

$\frac{\cot \pi x}{\cot x}$, $\frac{x^{-3}}{\operatorname{cosec} x}$ y $\frac{1x}{\cot x}$, para $x=0$; $\frac{\sqrt{x}}{x}$, $\frac{x}{1(x^2-1)}$ y $\frac{1x}{x^3}$ siendo $x=\infty$;

que, en las hipótesis indicadas, afectan la forma $\frac{\infty}{\infty}$. (*)

III. Determinar los valores correspondientes á los productos

$x.1x$ para $x=0$; $\operatorname{tang} \frac{\pi x}{2} . 1\frac{1}{x}$ para $x=1$; $\left(1-\frac{2x}{\pi}\right) \operatorname{tang} x$ para $x=\frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{sen} x^{-2} 1x$, $\sqrt{\frac{1}{x}} \cot \frac{1}{x}$, $x\, 1\sqrt[x]{2}$, $x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$ y $2^{x} \operatorname{sen} \frac{a}{2^{x}}$, haciendo $x=\infty$;

todos los cuales se convierten en $0.\infty$.

IV. Deducir los valores respectivos de las diferencias de funciones

$\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}$ y $\cot x+1x$, siendo $x=0$; $\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}$, para $x=1$;

$\sec \frac{\pi x}{4}-\frac{1}{x^2-4}$ siendo $x=2$; $e^{x}+1\frac{1}{x}$ y $x-\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2x}$, para $x=\infty$;

que adquieren la forma $\infty-\infty$. (**)

(*) Tanto en esta forma indeterminada como en la precedente, la inversión de los términos de las fracciones, y las mismas hipótesis, dan nuevos ejercicios de idéntica forma.

(**) La inversión de los minuendos y substraendos en esta forma, y la consideración de los factores recíprocos en la anterior, permiten proponer ejercicios análogos.

V. Encontrar los verdaderos valores de las potencias que siguen:

$(1-x)^{\pm 1x}$, haciendo $x=0$; $\sqrt[x-1]{x}$ y $\left(\frac{x}{2-x}\right)^{\frac{1}{1x}}$, siendo $x=1$; $\sqrt[x-2]{3-x}$,

para $x=2$; $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tang} x}$ y $\operatorname{tang} \frac{x}{2}^{\sec x}$, para $x=\frac{\pi}{2}$; $\left(\sqrt[x]{3}\right)^{1x}$, siendo $x=\infty$;

todas las cuales toman la forma 1^{∞}. (*)

VI. Obtener los valores correspondientes á las potencias

$x^{\operatorname{sen} x}$, $(mx)^{nx}$ y $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tang} x}$, en la hipótesis de ser $x=0$; $(x-1)^{1x}$ para $x=1$;

$\cos x^{\cot x}$ y $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\operatorname{sen} 2x}$ siendo $x=\frac{\pi}{2}$; $\sqrt[x]{\frac{1}{x}}$ y $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{1x}}$ para $x=\infty$;

que se convierten en 0^0. (**)

VII. Despejar los verdaderos valores de las funciones potenciales

$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tang} x}$, $\left(\frac{a}{x^2}\right)^{x}$ y $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, siendo $x=0$; $(\operatorname{tang} x)^{\cos x}$ y $(\sec x)^{\cot x}$, para $x=\frac{\pi}{2}$;

$\sqrt[x]{x}$, $x^{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$, $\sqrt[x]{1x}$, $\sqrt[1x]{x}$, $(a+bx)^{\frac{1}{1x}}$, y $(x^2-2)^{\frac{1}{1x+1}}$, siendo $x=\infty$;

los cuales se ocultan todos bajo la forma ∞^0.

II.—Fórmulas generales para el desarrollo de las funciones.

310. Fórmula de Taylor para una función entera de una sola variable. Si en una función entera, de la variable x, tal como

$$f(x)=A_0 x^{m}+A_1 x^{m-1}+A_2 x^{m-2}+\cdots\cdots+A_{m-1} x+A_m$$

se reemplaza x por $x+h$, se hallará la función incrementada

$$f(x+h)=A_0 (x+h)^{m}+A_1 (x+h)^{m-1}+A_2 (x+h)^{m-2}+\cdots\cdots+$$
$$+A_{m-1}(x+h)+A_m ;$$

y desarrollando cada potencia según la formula del binomio, y ordenando con relación á h, se tendrá:

(*) En estos ejercicios pueden substituirse las bases por sus recíprocas.

(**) Invirtiendo, en estos ejercicios, las bases y los exponentes, se obtienen otros de la misma forma.

$$
\begin{array}{ll|l|l}
f(x+h) = & A_0 x^m + mA_0 x^{m-1} & h + m(m-1)A_0 x^{m-2} & \dfrac{h^2}{\underline{|2}} + \\
& + A_1 x^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} & + (m-1)(m-2)A_1 x^{m-3} & \\
& + A_2 x^{m-2} + (m-2)A_2 x^{m-3} & + (m-2)(m-3)A_2 x^{m-4} & \\
& \vdots \qquad \vdots & \vdots & \\
& + A_{m-1} x + A_{m-1} & & \\
& + A_m & & \\
\end{array}
$$

$$+ \cdots\cdots + \underline{|m}\, A_0 \frac{h^m}{\underline{|m}}.$$

Observando este desarrollo, vemos que la primera columna vertical, ó, sea, la parte independiente de h, es la función propuesta $f(x)$; que el coeficiente de h es la función derivada $f'(x)$; el polinomio escrito en la tercera columna, y que tiene por factor $\frac{h^2}{\underline{|2}}$, es la derivada segunda $f''(x)$, y así sucesivamente; luego la función incrementada podrá escribirse de este modo:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + f^{(m)}(x)\frac{h^m}{\underline{|m}}.$$

Tal es la expresión titulada *fórmula de Taylor*, del nombre de su inventor (*), y que proporciona el modo de obtener el incremento funcional, pasando el primer término del segundo miembro al primero.

311. Fórmula de Taylor para una función, no entera, de una sola variable. Cuando la función es entera, el desarrollo termina en la derivada del orden $m^{ésimo}$, según acaba de verse y como no podía menos de suceder; pues siendo dicha derivada una constante, las siguientes serían necesariamente iguales á cero.

Si se aplica la misma ley de formación á una función continua cualquiera, se obtiene una serie ilimitada; pero, de conformidad

(*) Brook Taylor fué, después de Newton, uno de los hombres más eminentes que produjo Inglaterra, á fines del siglo XVII. Se distinguió notablemente en los estudios filosóficos, en la legislación, en la física y en todas las ramas de las ciencias matemáticas; siendo además excelente músico y hábil pintor.

con lo que ya hemos dicho (**227**), será preciso examinar si esa serie es convergente, y si el resto, ó término complementario que le falta para que S_n sea igual á la función incrementada, tiene por límite cero.

Supongamos que $f(x)$ permanezca finita y continua, así como sus $n+1$ primeras derivadas, cuando x varíe de x_0 á $x_0 + h$.

Considerando el polinomio

$$f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}},$$

que es del grado n con relación á h, representemos por

$$\frac{h^{p+1}}{\underline{|n}\,(p+1)} R$$

la diferencia que exista entre $f(x_0 + h)$ y este polinomio, siendo R y p dos indeterminadas cuyos valores deben determinarse, de modo que la expresión anterior cumpla con la condición indicada. Se tendrá, por consiguiente,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}} + \frac{h^{p+1}}{\underline{|n}\,(p+1)} R.$$

Haciendo ahora $x_0 + h = x_1$, ó, bien, $h = x_1 - x_0$, y pasando todos los términos al primer miembro, se halla:

$$f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0)f'(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^2}{\underline{|2}} f''(x_0) - \cdots\cdots - \frac{(x_1 - x_0)^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^{p+1}}{\underline{|n}\,(p+1)} R = 0.$$

Si, en vez de x_0, se substituye la variable x en el primer miembro de esta igualdad, excepto en R que no es conocida, se obtendrá la función

$$\varphi(x) = f(x_1) - f(x) - (x_1 - x)f'(x) - \frac{(x_1 - x)^2}{\underline{|2}} f''(x) - \cdots\cdots - \frac{(x_1 - x)^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x) - \frac{(x_1 - x)^{p+1}}{\underline{|n}\,(p+1)} R$$

la cual se anulará seguramente para $x = x_0$; y como también se anula para $x = x_1$, y es una función continua para todos los valores comprendidos entre x_0 y x_1, su derivada,

$$\varphi'(x) = \frac{(x_1 - x)^p}{\underline{|n}} [R - (x_1 - x)^{n-p} f^{(n+1)}(x)], \text{(*)}$$

que es igualmente continua, deberá reducirse á cero por un cierto valor intermedio de x, tal como $x_0 + \theta h$ (**277**), lo cual exige que

$$R = h^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h),$$

resultando así el término complementario bajo la forma

$$\frac{h^{n+1}}{\underline{|n}\,(p+1)} (1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h);$$

expresión en la cual θ es un cierto número comprendido entre cero y la unidad, y p una cantidad de la que puede disponerse arbitrariamente. (**)

Resulta, pues, que,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}} +$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{\underline{|n}\,(p+1)} (1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h);$$

de suerte que si dicho término complementario tiene por límite cero cuando n tienda al infinito, y además todas las derivadas son finitas y continuas para los valores de la variable x, comprendidos entre x_0 y $x_0 + h$ (*), la función incrementada se desenvolverá en una serie indefinida, cuyos términos procederán como los del desarrollo de la función algebraica y entera; pudiendo asegurarse entonces que se tendrá:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{\underline{|2}} + f'''(x_0)\frac{h^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots$$

ó, sea, en forma abreviada,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{n=\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}}. \text{(**)}$$

La expresión general hallada para el término complementario, toma dos formas especiales que se emplean ordinariamente, y que son, para $p = n$,

$$\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h). \text{(***)}$$

(*) Debe observarse que, al hallar la derivada de $\varphi(x)$, los términos se destruyen dos á dos, subsistiendo tan sólo los dos últimos, en los que se ha sacado un factor común. Conviene también notar que R no depende sino de x_0 y de h, y que es, por lo tanto, independiente de x.

(**) Esta forma del resto, que comprende las dos que se emplean con más frecuencia, ha sido dada á conocer recientemente, por el profesor Eduardo Roche. Existe otra expresión muy notable del término complementario, debida al matemático inglés Mr. Schlömilch; debiendo observarse que todas ellas tienen por objeto facilitar la investigación de su límite cuando $n = \infty$, para lo cual, según sea la función, se prestan unas mejor que otras, presentándose á veces bastante dificultad en obtenerlo, por afectar dicho resto complementario la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

(*) Como se había supuesto que la función y las $n + 1$ primeras derivadas eran finitas y continuas, tendrán que serlo todas ellas, cuando sea $n = \infty$.

(**) Observando que $f^{(0)}(x)$, ó sea la derivada del orden cero de x, no puede ser sino la misma función $f(x)$, podría presentarse la fórmula de Taylor bajo la forma más sencilla y sintética

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}};$$

poniendo $n = m$ en vez de $n = \infty$, cuando la función sea entera y del grado $m^{ésimo}$.

Es digno también de notarse que, abstracción hecha del resto, el método ya conocido de los coeficientes indeterminados (**231**), permite encontrar la forma del desarrollo de Taylor.

Basta, en efecto, establecer la igualdad

$$\varphi(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \cdots\cdots + Kh^n + \cdots\cdots$$

y haciendo $h = 0$ en este desarrollo hipotético de la función incrementada y en sus derivadas sucesivas, tomadas con respecto á h, se obtienen las ecuaciones

$$\varphi(x) = A;\ \varphi'(x) = B;\ \varphi''(x) = 2C;\ \varphi'''(x) = 3.2.D;\ \ldots\ldots\ \varphi^{(n)}(x) = \underline{|n}.K$$

de las que se deducen los valores de cada uno de los coeficientes.

(***) Esta expresión del término complementario fué indicada por d'Alembert, y obtenida directamente por Lagrange. De ella resulta que si, para $x = x_0$, se anulan las n primeras derivadas, será:

$$f(x_0+h) - (f(x_0) = \frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

lo cual generaliza la segunda expresión del incremento funcional (**277**).

y, para $p=0$,

$$\frac{h^{n+1}}{\underline{|n}}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta h).\ (*)$$

312. Fórmula de Maclaurin para una función cualquiera. Si en la fórmula de Taylor, que acaba de obtenerse, se reemplaza x_0 por 0 y h por x (**), se halla:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+$$

$$+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{\underline{|n}}+\frac{x^{n+1}}{\underline{|n}(p+1)}(1-\theta)^{n-p}f^{(n+1)}(\theta x)$$

y como expresiones particulares del resto, ó término complementario,

$$\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{(n+1)}(\theta x)\quad \text{y}\quad \frac{x^{n+1}}{\underline{|n}}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x).$$

Cuando este resto tenga por límite cero, al crecer n ilimitadamente, y la función propuesta y todas sus derivadas sean finitas y continuas, para los valores de x desde cero hasta aquel que se considere (***), se tendrá:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{\underline{|2}}+f'''(0)\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$$

ó, abreviadamente,

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{n=\infty}f^{(n)}(0)\frac{x^n}{\underline{|n}}.$$

Esta expresión, llamada *fórmula de Maclaurin*, permite desarrollar una función cualquiera, en serie ordenada según las potencias crecientes de su variable, cuando cumple con las condiciones antes indicadas. (****)

(*) Forma hallada por Cauchy.

(**) Siendo h un incremento variable, puede muy bien representarse por x.

(***) A los valores x_0 y x_0+h, corresponden ahora 0 y x.

(****) Colín Maclaurin, ó Mac-Laurin, fué un célebre matemático escocés, contemporáneo de Newton, cuyos trabajos aclaró y adicionó con algunas proposiciones originales. La serie que lleva su nombre, la obtuvo directamente por el método de los coeficientes indeterminados, en forma parecida á lo dicho respecto á la serie de Taylor.

El matemático holandés, Burmann, ha encontrado una serie que desarrolla una función según las potencias ascendentes de otra función cualquiera de su variable, y que comprende, por lo tanto, como caso particular, la fórmula de Maclaurin.

313. Extensión de la fórmula de Taylor á una función de varias variables. Consideremos una función $f(x,y)$ de dos variables y demos á éstas los incrementos respectivos ht y kt. La función incrementada podrá considerarse entonces como una función de la variable t, que representaremos por $\varphi(t)$.

Aplicando á esta función la fórmula de Maclaurin, se tiene el desarrollo que sigue:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\varphi''(0)\frac{t^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+$$

$$+\varphi^{(n)}(0)\frac{t^n}{\underline{|n}}+\frac{t^{n+1}}{\underline{|n}(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\varphi^{(n+1)}(\theta x).$$

cuyos diversos coeficientes vamos á determinar.

Con tal objeto, notaremos que

$$\varphi(t)=f(x+ht,y+kt),$$

es una función de dos funciones $x+ht$ é $y+kt$, y que, por consiguiente, según el principio de las derivadas de las funciones compuestas (**297**),

$$\varphi'(t)=f'_{x+ht}h+f'_{y+kt}k.\ (*)$$

En virtud del mismo principio, será:

$$\varphi''(t)=f''_{(x+ht)^2}h^2+2f''_{(x+ht)(y+kt)}hk+f''_{(y+kt)^2}k^2;\ (**)$$

(*) En esta igualdad, $f'_{x+ht}h$ expresa la primera derivada de la función total tomada sólo con relación á $x+ht$, es decir, considerando como constante á $y+kt$, multiplicada por h, que es la derivada de $x+ht$ con respecto á t. El término $f'_{y+kt}k$, tiene una significación análoga.

(**) En esta expresión, $f''_{(x+ht)^2}h^2$ denota la segunda derivada de la función total, tomada dos veces consecutivas con relación á $x+ht$ y también multiplicada dos veces por la derivada de esta función, ó, sea, por h^2; y

$$f''_{(x+ht)(y+kt)}hk$$

expresa otra segunda derivada de la función de funciones, tomada una vez con respecto á la función $x+ht$ y otra con relación á $y+kt$, y multiplicada por el producto de las derivadas respectivas de estas últimas. La significación de $f''_{(y+kt)^2}k^2$, es parecida á la de $f''_{(x+ht)^2}h^2$.

pero si observamos que al tomar la derivada, con relación á t, de un término de la forma

$$Cf^{(\alpha+\beta)}_{(x+ht)^\alpha (y+kt)^\beta} h^\alpha k^\beta \,.\ (*)$$

se tiene, de conformidad con el repetido principio y con las notaciones convenidas,

$$C\left(f^{(\alpha+\beta+1)}_{(x+ht)^{\alpha+1}(y+kt)^\beta} h^{\alpha+1} k^\beta + f^{(\alpha+\beta+1)}_{(x+ht)^\alpha (y+kt)^{\beta+1}} h^\alpha k^{\beta+1}\right)$$

y que esta última expresión puede considerarse como el producto

$$Cf^{(\alpha+\beta)}_{(x+ht)^\alpha (y+kt)^\beta} h^\alpha k^\beta \left(f'_{x+ht} h + f'_{y+kt} h\right),$$

siempre que convengamos en sumar los índices superiores de la letra f, como si fueran exponentes, y en multiplicar sus subíndices, se deduce que la segunda derivada, antes obtenida, podrá ponerse bajo la forma

$$\varphi''(t) = \left(f'_{x+ht} h + f'_{y+kt} k\right)^2$$

y, en general,

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(f'_{x+ht} h + f'_{y+kt} k\right)^n ;$$

conviniendo, según hemos dicho, que al desarrollar la anterior potencia, se consideren los exponentes de f como números indicadores del orden de la derivación, y recíprocamente, y como factores sus subíndices, que denotan las veces que se ha derivado con respecto á cada una de las dos funciones $x+ht$ é $y+kt$. (**)

Haciendo, pues, $t=0$, se tendrá:

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(f'_x h + f'_y k\right)^n ;\ (***)$$

(*) En este término, C designa un factor numérico ó constante; α el número de veces que se ha derivado la función compuesta con respecto á $x+ht$; β las veces que se ha derivado con relación á $y+kt$; y, finalmente, $\alpha+\beta$ el orden total de la derivación.

(**) Debe observarse que, en los órdenes de derivación, cada acento equivale á una unidad, y que el convenio admitido, no es sino una ampliación de lo notado al tratar de las derivadas de las funciones de varias variables.

(***) Como al hacer $t=0$, la función $\varphi(t)=f(x+ht,\ y+kt)$ se convierte en $\varphi(0)=f(x,y)$, serán f'_x y f'_y las derivadas parciales de la función propuesta.

y como

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \left(f'_{x+ht} h + f'_{y+kt} k\right)^{n+1}$$

será, necesariamente,

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t) = \left(f'_{x+\theta ht} h + f'_{y+\theta kt} k\right)^{n+1}.$$

Substituyendo, ahora, estas expresiones en el desarrollo de $\varphi(t)$, se halla:

$$\varphi(t)=f(x,y)+\left(f'_x h+f'_y k\right)t+\left(f'_x h+f'_y k\right)^2 \frac{t^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\left(f'_x h+f'_y k\right)^n \frac{t^n}{\underline{|n}}+$$
$$+\frac{t^{n+1}}{\underline{|n}\,(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\left(f'_{x+\theta ht} h+f'_{y+\theta kt} k\right)^{n+1};$$

y si suponemos $t=1$, resulta:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+\left(f'_x k+f'_y k\right)+\frac{1}{\underline{|2}}\left(f'_x h+f'_y k\right)^2+\cdots\cdots+$$
$$+\frac{1}{\underline{|n}}\left(f'_x h+f'_y k\right)^n+\frac{1}{\underline{|n}\,(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\left(f'_{x+\theta h} h+f'_{y+\theta k} k\right)^{n+1};$$

ó, bien, en forma abreviada,

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{n=n}\frac{1}{\underline{|n}}\left(f'_x h+f'_y k\right)^n+$$
$$+\frac{1}{\underline{|n}\,(p+1)}(1-\theta)^{n-p}\left(f'_{x+\theta h} h+f'_{y+\theta k} k\right)^{n+1}.\ (*)$$

El término complementario, para los valores $p=n$ y $p=0$, toma las formas

$$\frac{1}{\underline{|n+1}}\left(f'_{x+\theta h} h+f'_{y+\theta k} k\right)^{n+1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\underline{|n}}(1-\theta)^n\left(f'_{x+\theta h} h+f'_{y+\theta k} k\right)^{n+1}$$

y cuando cualquiera de ellas tenga por límite cero, al tender n hacia el infinito, y se verifique además la condición de ser todas las derivadas parciales, finitas y continuas, se tendrá:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\underline{|n}}\left(f'_x h+f'_y k\right)^n$$

(*) Recordando, su procedencia, se ve que $f'_{x+\theta h}$ es la derivada parcial con relación á x, substituyendo en ella, no sólo $x+\theta h$, en vez de x, sino también $y+\theta k$ en lugar de y. La derivada $f'_{y+\theta k}$ tiene análoga significación.

que es la fórmula de Taylor generalizada, tal como nos proponíamos hallarla. (*)

Observando que la derivada de orden $n^{\acute{e}simo}$ de la función de dos variables, $f(x, y)$, puede ponerse bajo la forma $(f'_x + f'_y)^n$ (**) admitiendo los convenios establecidos respecto de los órdenes totales y parciales de derivación, y la manera de proceder en el desenvolvimiento de esa potencia, diremos que *satisfechas ciertas condiciones* (***), *la función incrementada de dos variables, es igual á la función propuesta, más la suma de los productos que se obtienen multiplicando los términos de las derivadas totales y sucesivas de dicha función, por las potencias de los incrementos de las variables, de igual grado que el orden de la derivación respecto de cada una de ellas, y dividiendo el conjunto de los que corresponden á cada derivada total, por la factorial del mismo orden* (****).

Procediendo, en el caso de más de dos variables, de un modo análogo, y haciendo parecidos convenios, llegaríamos á la igualdad:

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\lfloor n} (f'_x h + f'_y k + f'_z l + \cdots\cdots)^n,$$

siempre que (*****), además de la condición de que las derivadas sean finitas y continuas, el término complementario, cuya expresión es como sigue,

$$\frac{1}{\lfloor n\,(p+1)} (1-\theta)^{n-p} (f'_{x+\theta h} h + f'_{y+\theta k} k + f'_{z+\theta l} l + \cdots\cdots)^{n+1}$$

tenga por límite cero, al crecer n indefinidamente.

(*) El ingenioso procedimiento de generalización, que hemos empleado, y cuya idea fundamental consiste en dar á x é y los incrementos respectivos ht y kt, para luego hacer $t = 1$, es debido al fecundo genio de Cauchy.

(**) Esta expresión convencional, que acaba de hallarse, fué ideada por Leibnitz.

(***) Dichas condiciones, son las ya expresadas con relación á las derivadas parciales y al límite del resto.

(****) Si la función es entera y del grado m, el número de derivadas y el de los términos de la suma, á que se refiere este enunciado, serán finitos, sin que, en ese caso, tenga que cumplirse otra condición, para aceptar la forma limitada del desarrollo; puesto que, en tal hipótesis, todos los términos, en los que $n > m$, se reducirán á cero.

(*****) Estos desarrollos se obtendrán por medio de la fórmula de la potencia de un polinomio, con las modificaciones correspondientes á los convenios ya establecidos.

La enunciación de este resultado general es idéntica á la que corresponde á $f(x, y)$, sin más alteración que referirse á varias variables. (*)

Ejercicios.

I. Desarrollar las funciones incrementadas, correspondientes á las funciones enteras de una sola variable

$$x^3 + 3x^2 - 5x - 7\ ;\quad x^5 - 9\ ;\quad x^4 + x^2 + 1\ ;\quad x^m.$$

II. Obtener los desarrollos de las funciones incrementadas

$$\frac{1}{x+h}\ ;\quad \cos(x+h)\ ;\quad a^{x+h}.$$

III. Desarrollar las funciones

$$x^2 y^5\ ;\quad \operatorname{sen}(xy)\ ;\quad x^3 + y^3 + z^3\ ;$$

después de incrementar cada una de sus variables.

III.—Aplicaciones notables de la fórmula de Maclaurin.

314. Desarrollo de la función exponencial e^x. La fórmula de Maclaurin, que hemos dado á conocer (**312**) como medio de gene-

---

(*) Cuando se dice la *fórmula de Taylor generalizada*, no debe entenderse que el caso de varias variables independientes está incluído en el de una, sino al contrario; siendo fácil comprobarlo algorítmicamente, prescindiendo en la fórmula general de todas las variables excepto x, y observando que $(f'_x h)^n$ y $(f'_{x+\theta h} h)^{n+1}$ equivalen, respectivamente, á $h^n f^{(n)}(x)$ y $h^{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h)$.

La fórmula de Maclaurin, que es consecuencia de la de Taylor, puede también generalizarse, aun cuando con ciertas limitaciones.

Los resultados obtenidos, permiten ver, por último, que suelen ser realmente inderterminadas, las fracciones que adquieren la forma $\frac{0}{0}$ para más de una hipótesis.

Concretándonos al caso de dos variables, y suponiendo que $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ se convierta en $\frac{0}{0}$ al hacer $x = a$ é $y = b$, se tiene:

$$\frac{\varphi(x+h, y+k)}{\psi(x+h, y+k)} = \frac{\varphi(x,y) + (\varphi'_x h + \varphi'_y k) + \frac{1}{\lfloor 2}(\varphi'_x h + \varphi'_y k)^2 + \cdots\cdots}{\psi(x,y) + (\psi'_x h + \psi'_y k) + \frac{1}{\lfloor 2}(\psi'_x h + \psi'_y k)^2 + \cdots\cdots};$$

ralizar la fórmula de Taylor, origina por sí misma desarrollos y consecuencias de la mayor importancia en el análisis.

Si, refiriéndonos á la función $y = e^x$, recordamos que todas sus derivadas son iguales á esta misma función y que se reducen, por lo tanto, á la unidad, para $x = 0$, se halla el siguiente desarrollo complementado:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} e^{\theta x}.$$

Suponiendo primero que la variable x tenga un valor positivo y que, siendo p un cierto número entero mayor que x, demos á n un valor superior á p, el término complementario podrá ponerse bajo la forma

$$\frac{x^p}{\lfloor p} e^{\theta x} \frac{x^{n-p+1}}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(n+1)},$$

en la que se observa, desde luego, que el primer factor permanece constante cuando n aumenta indefinidamente; que el segundo es siempre menor que e^x ó e^p, y que el tercero, ó, sea, el producto de los $n - p + 1$ factores

$$\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p+2}, \ldots\ldots \frac{x}{n+1},$$

y dando á x é y los indicados valores y dividiendo por h los dos términos de la segunda fracción, resulta evidentemente

$$\frac{\varphi(a,b)}{\psi(a,b)} = \lim \frac{\varphi'_a + \varphi'_b \frac{k}{h}}{\psi'_a + \psi'_b \frac{k}{h}}$$

cuando h y k tiendan á anularse.

En tal concepto, y puesto que dichos incrementos son independientes uno de otro, y pueden aproximarse á cero siguiendo una ley cualquiera, la relación $\frac{k}{h}$ será por completo arbitraria, resultando de tal modo absolutamente indeterminado el límite que expresa el verdadero valor de la fracción, para $x = a$ é $y = b$; consecuencia que sólo cae en defecto, cuando se anulan también á un mismo tiempo, y en tales hipótesis, las derivadas parciales con respecto á x, ó con respecto á y.

Si se tratara de funciones de más variables, los dos términos de la fracción cuyo límite habría de obtenerse, dependerían de las relaciones arbitrarias $\frac{k}{h}, \frac{l}{h}, \ldots$. Tampoco debe olvidarse, que todas las formas indeterminadas se reducen en definitiva á la $\frac{0}{0}$, única á la cual acabamos de referirnos.

todos menores que $\frac{x}{p}$, es menor que $\left(\frac{x}{p}\right)^{n-p+1}$ y tiene por límite cero. Dicho término complementario tendrá, pues, ese mismo límite; y como además la serie que resulta al prescindir de él, y suponer que n crece sin limitación alguna, es convergente para cualquier valor de x, podrá establecerse la igualdad

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \cdots\cdots$$

Cuando x tenga un valor negativo $-x_1$, si se designa por p un número entero mayor que x_1, y damos á n un valor superior á p, el valor absoluto del término complementario será

$$\frac{x_1^p}{\lfloor p} e^{-\theta x_1} \frac{x_1^{n-p+1}}{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(n+1)}.$$

Al crecer n indefinidamente, el primer factor permanecerá constante, el segundo será menor que la unidad y el tercero tenderá á anularse; de suerte que el término complementario tendrá también entonces por límite cero.

La función e^x puede, pues, desarrollarse en la serie convergente antes establecida, para todos los valores de x, positivos y negativos. (*)

315. Desarrollo de las funciones circulares, seno y coseno. Operando de una manera análoga, se obtienen las dos series que siguen:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^7}{\lfloor 7} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

(*) Aunque ya habíamos obtenido el mismo desarrollo de e^x por otro procedimiento (**235**), la facilidad de deducirlo como aplicación de la fórmula de Maclaurin, y la conveniencia de demostrar que, cualquiera que sea el valor de x, tiene por límite cero la fracción $\frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1}$, que entra en la forma más generalmente usada del término complementario, nos ha movido á considerar de nuevo dicha función.

las cuales son convergentes para valores cualesquiera de x, y cuyos términos complementarios respectivos

$$\frac{x^{2n+1}}{\lfloor 2n+1}\cos(\theta x) \quad \text{y} \quad \frac{x^{2n}}{\lfloor 2n}\cos(\theta x)$$

tienen por límite cero. (*)

(*) Estas series fueron halladas directamente por Newton; pero Euler demostró su relación con la que acaba de obtenerse para e^x, determinando por su medio, como se indica á continuación, la forma general de los logaritmos de toda clase de números, y aun la fórmula de Moivre.

Si en el desarrollo en serie de la referida exponencial, se cambia x en $x\sqrt{-1}$, resulta:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x \quad \text{y, haciendo } x = \pi, \quad e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

Elevando á la $n^{ésima}$ potencia los dos miembros de esta última igualdad, y tomando después los logaritmos neperianos, se halla:

$$e^{n\pi\sqrt{-1}} = (-1)^n \quad \text{y} \quad \mathrm{l}(-1)^n = n\pi\sqrt{-1}.$$

Ahora bien: las formas generales de los números positivos y negativos son, respectivamente,

$$+a = a(-1)^{2k}; \qquad -a = a(-1)^{2k+1};$$

siendo k un número entero cualquiera, que puede ser también cero, luego:

$$\mathrm{l}(+a) = \mathrm{l}a + 2k\pi\sqrt{-1}\ ; \qquad \mathrm{l}(-a) = \mathrm{l}a + (2k+1)\pi\sqrt{-1}\ ;$$

deduciéndose así que *los números positivos tienen un logaritmo real y una infinidad de logaritmos imaginarios de la forma* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; *mientras que los logaritmos de los números negativos, son todos imaginarios de dicha forma.*

De la igualdad que da $e^{x\sqrt{-1}}$ se obtiene:

$$\mathrm{l}(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x) = x\sqrt{-1};$$

y recordando que la expresión modulada de un número imaginario es

$$p + q\sqrt{-1} = m(\cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)$$

siendo $m = \sqrt{p^2+q^2}$ y $\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{q}{p}$, se encuentra finalmente,

$$\mathrm{l}\left(p + q\sqrt{-1}\right) = \mathrm{l}m + \varphi\sqrt{-1}.$$

Como φ puede recibir una infinidad de valores, ninguno de los cuales es cero, este resultado manifiesta que *un número imaginario, de la forma* $p + q\sqrt{-1}$, *tiene una infinidad de logaritmos, todos imaginarios de igual forma, en los que la parte real es el logaritmo del módulo, y los valores del argumento el coeficiente de* $\sqrt{-1}$.

La potencia $m^{ésima}$ de la expresión de $e^{x\sqrt{-1}}$, y el cambio en la misma de x por mx, dan sucesivamente,

$$e^{mx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x)^m \quad \text{y} \quad e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1}\operatorname{sen} mx;$$

deduciéndose, por lo tanto,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\operatorname{sen} mx,$$

que es la fórmula de Moivre antes obtenida (**207**).

Es también digno de notarse, que las series que dan los desarrollos de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$, se obtienen una de otra por medio de la derivación (**298**); y que igualmente se deducen pasando en cada una á las funciones primitivas, sin más que observar que la constante general agregada á la función seno, ha de ser $\operatorname{sen} 0 = 0$, y la correspondiente al coseno, $\cos 0 = 1$.

De la primera de las mencionadas series, resulta asímismo que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene por límite la unidad, cuando x tiende hacia cero; y otro tanto sucede, en tal hipótesis, con la relación $\frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} : \cos x$.

316. Series logarítmicas. Consideremos la función

$$f(x) = \mathrm{l}(1+x)\ (*)$$

cuyas derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = (1+x)^{-1}$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = \lfloor 2\,(1+x)^{-3}$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\lfloor 3\,(1+x)^{-4}$$

....

....

siendo, por consiguiente,

$$\mathrm{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \mp \frac{x^n}{n} \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Prescindiendo del término complementario, se ve que el valor absoluto de la relación de los que ocupan los lugares $p+1$ y p es

$$r = \frac{x^{p+1}}{p+1} : \frac{x^p}{p} = \frac{p}{p+1}x = \left(1 - \frac{1}{p+1}\right)x,$$

(*) La función $\mathrm{l}x$ no puede desarrollarse en serie por la fórmula de Maclaurin, porque esa función y todas sus derivadas se convierten en ∞ para $x = 0$.

cuyo límite es precisamente x; de suerte que es indispensable para la convergencia, que el módulo de x no exceda á la unidad, cuando esta variable sea positiva, y que sea menor que la unidad, cuando suceda lo contrario.

Como consecuencia de esto, no habrá que considerar sino los referidos valores de x, en la investigación del límite de dicho término complementario, el cual puede ponerse bajo la forma

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

Así expresado, se ve que su límite es cero, cuando n crece indefinidamente y x tiene, según hemos dicho, un valor positivo inferior ó igual á la unidad; pero en el caso de asignarse á x valores negativos, el módulo de la fracción $\frac{x}{1+\theta x}$ podrá ser mayor que la unidad, y hay que recurrir entonces á la otra forma del resto, que es

$$\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad \text{ó, bien,} \quad \frac{x_1^{n+1}}{1-\theta x_1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x_1}\right)^n$$

suponiendo $x = -x_1$, y prescindiendo de los signos finales.

Como la fracción $\frac{1-\theta}{1-\theta x_1}$ es menor que la unidad, y el denominador $1-\theta x_1$ es mayor que $1-x_1$, se deduce desde luego que el valor absoluto del término complementario será menor que $\frac{x_1^{n+1}}{1-x_1}$, y tendrá por límite cero cuando n crezca indefinidamente; puesto que $x_1 < 1$.

La función considerada se desarrolla, por lo tanto, en serie convergente, para todos los valores de x comprendidos entre -1 y $+1$, siendo así:

$$1(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots \quad (*)$$

(*) La derivada de este desarrollo, da con igual radio de convergencia, el correspondiente á $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$.

Si en esta serie, que se denomina de Mercator (*), se hace $1+x=z$, de donde $x=z-1$, resulta la que sigue:

$$1z = z - 1 - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \cdots\cdots,$$

la cual permite calcular el logaritmo neperiano de un número positivo cualquiera, no superior á 2, en función del mismo número (**); propiedad de que no goza ningún otro sistema logarítmico, y que es uno de los motivos que justifica el nombre que éstos reciben de *logaritmos naturales*. (***)

Haciendo $x=-1$ en la serie que da $1(1+x)$, se halla:

$$10 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots\cdots,$$

y como $10 = -\infty$, se deduce que

$$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots;$$

quedando así justificada la divergencia de la serie armónica.

317. Cálculo de los logaritmos neperianos. De la serie que acabamos de establecer, se deducen otras que se utilizan para calcular los logaritmos neperianos, por medio de sus diferencias tabulares.

(*) El mismo año 1668, que el matemático alemán Nicolás Kauffman, vulgarmente llamado Mercator, daba á conocer esta serie en una obra impresa en Padua, la publicaba también, en otra impresa en Londres, el matemático inglés Juan Gregory, cuyo nombre le asignan algunos.

(**) El conocimiento de los logaritmos de los números comprendidos entre cero y la unidad, es en realidad suficiente para obtener el de un número cualquiera mayor que la unidad; pues se sabe que $1n = -1\frac{1}{n}$; es decir, que los logaritmos de los números inversos son iguales y de signos contrarios. Ocurre, sin embargo, que la serie es poco convergente; lo cual es un defecto de gran importancia en la práctica.

(***) Para obtener el logaritmo de $z = 1+x$, en el sistema de base a, sería preciso multiplicar $1z$ por el módulo correspondiente $\log_a e = \frac{1}{1a}$; viéndose así que el logaritmo de un número no se hallaría entonces en serie dependiente tan sólo de dicho número, sino que exigiría el conocimiento anterior del logaritmo de e, en el mismo sistema, ó el del logaritmo neperiano de a. Se llegaría á idéntica consecuencia, desarrollando directamente por la serie de Maclaurin la expresión $\log_a(1+x)$; quedando así comprobado, lo dicho al tratar de la base en la función logarítmica.

Sabemos, en efecto, que la diferencia entre los logaritmos de dos números enteros consecutivos, n y $n+1$, está dada por la expresión:

$$\Delta = \mathrm{l}(n+1) - \mathrm{l}n = \mathrm{l}\,\frac{n+1}{n} = \mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

de modo que si en la serie de Mercator, se reemplaza x por $\frac{1}{n}$, se tendrá:

$$\Delta = \mathrm{l}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots\cdots;$$

pero como esta serie no converge con bastante rapidez, sería preciso emplear muchos términos al emplearla, lo cual obligaría á hacer cálculos muy prolijos.

En la necesidad de hallar otra serie más convergente, combinaremos las dos que siguen:

$$\mathrm{l}(1+x) = +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

$$\mathrm{l}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\cdots$$

las cuales dan, restándolas término á término,

$$\mathrm{l}(1+x) - \mathrm{l}(1-x) = \mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots\right).$$

Si hacemos ahora

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{1}{2n+1}, \text{ (*)}$$

y reemplazamos x por su valor, se tendrá la serie:

$$\mathrm{l}(n+1) - \mathrm{l}n = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right], \text{ (**)}$$

(*) Este valor de x, que se deduce inmediatamente por medio de un principio de las igualdades fraccionarias, cumple con la condición de ser menor que la unidad.

(**) Comparando esta serie, debida al insigne Euler, con la antes obtenida, se ve desde luego que es más convergente que aquélla; pues los coeficientes numéricos de los denominadores son los números impares, en vez de la serie natural de los números, y las potencias sucesivas de n, están reemplazadas por las potencias impares de $2n+1$. La rapidez con que converge, tendremos ocasión de comprobarla al tratar de los logaritmos vulgares.

cuya convergencia será tanto más rápida cuanto mayor sea el número n, y por cuyo medio pueden calcularse los logaritmos neperianos de todos los números enteros, dando á n valores sucesivos, ó utilizando, á veces, ciertas relaciones ya conocidas.

Así, por ejemplo, si quiere determinarse $\mathrm{l}10$, haremos $n=1$, lo que permitirá calcular $\mathrm{l}2$, por ser $\mathrm{l}1=0$; duplicando este logaritmo obtendremos el de 4, puesto que $\mathrm{l}4=2\mathrm{l}2$; haciendo $n=4$, se hallará $\mathrm{l}5$; y sumando este último logaritmo con el de 2 se tendrá el de 10, porque $\mathrm{l}10=\mathrm{l}2+\mathrm{l}5$.

318. Cálculo de los logaritmos vulgares. El paso de uno á otro sistema exige el conocimiento del módulo que, en el caso presente, es $\frac{1}{\mathrm{l}10}$.

Suponiendo efectuados los cálculos para determinar $\mathrm{l}10$ con once cifras decimales exactas, se halla con diez dicho módulo, que designaremos por M, y cuyo valor aproximado, por defecto, es

$$M = 0{,}4342944819. \text{ (*)}$$

Multiplicando por M los dos miembros del último desarrollo, se tiene:

$$\log(n+1) - \log n = 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\cdots\right];$$

y vamos á demostrar que la convergencia de esta serie es tan rápida, que, á partir del número 10, bastan tres términos para tener seguridad de que el error cometido es menor que media unidad del noveno orden decimal; á contar de 100, no son necesarios sino dos para que el error no llegue á valer una unidad del duodécimo orden decimal; y, desde 1000, el sólo empleo del primer término de la serie, es suficiente para que el referido error sea inferior á una unidad decimal del décimo orden. (**)

(*) Una regla mnemotécnica, que puede facilitar el recuerdo de las cifras que forman este módulo, es: *un* 3 *entre dos* 4; *un* 29 *delante de dos* 4, y $8+1=9$. Su valor, que equivale á $\log e$, y el de su logaritmo vulgar, con siete decimales, aparecen en las tablas de Schrön al pie de todas las páginas pares de los logaritmos numéricos, y con veinte cifras en la introducción á dichas tablas.

