5

GALDEANO

ARITMETICA

FACULTAD
DE CIENCIAS
DE GRANADA

hecho ver en el problema de los móviles, y aun es preciso añadir que estas imposibilidades relativas no siempre resultan de las condiciones del enunciado, sino de las hipótesis que, al proceder por el método analítico, se hacen con objeto de plantear el problema, pues muy bien puede suponerse, en dicho problema, el punto de encuentro á la derecha ó á la izquierda de los puntos P y Q ó entre éstos, y dicha hipótesis, si no es la que conviene al caso propuesto, es causa también de que la incógnita aparezca, por ejemplo, afectada del signo menos cuando debe resultar con signo positivo, como sucedería si en el caso 2.º, al plantear el problema, se hubiese supuesto el punto de encuentro colocado á la derecha de los puntos P y Q.

Estas consideraciones conducen á la siguiente

62. **Regla.**—*Cuando no se ha obtenido un valor absoluto como solución de un problema, podrá obtenerse, cambiando la ecuación que lo traduce por su correlativa inversa ó la compleja que convenga, y dicho valor absoluto será solución de otro problema correlativo del propuesto, cuyo enunciado se obtendrá haciendo que la ecuación transformada sea su exacta traducción, cuando esto pueda hacerse. Si no hay traducción posible, el orden de cantidades de que se trata no admite las afecciones correspondientes al grado de correlación necesario para convertir en absoluto el valor de la incógnita. Entonces el problema propuesto es imposible.*

FIN

CRÍTICA Y SÍNTESIS

DEL

ÁLGEBRA

hecho ver en el problema de los móviles, y aun es preciso añadir que estas imposibilidades relativas no siempre resultan de las condiciones del enunciado, sino de las hipótesis que, al proceder por el método analítico, se hacen con objeto de plantear el problema, pues muy bien puede suponerse, en dicho problema, el punto de encuentro á la derecha ó á la izquierda de los puntos P y Q ó entre éstos, y dicha hipótesis, si no es la que conviene al caso propuesto, es causa también de que la incógnita aparezca, por ejemplo, afectada del signo menos cuando debe resultar con signo positivo, como sucedería si en el caso 2.º, al plantear el problema, se hubiese supuesto el punto de encuentro colocado á la derecha de los puntos P y Q.

Estas consideraciones conducen á la siguiente

62. **Regla.**—*Cuando no se ha obtenido un valor absoluto como solución de un problema, podrá obtenerse, cambiando la ecuación que lo traduce por su correlativa inversa ó la compleja que convenga, y dicho valor absoluto será solución de otro problema correlativo del propuesto, cuyo enunciado se obtendrá haciendo que la ecuación transformada sea su exacta traducción, cuando esto pueda hacerse. Si no hay traducción posible, el orden de cantidades de que se trata no admite las afecciones correspondientes al grado de correlación necesario para convertir en absoluto el valor de la incógnita. Entonces el problema propuesto es imposible.*

FIN

CRÍTICA Y SÍNTESIS

DEL

ÁLGEBRA

(3)

CRÍTICA Y SÍNTESIS

DEL

ÁLGEBRA

POR

D. Z. G. DE GALDEANO

DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

CATEDRÁTICO DEL INSTITUTO DE TOLEDO

MIEMBRO CORRESPONSAL DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS, ETC.

TOLEDO

IMPRENTA Y LIBRERÍA DE J. PELÁEZ, SUCESOR DE FANDO

Comercio, 29 y 31—Alcázar, 20

1888

ES PROPIEDAD.

CAPÍTULO PRIMERO

Indicaciones sobre el concepto del Álgebra.

Las diversas maneras de definir el Álgebra, las dudas y las conjeturas que con este motivo se han suscitado, manifiestan que la dificultad de circunscribir el concepto de esta ciencia á sus límites precisos es realmente de alguna consideración.