(**) El ideal de la convergencia, en una serie, es no tener que emplear más que uno solo de sus términos.

Efectivamente: sabemos que representando por ε el error que resulta de prescindir en una serie, de todos los términos que siguen al $p^{ésimo}$, debe verificarse (**224**) que:

$$\varepsilon < u_{p+1} \frac{1}{1-k},$$

siendo u_{p+1} el primer término despreciado, y k una cantidad inferior á la unidad, y respecto de la cual sea siempre menor la relación de un término al que le precede, en la serie de los que se desechan.

Como en la serie considerada es, evidentemente,

$$u_{p+1} = \frac{2M}{(2p+1)(2n+1)^{2p+1}} \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

se tendrá:

$$\varepsilon < \frac{2M}{(2p+1)(2n+1)^{2p+1}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}} =$$

$$= \frac{2M}{(2p+1)(2n+1)^{2p-1}[(2n+1)^2-1]};$$

y, por lo tanto, con mayor razón,

$$\varepsilon < \frac{1}{2p(2n)^{2p+1}}. \ (*)$$

Haciendo, en esta expresión del límite del error, las substituciones y los cálculos siguientes:

$$n=10; \quad p=3; \quad \varepsilon < \frac{1}{6.20^7} = \frac{1}{768.10^7} < \frac{1}{2.10^9}$$

$$n=100; \quad p=2; \quad \varepsilon < \frac{1}{4.200^5} = \frac{1}{128.10^{10}} < \frac{1}{10^{12}}$$

$$n=1000; \quad p=1; \quad \varepsilon < \frac{1}{2.2000^3} = \frac{1}{16.10^9} < \frac{1}{10^{10}}$$

queda demostrado lo que quería comprobarse.

(*) Se prescinde de la unidad en $2p+1$ y $2n+1$; y se substituye, en lugar de $(2n+1)^2-1$, tan sólo $(2n)^2$, prescindiendo del término $4n$; todo lo cual disminuye el denominador y aumenta la fracción.

319. Límite del error de proporcionalidad en los logaritmos. Las series logarítmicas, que hemos deducido, permiten obtener un límite superior del error que se comete, tanto en el cálculo del logaritmo por medio del número, como en el problema inverso, al emplear como rigurosamente exacto el principio de que las diferencias de los números son proporcionales á las diferencias de sus logaritmos.

PROBLEMA DIRECTO. Sabemos que en las aplicaciones á este problema, de la proporcionalidad mencionada, se supone que los números exceden á 10^4, si se emplea la segunda parte de las tablas descritas, y que son mayores que 10^5, cuando puede hacerse uso de la tercera (**99** y **100**).

En tal concepto, si llamamos n la parte entera del número cuyo logaritmo quiere calcularse, d su parte decimal, l el logaritmo próximo menor, Δ la diferencia tabular y x la corrección que debe experimentar l, digimos que podían disponerse los números y sus logaritmos, por orden de magnitud, en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} n & n+d & n+1 \\ l & l+x & l+\Delta \end{array}$$

estableciendo la igualdad fraccionaria

$$\frac{1}{d} = \frac{\Delta}{x}, \qquad \text{de donde} \qquad x = d\Delta;$$

mas como

$$\frac{1}{d} > \frac{\Delta}{x} \ (\mathbf{93}), \qquad \text{de donde} \qquad x > d\Delta,$$

se deduce que, al hallar el logaritmo de $n+d$, se comete un error por defecto, cuyo límite vamos á determinar en la hipótesis de que los logaritmos y sus diferencias tabulares sean exactos; puesto que nuestro propósito no es otro que el estudio del error que procede de la proporcionalidad supuesta.

Ahora bien: se tienen las igualdades exactas,

$$d\Delta = d\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad x = \log(n+d) - \log n = \log\left(1+\frac{d}{n}\right);$$

luego designando por ε el exceso del verdadero valor de x sobre $d\Delta$, ó, sea, el error cometido, se tendrá:

$$\varepsilon = \log\left(1+\frac{d}{n}\right) - d\log\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

pero, en virtud de la primera serie antes obtenida (**316**), cuyos dos miembros podemos multiplicar por el módulo M, se verifica que

$$\log\left(1+\frac{d}{n}\right)<\frac{d}{n}M \quad \text{y} \quad \log\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)M, \ (*)$$

y, por lo tanto,

$$\varepsilon<\frac{d}{n}M-d\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)M \qquad \text{ó, bien,} \qquad \varepsilon<\frac{dM}{2n^2}.$$

Teniendo presente, por último, que $d<1$ y $M<\frac{1}{2}$, resulta:

$$\varepsilon<\frac{1}{4n^2};$$

así es que, según sea $n>10^4$ ó $n>10^5$, se tendrá:

$$\varepsilon<\frac{1}{4.10^8} \qquad \text{ó} \qquad \varepsilon<\frac{1}{4.10^{10}};$$

es decir, que el error cometido será menor que la cuarta parte de una unidad del octavo ó del décimo orden decimal, y que en general no afectará, por consiguiente, á la séptima ú octava cifra, que es, en cada caso, la última que se conserva. (**)

PROBLEMA INVERSO. Si suponemos, como siempre puede hacerse, que es 4 y algunas veces 5 (***), la característica del logaritmo cuyo número correspondiente se quiere determinar, y empleamos las mismas notaciones que en el problema directo, sin otra alteración que la de indicar d la diferencia entre el logaritmo propuesto y el próximo menor, y ser x el incremento que debe experimentar n para obtener el antilogaritmo pedido, tendremos, disponiendo las cantidades por orden de magnitud creciente,

$$\begin{array}{ccc} l & l+d & l+\Delta \\ n & n+x & n+1. \end{array}$$

(*) Ya que, en la serie indicada, los términos decrecen y son de signos contrarios, se tiene un valor mayor ó menor que la suma de toda ella, según que el último de los términos considerados, á partir del primero, sea positivo ó negativo.

(**) Esto justifica por completo lo indicado en el primero de los principios que sirven de fundamento el uso de las tablas de logaritmos (**99**, teor. I).

(***) Siempre que la mantisa sea inferior á la de los logaritmos de los números 108000 ó 108.

El principio de la proporcionalidad, supuesto exacto, daría:

$$\frac{\Delta}{d}=\frac{1}{x}, \quad \text{de donde} \quad x=\frac{d}{\Delta};$$

pero como

$$\frac{\Delta}{d}<\frac{1}{x} \quad \text{de donde} \quad x<\frac{d}{\Delta},$$

deducimos que al encontrar, según se explicó (**99**), el antilogaritmo de $l+d$, se comete un error, por exceso, cuyo límite vamos á determinar.

Para realizar este propósito, notaremos que se tiene exactamente:

$$d=\log(n+x)-\log n=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

y

$$\Delta=\log(n+1)-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

y, por lo tanto, dividiendo miembro á miembro,

$$\frac{d}{\Delta}=\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)};$$

luego si se observa que, en virtud de las series anteriormente halladas (**316** y **317**), se verifica que

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right)<M\frac{x}{n} \quad \text{y} \quad \log\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{2M}{2n+1}$$

será:

$$\frac{d}{\Delta}<\frac{M\frac{x}{n}}{\frac{2M}{2n+1}}=\frac{(2n+1)x}{2n}.$$

Designando por ε' el exceso de $\frac{d}{\Delta}$ sobre el verdadero valor de x, es decir el error cometido, se deduce, de conformidad con la última desigualdad,

$$\varepsilon'=\frac{d}{\Delta}-x<\frac{(2n+1)x}{2n}-x=\frac{x}{2n},$$

y, como $x<1$, con mayor razón se tendrá:

$$\varepsilon'<\frac{1}{2n}.$$

Partiendo de esta expresión, observaremos que, según sea la característica 4 ó 5, será $n > 10^4$ ó $n > 10^5$, y, por consecuencia,

$$\varepsilon' < \frac{1}{2.10^4} \quad \text{ó} \quad \varepsilon' < \frac{1}{2.10^5};$$

resultando así, que el error con el cual se obtiene, por exceso, el número correspondiente á un logaritmo dado, es menor que media unidad del cuarto ó del quinto orden decimal; y que, en tal virtud, no afecta al valor aproximado de $\frac{d}{\Delta}$, que se calcula tan sólo, según vimos, con una ó dos cifras decimales, á lo más. (*)

Ejercicios.

I. Desarrollar en serie, por la fórmula de Maclaurin, la función exponencial a^x y la logarítmica $\log(a+x)$, deduciendo de estos desarrollos las series que corresponden á e^x y á $l(1+x)$.

II. Desarrollar análogamente en serie, la función $(a+x)^m$.

III. Desarrollar la función $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

IV. Obtener, por la misma fórmula de Maclaurin, los desarrollos de las funciones circulares inversas *arc sen x* y *arc tang x*, y deducir, del último de éstos, la bella serie de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots \pm \frac{1}{2n+1} \mp \cdots\cdots \quad (**)$$

(*) Esto demuestra rigurosamente, lo que se indicó en el segundo de los principios fundamentales del uso de las tablas logarítmicas (**99**, teor. II).

(**) Conviene observar que los signos $+$ y $-$ de este desarrollo, corresponden, respectivamente, á los términos cuyos denominadores son de la forma 4 ± 1.

LIBRO VI

TEORÍA Y RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

CAPÍTULO PRIMERO

TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

I.—Propiedades fundamentales.

320. Ecuaciones literales y numéricas. Las transformaciones que tienen por objeto simplificar una ecuación, y que ya han sido explicadas (**117**), son independientes de su grado y aun del número de las incógnitas que contenga. Suponiendo, por tanto, que, después de hacer desaparecer los denominadores, se lleven todos los términos al primer miembro y que, una vez ordenados, se dividan por el coeficiente del primero, la ecuación racional y algebraica del grado m, respecto de la incógnita x, tomará la forma general más sencilla

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Cuando los coeficientes $A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$, sean cantidades literales, se tendrá una *ecuación literal* ó propiamente algebraica. En este caso, su resolución consistirá en obtener todas las funciones reales ó imaginarias de dichos coeficientes que, substituídas en vez de la incógnita, la verifiquen, según se vió en las ecuaciones de primero y de segundo grado; pero debe advertirse que en la actualidad no dispone el álgebra de procedimientos para resolver las ecuaciones literales de grado superior al cuarto, siendo ya indudable que, con los elementos algorítmicos de que hoy se dispone, no puede lograrse esa resolución. (*)

Si los referidos coeficientes, A_1, A_2,..... A_m, son numéricos, entonces se tiene una *ecuación numérica*, cuya resolución consiste en encontrar números ó expresiones numéricas que, substituídas en lugar de la incógnita, satisfagan la ecuación propuesta.

Aun limitado á tal objeto nuestro propósito, en esta parte del álgebra, hay que demostrar gran número de principios y de propiedades generales, que constituyen en su conjunto la *teoría general de las ecuaciones*.

321. Variaciones de una función racional y entera. Puesto que, en todos casos, la resolución de una ecuación, $f(x)=0$, queda reducida á determinar los valores de x capaces de anular la función que constituye su primer miembro, la cual suponemos algebraica racional y entera con respecto á dicha incógnita, nos ocuparemos primeramente de establecer algunas propiedades relativas á la variación de las funciones enteras.

TEOREMA I. *Una función, algebraica racional y entera, es continua para todos los valores de su variable.*

Esta propiedad, que es aquí de la mayor importancia, se ha demostrado antes (**175**), como consecuencia de la continuidad de la función potencial y de la función suma.

TEOREMA II. *Toda función entera, ordenada por las potencias decrecientes de su variable, toma el signo de su último término, para valores suficientemente pequeños de dicha variable.*

En efecto: si en la función

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\cdots\cdots+A_m$$

suponemos que x decrezca indefinidamente, todos los términos, á excepción del último, tendrán por límite cero; luego su suma

(*) Evaristo Galois, Nicolás Abel y, recientemente, el matemático alemán L. Wantzel, han demostrado que las ecuaciones generales de grado superior al cuarto, no pueden quedar satisfechas por funciones algebraicas de sus coeficientes. Jacobi, Hermite y el sabio profesor de la Universidad de Berlín, Leopoldo Kronecker, han resuelto las ecuaciones de quinto grado, sirviéndose de las *funciones elípticas*.

podrá ser tan pequeña como se quiera, y, por consiguiente, menor que A_m; de modo que, á partir de un cierto valor de x, el polinomio conservará el signo de este término.

Si el último término contuviera á la variable, sacando entonces factor común la potencia de x que lo multiplicase, y que sería la de menor grado, se demostraría de igual manera la proposición enunciada.

TEOREMA III. *Si una función entera se halla ordenada por las potencias decrecientes de su variable, y ésta crece suficientemente, la función llegará á conservar el signo de su primer término.*

Se ve, en efecto, que si en la función

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\cdots\cdots+A_m$$

sacamos x^m por factor común, se transforma en

$$f(x)=x^m\left[A_0+A_1\left(\frac{1}{x}\right)+A_2\left(\frac{1}{x}\right)^2+A_3\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots\cdots+A_m\left(\frac{1}{x}\right)^m\right];$$

pero la cantidad comprendida entre corchetes conservará, según el teorema anterior, el signo de A_0 cuando x crezca indefinidamente, puesto que entonces $\frac{1}{x}$ tiene por límite cero; luego el polinomio $f(x)$ conservará el signo de A_0x^m.

Se deduce de este teorema que cuando el grado sea par, la función tendrá, para valores de su variable suficientemente grandes en valor absoluto, el signo del coeficiente de su primer término; mientras que si el grado es impar, dicha función llegará á adquirir ese mismo signo, si los valores de x son positivos, y contrario al del primer coeficiente, si dichos valores son negativos y bastante grandes en valor absoluto.

Así: la función

$$x^4-3000x^3-185x^2-700x-11,$$

será constantemente positiva, á partir de un valor absoluto de x suficientemente grande, cualquiera que sea el signo de esa variable, y la función

$$y^5-90y^4+17y^2-1,$$

será siempre positiva á partir de valores positivos de y convenientemente grandes, y negativa para valores negativos que, en valor absoluto, sean de magnitud suficiente.

322. Proposiciones relativas al número de raíces de una ecuación. Antes de dar á conocer el principio en que se funda toda la teoría general de las ecuaciones, demostraremos la proposición que sigue.

LEMA. *Cuando en la función entera*

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \cdots\cdots + A_m$$

en la cual los coeficientes son cantidades dadas, reales ó imaginarias, el módulo de $f(x)$ *no se reduce á cero al atribuir á* x *un valor determinado* x_0, *real ó imaginario, podrá hallarse una cantidad* h, *real ó imaginaria, tal que el módulo de* $f(x_0+h)$ *sea inferior al módulo de* $f(x_0)$.

En efecto: si en la función propuesta substituímos en vez de x el valor x_0+h, y desarrollamos la función incrementada según la fórmula de Taylor, representando $f(x_0)$ y $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{\underline{|n}}$ respectivamente por C_0 y C_n, se tendrá:

$$f(x_0+h) = C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + \cdots\cdots + C_n h^n + \cdots\cdots + C_m h^m.$$

En este desarrollo C_0 no es cero, según la hipótesis, y, en cuanto á los coeficientes de las potencias de h, algunos podrán ser iguales á cero, pero no todos; porque desde luego C_m es igual al coeficiente A_0 (**285**); de modo que si C_n es el primer coeficiente de h distinto de cero, la fórmula precedente se convertirá, dividiendo los dos miembros por C_0, en

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 + \frac{C_n}{C_0} h^n + \frac{C_{n+1}}{C_0} h^{n+1} + \cdots\cdots + \frac{C_m}{C_0} h^m. \; (*)$$

Si representamos respectivamente por ρ y ω el módulo y el argumento desconocidos de la indeterminada h, y, en general, por

(*) Si, como ocurrirá generalmente, la primera derivada de $f(x)$ no se anula para $x = x_0$, será $n = 1$.

Z_p y α_p el módulo y argumento respectivos de $\dfrac{C_p}{C_0}$ (*), tendremos, modulando los coeficientes de h y las potencias de esta misma letra, que la igualdad anterior se convertirá en

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 + Z_n \rho^n \Big[\cos(n\omega + \alpha_n) + i \operatorname{sen}(n\omega + \alpha_n)\Big] + \cdots\cdots +$$
$$+ Z_m \rho^m \Big[\cos(m\omega + \alpha_m) + i \operatorname{sen}(m\omega + \alpha_m)\Big].$$

Podemos determinar ahora el argumento ω por la condición

$$n\omega + \alpha_n = \pi \qquad \text{de donde} \qquad \omega = \frac{\pi - \alpha_n}{n} = \omega';$$

y como entonces

$$\cos(n\omega + \alpha_n) = -1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(n\omega + \alpha_n) = 0$$

la igualdad precedente se transforma en

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)} = 1 - Z_n \rho^n + Z_{n+1} \rho^{n+1} \Big[\cos\{(n+1)\omega' + \alpha_{n+1}\} +$$
$$+ i \operatorname{sen}\{(n+1)\omega' + \alpha_{n+1}\}\Big] + \cdots\cdots +$$
$$+ Z_m \rho^m \Big[\cos(m\omega' + \alpha_m) + i \operatorname{sen}(m\omega' + \alpha_m)\Big].$$

Designando respectivamente por R y R_0 los módulos de $f(x_0+h)$ y $f(x_0)$, el módulo del primer miembro de esta igualdad será $\dfrac{R}{R_0}$; y como el del segundo es inferior, ó á lo más igual á la suma aritmética de los módulos de sus términos (**199**), se tendrá, suponiendo que ρ cumpla ya con la condición de hacer la diferencia $1 - Z_n \rho^n$ positiva,

$$\frac{R}{R_0} \leqq 1 - Z_n \rho^n + Z_{n+1} \rho^{n+1} + \cdots\cdots + Z_m \rho^m$$

ó, bien,

$$\frac{R}{R_0} \leqq 1 - Z_n \rho^n \left(1 - \frac{Z_{n+1}}{Z_n}\rho - \cdots\cdots - \frac{Z_m}{Z_n}\rho^{m-n}\right);$$

(*) No debe olvidarse que toda cantidad, real ó imaginaria, puede ponerse bajo la forma $r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, para valores convenientes del módulo r y del argumento φ (**194**).

pero la función entera en ρ, comprendida entre paréntesis, tiene por límite la unidad cuando ρ tiende hacia cero; luego conservará el signo positivo para todos los valores de ρ comprendidos entre cero y un cierto límite r; de modo que asignando á ρ un valor cualquiera ρ', superior á cero é inferior á la menor de las cantidades $\frac{1}{\sqrt[n]{Z_n}}$ y r, siendo así $h = \rho'(\cos\omega' + i \operatorname{sen}\omega')$, se verificará evidentemente que

$$\frac{R}{R_0} < 1, \quad \text{de donde} \quad R < R_0;$$

que es lo que se quería demostrar. (*)

Establecido el lema que precede, podemos enunciar y demostrar el siguiente principio.

Teorema I. *Toda ecuación algebraica, racional y entera, cuyos coeficientes son reales ó imaginarios, de la forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, tiene una raíz real ó imaginaria de la misma forma.* (**)

Si suponemos, en efecto, que x recibe toda la serie de valores posibles, reales é imaginarios, el módulo de $f(x)$, que es esencialmente positivo, no podrá disminuir más allá de cierto límite, y tendrá por lo tanto uno ó varios mínimos absolutos, ninguno de los cuales podrá corresponder á un valor infinito del módulo de x;

(*) En el caso, muy particular, de que todas las $m-1$ primeras derivadas de $f(x)$ se anulasen por el valor $x = x_0$, se hallaría desde luego,

$$\frac{R}{R_0} = 1 - Z^m \rho^m$$

relación á la cual podría aplicarse, aun más sencillamente, el mismo razonamiento empleado.

(**) Esta proposición, que algunos autores aceptan como un postulado, lo demostró por vez primera D'Alembert, siendo erróneamente atribuído á Cauchy. Tal aserto lo comprueba Gaus, en una memoria que publicó el año 1799, donde afirma que la demostración del teorema había sido dada por aquel renombrado matemático y publicista. Cauchy, que luego dió una nueva y notable demostración, nació en 1789; así es que sólo tenía diez años en dicha época.

Fundándose en la significación geométrica de las imaginarias y en la del cálculo de esas mismas expresiones, nuestro ilustre matemático D. José Echegaray, en su cátedra de la Escuela de Estudios Superiores del Ateneo, ha dado otra bella demostración original de este importante principio, la cual se distingue por su carácter esencialmente geométrico.

porque el módulo de $f(x)$ es infinito al mismo tiempo que el de x (*). Ahora bien, ese mínimo del módulo de $f(x)$, que por los menos existe, tiene que ser necesariamente cero (**); porque si tuviese un cierto valor R_0 y correspondiera al valor x_0 de x, se podría hallar, según el lema anterior, una cantidad h tal que

$$\operatorname{mod} f(x_0 + h) < R_0,$$

lo cual es contra la hipótesis.

Existe, pues, un valor de x, de módulo finito, y tal que

$$\operatorname{mod} f(x) = 0,$$

esto es, que anula á la función primer miembro, y que es, por consiguiente, raíz de la ecuación $f(x) = 0$. (***)

Teorema II. *Toda ecuación,* $f(x) = 0$, *cuyo primer miembro es una función entera, con coeficientes reales ó imaginarios, tiene tantas raíces como unidades su grado.*

En efecto: como la ecuación $f(x) = 0$ tiene por lo menos una

(*) La forma que toma la función sacando x^m factor común (**321**), y lo expuesto en la teoría de las expresiones imaginarias, permiten reconocer que, cuando el módulo de x tiende al infinito, el módulo de la función tiende también hacia el infinito.

(**) Inmediatamente veremos que la función $f(x)$ tiene m mínimos, todos iguales á cero.

(***) La existencia del mínimo ó mínimos absolutos, del módulo de la función $f(x)$, se demuestra gráficamente, imaginando que sobre un plano horizontal se den primero á x todos los valores desde $-\infty$ á $+\infty$, llevados sobre un eje elegido para contar las cantidades reales; así como después, y sucesivamente, los valores imaginarios que determinan los puntos de las diversas paralelas á ese eje, es decir, los que corresponden á un mismo valor del coeficiente variable de $\sqrt{-1}$ y á todos los de la parte real de x, creciendo continuamente desde $-\infty$ á $+\infty$. Si se toman los valores modulares respectivos de la función sobre perpendiculares al plano, en cada uno de aquellos puntos, vemos que, en virtud de la continuidad de la función imaginaria y de su módulo (**217**), se obtiene una serie de líneas continuas, cuyo lugar geométrico constituye una superficie indefinida, situada toda ella sobre el referido plano y que tenderá en todos sentidos hacia el infinito. Suponiendo ahora que el plano horizontal se mueve paralelamente á sí mismo, llegará un momento en que toque á dicha superficie por lo menos en un punto, que corresponderá así á un mínimo absoluto del módulo de $f(x)$.

De la demostración de que tal mínimo existe, se deduce, por el razonamiento del texto, que la superficie referida debe tener seguramente un punto de contacto con el plano horizontal; y, una vez demostrado el teorema que sigue, que tiene m puntos, y sólo m, bien sean múltiples ó diversos, que cumplen con la expresada condición.

raíz, que llamaremos a, el polinomio $f(x)$ será divisible por el binomio $x - a$ (**53**) (*); y llamando $f_1(x)$ al cociente, que será del grado $m - 1$, puesto que $f(x)$ es del grado m, se tendrá:

$$f(x) = (x - a) f_1(x);$$

pero según el teorema precedente, la ecuación $f_1(x) = 0$ tendrá, á su vez, una raíz b, y, por lo tanto, $f_1(x)$ será divisible por $x - b$; de modo que

$$f_1(x) = (x - b) f_2(x),$$

siendo el cociente, $f_2(x)$, del grado $m - 2$.

Este polinomio $f_2(x)$ admite también una raíz c, y será divisible por $x - c$ (**); luego

$$f_2(x) = (x - c) f_3(x),$$

siendo $f_3(x)$ del grado $m - 3$.

Continuando del mismo modo se llegará á una función, $f_{m-1}(x)$, de primer grado, que admitirá una raíz l, y tal que

$$f_{m-1}(x) = (x - l) A,$$

siendo ya A independiente de x.

Si se multiplica ahora la serie de igualdades establecidas y se suprimen factores comunes á los dos miembros de la igualdad resultante, se hallará:

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots\ldots (x - l) A = 0.$$

La forma que afecta, de este modo, la ecuación, pone de manifiesto que tiene m raíces, pero que no tiene mayor número de ellas; porque si se asigna á x un valor distinto de $a, b, c, \ldots\ldots l$, cada uno de los factores del producto será diferente de cero, y, por consiguiente, también lo será dicho producto.

COROLARIO. *Todo polinomio entero, del grado* m, *puede descomponerse en un producto de* m *factores de primero, de la forma* x — a, *y no puede descomponerse sino en un solo sistema de tales factores.*

(*) El teorema, allí demostrado, se ve sin dificultad que es independiente de que a sea real ó imaginaria.

(**) Se denominan abreviadamente raíces de un polinomio, las de la ecuación que se obtiene igualándolo á cero.

Se ve, efectivamente, que la primera parte de este corolario no es más que la traducción de la forma en que acaba de presentarse el polinomio $f(x)$. En cuanto á la segunda, observaremos que si dicho polinomio pudiera descomponerse en dos sistemas de factores de la forma indicada, se tendrían las dos igualdades:

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots\ldots (x - l) A$$
$$f(x) = (x - a')(x - b')(x - c') \ldots\ldots (x - l') A' \quad (*)$$

para valores cualesquiera de x. Dando entonces á x el valor a, el primer producto se anularía, y el segundo, que es igual, debería también reducirse á cero, luego sería necesario que alguno de sus factores se anulase, lo cual no podría suceder á menos que alguna de las cantidades $a', b', c', \ldots\ldots l'$ fuese igual á a; dividiendo por el factor binomio común, y razonando de la misma manera con los cocientes, se deduciría que otros dos factores binomios y todos ellos, por último, serían idénticos, así como A y A'. (**)

TEOREMA III. *Si una ecuación, con coeficientes reales, admite una raíz imaginaria, de la forma* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, *también admitirá su conjugada* $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Sabemos, en efecto, que si en vez de x se substituye en la función $f(x)$ el valor $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, se obtendrá una expresión $A + B\sqrt{-1}$, que, por hipótesis, debe ser igual á cero, y, por lo tanto, $A = 0$ y $B = 0$; pero si, en vez de x, ponemos $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, el resultado de la substitución será (**206**) $A - B\sqrt{-1} = 0$; luego $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ es también raíz de la ecuación $f(x) = 0$, según quería demostrarse.

Resulta como consecuencia que, en tal caso, el primer miembro $f(x)$ será divisible por

$$(x - \alpha - \beta\sqrt{-1})(x - \alpha + \beta\sqrt{-1}) = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

(*) Siendo la función del grado m, se comprende desde luego que el número de factores de primer grado no podrá diferir de m, cualquiera que sea la descomposición.

(**) Siendo A y A' los coeficientes de x^m en las dos descomposiciones, se ve, *à priori*, que tendrá que ser necesariamente $A = A'$.

COROLARIO. *Si el polinomio* f(x), *cuyos coeficientes son reales, admite raíces reales é imaginarias, puede descomponerse en factores reales de primero y de segundo grado.*

323. Relaciones entre las raíces de una ecuación y sus coeficientes. Entre las raíces de una ecuación y sus coeficientes, existen relaciones que conviene hacer explícitas.

Supongamos que el primer término de la ecuación, $f(x)=0$, tenga por coeficiente la unidad, es decir, que sea

$$f(x)=x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\cdots\cdots+A_m=0.$$

Designando sus m raíces por $a, b, c, \ldots\ldots l$, podrá escribirse bajo la forma

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)=0,$$

de modo que si se efectúa este producto habrá de reproducirse el polinomio $f(x)$; pero como el producto de m factores se obtiene tomando como factor un término en cada uno de ellos, de todos los modos posibles, resultará, haciendo uso de notaciones ya empleadas (**249**), que dicho polinomio se transformará en

$$f(x)=x^m-x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab-x^{m-3}\Sigma abc+\cdots\cdots\pm abc\ldots\ldots l,$$

é identificando deberá ser:

$$\Sigma a=-A_1,\quad \Sigma ab=A_2,\quad \Sigma abc=-A_3,\ldots\ldots,abc\ldots\ldots l=\pm A_m.$$

Estas igualdades expresan las relaciones que existen entre los coeficientes y las raíces, y pueden traducirse de la manera siguiente.

Cuando el primer miembro de la ecuación, f(x) = 0, *es una función entera de* x, *con coeficientes reales ó imaginarios, y el coeficiente del primer término es la unidad, se verifica: 1.°, la suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término tomado con signo contrario; 2.°, la suma de los productos de las raíces, tomadas dos á dos, es igual al coeficiente del tercer término;* 3.°, *la suma de los productos de las raíces, tres á tres, es igual al coeficiente del cuarto término, tomado con signo contrario; y así para todos los demás; siendo, finalmente, el producto de todas las raíces igual al último término, con su mismo signo ó con signo contrario, según que el grado de la ecuación sea par ó impar.* (*)

Ejercicios.

I. Demostrar que si $a+\sqrt{b}$ es raíz inconmensurable de una ecuación de coeficientes racionales, también lo será $a-\sqrt{b}$.

II. Substituir directamente, y por la fórmula de Taylor, el valor

$$x=3-2\sqrt{-1}$$

en la función

$$f(x)=x^4-4x^3+x^2-5x+7.$$

III. Determinar la suma de los productos ternarios y el producto total de las raíces, de la ecuación

$$2x^5-3x^4+x^3+6x^2-5x-18=0.$$

II.—Raíces iguales.

324. Factores y raíces múltiples. Hemos visto que toda función algebraica racional y entera, $f(x)$, puede descomponerse en un solo producto de factores de primer grado de la forma $x-a$, siendo a una raíz, real ó imaginaria, de la ecuación $f(x)=0$.

Ahora bien: es posible que entre las m raíces, $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, de dicha ecuación, haya varias iguales, de modo que si a y b lo fuesen, el polinomio $f(x)$ contendría el factor $(x-a)^2$, y se diría que a era una *raíz doble;* si las tres raíces a, b y c fueran iguales, dicho polinomio contendría el factor $(x-a)^3$, y a sería una *raíz triple*; y, en general, si entre las raíces $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, hubiese n iguales á a, entonces $f(x)$ contendría el factor $(x-a)^n$, diciéndose que a era una *raíz del* $n^{\text{ésimo}}$ *orden de multiplicidad,* ó, simplemente, de orden n.

Como la ecuación puede admitir raíces múltiples de diverso

(*) Estas relaciones, que suponen la ecuación completa, fueron descubiertas á mediados del siglo XVI por el matemático milanés Jerónimo Cardano, para las ecuaciones de los cuatro primeros grados, y establecidas más tarde, de un modo general, por Francisco Vieta.

grado, la función, $f(x)$, quedaría entonces descompuesta en factores del modo que sigue:

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots;$$

siendo $n+p+q+\ldots\ldots=m$.

Es evidente que las potencias $(x-a)^n$, $(x-b)^p, \ldots\ldots$ son *divisores ó factores compuestos* de $f(x)$; así como los de la forma $x-h$, se denominan *divisores ó factores primos algebraicos*, en analogía á lo que se llama divisor ó factor primo en aritmética; pues no hay ninguna expresión algebraica que sea divisor de $x-h$, sino ella misma y la unidad. (*)

325. Divisores comunes y condición de divisibilidad. Si dos polinomios enteros, funciones de una misma variable, tales como $f(x)$ y $\varphi(x)$, se consideran descompuestos en sus factores primos, podrá suceder que ambos contengan, ó no, uno mismo ó varios de esos factores, los cuales, en caso afirmativo, constituirán los *divisores comunes* á los dos polinomios.

Recordando ahora que dicha descomposición es única, aun cuando haya factores múltiples (**), y que en toda división el dividendo es el producto del divisor por el cociente, se deduce que *para que un polinomio entero divida á otro, es preciso y basta que no contenga factores primos distintos de los de ese otro, ni se hallen afectados de mayores exponentes que los que tienen en el polinomio dividendo.*

Así: si el polinomio de que se trata es

$$f(x) = A(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q \ldots\ldots,$$

todo divisor habrá de ser de la forma

$$A'(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma \ldots\ldots,$$

(*) Para justificar esta denominación, observemos que una expresión tal como $x-h$, no puede ser exactamente divisible por ninguna función de grado superior al primero; que, de las cantidades independientes de x, no puede dividirla sino la unidad, por ser igual á ella su primer coeficiente; y que verificándose, en toda división exacta, que el dividendo es también divisible por el cociente, dicha expresión $x-h$ no puede ser divisible por ningún divisor de primer grado diferente de ella misma; pues entonces lo sería, de igual modo, por una cantidad independiente de x, distinta de la unidad.

(**) La demostración antes dada (**322**), es independiente de que los factores de primer grado sean iguales ó distintos.

siempre que los exponentes α, β, $\gamma, \ldots\ldots$, no sean respectivamente mayores que n, p, $q, \ldots\ldots$

Dando, pues, á α todos los valores $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, á β los valores $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots p$, á γ los $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots q$, y así sucesivamente, se obtendrán todos los divisores del polinomio propuesto, $f(x)$, cuyo número será, por consiguiente,

$$(n+1)(p+1)(q+1)\ldots\ldots;$$

es decir un resultado idéntico al obtenido en la aritmética.

326. Máximo común divisor y raíces comunes á dos ecuaciones. *Se llama máximo común divisor algebraico de varios polinomios enteros, la función de mayor grado que divide exactamente á todos ellos.* Según esta definición y lo antes expuesto, vemos que *el máximo común divisor será igual al producto de los factores primos comunes, afectados cada uno del menor exponente* (*); pues si en el polinomio, ó función que así resulte, se aumentase algún exponente ó se añadiese algún factor primo, dejaría de ser divisor de todos los polinomios considerados. Resulta, de tal modo, que *todo divisor común de varios polinomios enteros es divisor de su máximo común divisor*; y que *los cocientes de dividir varios polinomios por su máximo común divisor, son primos entre sí.*

La manera de determinarlo, como consecuencia de su composición, supone el conocimiento de las raíces de las ecuaciones, que se obtendrían igualando á cero los polinomios propuestos; pero también se encuentra el máximo común divisor por medio de divisiones sucesivas, del modo que vamos á explicar.

Antes, sin embargo, de entrar en el detalle del procedimiento, que referiremos por ahora á dos polinomios ordenados con relación á las potencias decrecientes de una misma letra x, conviene hacer algunas observaciones.

Si los coeficientes de los polinomios, cuyo máximo común divisor trata de hallarse, son numéricos y tienen un máximo común divisor, d, éste será un factor numérico del máximo común

(*) Obsérvese que en el máximo común divisor entrarán también los factores primos comunes que sean independientes de la variable, si quieren tomarse en consideración.

divisor buscado, que se obtendrá, evidentemente, multiplicando por d el máximo común divisor de los polinomios resultantes de dividir cada uno de los propuestos por el máximo común divisor de sus coeficientes respectivos.

Cuando los coeficientes de la letra ordenatriz fuesen monomios literales, podría despojarse cada uno de los dos polinomios del máximo común divisor monomio de sus coeficientes (51), y multiplicar el de los polinomios cocientes por el máximo común divisor de dichos máximos comunes divisores.

Por último: en el caso de que los coeficientes de x sean también polinomios, como no varían las raíces de una ecuación dividiendo sus dos miembros por cualquier cantidad independiente de la incógnita, los factores funciones de x, del máximo común divisor pedido, no se alterarían dividiendo cada uno de los polinomios propuestos por el máximo común divisor de sus coeficientes; obteniéndose, el que se busca, multiplicando el máximo común divisor de los cocientes, por el de los citados máximos comunes divisores. (*)

Aunque no es completamente indispensable, vemos que puede suponerse, en todos casos, que los coeficientes de los polinomios son primos entre sí; porque, aun siendo polinomios, la investigación de su máximo común divisor conduciría á operar con polinomios de una letra menos y así sucesivamente; de modo que se llegaría á polinomios de coeficientes literales monomios, ó, por fin, de coeficientes numéricos, cuando sólo quedase una letra.

En tal supuesto, llamemos X y X_1 los polinomios propuestos, ordenados por las potencias decrecientes de x, y supongamos que el grado de X no sea menor que el de X_1. Dividamos X por X_1, y, llamando Q al cociente y X_2 al primer resto de menor grado que X_1, se tendrá:

$$X = X_1 Q + X_2.$$

Para demostrar que el máximo común divisor de X y X_1 es el mismo que el de X_1 y X_2, observemos que si $(x-a)^n$ es la

(*) Si unos coeficientes fueran monomios y otros polinomios, no podrían tener todos ellos más factores comunes que los que contuviesen los monomios.

mayor potencia de $x-a$, común á X y X_1, y la ponemos explícita en ambos polinomios, se verificará que

$$X = (x-a)^n X' \quad \text{y} \quad X_1 = (x-a)^n X'_1$$

luego

$$X_2 = X - X_1 Q = (x-a)^n (X' - X'_1 Q);$$

de suerte que el polimonio X_2 contendrá tambien el factor $(x-a)^n$, y todo factor común á X y X_1, lo será de X_1 y X_2. Como recíprocamente, todo factor binomio $(x-a)^n$ común á X_1 y X_2, lo es también de X, puesto que se tiene,

$$X = (x-a)^n (X'_1 Q + X'_2),$$

deducimos que siendo los factores primos comunes, los mismos y con igual exponente, el máximo común divisor de X y X_1 será idéntico al de X_1 y X_2. (*)

La cuestión queda así reducida á buscar el máximo común divisor de estos polinomios, para lo cual dividiremos X_1 por X_2 y se tendrá la igualdad:

$$X_1 = X_2 Q_1 + X_3,$$

en la que puede demostrarse análogamente que el máximo común divisor de X_1 y X_2 es el mismo que el de X_2 y X_3.

Si dividiendo estos dos últimos polinomios el resto es cero, X_3 será el máximo común divisor, y, en caso contrario, se continuará de igual manera hasta llegar á una división exacta.

Suponiendo, pues, que el máximo común divisor exista, puede enunciarse la siguiente regla: *para hallar el máximo común divisor de dos polinomios, funciones de* x, *se ordenan con respecto á las potencias descendentes de esa letra, se divide el de mayor grado por el otro* (**), *éste por el resto de la división, y así sucesivamente hasta llegar á un resto nulo. El último divisor será el máximo común divisor pedido.*

En esta serie de divisiones, los grados de los restos van siempre

(*) Debe notarse que lo dicho de X_2, que es el primer resto de menor grado que X_1, puede también decirse de cualquiera de los restos anteriores.

(**) Cuando los polinomios son de igual grado, puede tomarse uno cualquiera por dividendo.

disminuyendo, así es que se llegará de seguro á un resto cero, ó, por lo menos, á un resto independiente de x. En el primer caso, los dos polinomios tendrán un máximo común divisor algebraico, función de x, pero en el segundo no lo admiten, y serán primos entre sí; porque si tuviesen algún divisor que dependiese de x, éste debería dividir á todos los restos, y por lo tanto al último, que no contiene dicha letra.

Con objeto de evitar coeficientes fraccionarios, suelen multiplicarse todos los de cada dividendo por una cierta cantidad independiente de x, capaz de lograr ese propósito, bien en la división total de que se trate, bien en cada una de sus divisiones parciales (*); y, en cambio, para simplificar la operación, se suprimen los factores comunes que puedan tener los coeficientes de un resto, antes de pasarlo á divisor.

Estas modificaciones, que colocan al dividendo y al divisor de cada división en las mismas condiciones que los de la primera, no alteran el máximo común divisor; pues suponiendo que el primer dividendo se ha multiplicado en junto por A, y que en el resto hemos suprimido el factor B, se tendrá:

$$AX = X_1 Q + BX_2 ;$$

igualdad que manifiesta, en virtud de lo anteriormente demostrado, que el máximo común divisor de AX y X_1, es el mismo que el de X_1 y BX_2; pero como A es una cantidad prima con el polinomio X_1, cuyos coeficientes son primos entre sí, el máximo común divisor de AX y X_1 es el mismo que el de X y X_1, y, por un razonamiento parecido, el máximo común divisor de X_1 y BX_2 es el de X_1 y X_2; luego, en definitiva, el máximo común divisor de X y X_1 será el de X_1 y X_2. (*)

(*) La cantidad por la cual bastaría multiplicar un dividendo, para que todos los coeficientes del cociente resultasen enteros, sería una potencia del coeficiente del primer término del divisor, indicada por el mayor número posible de divisiones parciales, es decir, por la diferencia de los grados del dividendo y del divisor, aumentada en una unidad. La cantidad ó factor estrictamente necesario para realizar ese objeto, es sin embargo el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes del cociente; pero como éste no suele ser conocido, antes de efectuar la división, en la práctica se multiplica cada dividendo parcial, por el cociente de dividir el coeficiente del primer término del divisor, por su máximo común divisor con el del primer término de dicho dividendo, á fin de que éste venga luego á ser el mínimo común múltiplo de ambos. El efecto causado en el último residuo, es evidentemente el mismo que si se hubiera multiplicado el primer dividendo, por el producto de los factores sucesivamente introducidos.

Observando que, fundándose en la primera de las dos consecuencias deducidas de la composición del máximo común divisor de varios polinomios, y haciendo análogos razonamientas á los de la aritmética, se demuestra fácilmente que el máximo común divisor de varios polinomios no se altera reemplazando dos cualesquiera de ellos por su máximo común divisor, deducimos que la aplicación repetida del procedimiento explicado para dos polinomios, permitirá obtener el de cualquier número de ellos.

La determinación del máximo común divisor, se utiliza muy especialmente para obtener las raíces comunes que puedan tener dos ecuaciones, tales como

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = 0;$$

porque si contienen n raíces comunes, los dos polinomios $\varphi(x)$ y $f(x)$ admitirán también n factores comunes de primer grado, y tendrán, por lo tanto, un máximo común divisor del grado n, que será precisamente el producto de dichos factores; luego igualando á cero ese máximo común divisor, se hallará la ecuación que comprenda todas las raíces comunes á ambas ecuaciones. El número de raíces comunes será, pues, igual al grado de dicho máximo común divisor.

327. Caracteres de multiplicidad de las raíces. Como los procedimientos empleados para calcular ciertas raíces de las ecuaciones numéricas (**), exigen, según veremos, que estas ecuaciones no tengan raíces iguales, es preciso estudiar las dos cuestiones que siguen: 1.ª, *dada una ecuación, reconocer si tiene raíces iguales;* 2.ª, *descomponer una ecuación, que tenga raíces múltiples, en otras de grado inferior y cuyas raíces sean todas desiguales.*

(*) De los factores independientes de x, que pudieran entrar en el máximo común divisor, puede prescindirse, si, como ocurre en esta teoría, ha de igualarse después á cero dicho máximo común divisor.

(**) Las inconmensurables é imaginarias.

Ambas cuestiones se resuelven por medio de las siguientes proposiciones.

TEOREMA I. *Si un factor primo, ó de primer grado, entra con el exponente* n *en un polinomio entero, dicho factor llevará el exponente* n — 1 *en su derivada.*

En efecto: según la hipótesis, se verificará que dicho polinomio podrá ponerse bajo la forma

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x),$$

siendo $\varphi(x)$ otro polinomio que no contendrá ya el factor $x - a$. Tomando la derivada de los dos miembros de la igualdad anterior, y observando que el segundo es un producto, resulta:

$$f'(x) = n(x-a)^{n-1}\varphi(x) + (x-a)^n\varphi'(x) = (x-a)^{n-1}[n\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)];$$

pero el polinomio comprendido entre corchetes no es divisible por el factor mencionado; pues si se hace $x = a$ queda reducido á $n\varphi(a)$, que es una cantidad distinta de cero; luego $f'(x)$ es divisible por $(x - a)^{n-1}$, mas no por una potencia de mayor grado del binomio $x - a$.

COROLARIO 1.° *Una raíz simple* (*) *de la ecuación* f(x) = 0, *no anula á la derivada* f'(x); *una raíz doble lo es sencilla de la ecuación* f'(x) = 0, *pero no anula á* f''(x); *una raíz triple lo es doble de* f'(x) = 0 *y simple de* f''(x) = 0, *mas no anula á* f'''(x); *y, en general, una raíz del orden* n^ésimo^ *anula á las* n — 1 *primeras derivadas, pero no á la* n^ésima^.

COROLARIO 2.° *Si la cantidad* a *anula á* f(x) *y á sus* n — 1 *primeras derivadas, mas no á la del orden* n^ésimo^, *es una raíz de la ecuación* f(x) = 0, *del orden* n *de multiplicidad;* porque si el orden de multiplicidad de a fuese n', inferior á n, a no anularía á la derivada de orden n', que es á lo más igual á $n - 1$; y si n' fuese mayor que n, dicha raíz anularía á la derivada del orden n^ésimo^; todo lo cual es contra la hipótesis. (**)

(*) Se llama así toda raíz que no es múltiple.

(**) Estos caracteres distintivos de las raíces múltiples de una ecuación, fueron dados á conocer, á fines del siglo XVII, por el matemático holandés Juan Hudde.

TEOREMA II. *El máximo común divisor de un polinomio y de su derivada, es el producto de los factores primos del primero, disminuídos sus exponentes en una unidad.*

Si suponemos, en efecto, descompuesto el polinomio dado en sus factores primos, se tendrá:

$$f(x) = A(x - a)^n(x - b)^p(x - c)^q \ldots\ldots;$$

pero, en virtud del anterior teorema, los binomios

$$x - a, \quad x - b, \quad x - c, \ldots\ldots$$

entrarán en la derivada, $f'(x)$, con los exponentes respectivos $n - 1$, $p - 1$, $q - 1$, ... y, por lo tanto, el producto de los factores primos comunes á ambos polinomios, ó, bien, su máximo común divisor, será:

$$(x - a)^{n-1}(x - b)^{p-1}(x - c)^{q-1} \ldots\ldots;$$

que es lo que quería demostrarse.

COROLARIO. *Una ecuación,* f(x) = 0, *cuyo primer miembro es primo con su derivada, carece de raíces iguales; y las tiene, por el contrario, cuando entre* f(x) *y* f'(x) *existe un máximo común divisor función de* x.

328. Descomposición de una ecuación que tiene raíces iguales. Los dos teoremas anteriores permiten reducir la resolución de una ecuación que contiene raíces múltiples, á la de otras de grado inferior, que no las tengan.

Consideremos la ecuación $\varphi(x) = 0$, y concibamos descompuesto su primer miembro en los factores correspondientes á sus raíces. Sean X_1, X_2, X_3, X_4,... los productos de los factores binomios de cada grado de multiplicidad, pero tomado cada uno una sola vez, á saber: X_1 el producto de los factores simples; X_2 el producto de los factores pertenecientes á las raíces dobles; X_3 el que corresponde á las raíces triples, y así sucesivamente; de modo que se tendrá:

$$\varphi(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 \ldots\ldots$$

El máximo común divisor de $\varphi(x)$ y de su derivada será, por consiguiente,

$$D_1 = X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots\ldots,$$

y el de D_1 y su derivada, será, á su vez,

$$D_2 = X_3 X_4^2 \ldots,$$

estando expresado el que exista entre D_2 y su derivada respectiva, por

$$D_3 = X_4 \ldots\ldots$$

Si, para fijar las ideas, suponemos que la ecuación no admite raíces cuyo grado de multiplicidad sea superior al cuarto, D_3 no tendrá ya factores comunes con su derivada; bien entendido que siempre se puede continuar operando, como acaba de indicarse, hasta llegar á un máximo común divisor primo con su derivada.

Sentado esto, dividamos miembro á miembro cada una de las igualdades halladas, por la siguiente, y resultará:

$$\frac{\varphi(x)}{D_1} = Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4; \quad \frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_2 X_3 X_4; \quad \frac{D_2}{D_3} = Q_3 X = X_3 X_4; \quad D_3 = X_4;$$

y, dividiendo de nuevo cada uno de estos cocientes por el que le sigue, se tendrá, por último:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1; \quad \frac{Q_2}{Q_3} = X_2; \quad \frac{Q_3}{D_3} = X_3; \quad D_3 = X_4.$$

Vemos, pues, que por medio de una serie de máximos comunes divisores y de dos series de divisiones, se obtienen los polinomios X_1, X_2, X_3 y X_4 que, igualades á cero, forman las ecuaciones

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = 0; \quad X_4 = 0;$$

las cuales no tienen ya raíces múltiples, y comprenden, agrupadas, todas las de la ecuación propuesta cuyo grado de multiplicidad es el mismo que expresa su número de orden. (*)

(*) Cuando la ecuación considerada carezca de raíces de un cierto orden de multiplicidad, la ecuación correspondiente á las raíces de aquel orden, quedará reducida á la unidad ó á un número igualado á cero, y será, por lo tanto, absurda.

Se ve igualmente que cuando alguna raíz sea única en su orden ó grado de multiplicidad, deberá ser racional, si lo son también los coeficientes de la ecuación propuesta; porque la ecuación parcial de que dependerá, será entonces de primer grado, con coeficientes racionales.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\varphi(x) = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

Hallando el máximo común divisor entre $\varphi(x)$ y $\varphi'(x)$ se obtiene el polinomio

$$D_1 = x^3 - x^2 - x + 1;$$

y buscando el máximo común divisor de D_1 y su derivada, se encuentra análogamente,

$$D_2 = x - 1.$$

Como este polinomio es primo, se deduce que la ecuación propuesta no admite raíces de un orden de multiplicidad superior al tercero, y puede escribirse

$$\varphi(x) = X_1 X_2^2 X_3^3.$$

Si se efectúan ahora las divisiones, indicadas en el procedimiento, resulta:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varphi(x)}{D_1} = x^4 + x^3 - x - 1 \\ Q_2 &= \frac{D_1}{D_2} = x^2 - 1 \\ D_2 &= x - 1 \end{aligned}\right\} \text{ y } \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{Q_1}{Q_2} = x^2 + x + 1 \\ X_2 &= \frac{Q_2}{D_2} = x + 1 \\ X_3 &= D_2 = x - 1 \end{aligned}\right.$$

y como resolviendo las ecuaciones

$$x^2 + x + 1 = 0; \quad x + 1 = 0; \quad x - 1 = 0;$$

se halla:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}; \quad x = -1; \quad x = 1;$$

deducimos, finalmente, que la ecuación propuesta tiene dos raíces simples, que son imaginarias conjugadas, una raíz doble, igual á -1, y otra triple, igual á $+1$.

Ejercicios.

I. Hallar todos los divisores de la función

$$\varphi(x) = (x-1)^3 (x+3)^2 (x-7)$$

y fijar *à priori* su número.

II. Obtener el máximo común divisor de los sistemas de polinomios siguientes:

$$x^4 - 16x^3 + 93x^2 - 234x + 216 \quad \text{y} \quad 4x^3 - 48x^2 + 186x - 234\,;$$

$$x^4 + 67x^2 + 66 \quad \text{y} \quad x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1\,; \quad 5x^3 - 18x^2y + 11xy^2 - 6y^3$$

$$\text{y} \quad 7x^2 - 23xy + 6y^2\,; \quad 7x^4 - 10ax^3 + 3a^2x^2 - 4a^3x + 4a^4$$

$$\text{y} \quad 8x^4 - 13ax^3 + 5a^2x^2 - 3a^2x + 3a^4\,; \quad x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18\,,$$

$$4x^3 - 27x^2 + 53x - 39 \quad \text{y} \quad x^3 - 8x^2 + 19x - 12.$$

III. Determinar las raíces comunes á las ecuaciones

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 8 \quad \text{y} \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$$

IV. Deducir el grado de multiplicidad, correspondiente á cada una de las raíces, 5 y -1, en las ecuaciones respectivas,

$$x^6 - 10x^5 + 23x^4 + 20x^3 - 49x^2 - 10x + 25 = 0.$$

$$\text{y} \quad x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2 = 0.$$

V. Averiguar si tienen raíces iguales las ecuaciones que siguen, y, en este caso, descomponerlas en otras que sólo tengan raíces sencillas.

$$x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 21x + 8 = 0\,; \quad x^5 + 4x^4 - 28x^3 - 78x^2 + 195x + 50 = 0\,;$$

$$x^6 - 24x^4 + 32x^3 + 144x^2 - 384x + 256 = 0\,;$$

$$x^7 - 12x^5 - 2x^4 + 39x^3 - 6x^2 - 44x + 24 = 0.$$

III.—Proposiciones relativas á los números de raíces reales é imaginarias de una ecuación.

329. Caracteres que revelan la existencia de raíces reales. Muchas veces es preciso saber si entre dos cantidades dadas hay comprendidas, ó no, raíces reales de una ecuación, ó, al menos, si ésta contiene esa clase de raíces. Para conseguirlo, se emplean generalmente los principios que siguen.

TEOREMA I. *Cuando dos cantidades substituídas en el primer miembro de una ecuación,* $f(x) = 0$, *dan resultados de signos contrarios, esta ecuación tiene una ó un número impar de raíces reales, comprendidas entre dichas cantidades.*

Este teorema es consecuencia inmediata de la continuidad de la función algebraica racional y entera, que implícitamente supone-

mos forma el primer miembro de la ecuación; pues siendo $x_0 < x_1$, y

$$f(x_0) < 0 \quad \text{y} \quad f(x_1) > 0, \text{(*)}$$

es evidente que si x crece de una manera continua, desde x_0 hasta x_1, la función $f(x)$ variará también de una manera continua, pasando de negativa á positiva, y, como permanece finita, deberá reducirse á cero una ó un número impar de veces; deduciéndose, por lo tanto, que entre x_0 y x_1 habrá comprendidas una ó un número impar de raíces de la ecuación considerada.

La proposición se justifica con igual facilidad, por medio de la representación gráfica de las funciones (fig. 17). (**)

TEOREMA II. *Toda ecuación de grado impar, con coeficientes reales, tiene una ó un número impar de raíces de signo contrario á su último término.*

Suponiendo, para fijar las ideas, que el último término de la ecuación $f(x) = 0$ sea negativo, siendo siempre positivo su primer coeficiente, se ve que la substitución de cero en lugar de la incógnita dará un resultado negativo, y como, á partir de un valor positivo de x suficientemente grande, el primer miembro será constantemente positivo (**321**), habrá entonces una ó un número impar de raíces positivas.

Si el último término es positivo, el resultado de substituir cero será ese mismo término positivo, y como, para valores negativos de x bastante grandes en valor absoluto, el primer miembro de la ecuación será constantemente negativo, deducimos análogamente que, en este caso, existirán una ó un número impar de raíces negativas.

El teorema queda así demostrado; pero es más sencillo obser-

(*) No debe creerse que el número menor ha de ser precisamente el que dé resultado negativo. En la función $f(x) = x^2 - 8x + 15$ se tiene: $f(1) > 0$ y $f(4) < 0$.

(**) Para evitar dudas respecto á la representación geométrica de la función primer miembro, y al número de raíces comprendidas, conviene advertir, de una manera general, que un punto de intersección de una recta con otra línea, equivale á uno ó un número impar de puntos comunes reunidos en uno solo; mientras que el de tangencia de la recta y la curva, corresponde á dos ó un número par de puntos que en uno solo se confunden.

La proposición también se verifica, en toda ecuación cuyo primer miembro sea una función finita y continua entre las cantidades consideradas.

var que, en la hipótesis de ser impar el grado de la ecuación, se tiene $f(\pm\infty) = \pm\infty$ (*), y que, según sea el último término negativo ó positivo, será $f(0) \lesseqgtr 0$.

El número total de raíces reales se ve también así que es impar, como no podía menos de suceder, puesto que el número de raíces imaginarias debe ser siempre par; luego el número de raíces, del mismo signo que su último término, que puede tener una ecuación de grado impar, será necesariamente par.

Teorema III. *Toda ecuación de grado par, con coeficientes reales y cuyo último término es negativo, tiene al menos dos raíces reales, una positiva y otra negativa; y, si tiene más, las positivas y las negativas son en número impar.*

Se ve, en efecto, que $f(0) < 0$; y como ahora, por ser par el grado de la ecuación, $f(\pm\infty) = \infty$, se deduce que entre 0 y $+\infty$ habrá una ó un número impar de raíces comprendidas, y que lo mismo sucederá entre 0 y $-\infty$.

Cuando la ecuación es de grado par y su último término positivo, no puede asegurarse si admitirá, ó no, raíces reales; porque en este caso la funcion, $f(x)$, es positiva para $x = 0$ y para $x = \pm\infty$, de modo que no cambia de signo en estos valores extremos.

Teorema IV. *Dos cantidades,* x_0 *y* x_1, *substituídas en lugar de* x *en el primer miembro de una ecuación,* $f(x) = 0$, *dan resultados del mismo signo ó de signos contrarios, según que comprendan un número par ó impar de raíces reales de dicha ecuación.* (**)

Sean $a, b, c, \ldots\ldots k$, las raíces comprendidas entre x_0 y x_1. El polinomio $f(x)$ será divisible por el producto de los factores binomios correspondientes á esas raíces; así es que, designando por $\varphi(x)$ el cociente, se tendrá:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k)\varphi(x);$$

y reemplazando x sucesivamente por x_0 y x_1, resulta:

$$f(x_0) = (x_0-a)(x_0-b)\ldots\ldots(x_0-k)\varphi(x_0)$$
$$f(x_1) = (x_1-a)(x_1-b)\ldots\ldots(x_1-k)\varphi(x_1).$$

(*) Basta sacar como factor, en el primer miembro, la mayor potencia de x y hacer después $x = \pm\infty$.

(**) Claro es que si no comprendiesen ninguna raíz, darían resultado de igual signo; pues de lo contrario comprenderían una por lo menos.

Desde luego, $\varphi(x_0)$ y $\varphi(x_1)$ han de ser del mismo signo; pues de otro modo las cantidades x_0 y x_1 comprenderían alguna raíz de la ecuación $\varphi(x) = 0$, y, por consiguiente, otra más de $f(x) = 0$; lo cual es contra la hipótesis. Esto sabido, si suponemos que sea x_0 menor que x_1, los factores $x_1 - a$, $x_1 - b, \ldots\ldots x_1 - k$, serán todos positivos, teniendo, por lo tanto, $f(x_1)$ el mismo signo que $\varphi(x_1)$; mientras que los factores $x_0 - a$, $x_0 - b, \ldots\ldots x_0 - k$, serán todos negativos, y su producto será positivo ó negativo, según que el número de ellos sea par ó impar. En el primer caso, $f(x_0)$ tendrá el mismo signo que $\varphi(x_0)$, y en el segundo signo contrario; luego $f(x_0)$ y $f(x_1)$ tienen el mismo ó diferente signo, según que x_0 y x_1 comprendan un número par ó impar de raíces reales, que es lo que quería demostrarse.

Nada impide que entre los factores $x-a$, $x-b, \ldots\ldots x-k$, haya varios iguales, es decir, que la ecuación tenga raíces múltiples, subsistiendo el teorema, con tal de que en la evaluación del número de raíces, comprendidas entre x_0 y x_1, se tome en cuenta el grado de multiplicidad de cada una.

Corolario 1.° *Si dos cantidades, substituídas en el primer miembro de una ecuación, dan resultados de igual signo, comprenden un número par de raíces reales de esa ecuación ó no comprenden ninguna;* porque si comprendieran un número impar, los resultados de la substitución serían de signos contrarios.

Esta proposición, que es el complemento del primer teorema, se justifica también fácilmente, sirviéndose de la representación gráfica (fig. 18).

Corolario 2.° *Cuando al variar* x *de una manera continua, pasa por una raíz* a *de la ecuación* $f(x) = 0$, *la función* $f(x)$ *se anula, pero no siempre cambia de signo;* porque suponiendo que el valor de h sea tan pequeño que entre $a - h$ y $a + h$ no haya ninguna otra raíz más que a, se verificará, según el teorema precedente, que $f(a-h)$ y $f(a+h)$ serán del mismo signo, si la raíz a es de un grado par de multiplicidad, y de signos contrarios si dicha raíz es de grado impar.

La función $f(x)$ cambia, pues, de signo, al pasar x por una raíz simple ó de grado impar de multiplicidad; pero dicho signo no varía cuando x pasa por una raíz múltiple de orden par.

Es fácil demostrar directamente esta consecuencia, pues si n representa el grado de multiplicidad de la raíz a, se tiene:

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x)$$

y si se reemplaza sucesivamente x por $a - h$ y $a + h$, en esta igualdad, resulta:

$$f(a - h) = (-h)^n \varphi(a - h)$$
$$f(a + h) = (h)^n \varphi(a + h).$$

No siendo a raíz de la ecuación $\varphi(x) = 0$, puede concebirse la cantidad h bastante pequeña para que no haya ninguna raíz de esta ecuación, comprendida entre $a - h$ y $a + h$; de modo que teniendo $\varphi(a - h)$ y $\varphi(a + h)$ el mismo signo, $f(a - h)$ y $f(a + h)$ lo tendrán también si n es par, y serán de signo contrario si n fuese impar.

La representación geométrica comprueba igualmente esta propiedad; pues al pasar por el punto A la curva MAN, (figuras 19 y 20), la ordenada cambia ó no de signo, según que dicha curva sea secante ó tangente al eje de las x.

330. Regla de signos de Descartes. Entre los diversos teoremas que sirven para fijar los números de raíces positivas y negativas de una ecuación, ó, por lo menos, para señalar límites á estos números, el más conocido y de más fácil aplicación es el que se titula *regla de signos de Descartes;* pero antes de ocuparnos de esta proposición, conviene demostrar la siguiente.

LEMA. *Si se multiplica un polinomio, ordenado con relación á las potencias decrecientes de* x, *y con coeficientes reales, por el binomio* x — a, *siendo* a *positivo, el producto presentará un número impar de variaciones* (**154**) *más que el multiplicando.*

Sea, en efecto, $f(x)$ el polinomio de que se trata, cuyo primer término supondremos positivo, y consideremos las distintas agrupaciones de los términos consecutivos que tienen el mismo signo, escribiendo tan sólo los términos que ocupan los lugares primero y último de cada agrupación. Según esto, el polinomio $f(x)$ podrá presentarse bajo la forma

$$f(x) = A_m x^m + \cdots\cdots + A_{n+1} x^{n+1} - A_n x^n - \cdots\cdots - A_{p+1} x^{p+1} + A_p x^p + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \pm A_{s+1} x^{s+1} \mp A_s x^s \mp \cdots\cdots \mp A_0. \text{ (*)}$$

Cada grupo contiene así un número cualquiera de términos, si bien puede constar de uno solo; pero las variaciones se presentan únicamente, cuando se pasa del último término de cada agrupación, al primero de la que sigue.

Efectuando ahora la multiplicación por el factor $x - a$, se halla el producto

$$\begin{array}{ll|l|l|l} A_m x^{m+1} \cdots\cdots - A_n & & x^{n+1} \cdots\cdots + A_p & x^{p+1} \cdots\cdots \mp A_s & x^{s+1} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots - A_{n+1} a & & \cdots\cdots + A_{p+1} a & \cdots\cdots \mp A_{s+1} a & \cdots\cdots \pm A_0 a. \end{array}$$

Al multiplicar el polinomio por x, todos los términos conservan sus signos y se obtiene la primera fila; pero al multiplicar por $- a$ cambian todos ellos de signo y se obtienen los términos de la segunda; de suerte que no se ve desde luego cuáles son las variaciones que existen en el producto.

Para deducirlo, observemos que el primer término $A_m x^{m+1}$ es seguramente positivo, y el del grado $n + 1$ negativo, puesto que procede de la adición de dos cantidades negativas; de modo que cualesquiera que sean los signos de los términos comprendidos entre el primero y el de grado $n + 1$, darán, por lo menos, una variación, reproduciéndose así en el producto la que existía en el multiplicando entre el primer término y el de grado n. De igual manera, el coeficiente de x^{p+1} procede de sumar dos cantidades positivas, y, por consiguiente desde x^{n+1} á x^{p+1}, habrá por lo menos una variación, volviendo á aparecer la que había en dicho multiplicando desde x^n á x^p. Razonando en forma idéntica, esto es, considerando los primeros términos de cada agrupación del multiplicando, excepto el de la última, y los correspondientes del

(*) La agrupación que principia en $\mp A_s x^s$, es la de una serie de términos que hasta el último tienen igual signo. Claro es que si el penúltimo fuese de signo contrario al último, éste sólo constituiría dicho grupo, y que si todos los términos del polinomio propuesto tuviesen el mismo signo, todo él estaría comprendido en dicha agrupación que, según veremos, es la que determina la verdad dl teorema.

producto, es decir, aquellos cuyo grado es superior en una unidad, iremos viendo que dichos términos del producto tienen los mismos signos que sus respectivos del multiplicando; luego se reproducirán las mismas variaciones, por lo menos, que había en dicho multiplicando. Ahora bien: en la agrupación que principia por el término en x^s, el multiplicando no presenta variación alguna; pero el término constante $\mp A_0$ del multiplicando, al multiplicarse por $-a$, se convierte sin reducción en $\pm A_0 a$, teniendo así signo contrario al término en x^{s+1}, de suerte que en el último grupo del producto, hay de seguro una variación; luego el producto tiene, por lo menos, una variación más que el multiplicando.

Como además de la variación correspondiente al multiplicando, puede suceder que cada grupo del producto contenga más variaciones, en razón á que sus términos pueden tener signos cualesquiera, puesto que provienen de sumar cantidades de signos contrarios, se deduce que si hay en dichos grupos más de una variación, habrá un número impar, por ser el primero y el último término de cada uno de signos diferentes; luego resulta que, en cada agrupación, se introduce un número par de variaciones, excepto en la última en que ese número es impar, lo que da en total un número impar de variaciones introducidas, al multiplicar por el binomio $x-a$. (*)

Fundándose en esta proposición preliminar, se demuestra fácilmente el principio que sigue.

Teorema. *En una ecuación, con coeficientes reales, el número de raíces positivas no puede exceder al de variaciones que presente su primer miembro, y, si es menor, la diferencia es un número par.* (**)

(*) Esta última consecuencia puede también deducirse, con sólo observar que los primeros términos del multiplicando y del producto tienen signos iguales y los últimos signos contrarios; de suerte que uno de esos polinomios presentará un número par de variaciones y el otro un número impar, siendo también impar, por lo tanto, la diferencia entre ambos números.

(**) Sin fundamento bastante, Wallis y Leibnitz atribuyeron á Harriot el descubrimiento de este notable teorema, que, completado con el uso de la ecuación que tiene sus raíces iguales y de signos contrarios á las de la propuesta, permite hacer siempre una exploración rápida y fructuosa respecto á la naturaleza y al signo de las raíces de una ecuación. Descartes se detuvo apenas en bosquejar la demostración, que ha sido luego completada y rectificada por Gauss.

Efectivamente: poniendo de manifiesto en el primer miembro de la ecuación $f(x)=0$, el producto de los factores de primer grado correspondientes á las raíces positivas, $a, b, c \ldots\ldots k$, se tendrá:

$$f(x) = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots(x-k)\,\varphi(x)$$

siendo $\varphi(x)$ el producto de los factores binomios que corresponden á las raíces negativas é imaginarias.

Si multiplicamos $\varphi(x)$ por cada uno de los factores $x-a$, $x-b$, $x-c, \ldots\ldots$ se introducirán en el producto, esto es en $f(x)$, tantas variaciones, á lo menos, como factores se hayan empleado, ó, lo que es lo mismo, tantas como raíces positivas tenga la ecuación; luego el número de estas raíces no podrá exceder al número de variaciones de $f(x)$.

Como, por otra parte, el primero y el último término de $\varphi(x)$ serán positivos, pues si el último fuese negativo habría, al menos, una raíz positiva en $\varphi(x)=0$ y otra más en la ecuación propuesta, dicho polinomio tendrá un número par de variaciones; pero como cada vez que se multiplica por el factor binomio correspondiente á una raíz positiva, se introduce un número impar de variaciones, es decir, un número par más una, el número de variaciones que habrá en $f(x)$ será, en definitiva, igual al número de raíces positivas de la ecuación $f(x)=0$, más la suma de varios números pares, que es otro número par.

Finalmente: si en la ecuación $f(x)=0$ se cambia x en $-x$, se halla una nueva ecuación cuyas raíces son las mismas de la propuesta con signos contrarios (*); luego las raíces negativas de la primera serán las positivas de la segunda. Aplicando, pues, á la ecuación, $f(-x)=0$, el teorema precedente, se tendrá un límite superior del número de raíces negativas de la ecuación dada; pudiendo decirse, que *el número de raíces negativas de una ecuación no puede exceder al número de variaciones que contenga el primer miembro de su transformada en* $-x$, *y, si es menor, la diferencia será un número par.*

331. Límite inferior del número de raíces imaginarias. Cuando la

(*) Es evidente que si la ecuación $f(x)=0$ queda verificada por el valor a de x, la ecuación $f(-x)=0$ lo será por $x=-a$.

ecuación que se considera es incompleta, la regla de signos de Descartes permite deducir muchas veces si tiene raíces imaginarias, y determina un límite inferior del número de dichas raíces.

A fin de facilitar esta investigación, demostraremos primero, que *si para completar una ecuación introducimos términos afectados de signos cualesquiera, y cuyos coeficientes sean iguales á cero, el número total de variaciones no se altera, ó aumenta en un número par.*

En efecto: si entre dos términos consecutivos se introduce uno afectado de cualquier signo, el número de variaciones no cambia si dichos términos son de signos contrarios; pero si tienen el mismo signo, el número de variaciones no se altera, ó aumenta en dos unidades, según que el signo del término introducido sea igual ó distinto al de los términos considerados. Si en el polinomio resultante se introduce un nuevo término, el número de variaciones no sufrirá alteración ó aumentará también en dos; y procediendo de este modo, hasta completar la ecuación, se llegará al resultado que la proposición expresa. Como iguales consideraciones pueden hacerse respecto del polinomio obtenido substituyendo $-x$ en vez de x, el número de variaciones de $f(-x)$ no cambiará tampoco, ó aumentará en un número par.

Sentado esto, si representamos respectivamente por v y v' los números de variaciones de la ecuación propuesta y de su transformada en $-x$, y por v_1 y v_1' los números de variaciones de la ecuación completa y de su transformada correspondiente, se verificará que

$$(v_1+v_1') - (v+v') = 2k\,;$$

pudiendo k ser igual á cero; pero ya que $v_1+v_1'=m$ (*), se tendrá:

$$v+v' = m-2k \overline{\overline{<}}\, m\,;$$

lo cual manifiesta, que *el número total de variaciones de una ecuación y de su transformada en* $-$x, *no puede nunca exceder al grado de la ecuación.*

(*) No admite duda que, en una ecuación completa, el número de variaciones de la transformada en $-x$, es el de permanencias de dicha ecuación; y como este número, aumentado en el de variaciones, da el de pasos de signo, que es igual al grado, será, por consiguiente, $v_1+v_1'=m$.

Ahora bien, según el teorema de Descartes, v es el límite superior del número de raíces positivas, y v' el límite superior del número de las negativas; de modo que, á lo más, el número de raíces reales será igual á $v+v'$, y, por consiguiente, un límite inferior del número de raíces imaginarias de una ecuación, será:

$$m-(v+v')=2k\,,$$

que es cero ó un número par, según debía suceder (**322**, teor. III).

Conviene observar también, que cuando entre dos términos consecutivos del mismo signo, faltan uno ó varios de ellos, la ecuación admite raíces imaginarias; pues si se cubre el intervalo con términos afectados del coeficiente cero y que presenten una serie de variaciones con el primero, el número de variaciones de la ecuación aumentará en un número par; pero como el de la transformada en $-x$ no habrá cambiado, porque las variaciones sucesivas que así se habrán introducido vendrán á convertirse en permanencias, el número k será distinto de cero. (*)

332. Número de raíces positivas y negativas cuando todas son reales. Si designamos por p el número de raíces positivas y por n el de las negativas, se tendrá, en esta hipótesis,

$$p+n=m\,;$$

y, como siendo v el número de variaciones de la ecuación propuesta y v' el de la transformada, $v+v'$ no puede ser mayor que m, según hemos demostrado, y además, en este caso, no puede tampoco ser menor, porque es siempre límite superior del número de raíces reales, será $v+v'=m$, y, por lo tanto,

$$p+n=v+v'.$$

Ahora bien: según sabemos, p no puede exceder á v, ni tam-

(*) Otro tanto pasaría si faltase más de un término entre dos de signos contrarios; porque, procediendo del modo dicho, todos los términos introducidos tomarían, en la transformada en $-x$, el mismo signo que el primero de los dos considerados, sin alterar el número de variaciones de esa transformada.

Es también fácil ver, de un modo general, que la falta de términos entre dos consecutivos del mismo ó de diverso signo, acusa la existencia de tantas raíces imaginarias, como respectivamente indica el mayor número par contenido en la diferencia de sus exponentes, ó en esta diferencia disminuída en una unidad.

poco ser menor en el caso que nos ocupa, pues entonces, por compensación, n sería mayor que v', lo cual se opone á lo ya demostrado; luego, en definitiva,

$$p = v \quad \text{y} \quad n = v';$$

es decir, que *cuando son reales todas las raíces de una ecuación, tiene precisamente tantas raíces positivas como variaciones, y tantas negativas como variaciones la transformada en* $-x$. (*)

333. Teorema de Rolle (**). Como la regla de Descartes sólo determina generalmente un límite superior del número de raíces reales, es preciso dar á conocer nuevas proposiciones que permitan fijar dicho número.

Con tal objeto demostraremos el siguiente principio.

TEOREMA. *Dos raíces reales y consecutivas,* a *y* b, *de una ecuación, comprenden una ó un número impar de raíces reales de la ecuación derivada.*

En efecto: puesto que las raíces a y b son consecutivas, no habrá ninguna cantidad comprendida entre ellas que anule á la función $f(x)$; luego si hacemos crecer la variable x desde a hasta b, de una manera continua, la función conservará constantemente un mismo signo, el $+$ por ejemplo; de suerte que si a es menor que b, la función partirá de cero para llegar otra vez á cero, por variaciones continuas; luego empezará creciendo, y su derivada $f'(x)$ será positiva para valores de x inmediatos á a; y como la función $f(x)$ permanece constantemente positiva, decrecerá para llegar otra vez á cero; de modo que su derivada, $f'(x)$, será negativa para valores de x suficientemente próximos á b. Cambiando, pues, de signo la función $f'(x)$, que suponemos también finita y continua (***), se anulará una vez, ó un número impar de veces, entre a y b; lo cual demuestra el teorema. (*)

(*) Esta proposición sirve de complemento al teorema de Descartes.

(**) Miguel Rolle, matemático francés de fines del siglo XVII, conocido más especialmente en la ciencia, por su *método inverso de las tangentes.*

(***) Las derivadas de las funciones algebraicas, racionales y enteras, que implícitamente suponemos constituyen los primeros miembros de las ecuaciones de que tratamos, son también funciones de la misma clase, y, por consiguiente, continuas, determinadas y finitas para valores finitos de su variable.

La representación gráfica de las funciones y la significación geométrica de la derivada (figs. 21 y 22), justifican inmediatamente la verdad del principio demostrado.

COROLARIO 1.° *Dos raíces reales consecutivas de la ecuación derivada no pueden comprender más de una raíz real de la propuesta, ni ésta podrá tener más de una raíz mayor que la mayor de su derivada, ni más de una raíz menor que la menor de ella;* porque siendo a' y b' dos raíces reales consecutivas de la ecuación $f'(x) = 0$, si comprendiesen siquiera dos raíces, a y b, de $f(x) = 0$, estas dos comprenderían á su vez otra, por lo menos, de la ecuación derivada; lo que es contrario al supuesto de ser a' y b' consecutivas.

Si, por otra parte, fuesen a y b dos raíces de la ecuación propuesta, mayores que la mayor ó menores que la menor de las de la ecuación derivada, no podrían comprender ninguna raíz de esta última, lo cual se opone al teorema.

Debe observarse que aun cuando queda demostrado que a' y b' no pueden comprender más de una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, ésto no supone que entre dichas dos raíces haya de haber indispensablemente comprendida alguna de esta última ecuación; así es que si, al substituir a' y b' en $f(x)$, se obtienen resultados de signos contrarios, comprenderán una raíz; pero si estos resultados son de igual signo, no habrá raíz alguna de la ecuación propuesta comprendida entre a' y b'.

En tal concepto, si $a', b', c', \ldots k'$, son las raíces reales de la ecuación $f'(x) = 0$, dispuestas por orden de magnitud creciente, y se substituye en $f(x)$ la serie de valores

$$-\infty, a', b', c', \ldots\ldots k', +\infty,$$

cada dos comprenderán una raíz, ó ninguna, de la ecuación

(*) Que las condiciones indicadas son necesarias, lo comprueba la ecuación $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} = 0$; pues ésta se verifica por $x = -1$ y $x = 1$, mientras que la ecuación derivada, $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$, sólo queda satisfecha por $x = \infty$; no teniendo, por lo tanto, ninguna raíz comprendida entre -1 y $+1$.

$f(x)=0$, según que los signos de los resultados formen una variación ó una permanencia; luego *cuando se saben calcular todas las raíces reales de la ecuación derivada, puede determinarse el número exacto de raíces reales de la propuesta.*

COROLARIO 2.° *Una ecuación no puede tener sino una raíz real más que su ecuación derivada.*

334. Condiciones de realidad de todas las raíces de una ecuación. En virtud de lo que acabamos de demostrar, se deduce que *para que sean reales todas las raíces de una ecuación, es necesario que lo sean también todas las de su derivada*; esta condición no es, sin embargo, suficiente; pues llamando a', b', c',..... k', las raíces de $f'(x)=0$, colocadas por orden de menor á mayor, se ve que *es además indispensable que substituyendo en la ecuación propuesta, en lugar de* x, *la serie* $-\infty$, a', b', c',..... k', $+\infty$, *los resultados sucesivos sean de signos contrarios.*

Aplicando estas consecuencias á la ecuación incompleta de tercer grado

$$f(x)=x^3+px+q=0,$$

vemos que la condición para que su derivada tenga sus raíces reales, es que sea $p<0$; puesto que se tiene:

$$f'(x)=3x^2+p=0 \quad \text{de donde} \quad x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.\ (*)$$

Si observamos ahora que, por ser la ecuación de grado impar, $f(\pm\infty)=\pm\infty$, deducimos que las demás condiciones para que todas las raíces de la ecuación propuesta sean reales son:

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)>0 \quad \text{y} \quad f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)<0,$$

ó, lo que es lo mismo, efectuando la substitución,

$$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0 \quad \text{y} \quad \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q<0.$$

Siendo ya $p<0$, se ve que, si suponemos $q>0$, la primera

(*) Se ve, *à priori*, que si fuese $p>0$, habría un par de raíces imaginarias en la ecuación de tercer grado, por faltar un término entre dos de igual signo.

desigualdad queda por sí misma verificada, y de la segunda se deduce:

$$q<-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{y, racionalizando,} \quad q^2<-\frac{4p^3}{27}$$

ó, por fáciles transformaciones,

$$4p^3+27q^2<0.$$

Cuando fuese $q<0$, la segunda desigualdad condicional es la que quedaría satisfecha por sí misma, y de la otra se deduciría la última condición obtenida, la cual, por comprender como indispensable á la primera $p<0$, es la necesaria y suficiente para que las raíces de la ecuación considerada sean reales.

Si se verificase que

$$4p^3+27q^2=0,$$

una de las raíces simples de la derivada vendría á ser raíz doble de la ecuación propuesta, y las tres de ésta serían también reales. (*)

(*) Por medio de una sencilla transformación, que se explicará más adelante, puede siempre reducirse la ecuación general de tercer grado, á la incompleta que acaba de considerarse, y referir á ella la condición de realidad de sus raíces.

El primero que resolvió algebraicamente esta última ecuación, fué Jerónimo Cardano, médico y geómetra milanés de mediados del siglo XVI. Algunos, sin embargo, atribuyen esa gloria á sus compatriotas y contemporáneos Nicolás Tartaglia y Escipión Ferreo.

La fórmula que resuelve la ecuación $x^3+px+q=0$, es la que sigue:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}} \quad \text{siendo} \quad R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27},$$

y no asociando otros valores de ambos radicales de tercer orden, sino aquellos que den un producto igual á $-\frac{p}{3}$.

Es digno de observarse que cuando $R<0$, es decir, cuando en virtud de la condición antes hallada son reales y desiguales las tres raíces de la ecuación, los radicales de la fórmula precedente resultan ambos imaginarios; y si se representa cualquiera de ellos por $A+B\sqrt{-1}$, las cantidades A y B tendrán cada una tres valores reales y desiguales, que dependerán á su vez de ecuaciones de tercer grado, cuyas fórmulas estarán igualmente complicadas de imaginarias. Esta particularidad notable, que se conoce en la ciencia con el nombre de *caso irreducible*, viene á hacer ilusoria en la práctica la ventaja de resolverse algébricamente la ecuación de tercer grado.