En los Tratados del siglo XVII se define el Álgebra como la ciencia de la *cosa*, nombre con que se designaba en el siglo anterior la incógnita por determinar en los problemas, así como su cuadrado se denominaba *census*, etc., y aun la definición en los tiempos de Lagrange expresa casi la misma idea al hacer consistir su objeto en la determinación de los procedimientos ó series de operaciones conducentes á obtener los valores de las incógnitas. Augusto Comte, al hacerlo consistir también en la resolución de las ecuaciones, reduce esta definición á significar la transformación de las funciones implícitas en explícitas, distinguiendo el cálculo de las funciones del de los valores como objetos respectivos del Álgebra y la Aritmética. Wronski, al definir estas dos ciencias como las de las leyes y los hechos de los números, si bien tiende á fijar el distinto carácter de ambas ramas de la Algoritmia, expresa un concepto demasiado general.

Pero si realmente lo que caracteriza al Álgebra es la ecuación y bajo este punto de vista se ha definido por algún autor contemporáneo como el análisis de las ecuaciones, otros puntos de vista conducen á nuevas exigencias respecto á la más clara determinación de un concepto algún tanto vago y que no expresa todo cuanto comprende el organismo de la ciencia, pues, en efecto, D'Alembert, Carnot y Poncelet en sus investigaciones acerca de las cantidades negativas é imaginarias, examinaron el Álgebra, principalmente, como instrumento poderoso de análisis y como lenguaje adecuado para traducir las relaciones del mundo concreto, y Poinsot, además de insistir en deslindar este carácter del Álgebra, señala al lado del Álgebra ordinaria otra de grado superior que se funda en la teoría del orden y la combinación, prescindiendo de la idea de magnitud, y estos conceptos que se traducen en diversa situación ó posición respecto á existencia ó sucesión periódica, se desenvuelven por diversos autores como Faure, Cournot, Valles y otros para adquirir predominio dentro del vasto plan de la Algoritmia. Además, el concepto de relación en abstracto, prescindiendo de los objetos y sólo atendiendo á cierto número de reglas ó preceptos fijos, origina un nuevo cálculo de carácter sistemático, distinto del cálculo ordinario que se ciñe á la naturaleza especial de la cantidad á que deba aplicarse.

Estas indicaciones bastan para que dividamos nuestro plan de exposición del Álgebra en dos secciones: la primera destinada á hacer ver el modo de verificarse sucesivamente la generación sucesiva de cada género de conceptos contenidos en el concepto de la misma, á saber: los del número, continuidad, cualidad, orden y combinación, y la segunda destinada á hacer una síntesis correlativa á cada uno de estos cual corresponde al estado actual de la ciencia, de manera, que exponiendo las ideas culminantes de cada teoría sea posible obtener como resultado un conocimiento de la síntesis total que constituye el Álgebra.

CAPÍTULO II.

Resumen histórico.

§ 1.º—Generación del concepto de número.

El número cuya teoría constituye una de las manifestaciones del Álgebra, uno de los aspectos de esta ciencia, aparece en las obras de Euclides como un primer encadenamiento de verdades cuya trabazón es rudimentaria. Sus seis libros de la Aritmética se reducen á un conjunto de problemas acerca de la construcción de los números, según multitud de relaciones que sería prolijo enumerar y someter á una clasificación, á la manera de la varie-

dad inagotable que ofrece en el dominio de la geometría su obra de los porismas, base de la llamada geometría moderna ó proyectiva.

Fermat con sus observaciones marginales á la obra del matemático griego establece una síntesis más perfecta, un núcleo más considerable para la sistematización de este orden de verdades.

Proposiciones como la de la descomposición de un número triangular en dos ó tres triangulares, uno cuadrado en dos, tres ó cuatro cuadrados, uno pentagonal en dos, tres..... ó cinco pentagonales, y como la que denomina bella y admirable, á saber: que en la progresión de los números naturales, á partir de la unidad, un número multiplicado por el superior que le sigue forma el doble del triangular de este número, la multiplicación del triangular por el número que le sigue es el triplo del piramidal; el producto del piramidal por el siguiente da el cuádruplo del triángulo-triangular, etc., y en fin su célebre teorema fundamental en esta teoría, así como el empleo de las igualdades dobles y triples caracterizan esta nueva etapa en la rama de la ciencia cuyo objeto es el número.

Euler, Lagrange y Legendre ensanchan de nuevo los horizontes de la teoría de los números.