Las funciones trigonométricas dan en dicho caso un resultado muy sencillo, calculable por logaritmos y expresado por la fórmula

$$x=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\omega+2k\pi}{3},$$

335. Teorema de Sturm (*). Hemos visto que el procedimiento para determinar el número de raíces reales de una ecuación, que se funda en el teorema de Rolle, exige que se calculen todas las de esa misma clase de su derivada. Cuando esto no es posible, ó presenta dificultad, se recurre con ventaja á la proposición que vamos á explicar, la cual permite obtener no sólo el número exacto de raíces reales de una ecuación, sino también el de las que se encuentran comprendidas entre dos números dados, así como las condiciones de realidad, en el caso de existir coeficientes literales.

Antes de enunciar la proposición referida, es indispensable demostrar la siguiente.

LEMA. *Si* a *es una raíz real de la ecuación* f(x) = 0, *y* h *una cantidad bastante pequeña para que, entre* a — h *y* a + h, *no esté comprendida ninguna raíz distinta de* a, *de la expresada ecuación, ni de la* f'(x) = 0 (**), *se verificará que cuando* x *varíe de* a — h *hasta* a + h, *la función* f(x) *y su derivada* f'(x) *tendrán signos contrarios antes de llegar* x *á la raíz* a, *é igual signo después de haber pasado por ese valor.*

En efecto: al variar x desde $a - h$ hasta a, si la derivada $f'(x)$ es constantemente positiva, la función $f(x)$ irá creciendo, y, como llega á cero, será en ese intervalo negativa; y si $f'(x)$ es negativa, la función deberá llegar á cero decreciendo y será, por lo tanto, positiva.

Cuando la variable x varíe desde a hasta $a + h$, si la derivada $f'(x)$ es siempre positiva en ese intervalo, $f(x)$ irá creciendo y, como parte de cero, permanerá también positiva; y en el caso de

---

en la cual $\rho = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$, $\cos\omega = -\frac{q}{2\rho}$, y k recibe sucesivamente los valores 0, 1 y 2.

La resolución de la ecuación de cuarto grado por el método de Luis Ferrari, discípulo de Cardano, igualmente que por los de Descartes, Tschirnhauss, Euler y Lagrange, depende en último término de una ecuación de tercer grado, que es necesario resolver, para pasar á dos de segundo ó á una ecuación bicuadrada.

(*) Este bello teorema se considera como el descubrimiento algébrico más importante de los tiempos modernos, en lo que respecta á la resolución general de las ecuaciones.

(**) La raíz a lo será, ó no, de la ecuación $f'(x) = 0$, según que sea raíz múltiple ó simple de la propuesta.

ser la derivada negativa, la función $f(x)$ decrecería á partir de cero, siendo, por consiguiente, negativa.

Demostrada ya esta proposición preliminar, supondremos, para obtener la serie de funciones que se consideran conocidas en el enunciado del teorema de Sturm, que la ecuación propuesta carece de raíces iguales. (*)

En tal hipótesis, designemos dicha ecuación por $X = 0$, y dividamos la función X por su derivada X', representando por Q el cociente y por X_1 el resto de menor grado que X', cambiado el signo; dividamos análogamente X' por X_1, designando por Q_1 el cociente y por X_2 el resto de menor grado que X_1, con signo contrario; y continuemos esta serie de operaciones que, excepto el cambio del signo de los restos, es la misma que se efectúa para determinar el máximo común divisor de X y X', hasta llegar á un resto independiente que representaremos por X_p, una vez cambiado de signo.

Se tendrá de este modo la serie de igualdades:

$$X = X'Q - X_1$$
$$X' = X_1 Q_1 - Q_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{p-2} = X_{p-1} Q_{p-1} - X_p$$

las cuales permiten enunciar y demostrar el principio que sigue.

TEOREMA. *Si consideramos dispuestas, unas á continuación de otras, las funciones*

$$X,\ X',\ X_1,\ X_2, \ldots\ldots X_p,$$

y se atribuyen sucesivamente á la variable x *los valores reales* x_0 *y* x_1, *siendo* $x_0 < x_1$, *el número de variaciones menos que contenga la serie de los signos de las substituciones de* x_1 *que la de las correspondientes á* x_0, *será el de raíces de la ecuación* X = 0 *comprendidas entre dichos valores.* (**)

(*) Las aplicaciones de la proposición principal que nos ocupa, suponen, generalmente, que la ecuación está ya despojada de raíces múltiples.

(**) Este enunciado supone, implícitamente, que ha de demostrarse que para $x = x_1$ no puede haber nunca más variaciones que para $x = x_0$; deduciéndose, del mismo modo, que si esos números de variaciones son iguales, no habrá ninguna raíz comprendida entre x_0 y x_1.

Efectivamente: cuando x crezca de una manera continua desde x_0 hasta x_1, no podrá haber modificación en el número de variaciones sino en el caso de que alguno de los polinomios de la serie cambie de signo, y, por lo tanto, pase por cero.

En tal concepto, observaremos desde luego que dos funciones consecutivas cualesquiera, tales como X_{n-1} y X_n, no pueden anularse para un mismo valor, a, de x; porque, si esto se verificara, en virtud de la relación

$$X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1},$$

se anularía también X_{n+1}, y considerando la serie de relaciones posteriores, análogas á la precedente, que ligan cada tres funciones consecutivas, llegaríamos á deducir que X_p debería á su vez anularse; lo cual es imposible, puesto que es independiente de x.

Vemos así que cuando una función intermedia, X_n, se anula para un valor de x, las funciones X_{n-1} y X_{n+1} tienen valores distintos de cero, y son además de signos contrarios; porque para dicho valor $x=a$, la igualdad anterior se reduce á

$$X_{n-1} = -X_{n+1}.$$

Pero no anulando a á ninguna de estas dos funciones, podrá imaginarse una cantidad h bastante pequeña, para que, variando x desde $a-h$ hasta $a+h$, cada una de ellas conserve separadamente su mismo signo; luego estos polinomios X_{n-1} y X_{n+1}, aunque no iguales en valor absoluto sino para el valor a de x, tendrán signos contrarios mientras que la variable x recorre este intervalo; de modo que, cualesquiera que sean los signos del polinomio X_n, entre los valores $x=a-h$ y $x=a+h$, las funciones

$$X_{n-1}, \quad X_n, \quad X_{n+1},$$

presentarán para cada uno de ellos una variación, y sólo una, la cual únicamente podrá cambiar de lugar. (*)

La consideración de estos tres polinomios consecutivos pone

(*) Cambiará de lugar cuando X_n varíe de signo al pasar x por el valor a; siempre que a sea además raíz simple, ó múltiple de orden impar, de la ecuación $X_n = 0$.

de manifiesto que el número de variaciones, que presenta la serie de funciones

$$X, X', X_1, X_2, \ldots\ldots X_p,$$

no se modifica cuando alguna de las intermedias cambia de signo, y como X_p lo conserva siempre invariable, es claro que el número de variaciones de la serie no podrá alterarse, sino cuando cambie de signo el primer polinomio X.

Ahora bien: según el lema, este polinomio y su derivada X', tienen signos contrarios antes de que x llegue á una raíz $x=a$ de la ecuación $X=0$, y el mismo signo después que x la haya excedido; por consiguiente, cuando x pase por dicha raíz, se perderá una variación en la serie de funciones de Sturm; y como esto se verificará tantas veces cuantas x pase por una raíz de la ecuación propuesta, resulta que el número de variaciones perdidas será igual al de raíces reales que comprendan x_0 y x_1, según se quería demostrar. (*)

Si se desea, pues, saber el número total de raíces reales que tiene la ecuación, bastará substituir en lugar de x, en la indicada serie de funciones, $-\infty$ y $+\infty$, y contar el número de las variaciones perdidas. Tales substituciones son en extremo sencillas; porque sabiendo que para valores suficientemente grandes de x, en valor absoluto, un polinomio ordenado con relación á las potencias decrecientes de esa variable, conserva el signo de su primer término, bastará considerar el primero de cada función, y entonces, para $x=+\infty$, tendrán todas las funciones los mismos signos que afectan á los coeficientes de dichos primeros términos, y, para $x=-\infty$, sólo habrá que cambiar los que corresponden á potencias de grado impar de x. (**)

Comparando los números de variaciones dadas por $x=+\infty$

(*) Como antes se indicó debía ocurrir, se deduce del razonamiento hecho, que si x_0 y x_1 no comprenden ninguna raíz de la ecuación, los números de variaciones de los signos de los resultados de ambas substituciones serán iguales, y que la segunda serie de signos no podrá nunca presentar mayor número de variaciones que la primera.

(**) El residuo independiente, X_p, debe considerarse todo él como un solo término respecto de x.

y $x=-\infty$, con el de las que presenten los signos de los últimos términos de las funciones, ó, sean, los correspondientes al valor $x=0$, se deducirán los números exactos de raíces positivas y negativas de la ecuación propuesta.

En el caso frecuente de que el grado de las funciones de Sturm vaya disminuyendo de unidad en unidad, es decir, cuando su número sea $m+1$, se llega á consecuencias notables; pues representando por v el número de variaciones de los signos de los primeros términos de dichas funciones y por p el de permanencias, la sucesión de los grados hará que para $x=-\infty$ sean, por el contrario, p las variaciones y v las permanencias de esos mismos términos, de modo que el número de raíces reales será precisamente $p-v$, y como el número total de raíces es $m=p+v$, deberá haber $(p+v)-(p-v)=2v$ raíces imaginarias.

Estas consecuencias, traducidas en lenguaje, nos dicen que *cuando el número de funciones de Sturm sea* $m+1$, *la ecuación tendrá tantas raíces reales como indique el exceso del número de permanencias sobre el de variaciones, que presenten los signos de sus primeros términos, y tantos pares de raíces imaginarias, como designe el número de dichas variaciones.*

Si x_0 ó x_1, ó bien ambos valores, fuesen raíces de $X=0$, sería lo más conveniente despojar la ecuación de esa ó ésas raíces; pero puede observarse que si X se anula para $x=x_0$, es posible imaginar un valor de h suficientemente pequeño, para que entre x_0 y x_0+h no haya ninguna raíz de la ecuación propuesta, ni de las que se obtendrían igualando á cero todas las funciones; de modo que entonces bastaría hallar las raíces comprendidas entre x_0+h y x_1, notando que, para el primer valor, los signos de X y X' deben formar una permanencia, y los de la serie $X', X_1, X_2, \ldots. X_p$, presentarán el mismo número de variaciones que para $x=x_0$. Cuando X se anulase para $x=x_1$, se considerarían los valores x_0 y x_1-h, observando que, para x_1-h, los signos de las funciones X y X' formarán una variación, y los de la serie $X', X_1, X_2, \ldots. X_p$, han de presentar igual número de variaciones que para $x=x_1$.

En el caso de anularse por los valores substituídos, alguna ó algunas funciones intermedias, los ceros se hallarán comprendidos entre dos signos contrarios, de modo que podrá prescindirse de los resultados nulos.

Por otra parte, con el fin de evitar los coeficientes fraccionarios en las distintas divisiones, se multiplican los dividendos parciales por cantidades que sean seguramente positivas, para no cambiar los signos de las funciones que deben considerarse. (*)

Tampoco es indispensable llegar hasta el resto independiente X_p; porque desde el momento en que se obtenga un resto X_q, que sepamos conserva el mismo signo para todos los valores comprendidos entre x_0 y x_1 (**), podrá aplicarse el teorema á la serie

$$X, X', X_1, X_2, \ldots. X_q;$$

puesto que la demostración dada no supone sino que la última de las funciones no varía de signo en el intervalo considerado, siendo indiferente que cambie ó no de valor.

El teorema de Sturm puede también generalizarse al caso de tener la ecuación raíces iguales, prescindiendo de la última función independiente, que se reduce á cero, y suponiendo que ninguno de los números substituídos es raíz múltiple de la ecuación.

La serie de las divisiones antes indicadas, conduciría entonces á un residuo cero y á un último divisor X_p que, siendo el máximo común divisor de X y X', dividiría exactamente á todas las funciones

$$X, X', X_1, X_2, \ldots\ldots X_{p-1}, X_p.$$

Suponiendo divididas èstas por X_p, los cocientes formarán otra serie

$$Y, Y', Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_{p-1}, Y_p=1,$$

respecto de la cual pueden hacerse análogos razonamientos á los anteriores, á pesar de no ser Y' la derivada de Y, según más adelante demostraremos.

(*) Cuando sea preciso multiplicar por un factor literal, que se ignore si es positivo ó negativo, se multiplicará por su cuadrado.

(**) Esto se verificará seguramente, si la ecuación $X_q=0$ sólo tiene raíces imaginarias, ó cuando no tenga ninguna real comprendida entre x_0 y x_1, ó, bien, cuando las que contuviese fuesen múltiples de orden par. Al llegar, por lo menos, al residuo de segundo grado en x, se conocerá fácilmente si conserva ó no el mismo signo entre dichos números **(156)**.

Vemos, en efecto, que dos funciones consecutivas, Y_{n-1} é Y_n, no pueden reducirse á un mismo tiempo á cero; porque de la igualdad

$$X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1}$$

resulta, dividiendo por X_p,

$$Y_{n-1} = Y_n Q_n - Y_{n+1};$$

luego si Y_{n-1} é Y_n se anulasen para un cierto valor de x, tendría que anularse también Y_{n+1}; y considerando las igualdades análogas á la precedente, que ligan cada tres funciones consecutivas de las que siguen, se deduciría que $Y_p = 1$ debería ser también cero, para el valor referido.

Por otra parte, si Y_n se anula para $x = a$, se verificará que, para ese valor

$$Y_{n-1} = - Y_{n+1};$$

así es que, lo mismo que antes, el número de variaciones de la segunda serie, no se alterará cuando una función intermedia se reduzca á cero, cambiando ó no de signo; y como $Y_p = 1$ permanece invariable, el número total de variaciones no podrá alterarse sino cuando Y cambie de signo.

En virtud de la composición del máximo común divisor de X y de su derivada X' (**327**), la función Y, que resulta de dividir X por X_p, será precisamente el producto de todos los factores de primer grado que forman el polinomio X, con exponentes iguales á la unidad; porque si

$$X = (x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q \ldots\ldots,$$

se verificará que

$$X_p = \pm (x-a)^{n-1} (x-b)^{p-1} (x-c)^q \ldots\ldots,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{X}{X} = Y = \pm (x-a)(x-b)(x-c) \ldots\ldots;$$

luego la ecuación $Y = 0$ admite todas las raíces de $X = 0$, y no admite otras; pero en calidad de raíces simples.

Ahora bien: la derivada X' de X, puede ponerse bajo la forma (**280**)

$$X' = n\frac{X}{x-a} + p\frac{X}{x-b} + q\frac{X}{x-c} + \ldots\ldots;$$

de modo que, dividiendo por X_p, resulta:

$$Y' = n\frac{Y}{x-a} + p\frac{Y}{x-b} + q\frac{Y}{x-c} + \ldots\ldots,$$

pero como la derivada de la función Y es evidentemente

$$\frac{Y}{x-a} + \frac{Y}{x-b} + \frac{Y}{x-c} + \ldots\ldots,$$

y los exponentes $n, p, q, \ldots.$ no son todos iguales á la unidad, se deduce que Y' no es la derivada de Y.

Vamos á demostrar, sin embargo, que los polinomios Y é Y' gozan de la misma propiedad que X y X'; esto es, que tienen signos contrarios antes de que x llegue á una raíz de $Y = 0$ ó de $X = 0$, y que son de igual signo después que x la exceda.

Efectivamente: puesto que, según se consideren unos ú otros valores, X y X' son de signos contrarios ó de igual signo (*), los cocientes que resulten de dividir dichos polinomios por uno mismo X_p, cuyo valor es diferente de cero, serán también de signos contrarios ó de igual signo; luego cuando x pase por una raíz, a, se pierde una variación al principio de la segunda serie de funciones, y como sucede lo mismo para cada raíz, se deduce que el número de variaciones perdidas, en la serie de los cocientes, es igual al de raíces reales de la ecuación propuesta, comprendidas entre x_0 y x_1.

No hay, sin embargo, necesidad de formar dicha segunda serie de funciones; pues si se examinan las dos correspondientes que siguen

$$X, X', X_1, X_2, \ldots\ldots X_{p-1}, X_p$$
$$Y, Y', Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_{p-1}, Y_p\,.$$

y se atribuye á x un valor particular x_0, diferente de las raíces

(*) El lema demostrado se verifica, existan, ó no, raíces iguales en la ecuación.

múltiples, se obtendrán los valores de las segundas funciones, dividiendo los de las primeras por un mismo número diferente de cero, que será el valor de X_p. Si este divisor es positivo, se conservarán en la segunda serie los signos de la primera, y si es por el contrario negativo, todos cambiarán; de suerte que, en uno y otro caso, el número de variaciones de la primera serie será igual al de la segunda y, por lo tanto, el de variaciones perdidas, cuando x pasa desde x_0 á x_1, será también uno mismo en ambas.

El teorema de Sturm se aplica, pues, á la serie

$$X, X', X_1, X_2, \ldots\ldots X_p,$$

tenga ó no raíces iguales la ecuación $X=0$; mas, en el primer caso, al obtener el número de raíces comprendidas entre x_0 y x_1, no se toma en cuenta el grado de multiplicidad de cada una.

Ya hemos dicho que el número de funciones no puede exceder á $m+1$, de manera que, para un valor particular de x, presentarán á lo más m variaciones; luego para que sean reales todas las raíces de una ecuación, será primeramente necesario que, en las divisiones sucesivas, los grados de los restos disminuyan de unidad en unidad, y, en segundo lugar, que todos los primeros términos de las funciones tengan un mismo signo, á fin de que, al hacer $x=-\infty$, cada dos formen una variación. Estas condiciones son suficientes; porque si se verifican, en la serie de funciones no habrá ninguna variación cuando $x=\infty$, y se habrán perdido m variaciones desde $x=-\infty$. (*)

Como el primer término de la ecuación propuesta se supone siempre positivo, resulta que *para que una ecuación de* m$^{\text{ésimo}}$ *grado tenga todas sus raíces reales, es necesario y suficiente que las funciones de Sturm sean en número de* m$+1$, *y que sus primeros términos sean todos positivos.*

Siendo también positivo el primer término de la derivada, se deduce que el número de condiciones de realidad será $m-1$, ó un número menor, cuando algunas queden satisfechas por sí mismas, ó estén comprendidas en otras.

(*) Se ve igualmente que, para que se tenga $p-v=m$ y $2v=0$, es preciso y basta que $p=m$ y $v=0$.

Considerando de nuevo la ecuación incompleta de tercer grado

$$x^3+px+q=0,$$

se halla la serie de funciones

$$X=x^3+px+q,\quad X'=3x^2+p,\quad X_1=-\frac{2p}{3}x-q,\quad X_2=-\frac{4p^3+27q^2}{4p^2};$$

luego las condiciones de realidad serán:

$$p<0 \quad \text{y} \quad 4p^3+27q^2<0;$$

y como la primera está incluída implícitamente en la segunda, esta última es la única que debe verificarse para que las tres raíces sean reales. (*)

Ejercicios.

I. Aplicar las proposiciones que permiten reconocer inmediatamente la existencia de raíces reales, así como la regla de Descartes, á las ecuaciones que siguen:

$$x^4-6x^3+x-1=0\ ;\quad 2x^3-x^2-5x+8=0\ ;\quad x^4-7x^3+x^2-5x+1=0.$$

II. Obtener límites inferiores de los números de raíces imaginarias de las ecuaciones

$$x^5+2x^3-4x+13=0\ ;\quad x^7-x^4-2x^2+6=0\ ;\quad x^8+1=0.$$

III. Deducir, por medio de las consecuencias del teorema de Rolle, el número de raíces reales de la ecuación

$$3x^5-10x^3-120x+30=0.$$

IV. Fijar, sirviéndose del teorema de Sturm, los números exactos de raíces positivas, negativas é imaginarias, de las ecuaciones

$$x^3-8x^2+11x+5=0\ ;\quad x^4-4x^3-2x^2+12x+8=0.$$

V. Conocer el número de raíces que hay, mayores que 5, en la siguiente ecuación:

$$x^3-13x^2+34x+48=0.$$

VI. Determinar las condiciones de realidad de todas las raíces de la ecuación de cuarto grado

$$x^4+px^2+qx+r=0.$$

(*) Podrían evitarse los coeficientes fraccionarios, multiplicando dos veces por el número 3, en la primera división, y una vez por el cuadrado de p, en la segunda.

IV.—Transformaciones elementales de las ecuaciones.

336. Objeto de la transformación. Las transformaciones generales que se explicaron al tratar de las ecuaciones de primer grado (**117**), tenían por principal objeto encontrar una ecuación de forma más sencilla ó conveniente, cuyas raíces fuesen las mismas de la propuesta; pero ahora nos proponemos, *dada una ecuación, obtener otra cuyas raíces estén ligadas con las de la primera por una relación determinada.*

La ecuación resultante de la transformación se llama *transformada*, y el fin á que aquélla se dirige, consiste generalmente en hallar otra ecuación más fácil de resolver, ó más á propósito para poner de manifiesto ciertas propiedades, ó para expresar determinadas condiciones; siendo también muchas veces un auxiliar indispensable para resolver ciertos problemas.

337. Procedimiento general. Una vez fijada la *relación de transformación*, ó, sea, la ecuación que expresa la dependencia mutua que ha de existir entre las raíces de la ecuación propuesta y las de la transformada, se comprende que el procedimiento general para obtener esta última, será eliminar la incógnita primitiva entre la ecuación que se considera y la que establece dicha relación de transformación.

Como los conocimientos adquiridos no nos permiten todavía efectuar la eliminación referida, sino en casos muy particulares, nos limitaremos á dar á conocer algunas transformaciones elementales, que hemos de utilizar en lo sucesivo.

338. Problemas más usuales de transformación. Los problemas de transformación que con más frecuencia se emplean, al resolver las ecuaciones, son los que siguen.

1.° *Transformar una ecuación en otra cuyas raíces sean iguales y de signos contrarios á las de la propuesta.*

Sea la ecuación que se considera $f(x) = 0$. Es evidente que si representamos por y la incógnita de la transformada, deberá verificarse, según el enunciado del problema, que $y = -x$, ó, bien, $x = -y$; lo cual nos dice que para obtener la ecuación pedida, bastará substituir en la propuesta $-y$ en vez de x.

Como ya hicimos con motivo de la regla de signos de Descartes, suele conservarse la misma letra x para representar la nueva incógnita, de modo que entonces no habrá más que substituir $-x$ en lugar de x.

Claro es que el efecto de tal substitución, consistirá en variar de signo los términos de grado impar y conservar el suyo los de grado par; pero cuando la ecuación dada es de grado impar, á fin de que el primer término sea siempre positivo, se cambia el signo á los dos miembros de la transformada, lo cual origina, en definitiva, el cambio de signo de los términos de grado par. Diremos, por lo tanto, que *la ecuación que tiene sus raíces iguales y de signo contrario á las de otra, no difiere de ella sino en los signos de los términos de diversa clase de grado, que el de dicha ecuación propuesta.*

Así: si se tiene

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7 = 0 \quad \text{será} \quad f(-x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7 = 0,$$

y cuando

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x - 5 = 0 \quad \text{se tendrá} \quad f(-x) = x^5 + 2x^4 + 3x + 5 = 0.$$

2.° *Transformar una ecuación en otra cuyas raíces sean inversas de las suyas.*

Sea la ecuación dada

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Representando por y la nueva incógnita, deberá verificarse la relación $y = \frac{1}{x}$, de donde $x = \frac{1}{y}$; luego bastará substituir, en la ecuación anterior, en vez de x, $\frac{1}{y}$ ó, bien, $\frac{1}{x}$, lo que da:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_0}{x^m} + \frac{A_1}{x^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{m-1}}{x} + A_m = 0;$$

y, quitando denominadores,

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots\cdots + A_1 x + A_0 = 0.$$

La comparación de esta ecuación con la propuesta indica, que *para transformar una ecuación en otra cuyas raíces sean inversas de las suyas, basta invertir el orden de los coeficientes, y multiplicarlos por potencias de la incógnita cuyos exponentes sean com-*

plementos de los de las potencias que multiplican, respecto del grado de la ecuación.

Según esta regla, cuando el término independiente sea negativo, habrá que cambiar los signos á todos los términos de la transformada, para que su primer término resulte positivo.

En tal concepto, de la ecuación,

$$f(x)=x^5-3x^2+8x-4=0 \quad \text{se deduce} \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=4x^5-8x^4+3x^3-1=0.$$

3.° *Transformar una ecuación en otra cuyas raíces sean iguales á las suyas, multiplicadas por un cierto número.*

Refiriéndonos á la misma ecuación general de la transformación precedente, y llamando k al número por el cual deben multiplicarse todas sus raíces, se deduce, de la ecuación de condición $y=kx$, que no habrá más que hacer $x=\frac{y}{k}$ en la propuesta, ó, bien, conservando la misma notación para la nueva incógnita que bastará substituir en lugar de x la relación $\frac{x}{k}$. Se tiene de este modo,

$$f\left(\frac{x}{k}\right)=A_0\frac{x^m}{k^m}+A_1\frac{x^{m-1}}{k^{m-1}}+\cdots\cdots+A_{m-1}\frac{x}{k}+A_m=0,$$

y haciendo desaparecer los denominadores,

$$A_0x^m+A_1kx^{m-1}+\cdots\cdots+A_{m-1}k^{m-1}x+A_mk^m=0;$$

es decir, que *para hallar la ecuación cuyas raíces sean los productos de las de otra ecuación dada, por un cierto número* k, *basta hacer homogéneos los términos de ésta, multiplicándolos por potencias convenientes de* k.

La solución de este sencillo problema permite resolver otro, que consiste en transformar una ecuación de coeficientes enteros, y en la que el primero tiene un valor cualquiera, en otra en la que el coeficiente de dicho primer término sea la unidad, sin que dejen de ser enteros ninguno de los demás coeficientes.

Dividiendo, en efecto, por A_0 los dos miembros de la ecuación á que nos referimos, resulta:

$$f(x)=x^m+\frac{A_1}{A_0}x^{m-1}+\cdots\cdots+\frac{A_{m-1}}{A_0}x+\frac{A_m}{A_0}=0;$$

y multiplicando las raíces por k, se halla la transformada

$$x^m+\frac{A_1k}{A_0}x^{m-1}+\cdots\cdots+\frac{A_{m-1}k^{m-1}}{A_0}x+\frac{A_mk^m}{A_0}=0.$$

Si se observa esta ecuación, vemos que dando á k el valor A_0, se logrará seguramente el objeto propuesto; pero se comprende que para las aplicaciones prácticas, efectuadas con ecuaciones numéricas, bastará descomponer A_0 en sus factores primos, é igualar primero k al producto de las potencias de esos factores que sean necesarias para hacer entero el segundo coeficiente, reducido á su expresión más sencilla, no introduciendo otras alteraciones, en ese primer valor de k, que las que puedan exigir los otros coeficientes para ser también enteros.

Así: considerando la ecuación

$$24x^3-42x^2+x-9=0 \quad \text{ó} \quad x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{1}{24}x-\frac{3}{8}=0,$$

se encuentra, al multiplicar las raíces por k,

$$x^3-\frac{7k}{4}x^2+\frac{k^2}{24}x-\frac{3k^3}{8}=0;$$

transformada que, haciendo $k=2^2.3=12$, se convierte en

$$x^3-21x^2+6x-648=0,$$

que es una ecuación con coeficientes enteros y con el del primer término igual á la unidad, cuyas raíces son doce veces mayores que las de la ecuación propuesta.

4.° *Hacer desaparecer un término de una ecuación.*

Si, designando por h una cantidad por determinar, substituímos $x+h$ en vez de x, en la ecuación que se considera,

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\cdots\cdots+A_m=0,$$

y desarrollamos según las potencias descendentes de x, tendremos (**310**):

$$f(x+h)=A_0x^m+\frac{f^{(m-1)}(h)}{\lfloor m-1}x^{m-1}+\frac{f^{(m-2)}(h)}{\lfloor m-2}x^{m-2}+\cdots\cdots+f(h)=0;$$

de modo que para que desaparezca el término que contiene la

$n^{\text{ésima}}$ potencia de x, bastará resolver la ecuación de condición

$$f^{(n)}(h) = 0,$$

que dará los valores de h que satisfacen ese propósito.

Siendo esta ecuación del grado $m-n$, habrá otros tantos valores de h de los que se podrá disponer, y, tomando uno cualquiera de ellos, su agregación á x, en la ecuación propuesta, producirá otra que no contendrá ya el término señalado; pero como dichos valores de h pueden ser todos inconmensurables, y aun imaginarios, y es preciso además resolver la ecuación que los determina, no será ventajosa, en general, sino la desaparición del segundo término, suponiendo la ecuación completa. La ecuación de condición correspondiente á ese caso es, según sabemos (**285**),

$$\frac{f^{(m-1)}(h)}{\lfloor m-1} = mA_0h + A_1 = 0 \quad \text{de donde} \quad h = -\frac{A_1}{mA_0};$$

lo cual nos dice que bastará substituir $x - \frac{A_1}{mA_0}$, en lugar de x, para lograr el efecto pedido.

Debe observarse que si, para diferenciarla de x, representamos por y la incógnita de la nueva ecuación, se tendrá:

$$x = y + h \quad \text{ó} \quad y = x - h,$$

y, por consiguiente, que el problema que acaba de resolverse, equivale á *tranformar una ecuación en otra cuyas raíces sean las de la primera, disminuídas en una cierta cantidad* (*); disponiendo de dicha cantidad, que se considera como indeterminada, para conseguir el fin propuesto.

Esta manera de considerar la cuestión permite ver, *à priori*, que disminuyendo cada una de las raíces de la ecuación dada en $-\frac{A_1}{mA_0} = -\frac{A_1}{A_0} : m$, que es la $m^{\text{ésima}}$ parte de la suma de todas ellas (**323**), las sumas de las raíces de la ecuación obtenida se reducirá á cero y carecerá, por lo tanto, del término de grado $m-1$. (**)

(*) Ya se sabe que la disminución comprende como caso particular el aumento, cuando la cantidad en que se disminuye es negativa.

(**) La desaparición de un término de una ecuación hace reaparecer, generalmente, todos aquellos de que carezca, y la de dos ó más términos no suele poder efectuarse por el procedimiento indicado; porque sería necesario que las ecuaciones de condición correspondientes tuviesen, por lo menos, una raíz común, ó sus primeros miembros un máximo común divisor función de h, y esto no ocurrirá sino muy raras veces.

El geómetra y físico alemán Federico Tschirnhauss, dió, á fines del siglo XVII, un método especial, que todavía se emplea, para hacer desaparecer cualquier número n de términos, de los que siguen al primero de una ecuación; pero tal método exige, en general, la resolución de otra ecuación del grado $\lfloor n$, no presentando por lo mismo ventaja alguna, si, como suele suceder, es $\lfloor n$ superior al grado de la ecuación propuesta, y no es susceptible de rebajarse el de dicha ecuación condicional. Un matemático inglés contemporáneo, Guillermo Jerrard, ha demostrado, sin embargo, que siempre pueden hacerse desaparecer de una ecuación cualquiera, el segundo, el tercero y el cuarto términos, resolviendo una sola ecuación de tercer grado.

Ejercicios.

I. Transformar las ecuaciones

$$x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 5x - 12 = 0 \quad \text{y} \quad x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 21 = 0$$

en otras cuyas raíces sean iguales y de signos contrarios á las suyas.

II. Hallar las ecuaciones cuyas raíces sean inversas de las de cada una de las que siguen:

$$x^4 + 12x^3 - 2x + 5 = 0; \quad x^5 - 7x^3 + 2x + 1 = 0; \quad x^6 - 3x^4 + 5x - 8 = 0.$$

III. Hacer desaparecer el segundo y el tercer término, respectivamente, en las ecuaciones

$$x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 11 = 0; \quad x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 5x + 7 = 0.$$

CAPÍTULO II

LÍMITES Y SEPARACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA

I—Límites de las raíces.

339. Definiciones. Como en la resolución de las ecuaciones numéricas de cualquier grado, que va á ser objeto de éste y de los siguientes capítulos, no pueden obtenerse, sino en muy raros casos, fórmulas que indiquen los sistemas de operaciones que deben efectuarse para hallar los valores de las incógnitas, es generalmente indispensable recurrir al procedimiento de las substituciones; y, en tal concepto, conviene determinar números entre los cuales se hallen comprendidas las diversas raíces de una ecuación. (*)

Refiriéndonos á una ecuación numérica dada, llamaremos *límite superior de las raíces positivas* á un número mayor que la mayor de sus raíces, y *límite inferior de las raíces positivas*, á un número menor que todas las de este signo. Análogamente se denominan *límite superior* y *límite inferior de las raíces negativas*, dos números negativos, tales que el primero sea menor y el segundo mayor en valor absoluto, que los valores absolutos de dichas raíces. (*)

(*) Vieta y Harriot fueron los primeros que se ocuparon de la resolución numérica de las ecuaciones de un grado cualquiera. Después de estos matemáticos, creadores del álgebra superior, dió Newton nuevos métodos de resolución; debiéndose notables procedimientos y desarrollos importantes á Descartes, Tschirnhauss, Euler, Bezout, Lagrange, D'Alembert, Juan Bautista Fourier, Cauchy, Sturm, Hermite, Sylvester y otros varios, entre los cuales merecen citarse, por un bello método dado recientemente á conocer, el profesor de la Universidad de Zurich, Luis Gräffe y el director del Observatorio de Berlín, Juan Francisco Encke.

De estas definiciones se deduce que, para unas mismas raíces, existen una infinidad de límites superiores é inferiores, y, por lo tanto, que convendrá obtener números que no difieran demasiado de dichas raíces. Se ve también que, entre un límite superior cualquiera de las raíces positivas de una ecuación y un límite inferior de las negativas (**), deben estar comprendidas todas las raíces reales de esa ecuación, y que no se hallará ninguna entre los otros dos límites.

340. Límite superior de las raíces positivas. Los tres primeros métodos que vamos á explicar, para obtener un número mayor que la mayor de las raíces de una ecuación, se fundan en el principio que sigue

TEOREMA. *Toda función entera ordenada por las potencias decrecientes de su variable, y cuyos términos no forman más que una sola variación, siendo el primero positivo, adquiere valores constantemente crecientes, cuando la variable crece á partir de un cierto número positivo que, reemplazado en lugar de ella en dicha función, la hace también positiva.*

Sea, en efecto, la función

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots - A_n x^{m-n} -$$
$$- A_{n+1} x^{m-n-1} - \cdots\cdots - A_m.$$

Sacando x^{m-n} por factor común, se transforma en

$$f(x) = x^{m-n}\left[A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots\cdots - \left(A_n + A_{n+1}\frac{1}{x} + \cdots\cdots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + A_m \frac{1}{x^{m-n}}\right)\right]$$

ó, lo que es lo mismo,

$$f(x) = x^{m-n}(P - Q)$$

(*) La palabra límite tiene en esta teoría una significación distinta de su verdadera acepción matemática, que dimos á conocer en la aritmética.

(**) Prescindiendo del signo, un límite inferior de las raíces negativas, es límite superior de sus valores absolutos.

representando, respectivamente, por P y por Q, las agrupaciones aditivas de los términos positivos y negativos, comprendidos entre corchetes.

Ahora bien: es evidente que, cuando se asignen á x valores positivos cada vez mayores, P irá aumentando y Q disminuyendo; de modo que si la diferencia $P - Q$ es positiva, para $x = a$, irá creciendo continuamente á partir de ese valor, y, como x^{m-n} también crece, el producto, que es la función propuesta, tomará valores positivos cada vez mayores; según se quería demostrar. (*)

Primer método. Sea la ecuación,

$$f(x) = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots\cdots + A_m = 0\,,$$

que suponemos despojada de su primer coeficiente. Si representamos por $-N$ el coeficiente negativo de mayor valor absoluto, el primer miembro de esta ecuación podrá ponerse bajo la forma:

$$f(x) = [x^m - Nx^{m-1} - Nx^{m-2} - \cdots\cdots - N] +$$
$$+ [(N + A_1)x^{m-1} + (N + A_2)x^{m-2} + \cdots\cdots + (N + A_m)]\,,$$

ó, bien,

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)\,,$$

designando por $\varphi(x)$ la primera agrupación y por $\psi(x)$ la segunda.

Como $\psi(x)$ tiene todos sus coeficientes positivos, tomará valores positivos cada vez mayores para todos los valores positivos y crecientes de x; y como el polinomio $\varphi(x)$ sólo tiene una variación y su primer término es positivo, tomará también valores crecientes á partir de cualquier valor, a, que haga positivo á dicho polinomio; luego $f(x)$ debe gozar evidentemente de la misma propiedad, y, por lo tanto, a será un límite superior de las raíces positivas de la ecuación propuesta.

La cuestión queda, pues, reducida á determinar un valor, a, de x, que haga positivo el polinomio

$$\varphi(x) = x^m - N(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots\cdots + 1) = x^m - N\frac{x^m - 1}{x - 1} =$$
$$= \frac{x^m(x - 1 - N) + N}{x - 1}\,;$$

(*) En el caso de haber un solo término negativo, Q permanecería invariable; pero aun así la diferencia $P - Q$ crecería, al dar valores crecientes á x.

luego bastará hacer

$$a = N + 1\,;$$

resultando así que *en toda ecuación, un límite superior de sus raíces positivas es el mayor de los valores absolutos de sus coeficientes negativos, aumentado en una unidad.* (*)

Método de Maclaurin. El límite que acaba de fijarse, aunque fácil de hallar en todos casos, suele ser demasiado grande, cuando el primer término negativo no es de grado inmediatamente inferior al de la ecuación de que forma parte.

Vamos, en efecto, á demostrar, que *en toda ecuación se obtiene un límite superior de las raíces positivas, aumentando una unidad al resultado de extraer, del mayor de los valores absolutos de sus coeficientes negativos, una raíz indicada por la diferencia que existe entre el grado de la ecuación y el de su primer término negativo.*

Es evidente que se hallará un límite superior de las raíces positivas de la ecuación antes considerada, si se determina un valor de x que satisfaga la desigualdad

$$x^m - N(x^{m-n} + x^{m-n-1} + \cdots\cdots + 1) > 0\,;$$

pues todos los términos, comprendidos entre x^m y el primer término negativo, son positivos, y además se reemplazan por N todos los coeficientes negativos.

Como la condición precedente equivale á

$$x^m - N\frac{x^{m-n+1} - 1}{x - 1} > 0 \quad \text{ó, bien,} \quad \frac{x^{m-n+1}[x^{n-1}(x-1) - N] + N}{x - 1} > 0,$$

y podemos siempre suponer $x > 1$ (**), bastará con que se verifique

$$x^{n-1}(x-1) - N > 0 \qquad \text{ó, en su lugar,} \qquad (x-1)^n - N = 0\,,$$

puesto que x es mayor que $x - 1$; pero esta última ecuación queda satisfecha siendo

(*) Si la ecuación careciera de términos negativos, se ve inmediatamente, y por la regla de los signos de Descartes, que no podría tener ninguna raíz positiva.

(**) Puede hacerse esta hipótesis, obligándonos á dar á x un valor mayor que la unidad.

$$x-1=\sqrt[n]{N} \quad \text{de donde} \quad x=1+\sqrt[n]{N},$$

conforme debía demostrarse. (*)

Si el primer término negativo fuese el de grado $m-1$, sería $n=1$ y volvería á encontrarse el límite obtenido por el método anterior.

Si consideramos, por ejemplo, la ecuación

$$x^7+4x^6-10x^5-13x^4+7x^3+12x-9=0,$$

se ve que, siendo 13 el mayor valor absoluto de los coeficientes negativos, y de quinto grado el primer término de ese signo, un límite superior de sus raíces positivas será:

$$a=1+\sqrt{13} \quad \text{y, con mayor razón,} \quad +L=5;$$

mientras que el primer método hubiera dado por límite $+L=14$.

Análogamente: de la ecuación

$$x^6-3x^3-5x^2-20x+7=0,$$

resulta

$$a=1+\sqrt[3]{20} \quad \text{de donde} \quad +L=4;$$

y, aplicando el método anterior, $+L=21$.

Método de los grupos. En virtud de la proposición preliminar que hemos demostrado, deducimos que si se descompone el primer miembro de una ecuación $f(x)=0$, en agrupaciones de términos, $\varphi(x)$, $\psi(x)$,.... que tengan el primero positivo y no presenten sino una sola variación, y hallamos en cada una un número que las haga positivas, el mayor de todos ellos hará también positivo á $f(x)$, y gozará de la propiedad de que cualquier número, mayor que él, hará que dicho primer miembro adquiera un valor seguramente positivo, siendo, por consecuencia, un límite superior de sus raíces positivas.

(*) Aunque no es condición necesaria, tanto este límite como el anteriormente hallado, suponen que la ecuación está despojada de su primer coeficiente, es decir, que se ha dividido por él cuando no sea igual á la unidad. En las aplicaciones prácticas, de ambos, suele tomarse como límite el número entero inmediatamente superior al fraccionario ó inconmensurable que suele resultar, procediendo según las reglas establecidas.

Refiriéndonos á la misma ecuación antes considerada,

$$x^7+4x^6-10x^5-13x^4+7x^3+12x-9=0,$$

y dividiéndola en agrupaciones que no presenten sino una sola variación, tendremos:

$$x^4(x^3+4x^2-10x-13)+(7x^3+12x-9)=0.$$

Substituyendo números positivos en cada uno de los dos grupos, se ve, desde luego, que 1 hace positivo al segundo, más no al primero, y que 3 hace positivo á éste (*); luego el valor $+L=3$ es un límite superior de sus raíces positivas.

A veces conviene variar el orden de los términos, ó bien sucede que quedan algunos positivos, hasta el último, de los cuales es necesario prescindir; pero se comprende que estas circunstancias no alteran el procedimiento explicado.

Así: en las ecuaciones,

$$x^5+7x^4-12x^3-49x^2+52x-13=0 \quad \text{y} \quad x^5-8x^4+5x^3-15x^2+2x+1=0$$

que se descomponen respectivamente en

$$x^3(x^2-12)+7x^2(x^2-7)+13(4x-1)=0$$

y

$$x^4(x-8)+5x^2(x-3)+2x+1=0,$$

se obtienen, en el mismo orden, los límites $+L=4$ y $+L=8$ (**).

También puede ser útil descomponer un término en dos, ó mayor número de partes, cuando su coeficiente sea bastante grande respecto de los demás. En la ecuación

$$x^4-6x^3+2x^2-20x-5=0$$

vemos, por ejemplo, que descompuesta en los grupos

$$x^3(x-6)+(2x^2-20x-5)=0,$$

resulta $+L=11$; mientras que partiendo en dos el término $-20x$, y llevando una de las partes al primer grupo, tenemos:

$$x(x^3-6x^2-10)+(2x^2-10x-5)=0,$$

de donde se halla el límite, más reducido, $+L=7$.

(*) Los resultados de las substituciones deben obtenerse, sirviéndose de la regla práctica que se dió en la primera de las aplicaciones del método de los coeficientes indeterminados (**55**).

(**) Nada importa que algunos grupos se reduzcan á cero.

MÉTODO DE NEWTON. Este método se funda en la siguiente proposición.

TEOREMA. *Si las funciones de la serie*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ldots\ f^{(m-1)}(x),\ f^{(m)}(x),$$

formada por una función, entera del grado m, *y sus derivadas sucesivas, son todas positivas para un valor* a, *de la variable* x, *también lo serán para cualquier valor* a $+$ h, *mayor que* a.

Desarrollando, en efecto, $f(a+h)$ por la fórmula de Taylor, se tiene:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^m}{\underline{|m}}f^{m}(a);$$

y como, según la hipótesis, todos los términos son positivos, se verificará que

$$f(a+h)>0;$$

pudiendo demostrarse de igual modo, que $f'(a+h)$, $f''(a+h)$..... tienen análogamente valores positivos.

Establecido este principio, se deduce que el número a, que cumple con las condiciones expresadas, es un límite superior de las raíces positivas de la ecuación $f(x)=0$. (*)

Para determinar dicho número, una vez formadas las funciones que hemos indicado, se busca un número, x_0, que haga positiva ó nula la función $f^{(m-1)}(x)$; lo cual es fácil, porque esta función es de primer grado (**). Si todas las funciones, que preceden á $f^{(m-1)}(x)$, son positivas para $x=x_0$, ese número será el límite buscado; pero si alguna fuese negativa, se tomará otro valor x_1, mayor que x_0, que haga positiva dicha función. Igualmente: si para este valor, x_1, es negativa alguna de las funciones que preceden á la que consideramos, se incrementará hasta obtener otro valor, x_2, para el cual sea ya positiva. Procediendo de esta manera, con las funcio-

(*) Este número es también límite superior de las raíces positivas de todas las ecuaciones, que se obtendrían igualando á cero las derivadas sucesivas hasta la del orden $m-1$ inclusive.

(**) No debe olvidarse que $f^{(m)}(x)$ es sólo una función aparente de x, y que su valor, $\underline{|m}\,A_0$, será positivo, siéndolo el primer término de la ecuación propuesta.

nes anteriores, se llegará necesariamente á un cierto valor de x que haga positiva á la función $f(x)$, así como á todas sus derivadas, y este valor será el límite superior pedido. (*)

La mayor sencillez en la aplicación del método que acaba de explicarse, conduce á considerar, en vez de las derivadas sucesivas, sus cocientes por las factoriales de su mismo orden, lo cual reduce los coeficientes numéricos.

Si se considera, por ejemplo, la ecuación de quinto grado que sigue,

$$f(x)=x^5-10x^4-32x^3+7x^2-500x-120=0,$$

se tiene la serie de igualdades:

$$f'(x)=5x^4-40x^3-96x^2+14x-500;\quad \frac{f''(x)}{\underline{|2}}=10x^3-60x^2-96x+7;$$

$$\frac{f'''(x)}{\underline{|3}}=10x^2-40x-32;\quad \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{\underline{|4}}=5x-10;\quad \frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{\underline{|5}}=1.$$

El número que primeramente debe ensayarse es, pues, el 2, que anula á la cuarta derivada; pero como no hace positiva á la tercera, se buscará el primer entero, 5, que satisfaga esa condición. Este valor no anula, ni hace tampoco positiva, á la segunda derivada, así es que lo aumentaremos hasta llegar al número 8, que la hace adquirir un valor mayor que cero; mas como la derivada de primer orden es negativa, para $x=8$, es preciso ascender hasta el número 10; y siendo éste todavía insuficiente para hacer positivo el polinomio $f(x)$, hay que llegar hasta el número $+L=13$, que será ya un límite superior de las raíces de la ecuación propuesta.

Se ve fácilmente que el primer método hubiera dado por límite superior $+L=501$, y el de los grupos $+L=72$.

341. Límite inferior de las raíces positivas. Transformando la

(*) Es digno de notarse que cuando el valor a, que así se obtiene, es entero, y las raíces de la ecuación $f(x)=0$ son todas reales, ese número será el entero inmediatamente superior á la mayor raíz positiva; pues es el primer número de esa clase que hace que sólo presente permanencias la ecuación $f(a+x)=0$, cuyas raíces son las de la propuesta disminuidas en a (338), y, en tal caso, esa condición es necesaria para que no tenga ninguna raíz positiva dicha ecuación transformada.

ecuación propuesta en otra cuyas raíces sean inversas de las suyas (**338**), se deduce de la relación $x = \frac{1}{y}$, que si a es un límite superior de las raíces de la nueva ecuación, $+L_1 = \frac{1}{a}$ será un límite inferior de las de la primera.

Así: de las ecuaciones

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 17x - 5 = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 2x + 6 = 0$$

resulta, respectivamente,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x^3 - 17x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x^4 - 2x^3 + 11x^2 - x + 3 = 0;$$

y como descomponiendo estas últimas en los siguientes grupos,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(5x - 17) + (2x - 1) = 0$$

y

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^3(3x - 1) + x(11x - 1) + 3 = 0,$$

se hallan como límites superiores 4 y $\frac{1}{3}$, deducimos que $+L_1 = \frac{1}{4}$ y $+L_1 = 3$, serán, en su mismo orden, los límites inferiores de las raíces positivas de las ecuaciones dadas.

342. Límites, superior é inferior, de las raíces negativas. Los límites que corresponden á las raíces negativas de una ecuación, $f(x) = 0$, se obtendrán, evidentemente, hallando los de las raíces positivas de la ecuación transformada $f(-x) = 0$, y cambiándoles el signo.

En tal concepto, si se considera, por ejemplo, la ecuación

$$f(x) = x^7 + 3x^6 - 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 12x - 20 = 0,$$

se hallarán las nuevas ecuaciones

$$f(-x) = x^7 - 3x^6 + 5x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 12x + 20 = x^6(x - 3) + \\ + x(5x^3 - 6x^2 - 8x - 12) + 20 = 0$$

y

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 20x^7 - 12x^6 - 8x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 3x + 1 = \\ = 2x^4(10x^3 - 6x^2 - 4x - 3) + x(5x^2 - 3) + 1 = 0;$$

las cuales permiten deducir que los límites, superior é inferior, de

las raíces positivas de la ecuación transformada en $-x$, son, respectivamente, 3 y $\frac{1}{2}$; y, en su consecuencia, que $-L' = -3$ y $-L'_1 = -\frac{1}{2}$, serán los límites, inferior y superior, de las raíces negativas de la propuesta.

Debe advertirse que resultando generalmente menores que la unidad, en valor absoluto, el límite inferior de las raíces positivas y el superior de las negativas no suelen utilizarse en la práctica.

Ejercicios.

I. Hallar, por todos los métodos explicados, los límites superior é inferior de las raíces positivas y negativas de las ecuaciones que siguen:

$$x^5 - 15x^4 + 36x^3 - x^2 + 5x + 8 = 0; \quad x^4 + 2x^3 + x + 3 = 0;$$
$$x^3 + 3x^2 - 17x - 5 = 0; \quad x^5 + 25x^4 - 2x^2 - 100x + 3 = 0;$$
$$x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 103x + 212 = 0.$$

II. Demostrar que se obtiene un límite inferior de las raíces positivas de una ecuación, dividiendo su último término por la suma aritmética de éste y del mayor coeficiente de signo contrario á él.

II.—Separación de las raíces.

343. Definición. *Se dice que una raíz de una ecuación está separada, cuando se conocen dos números que la comprenden y no hay entre ellos ninguna otra raíz de esa ecuación.*

La definición precedente no supone que las raíces hayan de ser simples; mas, tratándose de una raíz múltiple, la separación no se considera completa sino conociendo también el grado de multiplicidad de dicha raíz (**327**). No es indispensable, sin embargo, tener presente esta circunstancia; pues ya se sabe (**328**) que la resolución de una ecuación, que tiene raíces iguales, se descompone en la de otras varias cuyas raíces son sencillas.

Entre los diversos procedimientos empleados para efectuar la separación referida, los más importantes son los siguientes.

344. Método de las substituciones sucesivas. Suponiendo que se conozca el número exacto de raíces reales que tiene una ecuación, así como los límites entre los cuales se hallan comprendidas, puede lograrse su separación por medio de substituciones de números que varíen en progresión por diferencia, y comprendidos entre los límites fijados.

Si se empieza, en efecto, por substituir en el primer miembro de la ecuación considerada, la serie natural de los números enteros que comprenden dichos límites, continuando después por los números intermedios que difieran en una décima y siguiendo las substituciones con nuevos números que se diferencien en una centésima, una milésima, etc., se llegará indudablemente á separar las raíces, conociéndose que tal separación está efectuada, cuando se obtengan tantos pares de resultados sucesivos de signos contrarios como raíces reales tenga la ecuación; pues entonces dos números que den resultado de diverso signo no podrán comprender más de una raíz, y cada dos, que den signos iguales, no comprenderán de seguro ninguna (**329**).

Claro es que, procediendo del modo que acaba de indicarse, la mayoría de las substituciones hechas serán infructuosas y sólo se podrán utilizar los números á cuya substitución correspondan signos contrarios; pero, á pesar de ser tan enojoso, este método no pierde su importancia, porque es el más elemental y bastante práctico, cuando se opera con una ecuación que no es de grado muy considerable.

Si se desconoce el número exacto de las raíces reales de una ecuación, que es lo que generalmente ocurre (*), el procedimiento de las substituciones sucesivas no manifiesta que la separación esté efectuada, sino cuando al substituir, por vía de ensayo, varios números comprendidos entre los límites de las raíces, se encuentren tantos pares de resultados de signos distintos como indique el número total de variaciones que presenten la ecuación propuesta y su transformada en $-x$ (**331**) (**). De no verificarse esto después de algunas substituciones, se ignorará si consiste en que hay menor número de raíces reales que el de las variaciones di-

(*) Para saberlo, en todos casos, hay que recurrir á las funciones de Sturm.
(**) Considerando aisladamente los signos que corresponden á la substitución de cero y de los números positivos y negativos, podrá saberse algunas veces si están separadas las raíces de un mismo signo.

chas ó en que no se han llevado bastante adelante las substituciones de números intermedios y, en tal caso, el método que nos ocupa no será de útil aplicación.

Las substituciones sucesivas se efectúan, según se ha dicho, por números que varían en unidades decimales, si bien es más frecuente substituir entre cada dos números anteriores su media aritmética, exacta ó aproximada, y aun algunas veces, para alcanzar mayor rapidez, se supone que las variaciones de la función son sensiblemente proporcionales á las de la variable (*); pero nada de esto es indispensable, y los números que se substituyen pueden seguir otra ley cualquiera ó no seguir ninguna.

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 13 = 0.$$

Esta ecuación de grado par, cuyo último término es negativo, tiene por lo menos dos raíces reales, una positiva y otra negativa (**329**); mas como su primer miembro no presenta sino una sola variación y lo mismo sucede á su transformada en $-x$, deducimos, por la regla de Descartes, que únicamente tendrá las dos raíces reales que acaban de indicarse. (**)

Empleando el método de los grupos, se halla que un límite superior de las raíces positivas es $+L=3$, y otro inferior de las negativas $-L' = -4$.

Substituyendo ahora en el primer miembro de la ecuación propuesta los valores numéricos

$$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

los resultados tienen respectivamente los signos que siguen:

$$f(x) = +, -, -, -, -, -, -, +;$$

de modo que la raíz positiva estará comprendida entre 2 y 3 y la

(*) La proporcionalidad exacta supone, en la representación geométrica de la función que expresa el primer miembro de la ecuación propuesta, que la pequeña parte de curva comprendida entre los puntos que corresponden á los valores considerados, se confunde con su cuerda; hipótesis tanto más aproximada, cuanto menos difieran entre sí dichos valores.
(**) Observando que la ecuación carece de un término, entre dos de igual signo, se ve también que debe tener un par de raíces imaginarias.

negativa entre -3 y -4; encontrándose separadas cada una de ellas.

Consideremos ahora la ecuación de tercer grado

$$f(x) = 7x^3 - 11x + 5 = 0.$$

Como sus coeficientes satisfacen la condición de realidad, $4p^3 + 27q^2 < 0$, se deduce que tendrá dos raíces positivas y una negativa.

Siendo $+L = 2$ y $-L' = -2$, dos límites extremos de estas raíces reales, si substituímos, por orden sucesivo, los números

$$x = -2, -1, 0, 1, 2$$

se obtienen los resultados correspondientes

$$f(x) = -29, +9, +5, +1, +39\,;$$

lo cual nos dice que la raíz negativa se encuentra separada y comprendida entre -1 y -2; mientras que las raíces positivas, no sólo no están separadas, sino que se ignora si se hallarán entre 0 y 1, ó entre 1 y 2.

Substituyendo las medias aritméticas 0,5 y 1,5, los resultados de las substituciones son todavía positivos; pero observando que, si las variaciones de la función son sensiblemente proporcionales á las de la variable, las raíces de que se trata deben estar más próximas á 1, que á 0 y á 2, convendrá substituir el valor $x = 0,8$, lo que da $f(0,8) = -0,216$. Se deduce, por consiguiente, que una de las raíces está comprendida entre 0,5 y 0,8 y la otra entre 0,8 y 1; quedando ya la separación efectuada. (*)

Sea, por último, la ecuación cuyas raíces quieren separarse,

$$f(x) = x^5 - 18x^2 - 29x + 5 = 0.$$

Como esta ecuación es de grado impar, tendrá al menos una raíz negativa (**329**); y puesto que $f(-x)$ sólo presenta una variación, no podrá tener más raíces de este signo. Las raíces positivas,

(*) Hubiera podido verse, desde luego, que las raíces positivas no pueden hallarse entre 1 y 2, notando que la suma de las tres debe ser cero, por carecer la ecuación de segundo término, y que la negativa es menor que 2, en valor absoluto. También podría deducirse la misma consecuencia notando que la derivada $f'(x) = 21x^2 - 11$ es positiva y, por tal motivo, $f(x)$ creciente, para todo valor de x mayor que la unidad.

caso de haberlas, serán precisamente dos, que es el número de variaciones del primer miembro; mas como nada indica que hayan de existir tales raíces, se ignora el número exacto de raíces reales de esta ecuación. (*)

Esto no obstante, el método de los grupos da como límites extremos, $+L = 4$ y $-L' = -2$, y substituyendo los valores

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

los resultados tienen los signos respectivos

$$f(x) = -, +, +, -, -, -, +\,;$$

de suerte que habiendo tres pares de signos contrarios, y siendo tres el máximum de raíces reales, éstas se hallarán separadas entre los números correspondientes.

345. Método de Lagrange. Como procedimiento aplicable á todos los casos, Lagrange siguió un método fundado en el conocimiento de una cantidad igual ó menor que la menor de las diferencias que existen entre cada dos raíces de la ecuación propuesta. Para aplicarlo, una vez formada la ecuación cuyas raíces sean dichas diferencias (**), se halla un límite inferior δ de las raíces positivas de esta ecuación (***), y designando respectivamente por

(*) Se conoce también que hay por lo menos un par de raíces imaginarias, observando que falta más de un término entre dos consecutivos de signos contrarios (**331**).

(**) Es evidente que para obtener la ecuación de las diferencias de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, bastará eliminar x' y x'', que representan dos raíces cualesquiera de esta última, entre las ecuaciones de condición

$$y = x' - x'', \qquad f(x') = 0, \qquad f(x'') = 0,$$

ó bien, x, entre

$$f(x+y) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = 0.$$

Después de obtenida la ecuación resultante de esta eliminación, será necesario dividirla por y^m, á fin de separar las m soluciones nulas que deberán resultar forzosamente; puesto que, en las ecuaciones condicionales, nada supone que x' y x'' no sean una misma raíz de la propuesta.

En la práctica se evita dicha división, eliminando x entre las ecuaciones

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = 0.$$

(***) Se ve, *à priori*, que la ecuación de las diferencias tendrá sus raíces iguales, dos á dos, y de signos contrarios.

$-L'$ y $+L$, el límite inferior de las raíces negativas y el superior de las positivas, de la ecuación considerada, estaremos seguros que haciendo las substituciones sucesivas de los términos de la progresión aritmética

$$\div -L'.\ -L'+\delta.\ -L'+2\delta.\ -L'+3\delta......$$

hasta llegar á un término igual ó mayor que $+L$, la separación quedará efectuada; porque cada dos términos consecutivos de esta progresión no pueden comprender sino una sola raíz, y darán resultados de signos diferentes ó iguales, según que comprendan, ó no, alguna de las raíces.

Este método tiene la ventaja de que no exige el conocimiento anterior del número de raíces reales de la ecuación; pero, el obtener la ecuación de las diferencias, hace casi siempre indispensable efectuar cálculos bastante prolijos y servirse de la teoría de la eliminación, de la cual aún no se ha tratado. (*)

346. Método de Sturm. Se ve fácilmente que, aplicando el teorema de Sturm á la serie de funciones

$$X, X', X_1, X_2, ...\ X_p,$$

en las que supondremos se substituyan números comprendidos entre los límites de las raíces de la ecuación $X=0$, se llegará también á efectuar la separación de dichas raíces, con la circunstancia favorable de saber desde luego cuántas hay comprendidas entre cada dos números, y no tener, por consiguiente, que efectuar nuevas interpolaciones, sino entre aquellos de dichos números que comprendan más de una raíz.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$X = x^4 - 15x^2 + 12x - 2 = 0$$

que debe tener una ó tres raíces positivas y tan solo una negativa, por no presentar más de una variación la transformada

(*) Aunque no lleva su nombre, se sabe que el método que acaba de explicarse, fué ideado, en el último tercio del siglo último, por el matemático inglés Eduardo Waring. El insigne Lagrange lo perfeccionó, empleando con ventaja la ecuación de los cuadrados de las diferencias de las raíces, que se halla haciendo $y^2 = z$ en la de las diferencias, y transformando la ecuación propuesta, de modo que sólo tengan que substituirse números enteros.

$f(-x)$, y en la cual dos límites extremos de las raíces son $-L' = -5$ y $+L = 4$.

No habiendo más que una raíz negativa, es claro que su separación quedará efectuada, substituyendo simplemente, en el primer miembro de la ecuación propuesta, los números $-5, -4, -3, -2, -1$, si bien es inútil substituir los tres últimos, por dar ya los dos primeros signos contrarios.

Para las raíces positivas, haremos sucesivamente

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

y como los resultados tienen por signos respectivos

$$X = -, -, -, -, +$$

no se sabe si entre 3 y 4 hay tres raíces comprendidas, ó si hay sólo una y otras dos están entre dos de los números que dan resultado de igual signo, ó, finalmente, si la ecuación tiene un par de raíces imaginarias.

Con objeto de aclarar estas dudas, recurriremos á las funciones de Sturm,

$$X = x^4 - 15x^2 + 12x - 2;\quad X' = 4x^3 - 30x + 12;\quad X_1 = 15x^2 - 18x + 4;$$
$$X_2 = 949x - 402;\quad X_3 = 859480;$$

y substituiremos en todas ellas cero y los valores positivos asignados á x. (*)

Los signos de los resultados de dichas substituciones, y las variaciones que corresponden á cada número, se indican en el cuadro siguiente:

	X	X'	X_1	X_2	X_3	
$x=0$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	3 variaciones.
$x=1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1 variación.
$x=2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	1 variación.
$x=3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	1 variación.
$x=4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 variaciones.

En virtud de cuanto así resulta, se ve que entre 0 y 1 hay comprendidas dos raíces, y una tercera entre 3 y 4.

(*) Siendo cinco el número de funciones y sus primeros términos positivos, se deduce ya que todas las raíces son reales.

Para separar las dos raíces que comprenden 0 y 1, ensayaremos la media diferencial 0,5; y como al substituirla en X se encuentra un resultado positivo, es decir, de signo contrario á los que han dado aquellos números, se deduce, sin continuar más adelante las substituciones, que la separación queda efectuada; habiendo una raíz entre 0 y 0,5, y otra entre 0,5 y 1. (*)

Debe observarse que este método, sin duda alguna el más seguro y científico, tiene el inconveniente de que obliga no sólo á calcular las funciones de Sturm, sino á efectuar en todas ellas las substituciones; lo cual aumenta el trabajo de una manera extraordinaria.

Conviene notar, por último, que la separación de las raíces de una ecuación, no es en absoluto indispensable para resolverla; y que si hubiese siquiera dos de esas raíces, cuya diferencia fuese muy pequeña, dicha separación podría obligar á obtenerlas todas con mayor aproximación que la necesaria, ó que la primeramente fijada.

De todos modos, y según veremos al resolver las ecuaciones numéricas, la separación no se efectúa más que para determinar las raíces inconmensurables; así como tampoco se descompone la resolución de una ecuación que tiene raíces múltiples, en la de otras de raíces simples, sino para el cálculo de las referidas raíces inconmensurables y de las que son imaginarias. (**)

(*) Fácilmente se advierte que el método que acaba de explicarse no exige como conocimiento preliminar la regla de Descartes, ni tampoco el cálculo anterior de los límites extremos de las raíces; pues, partiendo del cero, bastará llegar en las substituciones de los números positivos, hasta un número que dé tantas variaciones como presenten los signos de los primeros términos de las funciones, ó, sea, como da $x = +\infty$; y, al substituir los números negativos, bastará detenerse al obtener el mismo número de variaciones que presenten los signos de los primeros términos de las funciones de grado par y los contrarios de los primeros de grado impar, que son los que corresponden á $x = -\infty$.

(**) No obstante que la definición de lo que se entiende por separar raíces, se refiere implícitamente á las que son reales, observaremos que la separación de las raíces imaginarias de una ecuación, consistiría en determinar pequeños rectángulos, de lados paralelos á los ejes adoptados para representar gráficamente su primer miembro, dentro de los cuales no hubiese sino un solo punto cuyas coordenadas y y z hicieran que $y + z\sqrt{-1}$ fuese raíz de la ecuación propuesta. La determinación de dichos rectángulos, llamados

Ejercicios.

I. Separar las raíces de las ecuaciones que siguen, por el método de las substituciones sucesivas.

$$x^3 - 8x^2 - 6x + 9 = 0\,;\quad x^4 - 10x^3 + 24x^2 - 2x - 1 = 0\,;\quad x^3 + x - 3 = 0\,;$$
$$x^4 - 3x^2 + 4x - 4 = 0\,;\quad x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0\,;$$
$$4x^5 - 5x^3 + 3 = 0.$$

II. Separar, por el método de Sturm, las raíces de las siguientes ecuaciones.

$$x^3 - 7x + 7 = 0;\quad x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 3 = 0;\quad x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 8x - 4 = 0;$$
$$x^4 + 2x^2 - 4x + 10 = 0\,;\quad x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0\,;$$
$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x + 6 = 0\,;\quad x^5 + 2x - 7 = 0.$$

---

celdas, por el *método de Cauchy*, único conocido para este objeto, obliga á desarrollos teóricos y prácticos tan complicados, que no suelen emplearse para resolver las ecuaciones numéricas.

CAPÍTULO III

CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA

I.—Raíces conmensurables.

347. Investigación de las raíces enteras. Una vez obtenidos los límites que comprenden las raíces de una ecuación, $f(x)=0$, será fácil determinar las enteras; pues bastará substituir, en vez de x, cada uno de los números enteros comprendidos entre dichos límites; y aquellos que anulen á $f(x)$ serán las raíces enteras de esa ecuación.

A pesar de la sencillez del procedimiento, en la práctica no se substituyen por completo todos esos números; porque, según vamos á demostrar, tienen que cumplir ciertas condiciones, que permiten reconocer, á veces desde luego, que algunos de ellos no pueden verificar la ecuación considerada.

TEOREMA. *Las raíces enteras de la ecuación*

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

cuyos coeficientes son enteros, tienen que ser divisores de su último término.

Efectivamente: si a es un número entero, raíz de esta ecuación, el polinomio $f(x)$ será divisible por $x-a$, y, en virtud de la ley de formación del cociente (**55**), éste tendrá todos sus términos enteros; pero, de cualquier manera que se efectúe la división, siempre habrá de obtenerse el mismo cociente, de suerte que, si ordenamos $f(x)$ por las potencias ascendentes de x y dividimos

por $a-x$, deberemos encontrar los mismos términos del cociente con signos contrarios; puesto que el divisor tan sólo ha cambiado de signo. Ahora bien: el primer término del cociente así obtenido será $\frac{A_m}{a}$, y como debe ser entero, deducimos que a tiene que dividir exactamente á A_m, conforme quería demostrarse. (*)

Como esta condición es sólo necesaria, se comprende que no bastará que se verifique, para que a sea raíz de la ecuación; siendo también indispensable que satisfaga todas aquellas otras condiciones que exijan, para ser enteros, los demás términos del cociente y aun el último residuo para reducirse á cero.

Efectuando la división referida, se tiene:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
A_m + A_{m-1} & x + \cdots\cdots + A_1 & x^{m-1} + A_0 & x^m & \;a - x \\ \cline{5-5}
\quad + C_{m-1} & \qquad\qquad + C_1 & \qquad + C_0 & & C_{m-1} + C_{m-2}\, x + \cdots\cdots + \\
 & & & & + C_1 x^{m-2} + C_0 x^{m-1}
\end{array}$$

representando por la letra C, afectada de subíndices, los coeficientes de los diversos términos del cociente.

Si se observa la marcha de la operación, en el supuesto de que sea la ecuación completa, vemos que el coeficiente de un término cualquiera del cociente, se forma sumando algebraicamente el del término anterior, con el coeficiente del término del dividendo que ocupa el mismo lugar que el considerado del cociente, y dividiendo esta suma por a; de suerte que como todos los términos del cociente han de ser enteros, todas estas diversas sumas han de ser divisibles por a; viéndose también que, si el resto final ha de reducirse á cero, es indispensable que el coeficiente del último término del cociente, sea igual y de signo contrario al del primer término de la ecuación.

Como consecuencia de lo dicho, deducimos que para examinar si alguno de los divisores de A_m, comprendidos entre los límites de las raíces, es raíz de la ecuación propuesta, debe practicarse la regla siguiente: *se dividirá el último término del primer*

(*) El conocimiento de esta propiedad se debe á Jacobo Peletarius, matemático francés de mediados del siglo XVI.

miembro por ese número; se sumará el cociente con el coeficiente del penúltimo término, ó, sea, con el de la primera potencia de x, *y se dividirá la suma hallada por* a; *se añadirá al cociente el coeficiente del término anterior en* x^2, *y se dividirá también la suma por* a; *y así continuaremos, sucesivamente, hasta agregar el primer coeficiente; debiendo ser todas las sumas obtenidas divisibles por* a *y la última igual á cero.* (*)

Claro es que cuando alguna de las condiciones mencionadas no se verifique, el número a no podrá ser raíz de la ecuación; pero si todas quedan satisfechas, deberá serlo; porque se podrá dividir exactamente el primer miembro de dicha ecuación por el binomio $x-a$.

Conviene también notar que el cociente de $f(x)$ por ese binomio se tiene entonces formado, y que puede rebajarse en una unidad el grado de la ecuación; pues los coeficientes de sus términos son los cocientes enteros obtenidos en las divisiones sucesivas, cambiados los signos y el orden en que han resultado.

Si se opera de igual modo con la ecuación así simplificada y con las que se vayan obteniendo, es evidente que se determinarán todas las raíces enteras de la ecuación propuesta.

El número de ensayos ó substituciones puede disminuirse, observando que si a es una raíz entera de la ecuación $f(x)=0$, se tendrá:

$$\frac{f(x)}{x-a}=f_1(x),$$

siendo $f_1(x)$ un polinomio de coeficientes enteros.

Si en esta igualdad se reemplaza x por un número cualquiera α, deberá ser:

$$\frac{f(\alpha)}{a-\alpha}=-f_1(\alpha);$$

mas como el segundo miembro es entero, para valores enteros de α, deberá verificarse la condición de que $a-\alpha$ sea divisor de $f(\alpha)$.

Haciendo $\alpha=1$ y $\alpha=-1$, se deduce que $f(+1)$ tendrá que

(*) En el caso de ser la ecuación incompleta, es necesario completarla, poniendo cero por coeficiente á los términos que falten.

ser divisible por $a-1$, y $f(-1)$ por $a+1$; de manera que, calculados esos valores de $f(x)$ por substituciones directas, convendrá ver, antes de aplicar la regla explicada al número a, si $a-1$ y $a+1$ dividen exacta y respectivamente á dichas funciones numéricas; lo cual reducirá bastante el número de los ensayos directos. (*)

Con objeto de aplicar el procedimiento, consideremos la ecuación

$$f(x)=x^5-4x^4-101x^3+14x^2+504x+576=0.$$

Por el método de los grupos se halla desde luego que sus raíces reales están comprendidas entre $-L'=-9$ y $+L=13$; y, substituyendo, resulta:

$$f(+1)=990=2.3^2.5.11 \qquad \text{y} \qquad f(-1)=182=2.7.13.$$

De conformidad con lo expuesto, no podrán ser raíces enteras sino los divisores de 576, comprendidos entre los límites -9 y 13, y que disminuídos y aumentados, separadamente, en una unidad, sean divisores respectivos de $f(+1)$ y $f(-1)$.

Sin dificultad alguna quedan así desechados los números $2, -3, 4, -4, -6, 8$ y 9; de suerte que sólo habrá que ensayar los divisores -2, 6, -8 y 12, dispuestos, para más sencillez, por orden de sus valores absolutos.

A fin de proceder ordenadamente, dispondremos los ensayos según indica el cuadro que sigue, en el cual puede observarse que, una vez despojada la ecuación de las raíces enteras calculadas, se vuelve á ensayar el mismo número, por si fuese raíz múltiple de dicha ecuación. (**)

(*) Para aplicar estos *caracteres de exclusión*, que unos atribuyen á Newton y otros á Bezout, es útil descomponer en sus factores primos $f(+1)$ y $f(-1)$, á fin de ver más rápidamente si se verifica ó no la condición de divisibilidad.

De tales caracteres y de lo anteriormente expuesto se deduce, como consecuencia muy bella, que cuando el último término de la ecuación y $f(+1)$ ó $f(-1)$ sean números impares, no podrá haber raíces enteras.

(**) Lo penoso de la aplicación del método de las raíces iguales (**328**), hace preferible repetir los ensayos, con aquellos números que son raíces enteras de la ecuación propuesta.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 - 4x^4 & -101x^3 & +14x^2 & +504x & +576 & & \\
& +27 & +47 & -108 & -288 & & -2 \text{ no es raiz.} \\
& & +19 & +100 & +96 & & +6 \text{ no es raiz.} \\
0 - 1 & +12 & +5 & -54 & -72 & & -8 \text{ es raíz.} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
\dfrac{f(x)}{x+8} = x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 54x + 72 & \\
-\ 9 & -\ 8 \text{ ya no es raíz.} \\
0 - 1 \quad 0 + 5 + 6 & +12 \text{ es raíz.} \\
\hline
\dfrac{f(x)}{(x+8)(x-12)} = x^3 - 5x - 6 = 0 & \text{Sin raíces enteras.}
\end{array}
$$

348. Investigación de las raíces fraccionarias. El cálculo de las raíces fraccionarias conmensurables, se funda en las siguientes consideraciones.

Sea la ecuación

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + A_m = 0,$$

cuyos coeficientes son enteros. Toda raíz fraccionaria conmensurable, podrá siempre ponerse bajo la forma de una fracción irreducible, $\frac{a}{b}$, la cual, substituída en la ecuación anterior, dará:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = A_0 \frac{a^m}{b^m} + A_1 \frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + A_2 \frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} + \cdots\cdots + A_m = 0;$$

y multiplicando por b^{m-1} y pasando al segundo miembro todos los términos que siguen al primero de ellos, se halla:

$$\frac{A_0 a^m}{b} = -\left(A_1 a^{m-1} + A_2 b a^{m-2} + \cdots\cdots + A_m b^{m-1}\right).$$

Como el segundo miembro es entero, el primero deberá serlo también; luego b ha de dividir exactamente al producto $A_0 a^m$ y como a y b son primos entre sí, b dividirá á A_0. Resulta, por lo tanto, que *toda raíz conmensurable fraccionaria, tiene por denominador uno de los divisores del coeficiente del primer término.*

Si el resultado directo de la substitución se multiplica ahora por b^m y se divide por a, se tiene trasponiendo,

$$\frac{A_m b^m}{a} = -\left(A_0 a^{m-1} + A_1 b a^{m-2} + \cdots\cdots + A_{m-1} b^{m-1}\right);$$

y como el segundo miembro es entero, el primero también lo será, lo cual exige que a divida exactamente á A_m. Así: *toda raíz conmensurable fraccionaria, debe tener por numerador alguno de los divisores del último término de la ecuación.*

Como, de la primera de las dos condiciones establecidas, se deduce que *una ecuación con coeficientes enteros, y cuyo primer coeficiente sea la unidad, no puede tener ninguna raíz fraccionaria conmensurable,* resulta que la investigación de esta clase de raíces podrá reducirse á la de las enteras, transformando la ecuación en otra que tenga por coeficiente del primer término la unidad, sin que los demás dejen de ser enteros, ó, sea, multiplicando sus raíces por un número, k, fácil de determinar en cada caso (**338**).

Transformada así la ecuación que haya resultado de despojar la propuesta de los factores de primer grado, correspondientes á sus raíces enteras, y fijado el menor valor de k capaz de realizar la transformación referida, se hallarán las raíces enteras de la nueva ecuación por el procedimiento ya explicado; y dividiéndolas después por k, se tendrán todas las raíces fraccionarias y racionales de la ecuación dada, reducidas á su mínimo común denominador. (*)

Es fácil que se disminuya el número de los ensayos, observando que el mayor valor absoluto de las raíces fraccionarias de la ecuación propuesta, será á lo más igual á A_m dividido por el menor divisor de A_0 distinto de la unidad, y que, por consiguiente, la mayor raíz entera, en valor absoluto, de la transformada, será á lo más igual á k veces dicho cociente; así es que nos detendremos en este límite, tanto para las raíces positivas como negativas de la nueva ecuación, si los que resultaran directamente fuesen mayores, ó cuando no hubieran sido calculados. (**)

(*) Se comprende la conveniencia de obtener el menor valor posible de k, tanto para lograr este resultado, como muy especialmente para que el último término, que lleva la potencia k^m, tenga el menor número posible de divisores.

(**) Si fuese entero el cociente de A_m por el menor divisor de A_0, distinto de la unidad, se consideraría el mayor de los cocientes fraccionarios, obtenidos al dividir los divisores de A_m, por los de A_0 que no excedan al número k.

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0,$$

que, sometida al procedimiento de investigación de las raíces enteras, se ve que carece de tales raíces.

Para obtener sus raíces fraccionarias, la dividiremos por el primer coeficiente 4, y simplificando y haciendo homogéneos sus términos, con el factor k, se halla:

$$x^4 - 7kx^3 + \frac{45k^2}{4}x^2 - \frac{3k^3}{2}x - \frac{9k^4}{2} = 0\,;$$

de modo que serán enteros sus coeficientes, haciendo $k = 2$, lo cual da la ecuación transformada

$$x^4 - 14x^3 + 45x^2 - 12x - 72 = 0.$$

Ahora bien: puesto que las raíces fraccionarias de la ecuación propuesta, multiplicadas por 2, producen las enteras de ésta, no podrán ser tales raíces fraccionarias, sino $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ y $\pm\frac{9}{2}$; de suerte que las raíces enteras de la transformada sólo podrán tener los valores ± 1, ± 3 y ± 9.

Desde luego se observa que dicha ecuación transformada admite la raíz -1, y dividiendo su primer miembro por $x+1$, resulta:

$$x^3 - 15x^2 + 60x - 72 = 0.$$

Esta ecuación tiene, á su vez, la raíz 3, hallándose, al despojarla del factor $x - 3$,

$$x^2 - 12x + 24 = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado, susceptible de resolverse directamente, y cuyas raíces son inconmensurables; siendo, por lo tanto, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, las raíces fraccionarias conmensurables de la ecuación considerada. (*)

(*) El matemático italiano, de principios de este siglo, Pablo Ruffini, extendió el procedimiento de comprobación y despejo de las raíces enteras á las fraccionarias de la forma irreducible $\frac{a}{b}$, probando que no solamente deben ser enteros los términos del cociente, de dividir el primer miembro de la ecuación por $x - \frac{a}{b}$, sino que han de resultar múltiplos de b. La división puede efectuarse por la regla dada en la ley de formación de los términos del cociente (**55**) ó por el procedimiento inverso, explicado para las raíces enteras (**347**), si bien se prefiere, uno ú otro, según sea $b \gtrless a$; conociéndose, por último, que una fracción no es raíz, tan pronto como se obtenga un resultado fraccionario ó no divisible por b, ó cuando la suma final sea diferente de cero.

Ejercicios.

I. Calcular las raíces enteras de las ecuaciones que siguen:

$$x^3 - 44x^2 - 45x + 12600 = 0\,;\quad x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60 = 0\,;$$
$$x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 8x + 8 = 0\,;\quad 4x^4 - 11x^2 + 7x - 6 = 0\,;$$
$$2x^4 - 23x^3 + 77x^2 - 62x - 24 = 0\,;\quad x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 32x^2 + 123x - 315 = 0.$$
$$x^4 + x^2 - 8x - 15 = 0\,;\quad x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24 = 0\,;$$
$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0.$$

II. Obtener las raíces conmensurables fraccionarias, de las ecuaciones

$$12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0\,;\quad 4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0\,;$$
$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

II.—Raíces inconmensurables é imaginarias.

349. Investigación de las raíces inconmensurables. Una vez calculadas las raíces conmensurables de una ecuación, de la manera que hemos expuesto, la ecuación que se encuentre al dividir por los factores de primer grado correspondientes á esas raíces, contendrá sólo las inconmensurables é imaginarias de la propuesta, si bien multiplicadas por el mínimo común múltiplo, k, de los denominadores de las fraccionarias, caso de que haya habido tal clase de raíces.