Euler, que demuestra el teorema de Fermat, constituído por la congruencia $x^{a-1}\equiv 1$ (mód a) y lo generaliza, reduciéndolo á la siguiente $x^{\varphi(M)}\equiv 1$ (mód M), expresión escrita aquí empleando la notación de Gauss, que descompone los números de la forma $4n+1$ en la suma de dos cuadrados, resuelve el problema de la *partición de los números* en su *Introduction in analisim infinitimorum* y emplea los factores imaginarios en la resolución de las ecuaciones indeterminadas de segundo grado.

Lagrange halla su método general para la resolución de las ecuaciones de segundo grado, aplicando las fracciones continuas á esta rama del análisis, y demostrando que la fracción continua igual á la raíz de una ecuación de segundo grado debe ser periódica, establece también que todo número entero es la suma de 4 cuadrados, deduce una infinidad de teoremas relativos á los números primos, y fija de una manera general la relación que debe existir entre las formas lineales y las cuadradas aplicadas á los números primos en las Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín de 1775.

Legendre en su *Théorie des nombres* resume los progresos de esta rama del Álgebra hasta su tiempo; demuestra un teorema que establece la posibilidad ó imposibilidad de toda ecuación indeterminada de segundo grado reducida á la forma

$$a\,x^2+b\,y^2=c\,z^2,$$

y deduce la ley general que existe entre dos números primos cualesquiera, que denomina *ley de reciprocidad*, cuyo enunciado es el siguiente:

Cualesquiera que sean los números m *y* n, *si no son los dos de la forma* 4 n+3, *se tendrá siempre*

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m}{n}\right);$$

y si son los dos de la forma 4 n+3, *se tendrá*

$$\left(\frac{n}{m}\right)=-\left(\frac{m}{n}\right).$$

Estos dos casos generales se hallan comprendidos en la fórmula

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\left(-1\right)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right).$$

Además, fijándose en que no hay ninguna fórmula algébrica susceptible de contener sólo números primos, y recordando algunas fórmulas notables por la multitud de números primos que contienen, como las siguientes: x^2+x+41, x^2+x+17, advierte la dificultad que ofrece el obtener una que los contenga todos, ley de cuyo descubrimiento desconfía.

Como complemento á las investigaciones de Euler, Lagrange y Legendre, y como la síntesis más grandiosa de esta rama del Análisis matemático, nos hallamos con la doctrina contenida en las *Disquisitiones aritmeticæ* de Gauss.

A la forma de igualdad sustituye este eminente genio la de la congruencia, basando su exposición en un nuevo tecnicismo.

Las proposiciones relativas á las operaciones efectuadas con las congruencias se condensan en la proposición general siguiente:

Si f (x, y, z.....) *representa una función racional entera con coeficientes enteros de las indeterminadas* x, y, z,....., *y se verifican las congruencias*

$$a\equiv a',\ b\equiv b',\ c\equiv c'.....\ (\text{mód } k)$$

será también cierta esta otra

$$f\,(a,\,b,\,c,.....)=f\,(a',\,b',\,c'.....)\ (\text{mód } k).$$

En la obra de Gauss el *algoritmo de los índices*, análogo al de los logaritmos y los teoremas relativos á los períodos de las raíces primitivas y la suma de los términos que los constituyen, son nuevos descubrimientos debidos á tan preclaro talento, así como la teoría de las equivalencias de las formas y su clasificación.

En fin, esta relación de las síntesis sucesivas á que vemos reducida la ciencia de los números en los períodos señalados por Euler, Fermat, Lagrange, Legendre, y, por último, Gauss, puede terminarse en la última que caracterizan Lejeune Dirichlet, Kummer y Dedekind.

Lejeune Dirichlet basado en la definición del número complejo como una función entera con coeficientes enteros de las raíces irracionales de una ó varias ecuaciones algébricas, cuyos coeficientes son generalmente enteros, y en la noción de la *norma* $f\,(\alpha)\,f\,(\alpha^2).....\,f\,(\alpha^{\nu-1})$ como producto que es de los números *complejos conjugados* que se obtienen sustituyendo sucesivamente todas las raíces de la ecuación $1+\alpha+\alpha^2+.....+\alpha^{\nu-1}=0$, y función simétrica de éstas, hace investigaciones generales sobre las formas de grado cualquiera dependientes de dicha noción.