Teniendo presente tal circunstancia, no hay dificultad en operar con la ecuación deducida, siempre que dividamos después los valores de las nuevas raíces que se obtengan, por dicho mínimo denominador común, con la ventaja, en lo que se refiere á las raíces inconmensurables, de que la separación será generalmente más sencilla; pero si quiere operarse precisamente con la ecuación que resultaría de despojar la propuesta de sus raíces conmensurables, bastará multiplicar por $\frac{1}{k}$ las de la última ecuación encontrada, es decir, poner en lugar de x el producto kx (338) y asignar luego á k su valor numérico hallado, suprimiendo los factores comunes que puedan resultar entonces en los coeficientes.

De todos modos: desde el momento en que se sepa que una ecuación carece de raíces conmensurables, deberá aplicársele el método de las raíces iguales, tanto para poder efectuar propiamente la separación de las raíces en las ecuaciones que finalmente se consideren, como para ensayar todos los medios de simplificación, antes de proceder al cálculo aproximado de las raíces inconmensurables; pues además de que éste suele ser bastante prolijo, no permite reducir el grado de la ecuación, á medida que van obteniéndose dichas raíces. (*)

Conviene, sin embargo, advertir, que el método de las raíces iguales no hay que aplicarlo sino á las ecuaciones de grado superior al quinto; porque cuando las ecuaciones de tercero y quinto grado tienen raíces múltiples, hay una sola, por lo menos, de un cierto grado de multiplicidad, que debiendo ser raíz de una ecuación de primer grado con coeficientes racionales (328), es necesariamente conmensurable; y lo mismo sucede con la ecuación de cuarto grado, excepto en el caso de tener dos pares de raíces dobles ó ser su primer miembro cuadrado perfecto, lo cual, además de no ocurrir con frecuencia, se reconoce por los caracteres de exclusión (74), ó extrayendo la raíz cuadrada. (**)

(*) Como generalmente se desconoce la matriz numérica ó forma finita exacta de las raíces inconmensurables, no es posible dividir por los factores de primer grado que corresponden á tales raíces, y permanece una misma la ecuación durante todo el curso del cálculo. Lagrange empleó un procedimiento de aproximación, que consiste en desarrollar las raíces en fracciones continuas indefinidas, por cuyo medio le era fácil reconocer á veces la existencia de raíces irracionales de segundo orden y hallar la ecuación de segundo grado comprensiva de cada dos conjugadas; lo cual le permitía despojar la ecuación propuesta de tales raíces.

(**) Si llegan á efectuarse las divisiones sucesivas que el procedimiento de descomposición exige, será oportuno cambiar los signos de los restos antes de pasarlos á divisor; pues así se obtendrán todas las funciones de Sturm, cuyo conocimiento puede ser de la mayor importancia.

Adquirida la certeza de que una ecuación no tiene raíces conmensurables ni raíces múltiples, se separarán las inconmensurables que pueda contener. El procedimiento que generalmente se sigue para lograrlo, es el de las substituciones é interpolaciones sucesivas, auxiliado especialmente por los teoremas de Descartes y de Rolle, así como por sus consecuencias, y por la relación íntima que existe entre el crecimiento ó decrecimiento de una función y el signo de su derivada. Estas importantes propiedades, y otras que se han demostrado, facilitan y dirigen muchas veces la separación, ó permiten conocer, al menos, cuándo se ha conseguido efectuarla. (*)

Separadas las raíces inconmensurables, ya es fácil obtenerlas con la aproximación que se desee; pues, intercalando números intermedios, cada raíz se hallará comprendida entre el nuevo número substituído y el que dió signo contrario de los dos que antes la separaban, pudiéndose aproximar así, indefinidamente, los límites que la comprendan.

Varios ejemplos mostrarán la manera de proceder en cada caso.

1.° Sea la ecuación incompleta de tercer grado

$$x^3 + x - 20 = 0.$$

Sin recurrir á la condición de realidad, se advierte que esta ecuación tiene una sola raíz real positiva y ninguna negativa; habiendo, por consiguiente, dos raíces imaginarias.

Se ve también que, siendo $+L = 3$ un límite superior de su raíz positiva, ésta no puede ser entera, porque ni 1 ni 2 la verifican; y que la forma de la ecuación impide que dicha raíz sea conmensurable fraccionaria.

El grado de la ecuación y aun la naturaleza de las raíces manifiestan, por otra parte, que no puede haberlas iguales.

Con estos antecedentes, se observa que para los valores

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \qquad \text{resulta} \qquad f(x) = -20, -18, -10, +10\,;$$

(*) No debe olvidarse que, á pesar de sus inconvenientes, el método de separación más seguro es el de Sturm; pero, aunque no se emplee por completo, las funciones de este nombre determinarán los números exactos de raíces positivas, negativas é imaginarias de la ecuación propuesta, y podrán, en último extremo, resolver cualquier duda ó dificultad que se presente.

de modo que la raíz positiva única, se encuentra comprendida entre los números enteros consecutivos 2 y 3.

La substitución del número intermedio 2,5 da un resultado negativo, así es que la raíz buscada se encontrará entre 2,5 y 3. Substituyendo nuevamente el número 2,7, comprendido entre estos límites, se obtiene ya un valor de $f(x)$ positivo, y, por lo tanto, dicha raíz estará entre 2,5 y 2,7. Por substituciones sucesivas, se ve que la raíz en cuestión se halla comprendida entre 2,5 y 2,6; entre 2,55 y 2,6; entre 2,58 y 2,6; entre 2,59 y 2,6; entre 2,59 y 2,595; entre 2,59 y 2,592; y, finalmente, entre 2,591 y 2,592; siendo cualquiera de estos dos números la raíz positiva pedida, en menos de 0,001.

2.º Consideremos la ecuación completa

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

La regla de Descartes da á conocer inmediatamente que esta ecuación tiene una raíz negativa y ninguna ó dos positivas.

Como el primer coeficiente es la unidad, carece de raíces conmensurables fraccionarias; y siendo el último término de la ecuación un número primo y $+L=3$ y $-L'=-6$ dos límites de sus raíces, tampoco las tiene enteras; porque ni ± 1 ni -5 la verifican.

Sabido que no existen raíces conmensurables, deducimos, en virtud de lo antes expuesto, que no habrá tampoco raíces múltiples, y este conocimiento conduce ya á substituir en la ecuación, los números enteros que comprenden los límites obtenidos. Los resultados correspondientes á esas substituciones son:

$x =$	$-6,$	$-5,$	$-4,$	$-3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	3
$f(x) =$	$-1,$	$+40,$					$+5,$	$-8,$	$-9,$	$+8$ (*)

viéndose así que la raíz negativa se halla entre -6 y -5, y que hay dos positivas, una entre 0 y 1 y otra entre 2 y 3.

Separadas ya las raíces, si quiere obtenerse en menos de una décima la menor raíz positiva, bastará substituir entre 0 y 1 números que difieran en ese límite de error; pero observando que la derivada, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 17$, es constantemente negativa al variar x de 0 á 1, se deduce que el primer miembro de la ecuación será decreciente para valores comprendidos entre los mismos números; de suerte que suponiendo el decrecimiento de la función proporcional al incremento de la variable, se hallará el que debe experimentar ésta, para reducir á cero dicho primer miembro, por medio de la proporción

$$\frac{13}{5} = \frac{1}{v}, \quad \text{de donde} \quad v = \frac{5}{13} = 0{,}38.....$$

Si en el referido supuesto, que puede considerarse como aproximado para valores poco diferentes de la variable (*), substituímos el número 0,4 en vez de x, se obtiene $f(0{,}4) = -1{,}256$; lo cual manifiesta que la raíz buscada está comprendida entre 0 y 0,4. Estableciendo la proporción análoga

$$\frac{6{,}256}{5} = \frac{0{,}4}{v'}, \quad \text{resulta} \quad v' = \frac{2}{6{,}256} = \frac{1000}{3128} = 0{,}31......,$$

y reemplazando en vez de x el número 0,3, se halla $f(0{,}3) = 0{,}197$. La menor raíz positiva es, por consecuencia, respectivamente 0,3 ó 0,4, por defecto ó por exceso, con un error inferior á una décima.

Nuevas interpolaciones numéricas, entre 0,3 y 0,4, darían valores cada vez más aproximados á dicha raíz; pudiendo calcularse de igual modo las otras dos raíces.

3.º Sea la ecuación

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0.$$

(*) No pudiendo haber más de una raíz negativa, es completamente inútil substituir los números negativos que siguen á -5; ya que este número y -6, dan resultados de signos contrarios.

(*) Basta recordar que el incremento de una función,

$$f(x+h) - f(x) = h\,[f'(x) + \varepsilon]\ (\mathbf{277}),$$

puede considerarse como sensiblemente igual á $hf'(x)$, para valores suficientemente pequeños de h y, por lo tanto, que si $f'(x)$ no es cero, será proporcional á h.

Se ha dicho también (**344**), que esta hipótesis equivale á suponer que, entre los valores considerados, se confunde con su cuerda la curva que representa gráficamente el primer miembro de la ecuación. Se ve, en efecto, que la proporción que acaba de establecerse es, en magnitudes geométricas $\frac{OA + PB}{OA} = \frac{OP}{v}$ (fig. 23); y como por la semejanza de los triángulos AQB y AON se verifica que $\frac{AQ}{AO} = \frac{QB}{ON}$, resulta necesariamente $v = ON$, conforme quería demostrarse.

Examinando los signos de sus términos se ve, desde luego, que carece de raíces negativas y que tiene una ó tres positivas, si bien ninguna es conmensurable, ni por consiguiente múltiple, á causa de ser el primer coeficiente la unidad, $+L=2$ un límite superior de sus raíces positivas y $f(+1)=-3$.

Como además $f(0)=-7$, y seguramente $f(2)>0$, se deduce que hay, por lo menos, una raíz positiva de la ecuación entre los números 1 y 2; ignorándose si habrá tres, si dos se hallarán comprendidas entre 0 y 1, ó, en fin, si no todas las raíces serán reales. La ecuación derivada, $3x^2-4x+5=0$, aclara estas dudas, con sólo notar que siendo sus dos raíces imaginarias, la propuesta no puede tener más de una raíz real **(333)**, que encontrándose ya separada, es fácil obtenerla con la aproximación que se quiera, valiéndose de sucesivas substituciones.

4.° Consideremos ahora la ecuación

$$x^3+11x^2-102x+181=0.$$

No teniendo la transformada en $-x$ más que una variación, habrá una sola raíz negativa; mientras que las otras dos deberán ser positivas ó imaginarias. De todos modos, como $+L=6$ y $-L'=-18$ son límites extremos de las raíces, no habrá ninguna entera; pues 181 es un número primo, y $f(+1)$ y $f(-1)$ son diferentes de cero.

La ecuación que se considera no tiene tampoco raíces conmensurables fraccionarias, á causa de su forma; ni hay, en su consecuencia, raíces múltiples.

Con estos antecedentes, observamos que los resultados de substituir los números enteros desde 0 hasta 6, son todos positivos y que, por lo tanto, las dos raíces positivas, si existen, se encuentran comprendidas entre dos enteros consecutivos.

Para dilucidar cuáles pueden ser tales números, vemos que la única raíz positiva de la ecuación derivada, $3x^2+22x-102=0$, es $\frac{-11+\sqrt{427}}{3}=3,22\ldots\ldots$; de suerte que debiendo estar comprendida esta raíz entre las dos positivas de la propuesta, caso de tenerlas de ese signo **(333)**, no podrán éstas hallarse sino entre 3 y 4.

Las substituciones de los valores $x=3,2$ y $x=3,3$, dan también dos resultados positivos, así es que dichas raíces, si existen, habrán de encontrarse entre estos últimos números; pero como el primero de ellos hace adquirir á $f(x)$ un valor muy próximo á cero, substituiremos en lugar de x el número 3,22, el cual, dando ya un resultado negativo, permite deducir que hay en efecto dos raíces positivas. Siendo además $f(3,21)$ y $f(3,23)$ mayores que cero, resulta que una de esas raíces se halla entre 3,21 y 3,22, y otra entre 3,22 y 3,23.

5.° Propongámonos obtener, exacta ó tan aproximadamente como se quiera, las raíces de la ecuación

$$4x^4+5x^3+6x^2-40x-2=0.$$

Puesto que es de grado par y su término independiente negativo, tendrá por lo menos dos raíces reales, una positiva y otra negativa; pero como no presenta más que una variación, sólo podrá tener una raíz positiva, mientras que es posible existan tres raíces negativas, por haber ese número de variaciones en la transformada en $-x$.

Sabido ésto, se ve fácilmente que estando comprendidas las raíces reales de la ecuación propuesta entre $+L=2$ y $-L'=-2$, no se encuentran en condiciones de ser raíces enteras sino los números $+1$ y -1, que no la verifican; y como las únicas raíces fraccionarias que podría tener son $\pm\frac{1}{2}$ y $\pm\frac{1}{4}$ **(348)**, las cuales tampoco la satisfacen, se deduce que dicha ecuación carece de raíces conmensurables.

La circunstancia de ser cuadrado perfecto el primer término de la ecuación, y no serlo el último, demuestra que no hay tampoco raíces iguales, y que debe procederse á la separación de las inconmensurables.

Efectuando las substituciones de los valores

$$x=-2,-1,0,1,2$$

se halla, en el mismo orden,

$$f(x)=+126,+43,-2,-27,+46.$$

Desde luego se nota que si hubiese tres raíces negativas, menores que 1 en valor absoluto, como la positiva es de seguro menor que 2, no podría ser 10 la suma de sus productos ternarios (**323**). También se observa que la derivada

$$f'(x) = 16x^3 + 15x^2 + 12x - 40 = 4x(4x^2 + 3) + 5(3x^2 - 8),$$

es siempre negativa para valores cualesquiera de x, comprendidos entre -2 y -1; de modo que la función $f(x)$ será continuamente decreciente para esos mismos valores, lo cual impedirá que ninguno de ellos la anule.

Hay, por lo tanto, dos únicas raíces reales, una positiva y otra negativa, separadas entre los límites 1 y 2 y 0 y -1.

Para aproximar los números que comprenden la raíz negativa, basta substituir $-0{,}1$ en vez de x; pues se obtiene un resultado positivo, quedando comprendida la referida raíz entre 0 y $-0{,}1$.

6.° Sea, por último, la ecuación de quinto grado

$$x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 20x - 15 = 0.$$

Esta ecuación tiene una ó tres raíces positivas y ninguna ó dos negativas. Los límites extremos de sus raíces, $+L = 3$ y $-L' = -4$, dan á conocer que no puede quedar verificada por ningún número entero, ya que no la satisfacen los valores -3, -1 y $+1$; y como tampoco las tiene fraccionarias, carece seguramente de raíces conmensurables y de raíces iguales.

El cuadro que sigue

$$\begin{array}{l}x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\\ f(x) = -,\ \ +,\ \ +,\ \ +,\ -,\ -,\ -,\ +\end{array}$$

manifiesta que hay precisamente dos raíces negativas, separadas respectivamente entre -3 y -4 y entre 0 y -1; y que existe, por lo menos, una positiva entre los números 2 y 3.

Ahora bien: según el teorema de Rolle, si la ecuación propuesta tuviese tres raíces positivas, la ecuación derivada de primer orden tendría al menos dos, y, por igual motivo, una la ecuación derivada de segundo orden; pero siendo

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 20x - 20 = 5(x^4 - 3x^2 + 4x - 4)$$

y

$$f''(x) = 5(4x^3 - 6x + 4) = 10(2x^3 - 3x + 2),$$

vemos que la ecuación $2x^3 - 3x + 2 = 0$, cuyas raíces no satisfacen la condición de realidad, sólo tiene una raíz real negativa; luego la ecuación dada no puede tener tampoco sino una raíz positiva, comprendida entre 2 y 3.

Efectuada la separación de las raíces reales, se conocen sus valores en menos de una unidad; mas si quiere obtenerse con mayor aproximación la raíz positiva, observaremos que siendo $f(2) = -23$ y $f(3) = 123$, y á la vez mayor que cero la derivada de primer orden, para valores de x comprendidos entre 2 y 3, conviene substituir el número 2,2, hallándose sucesivamente $f(2{,}2) < 0$, $f(2{,}3) < 0$ y $f(2{,}4) > 0$; lo cual demuestra que la referida raíz se encuentra entre 2,3 y 2,4.

Método de Newton. Cuando, según acaba de explicarse, se han obtenido las raíces inconmensurables de una ecuación en menos de una décima, una centésima, etc., ó, sea, con un error siempre menor que la unidad, es fácil acelerar la aproximación, sirviéndose del método que vamos á exponer.

Supongamos que una sola raíz esté comprendida entre a y b, y representémosla por $a + h$, siendo h menor en valor absoluto y de igual signo que la diferencia $b - a$.

Si se desarrolla $f(a+h)$, según la fórmula de Taylor (**311**), llegando únicamente hasta la segunda derivada, resulta:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a + \theta h)\ (*)$$

y, como $f(a+h)$ debe ser cero, se tiene la ecuación:

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a + \theta h) = 0,$$

de donde

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2 f''(a + \theta h)}{2f'(a)} = \alpha + \beta,$$

designando por α y por β cada uno de los dos términos de h.

(*) Lo dicho para el caso de ser $f(x)$ una función cualquiera que, así como sus derivadas, sea finita y continua para los valores de x comprendidos entre a y $a + h$, se aplica indudablemente á una función algebraica racional y entera, aunque el número de sus derivadas sea limitado, siempre que dejen de tomarse dos ó más términos del desarrollo.

Ahora bien: si se observa que el término β será en general muy pequeño respecto de h, á causa del factor h^2 que contiene, podremos prescindir de él y hallar un nuevo valor aproximado de x

$$a_1 = a + \alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

El error de esta primera aproximación es precisamente

$$\beta = -\frac{h^2 f''(a+\theta h)}{2f'(a)};$$

de suerte que si se representa por M una cantidad mayor que los valores absolutos de $f''(x)$, cuando x varíe de a á b, y se toma tan sólo el valor absoluto de $f'(a)$, se tendrá:

$$\beta < h^2 . \frac{M}{2f'(a)} < (b-a)^2 . \frac{M}{2f'(a)} \ (*);$$

pero como en la práctica conviene aquilatar cuanto sea posible el error cometido, el límite que así se encuentre puede sumarse con un valor por exceso de α, lo cual dará un máximum más aproximado de h, que, al substituirse en la expresión anterior, daría á su vez un límite más reducido para β.

Aunque es fácil repetir para el límite b lo dicho para a, es indudable que siendo desconocido el valor exacto del término despreciado, que es función de θ y de h, nada garantiza que a_1 y b_1 difieran de x menos que a y b, y aun se comprende que pudiera suceder lo contrario; mas cuando $f''(x)$ conserve el mismo signo, entre los límites a y b que se consideran, es fácil dirigir el cálculo de modo que haya completa seguridad de obtener un valor más aproximado de la raíz.

Se ve, en efecto, que el nuevo valor $a+\alpha$ ó $b+\alpha$ diferirá menos que a ó b del verdadero valor de dicha raíz, $x=a+\alpha+\beta$ ó $x=b+\alpha+\beta$, si las cantidades

$$a,\ a+\alpha,\ a+\alpha+\beta \quad \text{ó} \quad b,\ b+\alpha,\ b+\alpha+\beta$$

(*) En general, $f''(x)$ es continuamente decreciente ó creciente entre a y b; porque no es probable que $f'''(x)$ varíe de signo en ese pequeño intervalo, y entonces $f''(a)$ ó $f''(b)$ dan el valor de M. Si así no fuera, se pondría esa derivada bajo la forma $f''(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, que expresa la diferencia entre las sumas de sus términos positivos y negativos, y suponiendo, como puede hacerse siempre, que los límites a y b son positivos, M sería el mayor valor absoluto de las diferencias $\varphi(a) - \psi(b)$ y $\varphi(b) - \psi(a)$.

están dispuestas por orden de magnitud; lo cual exige que α y β tengan el mismo signo, ó que sea positivo su producto,

$$\alpha\beta = \frac{h^2 f(a) f''(a+\theta h)}{2[f'(a)]^2} \quad \text{ó} \quad \alpha\beta = \frac{h^2 f(b) f''(b+\theta h)}{2[f'(b)]^2}.$$

Observando que en estas expresiones son los denominadores y h^2 positivos, y que $f''(a+\theta h)$ y $f''(b+\theta h)$ tendrán por hipótesis igual signo, se deduce que por ser $f(a)$ y $f(b)$ de signos contrarios, una de ellas será necesariamente positiva; así es que, *para hallar un valor más aproximado á la raíz pedida, bastará partir del límite para el cual* f(x) *y* f''(x) *tengan el mismo signo.* (*)

Si, siendo $a < b$, se supone que $f(a)$ tenga el mismo signo que conserva $f''(x)$, partiremos del valor a menor que la raíz; y como las dos cantidades α y β son de igual signo y su suma $\alpha+\beta=h$ es positiva, ambas lo serán también; deduciéndose que $a_1 = a+\alpha$ será todavía un valor aproximado por defecto, que diferirá de x menos que a.

El signo de $f(a_1)$ es, pues, idéntico al de $f(a)$ y $f''(x)$, de suerte que se podrá, partiendo de a_1, efectuar una segunda corrección análoga á la primera, por medio de la fórmula

$$\alpha_1 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

que da un tercer valor $a_2 = a_1 + \alpha_1$, mayor que a_1, pero menor que la raíz y, por consecuencia, más aproximado que a_1.

Continuando de esta manera se obtendrá una serie indefinida de valores crecientes, $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ inferiores todos á la raíz y que por necesidad tenderán á un cierto límite. Este límite no podrá ser otro que la raíz buscada, porque si el límite de $f(a_n)$ no fuese cero, siendo

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \quad \text{de donde} \quad a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)},$$

resultaría que el incremento del valor variable a_n sería siempre

(*) Esta importantísima observación es debida á Fourier.

mayor que una cierta cantidad, y su crecimiento indefinido ilimitado. (*)

Si, en la hipótesis de ser $f(b)$ y $f''(x)$ del mismo signo, partimos del valor b mayor que la raíz, representando ésta por $b+h$, se ve que por ser entonces negativa la suma $\alpha+\beta=h$ y tener α y β signos iguales, estas cantidades serán ambas negativas, y

$$b_1 = b + \alpha = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

tendrá un valor inferior á b, más aproximado á la raíz, y todavía por exceso.

Correspondiendo por tal motivo á $f(b_1)$ igual signo que á $f(b)$ y, por consiguiente, que á $f''(x)$, se puede, partiendo de b_1, efectuar una nueva corrección

$$\alpha_1 = -\frac{f(b_1)}{f'(b_1)},$$

que dará un valor $b_2 = b_1 + \alpha_1$, menor que b_1, pero mayor que la raíz, y, por lo mismo, más aproximado que b_1. Continuando de idéntico modo resultará una serie de magnitudes decrecientes $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$ que, por análogas razones á las antes expuestas, tendrán por límite la raíz que se pide con una aproximación determinada. (**)

El método de Newton tiene una significación geométrica que merece ser conocida.

Si, por ejemplo, es MRN, (fig. 24), la curva que representa la función $y=f(x)$, cuando x varíe entre los valores $OA=a$ y $OB=b$, á los que corresponden dos ordenadas de signos contrarios, $f(a)=AM$ y $f(b)=-BN$, y los cuales no comprenden más

(*) Cuando se consideran ecuaciones algebraicas, racionales y enteras, $f'(a_n)$ es por precisión una cantidad finita, que puede además suponerse distinta de cero, para valores suficientemente próximos de a y b.

(**) Cuando $f''(x)$ varíe de signo entre a y b, será necesario, para aplicar con seguridad el método de aproximación que nos ocupa, estrechar los límites hasta que dicho signo permanezca invariable. Esto podrá hacerse siempre que el valor de x, á partir del cual cambie de signo $f''(x)$, no sea precisamente el mismo que corresponde á la raíz; pero, en tal caso, $f(x)$ y $f''(x)$ se anularían al mismo tiempo y tendrían un máximo común divisor que, igualado á cero, daría la raíz mencionada.

que una raíz, dicha curva deberá cortar al eje OX en un solo punto R, tal que $x=OR$ será la raíz desconocida.

Observando ahora que si se traza la tangente MA_1, se verifica en el triángulo rectángulo MAA_1 que

$$AM = AA_1 \operatorname{tang} MA_1A \qquad \text{ó, bien,} \qquad f(a) = -AA_1 f'(a),$$

de donde se deduce

$$AA_1 = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \alpha \ (*),$$

resulta que siendo $OA_1 = OA + AA_1$, se tendrá:

$$OA_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a + \alpha = a_1.$$

Puesto que la investigación de las raíces reales de una ecuación, considerada bajo un concepto geométrico, se reduce á la de las abscisas de los puntos en que corta al eje de las x la curva que representa su primer miembro, puede decirse, en virtud del último resultado obtenido, que el método de Newton consiste en reemplazar una parte de esa curva, por la tangente trazada en uno de sus extremos.

Esta interpretación manifiesta que, no eligiendo convenientemente el punto de partida, puede hallarse un valor corregido que difiera del verdadero más que los valores dados. Así sucede con el valor OA_1, (fig. 25), que corresponde, de igual modo que antes, á la tangente trazada en M; observándose, de acuerdo con lo ya expuesto, que tanto en este caso como en el anterior, y en aquellos en que las ordenadas están en disposición inversa (figuras 26 y 27), es indispensable para que las tangentes penetren en el interior de uno de los triángulos mixtilíneos que forman la curva, el eje y la correspondiente ordenada, elegir el extremo en que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen igual signo. (**)

(*) Esta magnitud AA_1 se llama la *subtangente*.

(**) El signo de $f''(x)$, para los puntos extremos A y B, se deduce examinando si en ellos es $f'(x)$ creciente ó decreciente, es decir, viendo si, cuando crece x, los ángulos que las tangentes geométricas forman con la parte positiva del eje de las abscisas, varían de tal modo que sus tangentes trigonométricas aumentan ó disminuyen, tomando en cuenta no sólo la magnitud, sino también el signo.

Se ve, por último, que la serie de aproximaciones sucesivas y en el mismo sentido, que se determinan á partir de uno de los valores dados, equivalen, (fig. 24), á trazar una serie de perpendiculares y tangentes sucesivas, cuyos puntos de intersección se aproximan indefinidamente al punto R. (*)

Refiriéndonos á ecuaciones y raíces ya consideradas, supongamos primero que quieren determinarse por este método, valores cada vez más aproximados para la única raíz comprendida entre $a = 2,5$ y $b = 2,6$ de la ecuación

$$f(x) = x^3 + x - 20 = 0.$$

Desde luego se advierte que las derivadas $f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f''(x) = 6x$, permanecen finitas y crecientes al variar x entre dichos números; y como $f(a) = -1,875 < 0$ y $f(b) = 0,176 > 0$, debe partirse, según lo expuesto, del límite superior, b, para calcular la primera corrección negativa

$$\alpha = -\frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{0,176}{21,28} = -0,00827..... ;$$

deduciéndose, por consiguiente, que el nuevo número

$$b + \alpha = 2,6 - 0,00827..... = 2,59172.....$$

será también aproximado por exceso.

Para calcular el límite del error que se comete de este modo, y saber hasta qué cifra decimal debe apreciarse, observaremos que, en valor absoluto,

$$\beta < h^2 . \frac{f''(2,6)}{2f'(2,6)} = h^2 . \frac{15,6}{42,56} < h^2 \times 0,4,$$

y como, también en valor absoluto, $h < 0,1$, será:

$$\beta < 0,01 \times 0,4 = 0,004 \qquad \text{y} \qquad h = \alpha + \beta < 0,009 + 0,004 = 0,013;$$

siendo, por último,

$$\beta < (0,013)^2 . 0,4 = 0,0000676 < 0,0001;$$

lo cual manifiesta que el número $x' = 2,5917$, diferirá en menos de una unidad del orden de su última cifra, de la raíz pedida.

(*) Es digno de notarse que el zig-zag $MA_1M_1A_2M_2A_3.....$, que reemplaza al arco MR, tiene á R por *punto asintótico.*

La continuación del procedimiento exigiría partir de un valor aproximado por exceso; pero éste es el mismo que hemos encontrado, por ser $f(2,5917) > 0$. Se tiene, pues, como punto de partida para una segunda corrección, que no efectuaremos, $b_1 = 2,5917$.

Volviendo ahora á la ecuación

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0,$$

y á su menor raíz positiva, comprendida entre $a = 0,3$ y $b = 0,4$, es fácil hallar un valor bastante más aproximado que el determinado por estos límites.

Siendo $f'(x) = 3x^2 + 6x - 17$ y $f''(x) = 6x + 6$, se ve que $f'(x)$ es negativa y la segunda derivada constantemente positiva y creciente, para los valores de x comprendidos entre a y b; y como $f(a) > 0$, deberá partirse del límite por defecto, para obtener la primera corrección aditiva

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{0,197}{14,93} = 0,01319...... ;$$

encontrándose así el nuevo valor por defecto

$$a + \alpha = 0,3 + 0,01319......... = 0,31319......$$

Para conocer la última cifra que debe conservarse, basta observar que

$$\beta < h^2 . \frac{f''(0,4)}{2f'(0,3)} = h^2 . \frac{8,4}{29,86} < h^2 \times 0,3;$$

y puesto que $h^2 < 0,01$, se obtiene como primer límite de error $\beta < 0,003$, y, en su consecuencia, $h = \alpha + \beta < 0,014 + 0,003 = 0,017$. Llevando este valor por exceso de h á la expresión precedente, se halla para nuevo límite de error,

$$\beta < (0,017)^2 . 0,3 = 0,0000867 < 0,0001;$$

lo cual manifiesta que $x' = 0,3132$ es, con cuatro cifras exactas, la raíz que se busca.

Si hubiera de continuarse el procedimiento de aproximación, sería necesario partir de un nuevo valor seguramente aproximado por defecto; pero siendo $f(0,3132) > 0$, ese valor es $a_1 = 0,3132$.

350. Investigación de las raíces imaginarias. El cálculo puramente aproximado de las raíces inconmensurables, impide, según se dijo, despojar la ecuación de los factores de primer grado correspondientes á tales raíces; así es que la ecuación, cuyas raíces imaginarias deben obtenerse, será la misma á la cual ha tenido que referirse la investigación de las inconmensurables.

Si designamos esta ecuación por $f(x)=0$, y se recuerda que siendo los coeficientes reales las raíces imaginarias son conjugadas dos á dos, será necesario determinar todos los pares de valores reales de y y de z que hagan que la doble expresión $x=y\pm z\sqrt{-1}$ anule á $f(x)$. (*)

Ahora bien: considerando á $\pm z\sqrt{-1}$ como un incremento, y haciendo uso de la fórmula de Taylor, se obtiene:

$$f(y\pm z\sqrt{-1})=f(y)\pm f'(y)z\sqrt{-1}-\frac{f''(y)}{\lfloor 2}z^2\mp\frac{f'''(y)}{\lfloor 3}z^3\sqrt{-1}+$$
$$+\frac{f^{\text{IV}}(y)}{\lfloor 4}z^4\pm\frac{f^{\text{V}}(y)}{\lfloor 5}z^5\sqrt{-1}-\cdots\cdots,$$

ó, agrupando los términos reales é imaginarios,

$$f(y\pm z\sqrt{-1})=\left[f(y)-\frac{f''(y)}{\lfloor 2}z^2+\frac{f^{\text{IV}}(y)}{\lfloor 4}z^4-\cdots\cdots\right]\pm\left[f'(y)-\right.$$
$$\left.-\frac{f'''(y)}{\lfloor 3}z^2+\frac{f^{\text{V}}(y)}{\lfloor 5}z^4-\cdots\cdots\right]z\sqrt{-1}=\varphi(y,z)\pm\psi(y,z)\,z\sqrt{-1};$$

luego la condición

$$f(y\pm z\sqrt{-1})=0 \quad \text{equivaldrá á} \quad \varphi(y,z)=0 \quad \text{y} \quad \psi(y,z)=0;$$

es decir, que deberán buscarse todos los sistemas de valores reales de y y z, que verifiquen á la vez las dos ecuaciones

$$f(y)-\frac{f''(y)}{\lfloor 2}z^2+\frac{f^{\text{IV}}(y)}{\lfloor 3}z^4-\cdots\cdots=0$$

y

$$f'(y)-\frac{f'''(y)}{\lfloor 3}z^2+\frac{f^{\text{V}}(y)}{\lfloor 5}z^4-\cdots\cdots=0.\ (^{**})$$

(*) Después de calculadas las raíces conmensurables, y separadas las inconmensurables, se sabrá siempre el número exacto de raíces imaginarias que tiene una ecuación.

(**) Podría haberse obtenido el resultado de hacer $x=y\pm z\sqrt{-1}$, y también estas ecuaciones, por medio de la fórmula de la potencia del binomio; pero el procedimiento seguido, á más de ser bastante práctico, permite conocer la forma general de $\varphi(y,z)$ y $\psi(y,z)$. Se prescinde además del factor z, que entra en todos los términos imaginarios, porque para $z=0$ las raíces no serían imaginarias.

Observando sus primeros miembros, se ve que son respectivamente de los grados m y $m-1$ respecto de y, que sólo contienen términos de grado par en z (*), y que entran en la primera ecuación $f(x)$ y sus derivadas sucesivas de orden par, reemplazando en ellas x por y, mientras que en la segunda aparecen las derivadas de orden impar de dicha función. Claro es, por lo tanto, que siendo en todos casos $f^{(m)}(x)$ una cantidad constante, si m es un número par, $\varphi(y,z)$ será del grado m y $\psi(y,z)$ del $m-2$ con relación á z; y cuando m sea impar, estas funciones serán ambas del grado $m-1$ respecto de dicha incógnita.

Resulta así que, en las ecuaciones de tercero y cuarto grado en x, $\psi(y,z)$ no contendrá á z sino en un sólo término y elevada á la segunda potencia, de suerte que podrá hallarse el valor de z^2 en función racional de y y substituirlo en la primera ecuación de condición. En las ecuaciones de quinto y sexto grado, $\psi(y,z)=0$ será una ecuación bicuadrada en z que podrá resolverse como si fuera de segundo grado respecto de z^2; de modo que al substituir el valor de esta potencia en la otra ecuación $\varphi(y,z)=0$, sólo contendrá ésta un radical de segundo orden, y podrá hacerse fácilmente racional.

Hallada la ecuación en y, que resulte de la eliminación de z, se determinarán únicamente sus raíces reales, por los procedimientos ya explicados, y se llevarán los valores que se obtengan al de z^2, aceptando tan sólo aquellos valores de y que hagan á z^2 real y positiva, á fin de que los valores correspondientes de z sean también seguramente reales.

Refiriéndonos otra vez á la ecuación

$$f(x)=x^3+x-20=0,$$

cuya única raíz inconmensurable ya se ha determinado, en menos de una diezmilésima, busquemos sus dos raíces imaginarias.

Puesto que entonces se tiene:

$$f'(x)=3x^2+1; \qquad \frac{f''(x)}{\lfloor 2}=3x; \qquad \frac{f'''(x)}{\lfloor 3}=1;$$

(*) La conjugación de las raíces imaginarias exige, *à priori*, que las ecuaciones, que determinan y y z, no se alteren poniendo $-z$ en lugar de z.

las dos ecuaciones de condición serán, por consiguiente,

$$\varphi(x,y) = (y^3 + y - 20) - 3yz^2 = 0 \quad \text{y} \quad \psi(y,z) = (3y^2 + 1) - z^2 = 0\,;$$

y substituyendo en la primera el valor $z^2 = 3y^2 + 1$, que se deduce de la segunda, resulta:

$$4y^3 + y + 10 = 0\,;$$

ecuación que carece de raíz real positiva y que no tiene más que una negativa, cuyo valor absoluto corresponde á la transformada

$$4y^3 + y - 10 = 0.$$

Para hallar dicho valor absoluto, ó, sea, la raíz real positiva de esta última ecuación, se ve ante todo que se encuentra entre los límites $+L = 2$ y $+L_1 = 1$; porque ningún valor menor que la unidad puede verificarla. No es, pues, entera esa raíz ni tampoco igual á $\frac{5}{4}$, que es la única fracción que podría satisfacerla; de modo que será inconmensurable.

Substituyendo el valor $x = 1{,}2$ y luego el $x = 1{,}3$, se deduce, por la diversidad de los signos que se obtienen, que la raíz buscada está comprendida entre estos nuevos límites; y aplicando el método de Newton al mayor de ellos, y siguiendo la apreciación de los primeros límites superiores de β y de h hasta la cuarta cifra decimal, se encuentra, como resultado de la primera corrección, el valor $y = -1{,}2958$, con cinco cifras exactas y aproximado por defecto. (*)

Como los valores correspondientes de z son $z = \pm 2{,}4571$, resulta en definitiva, para expresión aproximada de las raíces imaginarias de la ecuación propuesta,

$$x = -1{,}2958 \pm 2{,}4571\sqrt{-1}.$$

La eliminación de z por el método de substitución, que ya sabemos (**127**) es independiente del grado y número de las ecuaciones, siempre que se pueda despejar la incógnita que quiere

(*) Obtenida ya la raíz conmensurable aproximada $x' = 2{,}5917$, y notando que, por ser nula la suma de las raíces de la ecuación considerada, el doble de la parte real de las imaginarias debe ser igual y de signo contrario á dicha primera raíz, hubiera podido obtenerse inmediatamente el valor aproximado $y = -1{,}2958$.

eliminarse, no suele ser factible cuando la ecuación considerada es de grado superior al sexto. En tal caso, es indispensable recurrir á los procedimientos generales de eliminación y resolución en un sistema cualquiera de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son objeto del siguiente capítulo. (*)

Ejercicios.

I. Obtener, por substituciones sucesivas, y con un error menor que una décima, las raíces inconmensurables de las ecuaciones que siguen:

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 8x + 6 = 0\;;\quad x^3 + 3x - 7 = 0\;;\quad x^4 - 5x - 10 = 0\,;$$
$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0\;;\quad x^5 - 8x - 1 = 0\;;\quad x^3 + 2x^2 - 7x - 8 = 0\,;$$
$$3x^4 - 3x + 1 = 0\;;\quad x^6 + 2x^5 - 1 = 0\;;\quad x^4 + x^2 - 65x + 5 = 0.$$

II. Llevar hasta la sexta cifra decimal, por el método de Newton, las raíces que se indican en las ecuaciones siguientes:

$$x^3 - 7x + 7 = 0 \text{ (raíz comprendida entre 1,6 y 1,7)}\;;$$
$$x^5 + 2x - 7 = 0 \text{ (1,3 y 1,4)}\;;\quad x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10x - 4 = 0 \text{ (0,4 y 0,5)};$$
$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ (1,8 y 1,9)}\;;\quad 5x^3 - 27x^2 - 180x - 324 = 0 \text{ (9,7 y 9,8)};$$
$$x^3 - 3x + 1 = 0 \text{ (1,5 y 1,6)}.$$

III. Calcular las raíces imaginarias de las ecuaciones

$$x^3 + x - 3 = 0\;;\quad x^4 - 5x - 10 = 0\;;\quad 3x^4 - 3x + 1 = 0\;;\quad x^5 - 8x - 1 = 0.$$

(*) Lagrange ha dado otro procedimiento de obtención de las raíces imaginarias, sirviéndose de la ecuación de los cuadrados de las diferencias de las raíces de la propuesta, el cual ha sido ventajosamente modificado por el matemático inglés W. Rutherford. Encke, por su parte, ha extendido el método de Gräffe al cálculo de dichas raíces imaginarias.

CAPÍTULO IV

TEORÍA DE LA ELIMINACIÓN Y SU EMPLEO EN LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

I.—Métodos de eliminación. (*)

351. **Definiciones.** De conformidad con lo expuesto en la teoría de las ecuaciones de primer grado (**125**), se dice que *eliminar la incógnita* x *entre dos ecuaciones cualesquiera,* $f(x,y)=0$ *y* $\varphi(x,y)=0$, *es hallar otra ecuación,* $\psi(y)=0$, *cuyas raíces sean todos y los únicos valores, así iguales como diferentes de* y, *que juntamente con otros valores de* x, *verifiquen á dichas ecuaciones.*

La ecuación $\psi(y)=0$, que cumple con la condición referida, se llama *ecuación resultante,* ó simplemente *resultante* (**); y su primer miembro, $\psi(y)$, se denomina *función eliminante.*

En tal concepto, la ecuación que exprese la condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones propuestas tengan uno ó varios valores de x que la satisfagan al mismo tiempo, tiene que ser precisamente dicha ecuación resultante.

Para demostrarlo, supongamos que $\pi(y)=0$ expresa tal condición. Es evidente que si $x=\alpha$ é $y=\beta$ son un par de valores de

(*) Nos limitaremos á tratar de la eliminación entre dos ecuaciones algebraicas cualesquiera, porque además de ser la que con más frecuencia se presenta, es la única que exigen el cálculo de las raíces imaginarias de una ecuación con una incógnita, y la mayor parte de los problemas generales de transformación de las ecuaciones.

(**) El nombre de *resultante* ha sido dado por Euler; pero algunos autores, entre ellos Serret, emplean la denominación de *ecuación final.*

x é y que verifican las ecuaciones $f(x,y)=0$ y $\varphi(x,y)=0$, se verificará también que, para $y=\beta$, tendrán estas ecuaciones la raíz común α y será por lo tanto, $\pi(\beta)=0$. Recíprocamente: si $y=\beta$ es una de la raíces de la ecuación de condición $\pi(y)=0$, las ecuaciones propuestas deberán tener, por lo menos, para este valor de y, una raíz común $x=\alpha$; y entonces $x=\alpha$ é $y=\beta$ satisfarán dichas ecuaciones; luego $\pi(y)=\psi(y)$.

Según esto, *la investigación de la ecuación resultante de la eliminación de* x, *se reduce á suponer la incógnita* y *como conocida, y á determinar la condición que es preciso y basta se verifique, para que las dos ecuaciones propuestas puedan quedar satisfechas simultáneamente, por uno ó varios valores de* x.

Así considerado y definido el problema de la eliminación, diremos, por extensión del concepto, que *eliminar la incógnita* x *entre dos ecuaciones,* $f(x)=0$ *y* $\varphi(x)=0$, *que no contienen más que esta incógnita, es hallar la condición necesaria y suficiente para que tengan una ó varias raíces comunes.*

Se ve, pues, que el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas puede considerarse incluído en este último, sin otras diferencias que la de suponer á y como conocida, y que la ecuación resultante, en vez de ser una simple relación condicional entre los coeficientes, será una verdadera ecuación con la incógnita y.

352. **Método de substitución.** Es evidente que si en todos casos fuese posible despejar x de una de las ecuaciones dadas, en función de sus coeficientes conocidos ó desconocidos, bastaría substituir su valor en la otra, y la ecuación que se obtuviera expresaría la resultante pedida; pero, por lo general, este procedimiento que, como ya dijimos, es esencialmente eliminativo, no puede seguirse, bien por la imposibilidad de despejar la incógnita x en función de los coeficientes ó de la otra incógnita, bien porque, aun siendo esto posible, se introducen radicales en la ecuación resultante (*), dificultando su resolución. Sin embargo, cuando una de las ecuaciones propuestas es de primer grado, respecto de

(*) Cuando la ecuación elegida es de segundo grado, bicuadrada ó binomia respecto de x.

la incógnita que ha de eliminarse, este método es el que se debe emplear preferentemente.

Como la circunstancia que acaba de mencionarse no es probable que ocurra, cuando se operé con ecuaciones, cualesquiera, expondremos algunos de los métodos de eliminación que son independientes del grado de las ecuaciones consideradas.

353. Método del máximo común divisor. Suponiendo ordenados los primeros miembros de las ecuaciones, con relación á las potencias decrecientes de la incógnita x que se quiere eliminar, es indudable que si se opera con ellos como para hallar su máximo común divisor, y se continúan las divisiones sucesivas hasta llegar al residuo independiente de dicha incógnita, él será la función eliminante de las ecuaciones propuestas; pues cuando quede reducido á cero, en virtud de los valores de los coeficientes ó para valores de la otra incógnita y, las ecuaciones admitirán un divisor común en x, y tendrán una ó varias raíces comunes; siendo evidente la recíproca.

Este procedimiento tan sencillo y natural en teoría, y que tiene además la inapreciable ventaja de que, igualando á cero el último divisor, se hallan inmediatamente los valores de x, que por sí solos ó asociados á los que la resultante determine para y, verifican al mismo tiempo las ecuaciones consideradas, presenta casi siempre grandes dificultades prácticas, á causa de la extraordinaria prolijidad de los cálculos que exige, y de la perturbación que, para operar con funciones enteras, originan las modificaciones indispensables, las cuales introducen soluciones extrañas en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.

354. Método dialítico de Sylvester (*). El método que va á exponerse está caracterizado por determinar la resultante, como la condición necesaria y suficiente para hacer compatible un sistema de

(*) Juan Jerónimo Sylvester es un célebre analista inglés contemporáneo, profesor que ha sido de la Academia Militar de Woolwich. Según la opinión autorizada de su compatriota, el matemático Todhunter, es digno de figurar al lado de Fourier, de Sturm y de Cauchy, por sus descubrimientos algebraicos relativos á la resolución de las ecuaciones.

varias ecuaciones lineales, cuyo número excede en una unidad al de las incógnitas.

Para determinar de un modo general esta condición, sea el sistema de n ecuaciones de primer grado con $n-1$ incógnitas,

$$
\begin{array}{l}
\overset{1}{a}_1 x_1 + \overset{2}{a}_1 x_2 + \cdots\cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_1 x_{n-1} + \overset{n}{a}_1 = 0 \\
\overset{1}{a}_2 x_1 + \overset{2}{a}_2 x_2 + \cdots\cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_2 x_{n-1} + \overset{n}{a}_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overset{1}{a}_{n-1} x_1 + \overset{2}{a}_{n-1} x_2 + \cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_{n-1} x_{n-1} + \overset{n}{a}_{n-1} = 0 \\
\overset{1}{a}_n x_1 + \overset{2}{a}_n x_2 + \cdots\cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_n x_{n-1} + \overset{n}{a}_n = 0
\end{array}
$$

Estas ecuaciones pueden hacerse homogéneas, reemplazando las incógnitas por las relaciones

$$\frac{x'_1}{x'_n}, \quad \frac{x'_2}{x'_n}, \quad \cdots\cdots \quad \frac{x'_{n-1}}{x'_n},$$

en las que x'_n es una cantidad arbitraria cualquiera, y x'_1, x'_2..... x'_{n-1}, los valores de dichas incógnitas, multiplicados por esa indeterminada; pues substituyendo y quitando denominadores resulta:

$$
\begin{array}{l}
\overset{1}{a}_1 x'_1 + \overset{2}{a}_1 x'_2 + \cdots\cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_1 x'_{n-1} + \overset{n}{a}_1 x'_n = 0 \\
\overset{1}{a}_2 x'_1 + \overset{2}{a}_2 x'_2 + \cdots\cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_2 x'_{n-1} + \overset{n}{a}_2 x'_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overset{1}{a}_{n-1} x'_1 + \overset{2}{a}_{n-1} x'_2 + \cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_{n-1} x'_{n-1} + \overset{n}{a}_{n-1} x'_n = 0 \\
\overset{1}{a}_n x'_1 + \overset{2}{a}_n x'_2 + \cdots\cdots\cdots + \overset{n-1}{a}_n x'_{n-1} + \overset{n}{a}_n x'_n = 0
\end{array}
$$

Ahora bien: si el primer sistema de ecuaciones queda satisfecho por un sistema de valores de x_1, x_2,...... x_{n-1}, es evidente que, disponiendo de x'_n, este segundo se verificará por una infinidad de valores de x', x'_2,...... x'_n; de modo que, según demostramos en la aplicación de la teoría de las funciones determinantes á la resolución de un sistema homogéneo (**274**), deberá ser:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots\cdots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \cdots\cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^n \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots\cdots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix} = 0;$$

lo cual manifiesta, que *para que un sistema de* n *ecuaciones lineales con* n — 1 *incógnitas tenga solución, es preciso y basta que sea cero la determinante de los coeficientes de dichas incógnitas y de los términos conocidos, llevados á los primeros miembros.* (*)

Esto sabido, sean las dos ecuaciones cuyo resultante se busca

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

una del grado m y otra del grado n.

Multiplicando los dos miembros de la primera ecuación sucesivamente por x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x, $x^0 = 1$, y los de la segunda por x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x, $x^0 = 1$, se obtienen las $m + n$ ecuaciones (**),

$$\begin{array}{lll} x^{n-1} f(x) = a_0 x^{m+n-1} + a_1 x^{m+n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots & & = 0 \\ x^{n-2} f(x) = \quad a_0 x^{m+n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots & & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ x f(x) = & a_0 x^{m+1} + \cdots\cdots + a_m x & = 0 \\ f(x) = & a_0 x^m + \cdots + a_{m-1} x + a_m & = 0 \\ x^{m-1} \varphi(x) = b_0 x^{m+n-1} + b_1 x^{m+n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots & & = 0 \\ x^{m-2} \varphi(x) = \quad b_0 x^{m+n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots & & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ x \varphi(x) = & b_0 x^{n+1} + \cdots\cdots + b_n x & = 0 \\ \varphi(x) = & b_0 x^n + \cdots + b_{n-1} x + b_n & = 0 \end{array}$$

(*) Esta consecuencia podría considerarse deducida de la condición de compatibilidad, que vimos (**274**) exigía un sistema homogéneo, después de dividir todas sus ecuaciones por una de las incógnitas.

(**) Estas potencias multiplicadoras, suelen denominarse *aumentativos*.

que pueden considerarse como ecuaciones de primer grado con las incógnitas x, x^2, x^3, ... x^{m+n-1}, cuyo número es inferior en una unidad al de ecuaciones del sistema.

Claro es, por lo tanto, que si las ecuaciones propuestas quedan verificadas al mismo tiempo por uno ó varios valores de x, las $m+n$ ecuaciones obtenidas quedarán también satisfechas simultáneamente por uno ó varios sistemas de valores, de suerte que su determinante total deberá ser igual á cero, es decir, que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_m & 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots a_0 \cdots\cdots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 \cdots\cdots b_n \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 \cdots\cdots\cdots b_n \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & b_n & 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = 0 \ (*)$$

será la ecuación resultante buscada.

La determinante que así se encuentra, como función eliminante, es fácil formarla, observando que *basta escribir en una primera línea horizontal los coeficientes de la primera ecuación, supuesta completa* (**), *y luego tantos ceros como falten para obtener* m + n *elementos; en la segunda línea primero un cero y luego dichos coeficientes por su orden, terminados por los ceros que sean necesarios; y así las demás, hasta que el último coeficiente de dicha ecuación ocupe el último lugar. Obtenido de esta manera el grupo de filas* a, *se procede de igual modo respecto de las que corresponden á los coeficientes* b.

Se ve fácilmente que dicha determinante Δ es una función en-

(*) Los ceros, que figuran en esta matriz, corresponden á los términos que necesariamente faltan en las ecuaciones anteriores; si bien, para mayor sencillez, suelen no escribirse tampoco en la determinante.

(**) Cuando alguna de las ecuaciones no sea completa respecto de x, debe completarse ó suponerla completada; no dejándose nunca de escribir en la determinante los ceros intermedios.

tera homogénea y del grado $m+n$, con relación á la totalidad de los coeficientes, siendo cada uno de sus términos del grado n respecto de los coeficientes de la primera ecuación, y del grado m respecto de los de la segunda. (*)

Como aplicación, busquemos la resultante del sistema

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$
$$\varphi(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

formado por dos ecuaciones de segundo grado.

La resultante, obtenida según la regla enunciada, es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0;$$

la cual, ordenada según los elementos de su primera columna, da:

$$\Delta = a_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} + b_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0;$$

ó descomponiendo las dos determinantes de tercer orden, en otras de segundo,

$$\Delta = a_0 a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} + a_0 b_2 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - b_0 a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} +$$
$$+ b_0 b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Sylvester ha dado á su método el nombre de *dialítico*, porque desune ó desata transitoriamente las relaciones que existen entre las potencias de la incógnita, tratándolas como si fueran incógnitas independientes unas de otras, no obstante hallarse íntimamente ligadas entre sí.

La palabra *diálisis* tiene su origen en la voz griega διαλυσις, que significa separación; y en química se da ese nombre al procedimiento de análisis inmediato, fundado en la propiedad que poseen algunas substancias de atravesar fácilmente las membranas porosas, ó de disolverse más ó menos fácilmente, en virtud de su poder exosmótico, ó de su mayor ó menor difusibilidad.

y, por último, desarrollando y haciendo sencillas transformaciones,

$$\Delta = a_0 a_2 \left(b_1^2 - b_0 b_2\right) + a_0 b_2 \left(a_0 b_2 - a_1 b_1\right) - b_0 a_2 \left(a_1 b_1 - b_0 a_2\right) +$$
$$+ b_0 b_2 \left(a_1^2 - a_0 a_2\right) = a_0 b_1^2 a_2 - a_0 b_0 a_2 b_2 + a_0^2 b_2^2 - a_0 a_1 b_1 b_2 - b_0 a_1 b_1 a_2 +$$
$$+ b_0^2 a_2^2 + b_0 a_1^2 b_2 - a_0 b_0 a_2 b_2 = a_0^2 b_2^2 - 2 a_0 b_0 a_2 b_2 + b_0^2 a_2^2 -$$
$$- a_0 b_1 (a_1 b_2 - b_1 a_2) + b_0 a_1 (a_1 b_2 - b_1 a_2) =$$
$$= (a_0 b_2 - b_0 a_2)^2 - (a_0 b_1 - b_0 a_1)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0,$$

que es la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones propuestas tengan, al menos, una raíz común, ó, bien, un valor de x que, juntamente con otro de y (*), las verifique al mismo tiempo.

355. Método rápido de eliminación. Se emplea con frecuencia, sobre todo cuando los coeficientes son numéricos, un método más práctico que científico, que consiste en eliminar una á una las diversas potencias de la incógnita, empezando por la de mayor grado, la cual, si entra tan sólo en una de las ecuaciones, exige para eliminarse multiplicar la otra por una potencia conveniente de dicha incógnita. Es, pues, con ligeras modificaciones, el método de eliminación por reducción, ya conocido (**129**), aplicado sucesivamente á cada una de las referidas potencias.

Consideremos las mismas dos ecuaciones generales

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + a_m = 0$$
$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + b_n = 0.$$

Si suponemos $m > n$, se multiplicará la segunda ecuación por $a_0 x^{m-n}$ y por b_0 la primera; obteniéndose al restar los productos una ecuación de grado $m-1$, que podrá reemplazar á $f(x) = 0$. Operando con ésta de igual modo, se la substituirá por otra del grado $m-2$, y se continuará de idéntica manera hasta igualar los

(*) En el caso de que las ecuaciones contengan las dos incógnitas, y los coeficientes sean, por lo tanto, funciones de y.

grados de ambas ecuaciones, en el sistema equivalente al propuesto,

$$\pi(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + c_n = 0$$

$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + b_n = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por b_0, la segunda por c_0, y restando, se obtendrá una ecuación del grado $n-1$; y efectuando también la substracción de los productos de la primera por b_n y de la segunda por c_n, resultará otra ecuación del grado $n-1$, después de suprimir el factor común x; siendo evidente que las dos ecuaciones así obtenidas,

$$(c_1 b_0 - b_1 c_0) x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + (c_n b_0 - b_n c_0) = 0$$

$$(c_0 b_n - b_0 c_n) x^{n-1} + \cdots\cdots + (c_n b_{n-1} - c_{n-1} b_n) = 0$$

quedarán verificadas por todos los valores de x que, ya aislados ó con otros de y, satisfagan á las ecuaciones propuestas.

Como puede operarse de idéntico modo con este sistema, se hallará otro más sencillo del grado $n-2$ respecto de x, y, por último, una ecuación que ya no contendrá esta incógnita, y que será la resultante buscada. (*)

Cuando hay que efectuar gran número de eliminaciones sucesivas, y los coeficientes son literales, los de las ecuaciones que van resultando llegan á ser funciones tan complejas de los de las ecuaciones primeras, que se hacen materialmente inmanejables. En cambio, para ecuaciones numéricas ó sencillas, proporciona una notable ventaja.

Para justificar este aserto, hallemos de nuevo la resultante del sistema de las dos ecuaciones de segundo grado

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0.$$

(*) En el caso de haber dos incógnitas, x é y, las divisiones hechas por x en los diversos sistemas transformados, es posible que hagan desaparecer valores de x iguales á cero, que correspondan á otros valores convenientes de y, que anulen al mismo tiempo á a_m y á b_n. Estos, sin embargo, pueden hallarse directamente por el mismo procedimiento, aplicado al caso de dos ecuaciones con una sola incógnita, ó por medio del máximo común divisor.

Efectuando la transformación indicada, cuando son ya iguales los grados de ambas ecuaciones, se tiene:

$$(a_0 b_1 - b_0 a_1) x + (a_0 b_2 - b_0 a_2) = 0$$

$$(a_0 b_2 - b_0 a_2) x + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$$

y multiplicando por los coeficientes de x y restando los productos, resulta:

$$(a_0 b_2 - b_0 a_2)^2 - (a_0 b_1 - b_0 a_1)(a_1 b - b_1 a_2) = 0$$

que es, con menos cálculos, la misma condición encontrada por el método de Sylvester. (*)

Ejercicios.

I. Hallar, por el método de eliminación por substitución, las ecuaciones resultantes, respecto de una cualquiera de las incógnitas, de los siguientes sistemas de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l}(y-1)x^2 + 2x - 5y + 3 = 0\\ yx^2 + 9x - 10y = 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}x^2y - xy + y - 2x + 1 = 0\\ xy + 2y - 2x + 1 = 0\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(y-2)x^2 + x + 2 = 0\\ (y^2 - 2y)x^2 + yx + (y^3 - 4y^2 + 7y - 2) = 0\end{array}$$

II. Obtener, por el método del máximo común divisor, las ecuaciones resultantes de los sistemas

$$\left.\begin{array}{l}(y^2-2y)x^2 + yx + (y^2 - y + 2) = 0\\ (y-2)x^2 + x + 2 = 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}x^2 - 2yx + y^2 - y = 0\\ x^3 - 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x - (y^3 - y^2 + 2y) = 0\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(y^3 - y^2 - 2y)x^3 + (y^3 - y)x^2 + (y^3 - 2y^2)x + (y-1) = 0\\ (y^2 - 2y)x^2 + (y^2 - y)x + (y^2 - 3y + 2) = 0\end{array}$$

(*) Además de los métodos explicados, y del de las funciones simétricas, hay otros muy notables que llevan los nombres de sus autores, Euler, Bezout, Cauchy y Jacobi; y, como muy digna de mencionarse, una importante modificación del método abreviado de Bezout, debida al matemático inglés contemporáneo, Arturo Cayley.

El método de Sylvester ha sido generalizado por éste á un sistema de cualquier número de incógnitas; pero el procedimiento práctico para obtener la resultante no es tan mnemotécnico, ni presenta la facilidad que le distingue cuando se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Merecen especial estudio, en dicho caso general, los métodos seguidos por Jacobi, José Liouville, Carlos Hermite y, más recientemente, por el sabio profesor de la Universidad de Heidelberg, Otto Hesse, y por el matemático florentino Alejandro Betti.

III. Determinar, por el procedimiento de Sylvester, las resultantes de los sistemas de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{ll} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0 & x^2 - (2y+5)x + y^2 + 5y + 6 = 0 \\ x^3 - y^3 = 0 & x^2 - 4yx + 4y^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$x^3 + 2yx^2 + 2y(y-2)x + y^2 - 4 = 0$$
$$x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

IV. Deducir las ecuaciones resultantes de los sistemas que siguen, por el método rápido de eliminación.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + (y+2)x + (y^2 - 2y + 3) = 0 \\ yx^2 + (y+1)^2x + (y^3 - 2y^2 + 4y + 1) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0 \\ x^2 + 2yx + y^2 - y = 0 \end{array}$$

II.—Determinación de las raíces comunes á dos ecuaciones por el método de Sylvester.

356. Número y ecuación de las raíces comunes. Suponiendo satisfecha por sí misma, ó por un valor β de y, la condición $\Delta = 0$, que expresa que las dos ecuaciones

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + a_{m-1} x + a_m = 0$$
$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + b_{n-1} x + b_n = 0$$

tienen al menos una raíz común $x = \alpha$, vamos á investigar cuál es, en cada caso, el número de raíces comunes, y cuáles son sus valores ó la ecuación que las determina.

A este propósito observaremos que si, en el sistema de las $m+n$ ecuaciones, cuya determinante total es la eliminante de Sylvester (**354**), se prescinde de las p primeras ecuaciones de cada uno de los grupos originados por las dos propuestas, quedará un sistema de $m+n-2p$ ecuaciones con $(m+n-1)-p$ incógnitas (*); pero si imaginando reunidos todos los términos que en cada una siguen á x^p, en uno solo de la forma general $cx^{p-1} + dx^{p-2} + \cdots\cdots + kx + l$ (**), y, considerándolos transitoriamente como conocidos, se someten dichas $m+n-2p$ ecuaciones, que contendrán ya igual número de incógnitas, á las mismas transformaciones de cálculo que se harían para despejar x^p, se hallará una nueva ecuación (**272**).

$$\Delta^{(p)} x^p + \Delta'^{(p)} = 0,$$

en la que $\Delta^{(p)}$ representa la determinante del orden $m+n-2p$, que se deriva de la de Sylvester suprimiendo las p primeras filas de las a, las p primeras de las b, las p primeras columnas y las p últimas; mientras que $\Delta'^{(p)}$ es la misma determinante $\Delta^{(p)}$, substituyendo en lugar de los elementos de la última columna, que son los coeficientes de x^p, los términos de la forma polinomia antes indicada. (*)

Ahora bien: en virtud de propiedades ya demostradas de las funciones determinantes bastará, para obtener $\Delta'^{(p)}$, substituir sucesivamente los p coeficientes respectivos $c, d, \ldots\ldots k, l$, en vez de los elementos de dicha última columna; y multiplicar los resultados, en el mismo orden, por $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots., 1$; de manera que la ecuación anterior podrá presentarse bajo la forma

$$\Delta^{(p)} x^p + \Delta_1^{(p)} x^{p-1} + \Delta_2^{(p)} x^{p-2} + \cdots\cdots + \Delta_p^{(p)} = 0 \qquad (S)$$

siendo $\Delta^{(p)}$ la determinante derivada (**) de la de Sylvester, del modo antes expuesto; $\Delta_1^{(p)}$, la que resulta de substituir en $\Delta^{(p)}$, en lugar de los elementos de su última columna, los inmediatos siguientes; $\Delta_2^{(p)}$ la que se deriva de $\Delta_1^{(p)}$ substituyendo, por los que le siguen, los elementos de su última columna; y, finalmente, $\Delta_p^{(p)}$ la que resulta de substituir en la determinante anterior, de esta serie, los elementos de su columna última por los que ocupan el postrer lugar en las filas correspondientes de Δ. (***)

(*) Dada la disposición escalonada de dichas ecuaciones, se ve que por cada par que se supriman, á partir de las primeras de cada grupo, desaparecerá una potencia de la incógnita, es decir, una de las que, por diálisis, se consideran como incógnitas independientes.

(**) Excepto en las dos ecuaciones propuestas, que son las que terminan cada grupo, algunos últimos coeficientes de estos polinomios, serán de seguro iguales á cero.

(*) Las filas suprimidas, de las a y de las b, corresponden á las ecuaciones de que se ha prescindido; las p primeras columnas á las p potencias de x que en su consecuencia han desaparecido, y que son $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \ldots. x^{m+n-p}$; y las p últimas columnas á haber considerado á x^p como última incógnita.

(**) No debe confundirse la frase general, *determinante derivada*, que indica sólo una cierta dependencia, con la de *derivada de una determinante* (**299**).

(***) Estas determinantes del grado $n-p$, respecto de los coeficientes a, y del grado $m-p$ con relación á los b, son tanto más fáciles de formar, cuanto

Sabido esto, se observa que si las ecuaciones propuestas, bien por sí mismas ó para $y = \beta$, tienen un número q de raíces comunes, habrá q sistema de valores de x, x^2, x^3..... que verificarán al sistema total de las $m+n$ ecuaciones, y, por consiguiente, á las $m+n-2p$ consideradas, y á la ecuación (S) que de ellas se ha deducido y que acaba de obtenerse; esta ecuación quedará, pues, satisfecha por q sistemas de valores de las incógnitas x, x^2, x^3.....x^p, y no más que por q, que formen esa progresión; de suerte que si $q > p$, la ecuación referida (S) quedará verificada por más valores de x que los que indica su grado, y su primer miembro se hará idénticamente nulo (**54**), siendo, por lo tanto, $\Delta^{(p)} = 0$, así como todas las otras determinantes del mismo orden; si $q < p$, los q valores serán raíces de dicha ecuación, que contendrá además otros y que no bastará á determinarlos; y, por fin, si $q = p$, deberá quedar satisfecha por p y no más que por p valores de x, de modo que $\Delta^{(p)}$ no será ya nula y la mencionada ecuación (S), de ese mismo grado, determinará tales raíces.

Resumiendo lo expuesto, deducimos que, para que haya raíces comunes, es preciso y basta que $\Delta = 0$; que si entonces $\Delta^{(1)}$ no es también cero, habrá una sola raíz dada por la ecuación

$$\Delta^{(1)}x + \Delta_1^{(1)} = 0 \ (*);$$

que si son $\Delta = 0$ y $\Delta^{(1)} = 0$, no siéndolo $\Delta^{(2)}$, habrá dos raíces comunes contenidas en la ecuación

$$\Delta^{(2)}x^2 + \Delta_1^{(2)}x + \Delta_2^{(2)} = 0;$$

---

que siendo los elementos coeficientes de las ecuaciones, dispuestos como ya se ha dicho en la determinante de Sylvester, el elemento que sigue á uno cualquiera, es el coeficiente inmediato de la ecuación á que corresponde; en la inteligencia de que al último coeficiente le sigue cero, y á cada cero final otro cero, hasta terminar los $m+n$ elementos de cada fila.

(*) El coeficiente $\Delta^{(1)}$ es $\Delta^{(p)}$ poniendo la unidad en lugar de p, ó, sea, la determinante que se deriva de la de Sylvester, suprimiendo la primera fila de las a, la primera de las b, y la primera y última columnas. El término independiente $\Delta_1^{(1)}$ se obtiene, á su vez, substituyendo en lugar de los elementos de la última columna de $\Delta^{(1)}$, los que siguen en las mismas filas totales.

y, por fin, que si $\Delta = 0$, $\Delta^{(1)} = 0$, $\Delta^{(2)} = 0$,...., $\Delta^{(p-1)} = 0$ (*), sin que $\Delta^{(p)}$ se anule, habrá p raíces comunes determinadas por la ecuación general (S), cuya forma ya conocemos.

Se ve, pues, que *cuando es cero, por sí misma ó por un valor de* y, *la determinante* Δ *de Sylvester, correspondiente á un sistema de dos ecuaciones con la sola incógnita* x *ó con dos incógnitas* x *é* y, *el número de raíces comunes á dichas ecuaciones, está expresado por el número de orden de la primera determinante derivada de* Δ, *obtenida por la supresión sucesiva de las primeras filas de las* a *y de las* b, *y las primeras y últimas columnas, que sea distinta de cero; y que sus valores serán las raíces de la ecuación que tenga esa determinante derivada por primer coeficiente, y por coeficientes sucesivos las que resulten de substituir sucesivamente, en ésta, en lugar de los elementos de su última columna, los que siguen en la determinante* Δ. (**)

Debe observarse que no pudiendo exceder el número p de las raíces comunes, al menor de los números m y n, que indican los grados con respecto á x de las dos ecuaciones propuestas, el grado de la determinante derivada $\Delta^{(p)}$, es decir, el número $m+n-2p$, será igual ó mayor que la unidad si m y n son distintos (***), y sólo podrá ser cero cuando $p = m = n$. En este caso particularísimo no existirá $\Delta^{(p)}$; conociéndose que hay p raíces comunes, porque siendo entonces nulas todas las determinantes $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$,..... $\Delta^{(p-1)}$, debe haber un número de esas raíces mayor que $p-1$, y como de seguro no podrá exceder á $p = m = n$,

---

(*) Cada una de estas determinantes se deduce de la anterior, como $\Delta^{(1)}$ se obtiene de Δ.

(**) En el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, podrá también conocerse el número de raíces comunes que tienen para $y = \beta$, viendo el grado de multiplicidad de esta raíz en la ecuación $\Delta = 0$, la cual, según se sabe (**351**), tiene que verificarse por todos los valores de y, así iguales como diferentes, que conjugados con otros de x satisfagan dichas ecuaciones.

(***) Cuando sea la unidad el grado de $\Delta^{(p)}$, lo cual exige que p sea igual al grado de una de las ecuaciones propuestas, y el de la otra superior en una unidad, dicha determinante derivada quedará reducida á un solo elemento de Δ, así como todas las determinantes de igual grado $\Delta_1^{(p)}$, $\Delta_2^{(p)}$,..., $\Delta_p^{(p)}$. La ecuación de las raíces comunes podrá entonces formarse; pero será inútil hacerlo, porque deberá resultar precisamente la ecuación de menor grado de las dos propuestas.

será precisamente p. La ecuación que dará en tal caso las raíces comunes, no es posible que sea la (S), formada según la regla que acaba de enunciarse, porque sus coeficientes no existen; pero se ve, *à priori*, que será cualquiera de las ecuaciones propuestas, por sí misma ó haciendo en ella $y = \beta$. (*)

357. Aplicaciones. Para aclarar las ideas expuestas y ver confirmado cuanto queda dicho, resolveremos los siguientes ejemplos.

1.° Hallar las raíces comunes que pueden tener las ecuaciones

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^3 - 7x - 6 = 0.$$

Formando y desarrollando la eliminante de Sylvester, resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 11 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & 0 & -7 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0 ; \; (^{**})$$

lo cual manifiesta que hay, en efecto, raíces comunes.

(*) El método del máximo común divisor para determinar las raíces comunes á dos ecuaciones (**326**), es sin duda el más sencillo, cuando dichas ecuaciones no contienen más que una incógnita y son numéricos los coeficientes; pero, abstracción hecha de que el procedimiento que fija la regla antes enunciada, es el más natural cuando se ha obtenido la resultante por el método de eliminación de Sylvester, es importantísimo notar que si, en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, el valor $y = \beta$, que generalmente se deduce de la ecuación $\Delta = 0$, fuese tan sólo aproximado, no sería posible encontrar por medio del máximo común divisor, ni siquiera aproximadamente, los valores de x que deberían verificar entonces á las dos ecuaciones propuestas, ó, sean, las raíces comunes correspondientes. La razón de esto consiste en que, cuando las cantidades ó expresiones algebraicas entre las cuales existe un cierto máximo común divisor, experimentan la más pequeña alteración, se halla otro completamente distinto ó, con más frecuencia, la unidad. Siguiendo, en cambio, el procedimiento explicado, las determinantes derivadas que habrían de anularse, se conocen por el grado de multiplicidad de esa raíz de la resultante $\Delta = 0$, ó, por ser sus valores tanto más próximos á cero cuanto mayor sea la aproximación del valor β de y, y una vez determinada la primera de dichas determinantes que de seguro no se anule, podrá formarse la ecuación (S) que, para $y = \beta$, dará aproximadamente todas las raíces comunes que á ese valor puedan corresponder.

(**) No debe olvidarse que es indispensable considerar las ecuaciones completas.

Para determinar estas raíces, en número y valor, observamos que la primer determinante derivada es

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 11 \\ 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 72 ; \; (^*)$$

deduciéndose, por lo tanto, que no hay sino una raíz común.

Como la nueva determinante obtenida substituyendo en lugar de los elementos ó coeficientes de la última columna de $\Delta^{(1)}$, los que les siguen inmediatamente en Δ, ó en las ecuaciones propuestas, es á su vez

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -216,$$

la raíz que se busca estará dada por la ecuación de primer grado

$$72x - 216 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 3.$$

Despojando de esta raíz común, á las ecuaciones del sistema que se considera, puede concluirse desde luego la resolución de dichas ecuaciones, que respectivamente se reducen á

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad \text{de la que resulta} \quad x' = 1, x'' = 2,$$

y á

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \text{de donde} \quad x' = -1, x'' = -2.$$

Conviene observar, como comprobación de lo anteriormente dicho, que siendo

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad \Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -18 \quad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) Esta determinante derivada puede formarse utilizando las líneas de puntos que figuran en la anterior, las cuales separan la primera fila que corresponde á los coeficientes de la primera ecuación, la primera de los correspondientes á la segunda, y la primera y última columnas.

la ecuación de las dos raíces comunes, si las hubiera, sería:

$$6x^2 - 18x = 0 \qquad \text{ó, bien,} \qquad x(x-3) = 0,$$

que queda verificada por la raíz única común $x = 3$; pero la cual tiene además otra solución distinta $x = 0$, y no basta, según se indicó, para determinarla.

2.° Obtener los valores de x que satisfacen á

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0 \quad \text{y} \quad x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0.$$

La existencia de raíces comunes se comprueba, puesto que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -14 & 71 & -154 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 71 & -154 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 71 & -154 & 120 \\ 1 & -11 & 36 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 36 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 36 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11 & 36 & -36 \end{vmatrix} = 0;$$

y como además la primera determinante derivada

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & 71 & -154 & 120 \\ 0 & 1 & -14 & 71 & -154 \\ 1 & -11 & 36 & -36 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 36 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 36 \end{vmatrix} = 0$$

también se anula (*), y la segunda

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & 71 \\ 1 & -11 & 36 \\ 0 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 2$$

no es cero, resulta que hay dos y sólo dos raíces comunes.

(*) De conformidad con lo antes expuesto, se vería de igual modo que la determinante $\Delta_1^{(1)}$ se reduce á cero.

Ahora bien: siendo

$$\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & -154 \\ 1 & -11 & -36 \\ 0 & 1 & 36 \end{vmatrix} = -10 \quad \text{y} \quad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & 120 \\ 1 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & -36 \end{vmatrix} = 12$$

la ecuación que determina dichas raíces comunes es

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 2 \quad \text{y} \quad x = 3.$$

Fácilmente se ve ya que las raíces restantes de la primera de las ecuaciones propuestas, son $x = 4$ y $x = 5$; y que la única raíz que además satisface á la segunda, es $x = 6$.

3.° Determinar las raíces comunes que, para $y = 1$ é $y = 2$, tienen las ecuaciones

$$(y-2)x^3 + (2y-3)x^2 + 3x + (y-2) = 0$$

y

$$x^3 - (y-5)x^2 - (y^2 + 2y - 6)x - 2(y^2 - y + 1) = 0.$$

Calculando los valores numéricos de los coeficientes para $y = 1$, se halla:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0; \ (*)$$

y como también

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) Cuando se conoce el valor de y, es preferible reducir á números los elementos de las determinantes, á fin de obtener más fácilmente su desarrollo, por medio de transformaciones apropiadas (**266**).

se deduce que habrá, por lo menos, dos raíces comunes para el valor considerado de y.

Formando las derivadas de segundo orden

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3\,;\quad \Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6\,;\quad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,;$$

se ve que la ecuación de dichas raíces comunes, será:

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad \text{de donde} \qquad x = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Haciendo $y = 2$ en los coeficientes de las ecuaciones dadas, resulta análogamente $\Delta = 0$; y puesto que entonces $\Delta^{(1)} = -2$ y $\Delta_1^{(1)} = -6$, la única raíz común, que en tal hipótesis tiene el sistema propuesto, es $x = -3$. (*)

Ejercicios.

I. Obtener, por las determinantes de Sylvester, las raíces comunes en los sistemas de ecuaciones que siguen, y comprobar los resultados por medio del máximo común divisor.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 11x - 2 = 0 \\ x^3 - x + 6 = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 6x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 4x + 3 = 0 \\ 12x^4 - 22x^3 - 6x^2 + 13x - 3 = 0 \end{array}$$

$$x^5 + x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x^4 + 3x^2 - 6x - 5 = 0.$$

II. Hallar, por el método de Sylvester, las raíces comunes que, respectivamente para $y = \frac{1}{2}$, $y = -1$ é $y = 2$, hay en cada uno de los sistemas

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + xy + 4y^2 - 6 = 0 \\ 3x^2 + 8y^2 - 14 = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 20x^3 - 65y^2x + 10y^3 - 20 = 0 \\ 2x^2 + 3yx - 2 = 0 \end{array}$$

$$(y-2)x^3 + (2y-3)x^2 + 3x + (y-2) = 0$$

$$x^3 + (y+5)x^2 + (y^2 + 2y + 4)x + 2(y^2 - y - 2) = 0.$$

(*) Los valores fijados para y, á los cuales corresponden las raíces comunes obtenidas, podrían deducirse de la misma determinante total de Sylvester, calculada en función de los coeficientes que contienen esa incógnita. Después de cálculos prolijos, aunque sencillos, puede hallarse dicha determinante, que es $\Delta = (y-1)^2(y-2)(y^6 + 2y^5 - 28y^4 + 52y^3 - 55y^2 + 98y - 166)$.

III.—Resolución de un sistema de dos ecuaciones de cualquier grado con dos incógnitas.

358. Eliminación de una incógnita. Propongámonos resolver ahora el sistema de ecuaciones algebraicas, racionales y enteras, con dos incógnitas

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \varphi(x,y) = 0\,;$$

de las cuales suponemos la primera del grado m y la segunda del grado n, respecto de dichas incógnitas.

Ordenando ambas ecuaciones según las potencias decrecientes de x, tomarán la forma

$$f(x,y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots\cdots + a_m = 0$$

$$\varphi(x,y) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + b_n = 0$$

siendo los coeficientes funciones enteras de y, tales que a_0 y b_0 serán del grado cero, ó independientes de esa incógnita, $a_1, a_2, \ldots a_m$, á lo más, y respectivamente, de los grados $1, 2, \ldots\ldots m$, y también $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$, á lo más y por su mismo orden, de los grados $1, 2, \ldots\ldots n$; es decir, que, en general, cada coeficiente de x será una función de y de un grado igual ó inferior al subíndice que lo afecta.

Resulta, pues, que si la ecuación en x é y del grado m, por ejemplo, es completa con relación á ambas incógnitas, el número total de sus términos deberá ser:

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Recordando ahora cuanto se dijo al fijar el concepto de la eliminación (**351**), deducimos inmediatamente que ésta es en un sistema cualquiera, lo mismo que en las ecuaciones de primer grado, el procedimiento que debe seguirse para resolverlas; puesto que la ecuación resultante que se obtenga, al eliminar x entre las ecuaciones propuestas, como si los coeficientes de esa incógnita fuesen conocidos, debe contener todos y los únicos valores de y que, juntamente con ciertos valores de x, pueden verificarlas.

Suponiendo obtenida ya dicha resultante, por el método dialítico ó por otro cualquiera, no quedará más que hallar sus diversas raíces, del modo que se ha explicado al tratar de las ecuaciones numéricas, y determinar los valores conjugados de la otra incógnita. (*)

359. Grado de la ecuación resultante. Antes de ocuparnos de la resolución propiamente dicha, conviene notar que en cada término distinto de cero de la determinante de Sylvester, entrará una letra a de cada una de las n primeras filas, y una b de cada una de las m restantes; así es que si, para un término cualquiera, llamamos $p, q, \ldots\ldots s$, los números de orden respectivos de las columnas á que pertenecen las a de todas las filas sucesivas, á partir de la primera, y $t, u, \ldots\ldots z$, los que corresponden á las b, tomadas de igual modo, basta observar la disposición de los elementos, para deducir que el grado, g, de dicho término, será á lo más,

$$g=(p-1)+(q-2)+\cdots\cdots+(s-n)+(t-1)+(u-2)+\cdots\cdots+(z-m) \ (**)$$

ó, lo que es lo mismo,

$$g=(p+q+\cdots\cdots+s+t+u+\cdots\cdots+z)-(1+2+\cdots\cdots+n)-\\-(1+2+\cdots\cdots+m);$$

pero como todas las columnas tienen que estar representadas una vez en cada término de la determinante (259), se tendrá indispensablemente,

$$p+q+\cdots\cdots+s+t+u+\cdots\cdots+z=1+2+3+\cdots\cdots+(m+n)=\\=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}; \ (***)$$

(*) Cuando se emplea la eliminación como un medio para resolver las ecuaciones, y no con otro propósito, debe elegirse la incógnita más fácil de eliminar, que será generalmente la que entre elevada tan sólo á la primera potencia en alguna de las ecuaciones, ó aquella cuya suma de grados en ambas sea la menor, á fin de que la determinante sea también del menor grado posible.

(**) Cada elemento de la primera fila es, á lo más, de un grado indicado por el lugar que ocupa menos una unidad; cada elemento de la segunda es, cuando más, del grado que expresa su orden de columna disminuído en dos unidades; y, de igual manera, cada elemento de la $n^{ésima}$ fila es de un grado igual ó menor que el lugar que en ella ocupa, disminuído en n. Lo mismo puede decirse con relación á los elementos b.

(***) La igualdad establecida se funda en que una de las letras del primer miembro tiene que ser precisamente 1, otra igual á 2, otra 3, etc., y, por último, otra igual á $m+n$.

luego el valor máximo del grado deberá ser:

$$g=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}$$

ó, bien, restando mentalmente del primer numerador los otros dos,

$$g=\frac{nm+mn}{2}=mn.$$

Se deduce, en su consecuencia, que *el grado de la ecuación resultante de la eliminación de una incógnita, entre dos ecuaciones con dos incógnitas, es, á lo más, el producto de los grados de dichas ecuaciones* (*). El número de sistemas ó pares de valores de x é y, que satisfagan á las ecuaciones consideradas, no podrá, pues, pasar de mn.