Kummer, desenvolviendo esta idea en su *Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unitè et des nombres entiers*, se ocupa de los números complejos, cuyas irracionalidades son las raíces imaginarias de la ecuación binomia $\alpha^{\nu}=1$, en la cual ν es un número primo impar, género de los números complejos, cuya importancia para la teoría general juzga comparable á la de la ecuación binomia respecto á las ecuaciones algébricas más generales, y considera el número complejo bajo la forma

$$f(\alpha)=a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots\ldots+a_{\nu-2}\alpha^{\nu-2}$$

en que a, $a_1,\ldots\ldots, a_{\nu-2}$ designan números enteros, expone la *teoría de las unidades complejas* ó números complejos, cuya norma es la unidad, y aborda el examen de la representación de todas las unidades bajo la forma más sencilla, asunto que cree de los más importantes y delicados, demostrando el teorema siguiente: *Cada unidad compleja dividida por su recíproca produce por cociente una unidad simple,* es decir,

$$\frac{E(\alpha)}{E(\alpha^{-1})}=\pm\alpha^k,$$

principio debido á Lejeune Dirichlet. Citaremos también las investigaciones de Kummer basadas en la consideración del *sistema independiente* de este matemático, la *representación de todas las unidades complejas por productos de cierto número de unidades independientes*, el modo de producir *todas las unidades posibles*, por medio de lo que llama *unidades fundamentales*, el estudio que hace de los períodos de las raíces de la ecuación

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots\alpha^{\nu-1}=0,$$

estableciendo su correspondencia con las raíces de congruencias análogas, el cálculo de los períodos de éstas y la conclusión de que: *toda función racional y entera de los períodos puede representarse como función lineal de los mismos.*

Pero entre todas las investigaciones de Kummer, la que constituye su más importante descubrimiento en la ciencia de los números es la de los *factores primos ideales*, pues cuando un número primo q no admite descomposición en e factores conjugados ó no puede ser representado como norma de un número

complejo que contiene períodos de f términos, concluye este matemático que no se podrá aislar ya un factor primo de un número complejo $f(\alpha)$ satisfaciendo entre otras condiciones á la siguiente:

$$f(\alpha)\equiv o\,(\text{mód}\, q),$$

y entonces se ve conducido á este nuevo concepto de la ciencia, es decir, á la admisión de factores que no subsisten por sí, pero que tienen una existencia efectiva combinados con otros factores del número complejo en que se halla contenido; y así un número complejo, al satisfacer ciertas condiciones, aunque no pueda descomponerse en factores complejos puede considerarse todavía como compuesto, á la manera que en Geometría se sigue concibiendo la recta que pase por los puntos de intersección de dos circunferencias, aunque éstos hayan dejado de existir, pues en en esta ciencia, como en la teoría de los números, existen propiedades permanentes y accidentales, cuyas analogías hace resaltar Kummer, que establece en su nueva doctrina las reglas del cálculo de los números ideales análogas á las de los existentes, la identidad de los factores ideales y de los números primos de la Aritmética, la existencia de un número finito de factores ideales que combinados con un número finito de números ideales los convierten en existentes, y en fin, para terminar, la distribución en clases de los números complejos ideales, pues establece que *todos los números complejos ideales que dan productos existentes cuando se les multiplica por un número ideal son equivalentes*, y en esta clasificación los números existentes constituyen la *clase principal*, resultando siempre en número finito y completamente determinadas las clases en que se distribuyen todos los números ideales, siendo esta teoría de la composición de los números ideales análoga, según la expresión de Kummer, á la de las combinaciones químicas, pues considera á los números complejos ideales como comparables con los radicales hipotéticos que no existiendo en sí, existen en las combinaciones.

Antes de terminar esta exposición de los descubrimientos referentes á la teoría de los números con los resultados debidos á Dedekind, citaremos los expuestos por Serret acerca de las propiedades de las funciones enteras de una variable relativas á un módulo primo ó potencia de un número primo que reproducen, bajo un punto de vista más general, las propiedades anteriormente enumeradas respecto á los números; pues, en efecto, la descomposición de una función entera en factores irreducibles según un módulo primo, su reducción respecto al mismo y respecto á una función irreducible, la determinación del número de las funciones enteras irreducibles de cierto grado, su clasificación con relación á un número primo y además con relación á una función irreducible ó función modular constituyen el asunto de dos importantes Memorias publicadas por este matemático.

Respecto á Dedekind, nos bastará exponer el concepto de lo que él llama *un ideal* que sustituye al de los números ideales de Kummer, pues su *Teoría de los números algébricos* es una interesante síntesis relativa á esta rama de la ciencia basada en aquél. Definiendo el número algébrico como en las teorías de Dirichlet y Kummer, se representa por Ω el conjunto de todos los números de la forma

$$\varphi(\theta)=x_0+x_1\,\theta+x_2\,\theta^2+\ldots\ldots+x_{n-1}\,\theta^{n-1},$$

á que denomina *un cuerpo finito de grado* n y distingue en éste dos grandes clases, á saber: números enteros cuyo conjunto designa por $\mathfrak{o}$ y números fraccionarios, proponiéndose *establecer las leyes generales de la divisibilidad que rigen dicho sistema* $\mathfrak{o}$, que, en particular, cuando $n=1$ se confunde con el sistema de los números racionales, y cuando $n=2$ y $\theta=\sqrt{-1}$ con el de los números complejos. Esto sentado, al conjunto $\mathfrak{a}$ de los números α del dominio $\mathfrak{o}$ divisibles por un número ideal determinado, llama un *ideal*, de manera que á todo número ideal determinado corresponde un ideal, siendo los números existentes un caso de los ideales.

A un sistema $\mathfrak{a}$ de números reales ó complejos, llama *módulo*, cuando todas las sumas y diferencias de los mismos pertenecen á $\mathfrak{a}$. Así, para un número 5, todos los números $5+5$,

$2.5+5$,..... $5-5$, $5-2.5$, ó en general, todos los números de la forma $x\,5$, que designa por [5], pertenecen al módulo $\mathfrak{a}$, y un módulo $\mathfrak{a}$ será divisible por un módulo $\mathfrak{b}$ cuando todos los números del primero se hallen contenidos en el segundo; así, el módulo correspondiente á los números $x\,20$ será divisible por el módulo correspondiente á los números $x\,5$. Considerando ahora el objeto capital de Dedekind, vemos que por una sucesiva graduación pasa del examen de los números racionales enteros á los números complejos de Gauss que como aquéllos poseen la propiedad de reproducirse por adición, sustracción y multiplicación y de conducir por un número finito de divisiones á la obtención del máximo común divisor, siendo también aplicable á este caso el teorema fundamental de la divisibilidad consistente en la propiedad de no dividir un número primo á un producto si no divide por lo menos á uno de sus factores, que implica *una sola descomposición de un número en factores primos*, y á estos resultados obtenidos por Dirichet, agrega Dedekind los correspondientes á otros dominios numéricos, como el de los números $\omega=x+y\sqrt{-5}$, pues si θ es raíz de una de las cinco ecuaciones

$$\theta^2+\theta+1=0,\quad \theta^2+\theta+2=0,\quad \theta^2+2=0,\quad \theta^2-2=0,\quad \theta^2-3=0,$$

dichas propiedades pertenecen á todos los números $x+\theta\,y$, en los que x é y son valores racionales y enteros; pero esto no se verifica si θ es raíz de la ecuación $\theta^2+5=0$. En el caso actual los números del dominio $\mathfrak{o}$ considerados, si bien se reproducen por adición, sustracción y multiplicación, en cuanto á la otra propiedad ofrecen el notable fenómeno de admitir, cuando son compuestos, diversas descomposiciones en factores simples ó no susceptibles de descomposición. Y en efecto, considerando los números $a=2$, $b=3$, $c=7$, $c_1=2+3\,\theta$, $c_2=2-3\,\theta$, $d_1=1+\theta$, $d_2=1-\theta$, $e_1=3+\theta$, $e_2=3-\theta$ y otros hasta quince, que aquí omitimos, no susceptibles de descomposición, observa Dedekind que admiten entre sus productos relaciones como las siguientes:

$$a\,b=d_1 d_2,\quad b^2=b_1\,b_2,\quad ab_1=d_1{}^2,\quad a\,c=e_1 e_2,\quad c^2=c_1 c_2,\quad ac_1=e_1{}^2,\quad \text{etc.}$$