360. Cálculo de las soluciones. Si suponemos resuelta la ecuación final con una sola incógnita

$$\Delta=0,$$

observamos que á cada valor de y que de ella resulte, tal como $y=\beta$, debe corresponder un valor de x, y uno solo, para formar sistema; de suerte que, de conformidad con lo expuesto al tratar de las raíces comunes á dos ecuaciones, parece que se obtendrá siempre el valor conjugado, $x=\alpha$, resolviendo la ecuación

$$\Delta^{(1)}x+\Delta_1^{(1)}=0,$$

después de hacer $y=\beta$ en las determinantes que contiene. Pero á pesar de que las soluciones están constituídas por pares de valores únicos de las dos incógnitas, se comprende que si son iguales dos ó más valores de y dados por la ecuación $\Delta=0$, para ese valor múltiple de y habrá en las propuestas dos ó más raíces comunes respecto de x, debiendo emplearse la ecuación correspondiente al grado de multiplicidad de y, para obtener el mismo número de valores iguales ó diferentes de la otra incógnita, x, que se han de combinar con dicho valor de y.

(*) Esta proposición, que se refiere á los grados totales en x é y, aunque demostrada en otra forma, es debida á Esteban Bezout.

Resulta, en definitiva, que *las raíces simples de la resultante deben conjugarse con los valores de* x *que da la ecuación de las raíces comunes únicas; las raíces dobles de dicha resultante se conjugarán, á su vez, con las de la ecuación de las dobles raíces* (*); *y, en general, sus raíces del* p*ésimo* *orden de multiplicidad, con la ecuación de las* p *raíces comunes.*

Siempre, pues, que la ecuación $\Delta = 0$ tenga raíces múltiples, el sistema de las ecuaciones propuestas podrá descomponerse en otros varios en que entren las referidas *ecuaciones adjuntas;* los cuales se formarán asociando la ecuación de las raíces simples de $\Delta = 0$, con la $\Delta^{(1)}x + \Delta_1^{(1)} = 0$; la ecuación de las raíces dobles de esa misma resultante, con $\Delta^{(2)}x^2 + \Delta_1^{(2)}x + \Delta_2^{(2)} = 0$; y así sucesivamente. (**)

Claro es que si la eliminante Δ se redujese idénticamente á cero, sería señal de que era indeterminado el sistema que se considera. Esto ocurrirá siempre que los primeros miembros de las

(*) Llamamos *doble raíz* al conjunto de dos raíces; y sabemos que se denomina *raíz doble* la que entra dos veces en una ecuación, ó, sea, aquella cuyo factor de primer grado correspondiente, entra elevado á la segunda potencia en la descomposición del primer miembro.

(**) Las ecuaciones de las raíces simples, dobles, triples, etc., de $\Delta = 0$, se obtendrán aplicando á esta ecuación el procedimiento explicado en la teoría de las raíces iguales; si bien sabemos que, en la práctica, se calculan primero directamente todas las raíces conmensurables y que, una vez suprimidas éstas, sólo se aplica el referido procedimiento á las ecuaciones de grado superior al quinto.

Importa también notar que si, para un mismo valor de la incógnita que contienen, se reducen á cero los últimos coeficientes a_m y b_n, la determinante Δ será también cero, y que otro tanto sucede cuando a_0 y b_0 se anulan al mismo tiempo. Esta consecuencia se deduce, *à priori*, observando que todo valor de y que anule á a_m y b_n, podrá conjugarse, por lo menos, con el valor $x = 0$, y que los que anulen á a_0 y b_0 se podrán conjugar seguramente con $x = \infty$.

Estos últimos valores deben, sin embargo, ser objeto de especial examen, lo mismo que ciertas singularidades que no tenemos espacio para considerar; porque el método de eliminación de Sylvester supone, de un modo implícito, que los primeros coeficientes de las ecuaciones son distintos de cero. Por lo demás, las soluciones infinitas tienen suma importancia y presentan gran utilidad en el análisis de ciertas curvas de ramas indefinidas; así como las soluciones múltiples, dadas por un mismo par de valores repetido dos ó más veces, las cuales corresponden á un punto de intersección gráfica, que es también múltiple de igual grado.

ecuaciones propuestas tengan un factor común, función de ambas incógnitas ó solamente de la que se ha eliminado; pues en el primer caso, todos los infinitos pares de valores de x é y que anulasen dicho factor, serían soluciones del sistema, y, en el segundo, la raíz ó raíces de la ecuación obtenida igualándolo á cero, al combinarse con valores cualesquiera de la otra incógnita, formarían una infinidad de soluciones de las ecuaciones dadas, anulando todos, por consiguiente, á la función Δ, que debería ser entonces idénticamente nula (54).

El sistema propuesto será igualmente indeterminado, cuando las ecuaciones tengan un factor común, función de la sola incógnita y que entra en Δ; pero en tal caso la ecuación resultante no acusará esa particularidad, por ser limitado el número de los valores distintos de y. Se conocerá, sin embargo, la indeterminación que á esos valores debe corresponder, viendo que su orden de multiplicidad será, por lo menos, igual al grado de la determinante, y, por lo tanto, superior al mayor de los grados respecto de x de las ecuaciones propuestas; ó, bien, que las ecuaciones adjuntas quedarán reducidas á identidades; pues lo mismo Δ que sus diversas determinantes derivadas, tendrán el factor común referido en todas sus líneas. (*)

De todos modos, si una ó las dos ecuaciones que se consideran pueden descomponerse fácilmente en factores, se abreviará la resolución del sistema, combinando cada uno de los factores de una ecuación con la otra ó con cada uno de los factores de esa otra, y resolviendo los sistemas parciales que así resulten.

Por último, cuando la eliminante Δ se convierta en un número distinto de cero, independientemente de los valores de y, la ecuación resultante será absurda y el sistema incompatible.

361. Aplicaciones. Para comprobar prácticamente las obser-

(*) El orden de multiplicidad, en Δ, de los valores de y que anulen el factor común, función de esta sola incógnita, no podrá ser infinito, que es el número de valores de x que le corresponden, por ser mn el grado máximo de la resultante; pero á eso mismo equivaldrá el que dicho orden sea mayor que el mayor de los grados de las dos ecuaciones dadas respecto de x; porque debiendo éstas tener entonces más raíces comunes que lo que sus grados permiten, deberán ser idénticamente nulos sus primeros miembros.

vaciones hechas y las consecuencias deducidas de ellas, consideraremos varios sistemas de ecuaciones con dos incógnitas y obtendremos las raíces imaginarias de una ecuación; cuestión, esta última, que es sabido depende de la eliminación de una incógnita en uno de dichos sistemas, y de la resolución inmediata del mismo (**350**).

1.° Resolver el sistema de las dos ecuaciones

$$x^3 - 3(y-1)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x - (y^3 - 3y^2 - y + 3) = 0$$

y

$$3x^2 + (y^2 - 2y - 3) = 0.$$

Formando la resultante, por el método de Sylvester, y desarrollándola se halla:

$$\Delta = 64y^2(y^2 - 2y - 3)(y^2 - 4y + 4) = 64y^2(y+1)(y-3)(y-2)^2 = 0. \ (*)$$

Las determinantes derivadas de primer orden se ve que son:

$$\Delta^{(1)} = 24y(y-2) \qquad \text{y} \qquad \Delta_1^{(1)} = 0 \ (**),$$

y las de segundo orden

$$\Delta^{(2)} = 3\,; \qquad \Delta_1^{(2)} = 0\,; \qquad \Delta_2^{(2)} = y^2 - 2y - 3. \ (***)$$

Haciendo ahora $y = -1$ é $y = 3$, en la primera ecuación adjunta

$$\Delta^{(1)}x + \Delta_1^{(1)} = 24y(y-2)x = 0,$$

se obtiene, para los dos valores, $x = 0$; y llevando las raíces dobles $y = 0$ é $y = 2$, á la ecuación adjunta de las dobles raíces, que es, como debía ser en este caso, la segunda de las ecuaciones propuestas, resulta para ambas $x = \pm 1$.

(*) Para obtener este resultado, basta en la determinante de quinto grado, formada por la regla de Sylvester, restar de los elementos de la tercera fila los de la primera multiplicados por 3, lo cual la convierte seguidamente en una determinante de cuarto grado; ordenar después ésta, con relación á los elementos de su última fila, lo que da dos determinantes de tercer grado, la primera de las cuales se reduce inmediatamente á cero.

(**) Se encuentra la expresión de $\Delta^{(1)}$ ordenando esta determinante con respecto á los elementos de su tercera fila, lo cual la reduce á una determinante de segundo grado; y se halla que $\Delta_1^{(1)}$ es idénticamente nula, ordenándola con relación á los elementos de su segunda fila.

(***) A pesar de lo hecho en este ejemplo, los desarrollos de las determinantes derivadas no suelen efectuarse sino después de dar valores á y en los cuadros matrices, á fin de que los elementos sean numéricos y su cálculo más sencillo.

Se deduce, pues, que las soluciones buscadas serán:

$$\left.\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 3 \\ x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2 \\ x = -1 \end{array}$$

2.° Resolver las dos ecuaciones de segundo grado

$$2x^2 - (y-4)x - y(y-2) = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 - 2(2y-1)x + 3y(y-2) = 0.$$

Por transformaciones sencillas se encuentra que la determinante de Sylvester se reduce idénticamente á cero (*); lo cual indica que el sistema propuesto es indeterminado.

La indeterminación se comprueba observando que los primeros miembros de las dos ecuaciones tienen el factor común $x - y + 2$; de suerte que, tanto para y como para x, existe una infinidad de valores.

3.° Hallar las soluciones del sistema que forman

$$yx^3 - (y^3 - 3y - 1)x + y = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 - y^2 + 3 = 0.$$

El desarrollo de la eliminante Δ, correspondiente á estas ecuaciones, conduce sin dificultad á la ecuación absurda $\Delta = 3 = 0$ (**); así es que deducimos que el sistema dado no puede verificarse por ningún par de valores de x é y.

La incompatibilidad de las ecuaciones propuestas se manifiesta, poniendo la primera bajo la forma

$$(x^2 - y^2 + 3)yx + x + y = 0.$$

4.° Calcular las raíces imaginarias de la ecuación

$$x^4 - x + 1 = 0.$$

Desde luego se observa que esta ecuación no puede quedar satisfecha por ningún número negativo; que no tiene raíces enteras, pues $x = 1$ no la verifica; que, por su forma, no puede tener-

(*) Basta sumar los elementos de la cuarta fila con los productos por 3 de sus correspondientes de la segunda, lo que da una determinante de tercer grado; y restando, en ésta, de la primera fila el doble de la segunda, se obtiene otra en la que los elementos de su última fila, multiplicados por y, son idénticos á los de la primera.

(**) Se resta de la primera fila el producto por y de la tercera, y en la determinante de cuarto grado, que se obtiene, se hace igual transformación con las dos filas interiores, resultando una de tercero, inmediatamente reducible á otra determinante de segundo grado.

las tampoco fraccionarias; y que entonces debe carecer también de raíces múltiples, por no ser cuadrado perfecto su primer miembro. Se ve igualmente que contiene por lo menos dos raíces imaginarias (*), y que si las otras dos fuesen inconmensurables deberían estar comprendidas entre cero y $+L=1$, lo cual no es posible; pues para valores comprendidos entre esos límites, domina x sobre x^4, siendo siempre menor que la unidad (**).

Sabiendo ya que las cuatro raíces de la ecuación propuesta son imaginarias, haremos $x=y\pm z\sqrt{-1}$, según dijimos, (**350**), y separando las ecuaciones de condición, resulta:

$$z^4-6y^2z^2+(y^4-y+1)=0 \quad \text{y} \quad 4yz^2-(4y^3-1)=0.$$

Para obtener ahora las soluciones reales de este sistema, haremos primeramente $z^2=u$, lo cual transforma dichas ecuaciones en

$$u^2-6y^2u+(y^4-y+1)=0 \quad \text{y} \quad 4yu-(4y^3-1)=0;$$

y, sirviéndose del método de Sylvester, se halla:

$$\Delta=64y^6-16y^2-1=0\ (***) \quad \text{ó, bien,} \quad \Delta=v^3-4v-1=0,$$

después de hacer $4y^2=v$.

Esta última ecuación tiene una sola raíz real positiva, y, siendo $+L=3$, se ve que estará comprendida entre 2 y ese límite superior, debiendo hallarse bastante más próxima al primer número, por ser en este intervalo constantemente positiva la derivada. Substituyendo números que difieran en una unidad decimal, resulta desde luego que el valor de la referida raíz se encuentra entre 2,1 y 2,2, y seguidamente, que la comprenden los números 2,11 y 2,12.

Efectuando una primer corrección por el método de Newton, se deduce que es, por defecto y con cinco cifras exactas,

(*) Siendo $v+v'=2$, el límite inferior, k, del número de sus raíces imaginarias es á su vez 2. Se deduce análogamente, porque falta más de un término entre dos consecutivos de signos contrarios (**331**).

(**) Desde que se conoce que una ecuación no tiene raíces conmensurables ni iguales, puede pasarse al cálculo de sus raíces imaginarias, aunque se ignore su número, que luego se fija fácilmente.

(***) La determinante Δ, que es de tercer grado, tiene tres términos nulos y se desarrolla fácilmente por la regla de Sarrus.

$v=2,1149$; y como $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{v}$, se obtiene, con idéntica aproximación decimal, $y=\pm 0,7271$.

Siendo la ecuación adjunta, para estos valores de y, la segunda de las ecuaciones de condición, deberá tenerse $u=y^2-\frac{1}{4y}$; y ya que $z=\pm\sqrt{u}$, resulta por fin $z=\pm 0,4300$ y $z=\pm 0,9341$; de modo que los dos pares de raíces imaginarias conjugadas de la ecuación propuesta, serán aproximadamente:

$$x=0,7271\pm 0,4300\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad x=-0,7271\pm 0,9341\sqrt{-1}.\ (*)$$

Ejercicios.

I. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x^2-(2y+5)x+(y^2+5y+6)=0 \\ x^2-4yx+(4y^2-1)=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (y-1)x^2+2x-(5y-3)=0 \\ yx^2+9x-10y=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x^2+(4y-9)x+(2y^2-9y-18)=0 \\ x^2+(1-2y)x+(y^2-y-6)=0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (y^2-1)x^4-3y^2x^3+(y-1)x^2-y^3=0 \\ (y-1)x^3+2yx^2-y^2=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x^3-3yx^2+y(y+2)x-y=0 \\ yx^2-2yx-(y^2-3y+1)=0 \end{array}$$

II. Calcular las raíces imaginarias de las ecuaciones que siguen.

$$x^5+8x^3-4x-1=0\ ; \quad x^4-2x^3+23x^2+6x-78=0\ ;$$
$$x^5-2x^4-60x-200=0\ ; \quad x^7-3x+1=0.$$

IV.—Expresión de multiplicidad de las raíces de una ecuación, por medio de los discriminantes.

362. Nuevo carácter de multiplicidad. En la teoría de las raíces iguales se vió (**327**) que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación $\varphi(x)=0$ tenga una raíz múltiple del orden n,

(*) Con el propósito único de mostrar fácilmente la marcha que debe seguirse cuando se consideren ecuaciones de grado superior, hemos eliminado z por el método de Sylvester, en el ejemplo ahora resuelto; pues siendo la segunda ecuación del sistema condicional de primer grado respecto de z^2, y no entrando en la otra sino potencias pares de z, podría eliminarse por substitución, según se dijo al tratar de las raíces imaginarias (**350**), sin necesidad de recurrir á artificios de ningún género.

La resolución de este mismo ejemplo, dada por Serret en su Algebra, ha sido objeto de crítica un tanto severa, por parte del sabio Director del Observatorio de Madrid, D. Miguel Merino, en su traducción de la Memoria de Encke, relativa al método de Gräffe para resolver las ecuaciones numéricas.

es que su primer miembro y sus $n-1$ primeras derivadas se anulen para un mismo valor de x, que no reduzca también á cero la derivada de orden $n^{\text{ésimo}}$.

Dicha condición será, pues, que las funciones

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \ldots\ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x)$$

tengan un máximo común divisor de primer grado, que igualado á cero dará la raíz múltiple referida, ó, bien, que las ecuaciones

$$\varphi(x)=0,\ \varphi''(x)=0,\ \ldots\ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x)=0$$

tengan una sola raíz común.

Sabido esto, si en $\varphi(x)$ se substituye $\frac{x}{y}$ en lugar de x, y suponiendo que es del grado m se multiplica luego por y^m para quitar los denominadores, se tendrá la función homogénea

$$f(x,y)=a_0x^m+a_1yx^{m-1}+a_2y^2x^{m-2}+\cdots\cdots+a_my^m$$

que se convierte en $\varphi(x)$ con sólo hacer $y=1$.

Aplicando á esa función el teorema de Euler (**302**), resulta:

$$mf(x,y)=xf'_x+yf'_y\,;$$

de suerte que, en la hipótesis de ser $y=1$, la ecuación propuesta podrá ponerse bajo la forma

$$xf'_x+yf'_y=0$$

y el sistema

$$\varphi(x)=0,\qquad \varphi'(x)=0,$$

que expresa la condición para que exista una raíz doble, será equivalente al siguiente:

$$f'_x=0,\qquad f'_y=0,$$

después de hacer $y=1$. (*)

Por medio de este artificio, resulta la ventaja práctica de que las ecuaciones del segundo sistema son, á lo más, del grado $m-1$ (**), mientras que las del primero son una del grado m y otra precisamente del grado $m-1$.

(*) Cuando $y=1$, se verifica evidentemente que $\varphi'(x)=f'_x$; y el sistema $xf'_x+yf'_y=0$ con $f'_x=0$, se convierte en $f'_y=0$ con $f'_x=0$.

(**) Si la ecuación propuesta carece de segundo término, f'_y es á lo más del grado $m-2$ con respecto á x.

Si se recuerda ahora que las derivadas parciales de una función homogénea, son también funciones homogéneas de grado inferior en una unidad, se hallará, aplicando el mismo principio,

$$(m-1)f'_x=xf''_{x^2}+yf''_{xy}\,;\qquad (m-1)f'_y=xf''_{yx}+yf''_{y^2}\,;$$

y substituyendo en la igualdad antes obtenida, una vez multiplicados sus dos miembros por $m-1$, tendremos:

$$m(m-1)f(x,y)=x^2f''_{x^2}+2xyf''_{xy}+y^2f''_{y^2}.$$

Combinando este resultado con la primera de las igualdades precedentes, se ve que el sistema

$$\varphi(x)=0,\qquad \varphi'(x)=0,\qquad \varphi''(x)=0,$$

que designa la existencia de una raíz triple, podrá reemplazarse por el formado por las ecuaciones

$$f''_{x^2}=0,\qquad f''_{xy}=0,\qquad f''_{y^2}=0,$$

después de hacer $y=1$; puesto que para este valor de y las funciones $f(x,y)$, f'_x, f''_{x^2}, y $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, son respectivamente idénticas.

Se tiene así la ventaja de que las derivadas de segundo orden, de la función homogénea, son á lo más del grado $m-2$, después de hacer $y=1$, en tanto que $\varphi(x)$ es del grado m, y sus dos primeras derivadas son seguramente de los grados $m-1$ y $m-2$.

Procediendo de la misma manera (*), veríamos que la condición para que $\varphi(x)=0$ tenga una raíz múltiple del orden $n^{\text{ésimo}}$, en vez de estar expresada por la compatibilidad del sistema

$$\varphi(x)=0,\ \varphi'(x)=0,\ \varphi''(x)=0,\ \ldots\ldots\ \varphi^{(n-1)}(x)=0,$$

puede estarlo por la del sistema más sencillo

$$f^{(n-1)}_{x^{n-1}}=0,\ f^{(n-1)}_{x^{n-2}y}=0,\ f^{(n-1)}_{x^{n-3}y^2}=0,\ \ldots\ldots f^{(n-1)}_{y^{n-1}}=0,$$

ecuaciones que, reemplazando y por la unidad, son todas á lo

(*) Es fácil deducir la igualdad

$$m(m-1)(m-2)f(x,y)=x^3f'''_{x^3}+3x^2yf'''_{x^2y}+3xy^2f'''_{xy^2}+y^3f'''_{y^3}$$

y ver, en general, que los coeficientes del segundo miembro son siempre los de la potencia del binomio, del mismo grado que el orden de las derivadas.

más del grado $m - n + 1$, mientras que los grados de las del primero son precisa y sucesivamente $m, m-1, m-2, \ldots\ldots m-n+1$.

363. Discriminantes. *Si se tiene una función homogénea de* n *variables y se igualan á cero sus derivadas parciales de primer orden, la función de los coeficientes que debe anularse para que las* n *ecuaciones homogéneas, así obtenidas, tengan soluciones formadas por valores distintos de cero* (*), *se llama el discriminante de dicha función* (**).

Concretándonos á una función homogénea de dos variables $f(x,y)$, se ve que la condición para que el sistema

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0$$

quede satisfecho por un par de valores distintos del $x=0$ é $y=0$, es la de que sean compatibles estas mismas ecuaciones, después de dividir sus dos miembros por y^{m-1}, ó de hacer en ambas y igual á la unidad (***). El discriminante de $f(x,y)$ será, según esto, el primer miembro de la resultante del sistema anterior, ó bien la función eliminante de Sylvester, formada por la regla ya conocida (**354**).

Si, de conformidad con lo antes expuesto, se observa que cuando una ecuación tiene raíces iguales de cualquier orden, quedan seguramente verificadas las ecuaciones

$$f'_x = 0 \quad \text{y} \quad f'_y = 0,$$

una vez hecho $y = 1$, y que la recíproca es también cierta, deducimos que *la condición necesaria y suficiente para que una ecuación,* $\varphi(x) = 0$, *tenga raíces múltiples, es que sea nulo el discriminante de su primer miembro, una vez homogeneizado éste por medio de las potencias de otra variable.*

(*) Toda ecuación homogénea que se verifica para un sistema de valores de las incógnitas, diferente del que se halla igualándolas todas á cero, tiene una infinidad de soluciones, que se obtienen multiplicando aquellos valores por números cualesquiera.

(**) El nombre *discriminante*, adoptado por Sylvester, no da bien cuenta de su significación matemática, sino considerándolo como derivado del verbo inglés *to discriminate*, que significa *distinguir* ó *señalar*.

(***) La condición es independiente de que la incógnita esté representada por x ó por $\frac{x}{y}$.

364. Aplicaciones. Con arreglo á lo que acaba de decirse, resolveremos las dos cuestiones que siguen.

1.ª Expresar la condición que es preciso y basta se verifique para que la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tenga sus dos raíces iguales.

Homogeneizando su primer miembro se tiene:

$$f(x,y) = ax^2 + byx + cy^2$$

y, por consiguiente,

$$f'_x = 2ax + by \quad \text{y} \quad f'_y = bx + 2cy.$$

Haciendo $y = 1$ é igualando á cero, resultan las ecuaciones

$$2ax + b = 0 \quad \text{y} \quad bx + 2c = 0;$$

y formando la determinante de Sylvester, se halla el discriminante

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2;$$

de modo que la condición pedida será:

$$b^2 - 4ac = 0.$$

La raíz doble podrá obtenerse resolviendo cualquiera de las dos ecuaciones condicionales, lo que da: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2c}{b}$.

2.ª Determinar la relación que debe existir entre dos coeficientes de la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

para que tenga raíces múltiples.

Procediendo de igual manera que en la cuestión anterior, se tiene:

$$f(x,y) = x^3 + py^2x + qy^3$$

y, por lo tanto,

$$f'_x = 3x^2 + py^2 \quad \text{y} \quad f'_y = 2pyx + 3qy^2.$$

Si se hace ahora $y = 1$, y se igualan á cero las dos derivadas, resulta el sistema

$$3x^2 + p = 0, \quad 2px + 3q = 0;$$

cuyo discriminante es

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & p \\ 2p & 3q & 0 \\ 0 & 2p & 3q \end{vmatrix} = 27q^2 + 4p^3$$

luego la relación pedida será

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \quad \text{ó, bien,} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.$$

Observando que por ser nula la suma de las tres raíces, éstas no pueden tener un mismo valor, deducimos que la condición hallada expresa la existencia de dos raíces iguales.

El valor de esta raíz múltiple se deduce de la segunda de las ecuaciones condicionales, que es de primer grado (*), de suerte que se tendrá: $x = -\frac{3q}{2p}$; y como el doble de este valor debe ser igual y de signo contrario á la raíz simple, será esta: $x = \frac{3q}{p}$ (**).

Ejercicios.

I. Hallar la condición para que tenga raíces iguales la ecuación de cuarto grado

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

II. Obtener los discriminantes de las funciones homogéneas que siguen:

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2;$$

$$f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2.$$

(*) Como debía suceder, se ve que la ecuación adjunta $\Delta^{(1)}x + \Delta_1^{(1)} = 0$ es precisamente $2px + 3q = 0$.

(**) Por lo mismo que los resultados, á que han conducido las dos cuestiones resueltas, se conocían ya anteriormente (**153** y **334**), nos han parecido más adecuadas para comprobar el nuevo procedimiento, que se funda en el uso de los discriminantes.

FIN

PROGRAMA

publicado por la Dirección General de Instrucción Militar, y que ha servido para escribir esta obra.

PRIMERA PARTE

ÁLGEBRA ELEMENTAL

Algoritmo algebraico.

I.—*Operaciones elementales.*

Nociones fundamentales.—Cantidades algebraicas.
Adición, substracción, multiplicación y división de las cantidades enteras.
Polinomios en general.
Monomio y polinomio.
Adición, substracción, multiplicación y división.
Fracciones algebraicas y su cálculo.
Polinomios enteros y homogéneos.
Funciones lineales.
Multiplicación y propiedades de los polinomios enteros.
División de monomios y de polinomios.
División de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$.
Observaciones sobre la división.—Método de los coeficientes indeterminados.

II.—*Potencias y raíces.*

Cálculo de los radicales.
Multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces.
Cálculo de radicales que no tengan el mismo índice.
Potencia del binomio $(x + a)^m$.
Potencias y raíces de los polinomios enteros.

III.—*Progresiones.*

Progresiones aritméticas y geométricas.
Progresiones geométricas decrecientes.

IV.—*Logaritmos.*

Definición de los logaritmos por las progresiones.

Sus propiedades.

Disposición y uso de las tablas vulgares.

Exposición completa del cálculo logarítmico.—Aplicaciones al interés compuesto y á las anualidades.

Regla de cálculo.

Aplicación del algoritmo algebraico á la resolución de las ecuaciones.

I.—*Ecuaciones de primer grado.*

Ecuaciones con una incógnita.

Ecuaciones con varias incógnitas.

Eliminación por substitución, por adición, por comparación y por multiplicadores.

Discusión y resolución de dos ecuaciones con dos incógnitas.—Interpretación de las soluciones.

Aplicaciones de esta teoría.

Resolución, en números enteros, de las ecuaciones indeterminadas, haciendo uso de las fracciones continuas.

II.—*Ecuaciones de segundo grado.*

Resolución de la ecuación con una sola incógnita.

Discusión de las raíces.

Discusión del trinomio $ax^2 + bx + c$.

Caso en que el coeficiente a es muy pequeño.

SEGUNDA PARTE

ÁLGEBRA SUPERIOR

Funciones generales.

I.—*Algoritmo.*

Continuidad de las funciones.

De la función simple algebraica.

Exponentes fraccionarios, inconmensurables, negativos y nulos.

De la función exponencial.

Logaritmos por la inversa de la exponencial.

Módulo de un sistema de logaritmos.

Imaginarias.

Módulo y argumento.—Operaciones elementales.

Radicales algebraicos y su cálculo.

Funciones de variables imaginarias.

Series.

Convergencia.—Teoremas y reglas.—Desarrollo.

Límites en las series $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1 + x\right)^m$, e^x.

Demostrar que para ciertos valores dados á la variable de un polinomio entero, éste conserva el signo de su primer término.

II.—*Análisis combinatorio.*

Sucesiones é inversiones.

Coordinaciones, permutaciones y combinaciones.

Fórmula del binomio.—Suma de las potencias semejantes de los términos de una progresión aritmética.—Suma de las pilas de balas.—Determinantes.—Sus propiedades.

Aplicación de las determinantes á resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Operaciones con las determinantes.

III.—*Resolución de las ecuaciones.*

Derivadas.

Derivadas de una suma, de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz.

Derivadas de las funciones de funciones y de las funciones implícitas.

Teorema de Taylor.—Su extensión al caso de varias variables.

Ecuaciones numéricas.

Transformación de las ecuaciones; la propuesta en otra de raíces iguales y de signos contrarios; la propuesta en otra cuyas raíces sean inversas.

Hacer desaparecer un término de una ecuación.

Resolución de una ecuación.

Supresión de las raíces iguales.

Límites de las raíces.

Determinación de las enteras.

Separación de las restantes.

Cálculo aproximado de las raíces separadas.

Eliminación.

Método dialítico de Sylvester.

Condición para que una ecuación tenga una raíz múltiple. — Discriminantes.

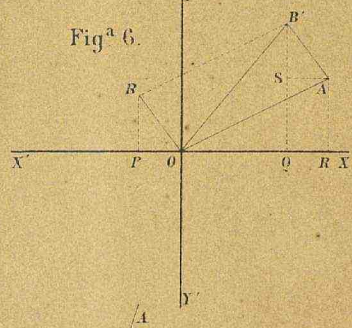
Método rápido de eliminación.

FÉ DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
24	30 y 31	Esta clase de	Estos
38	8	existirán	existirá
43	15	cuadro	cuadrado
49	28	á la idea	la idea
49	30	Cauchy	Gauss
50	34	(**)	(***)
81	5	*máximun*	*máximo*
157	30	es es	esto es
174	30	orden	orden p
194	24	orden	de orden
195	16	deben	debe
207	12	*y que esta*	*y esta*
283	17	1688, que	1688 en que
297	2	por los	por lo
310	19	igualades	igualados
332	27	$(x - c)^q$	$(x - c)^{q-1}$

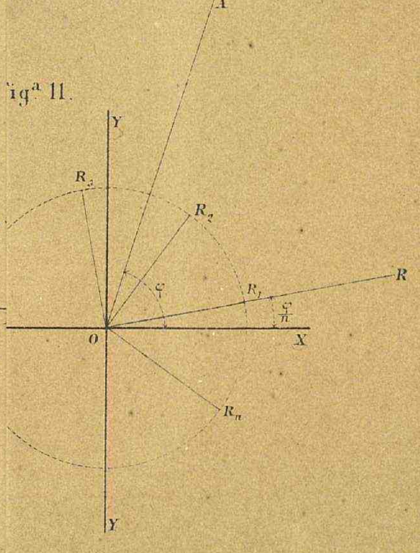
OBSERVACIÓN.—La nota que aparece en la página 179, corresponde á la primera llamada de la página 180.

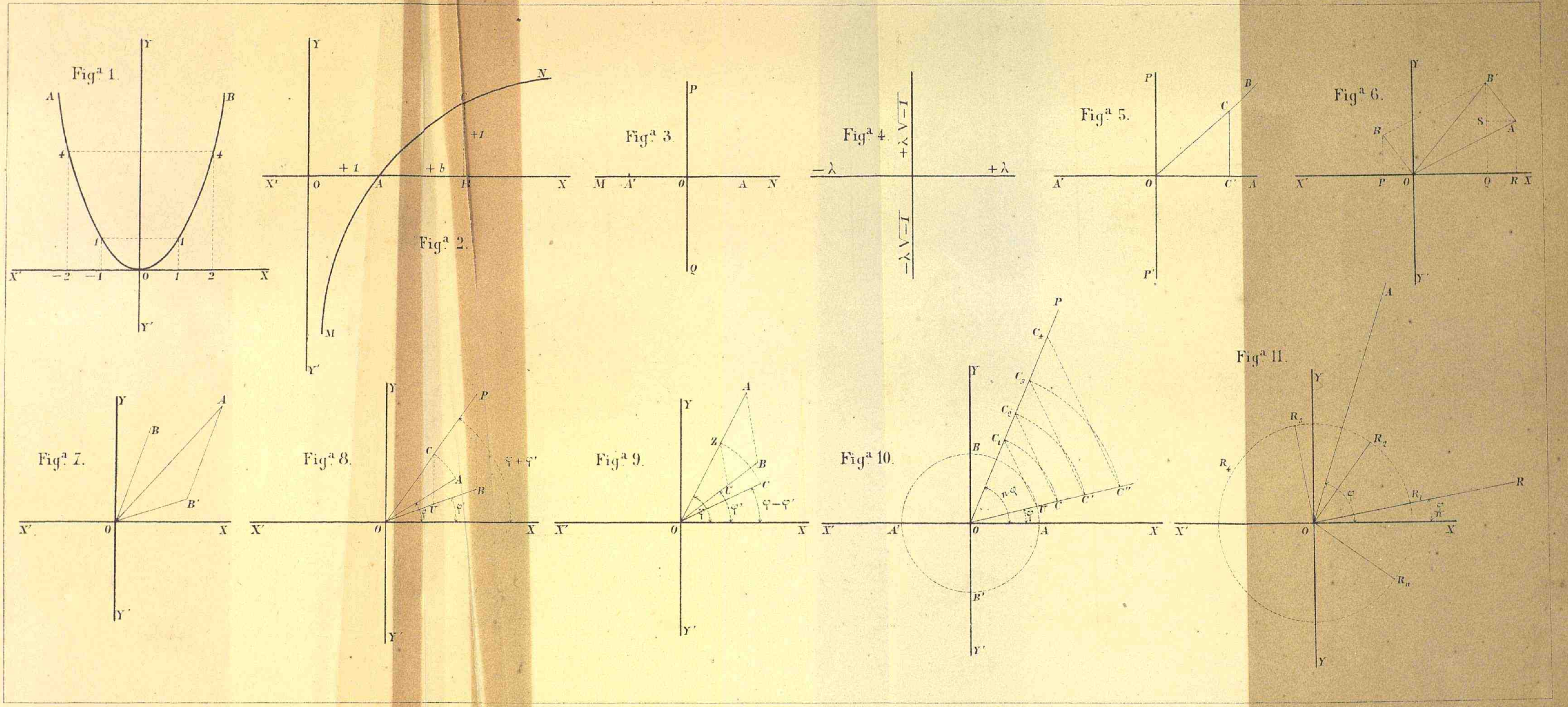
Figª 6.

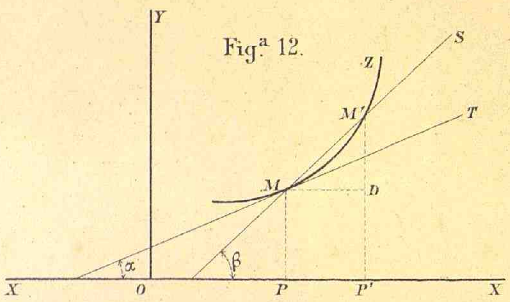


2.

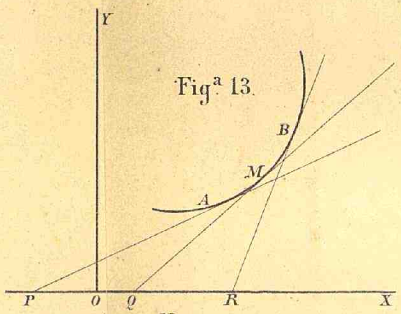
igª 11.



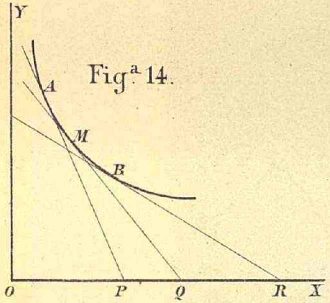

Figª 1.
Figª 2.
Figª 3.
Figª 4.
Figª 5.
Figª 6.
Figª 7.
Figª 8.
Figª 9.
Figª 10.
Figª 11.
X
X'
Y
Y'
O
$+\lambda$
$-\lambda$
$+\lambda\sqrt{-1}$
$-\lambda\sqrt{-1}$
$\varphi+\varphi'$
$\varphi-\varphi'$



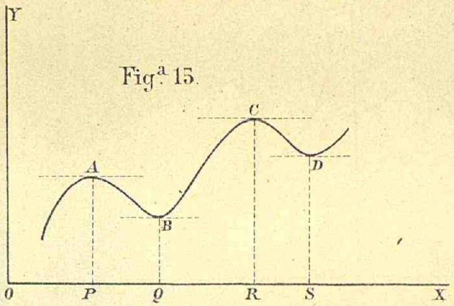
Figª 12.



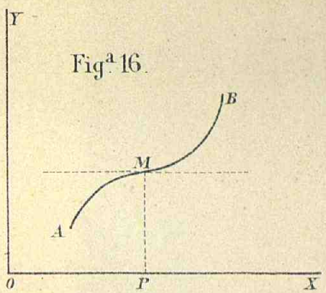
Figª 13.



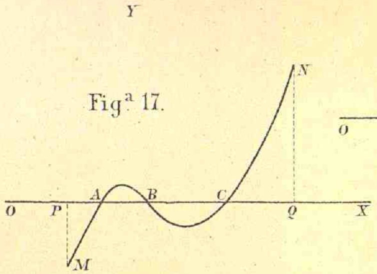
Figª 14.



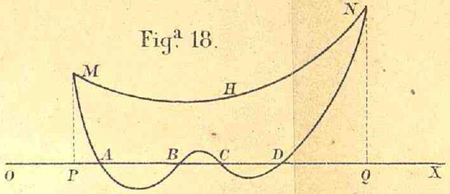
Figª 15.



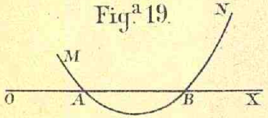
Figª 16.



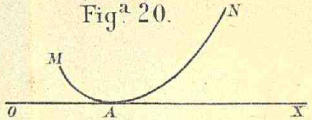
Figª 17.



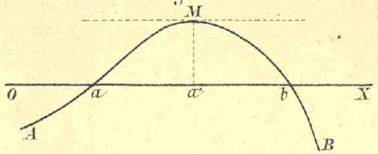
Figª 18.



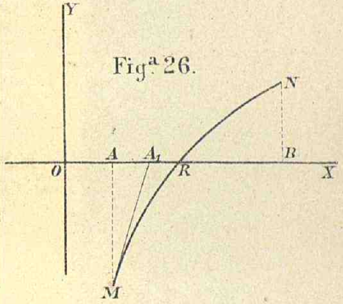
Figª 19.



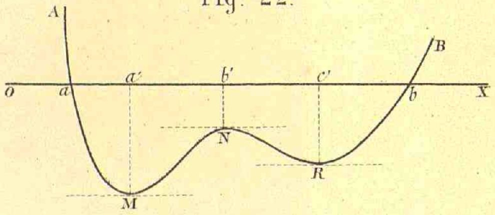
Figª 20.



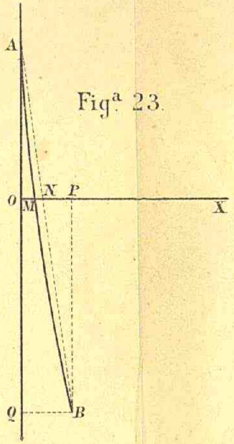
Figª 21.



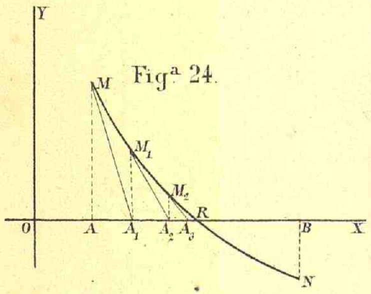
Figª 26.



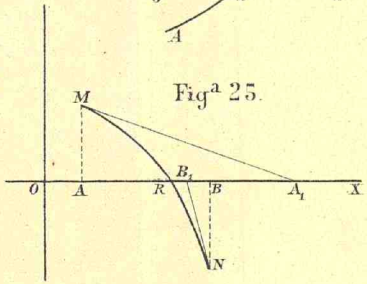
Figª 22.



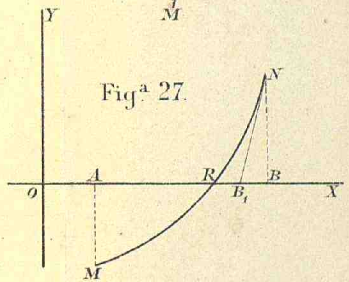
Figª 23.



Figª 24.



Figª 25.



Figª 27.