en las que se halla representado un mismo número de dos maneras distintas en productos de factores simples, y de las cuales resulta que un número simple puede dividir á un producto sin dividir á ninguno de los factores, es decir, que tales factores no poseen la propiedad característica del *número primo* en la teoría de los números racionales. Además, deduciéndose de las relaciones anteriores otras como las siguientes:

$$a=\mu\,\alpha^2,\ d_1=\mu\,\alpha\,\beta_1,\ d_2=\mu\,\alpha\,\beta_2,\ a=\mu'\alpha'^2,\ e_1=\mu'\alpha'\gamma_1,\ \text{etc.}$$

$$b=\mu\beta_1\,\beta_2,\ b_1=\mu\,\beta_1{}^2,\ b_2=\mu\,\beta_2{}^2,\ c=\mu'\gamma_1\gamma_2,\ c_1=\mu'\gamma_1{}^2,\ \text{etc.}$$

ó si se hace $\mu=\mu'=1$, $\alpha=\alpha'$, se llega á obtener los quince números considerados por Dedekind

$$a=\alpha^2,\ b=\beta_1\,\beta_2,\ c=\gamma_1\,\gamma_2,\ b_1=\beta_1{}^2,\ b_2=\beta_2{}^2,\ c_1=\gamma_1{}^2,\ c_2=\gamma_2{}^2,\ldots,$$

por medio de los cinco α, β_1, β_2, γ_1, γ_2, los cuales, á pesar de ser simples, resultan en todas las cuestiones de divisibilidad relativas al dominio $\mathfrak{O}$ como si fuesen compuestos. Y con estos preliminares sólo diremos, para no extender más de lo conveniente estas indicaciones, que, respecto á las funciones de los números 2, 3 y 7 en dicho dominio, el primero aparece como si fuera el cuadrado de un número primo ideal α, de manera que *un número* ω *del dominio* $\mathfrak{O}$ *es divisible por la* n^{sima} *potencia* α^n *de un número primo ideal* α *cuando* ω^2 *sea divisible por* 2^n, en cuanto al número 3, siendo β_1 y β_2 diferentes de α, y $1+\theta$ ó $d_1=\alpha\,\beta_1$, según las relaciones arriba deducidas, $1-\theta$ ó $d_2=\alpha\,\beta_2$; de la ecuación $2.3=(1+\theta)\,(1-\theta)$ resultan $1+\theta$ y $1-\theta$ respectivamente, como si fueran los productos de α por β_1 y de α por β_2, concluyéndose lo mismo en cuanto al 7 y á los números ideales γ_1 y γ_2.

En fin, proponiéndose Dedekind reemplazar el número ideal de Kummer, tan sólo definido como divisor de números existentes ω del dominio $\mathfrak{O}$, por un sustantivo existente en realidad, y juzgando poco sencillo el procedimiento de Galois, que consiste en adjuntar al dominio $\mathfrak{O}$ números algebraicos existentes, pero

no comprendidos en éste, pues conduce á sustituir dicho dominio por otro $\mathfrak{O}'$ más complicado, procede á fundar la teoría de la divisibilidad en su noción del *ideal*, y esto es lo que realiza en el resto de su trabajo, que constituye una síntesis notable de la teoría de los números.

§. 2.º—Generación del concepto de continuidad.

El descubrimiento de los logaritmos por Neper, basado en la consideración de dos movimientos simultáneos, el correspondiente á los logaritmos uniforme y el correspondiente á los números respectivos acelerado, constituye el primer ejemplo notable que la historia del Análisis matemático nos ofrece, donde se halla el concepto de continuidad como medio de generación de la cantidad, pues este geómetra, por el empleo de suficiente número de medios proporcionales, consigue asimilar el movimiento acelerado á un movimiento uniforme en un intervalo suficientemente pequeño y llegar á determinar sus logaritmos valiéndose de sucesivas extracciones de raíces cuadradas.

Otro ejemplo interesante ofrece Wallis en su *Arithmetica infinitorum*, donde se halla aplicado el concepto de continuidad, con su serie infinita

$$\frac{2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots}{3.3.5.5.7.7.9\ldots\ldots}\ \text{ó}\ \frac{8}{9}\times\frac{24}{25}\times\frac{48}{49}\ldots\ldots,$$

cuyo límite es π, y á este descubrimiento va unido el de la expresión de Brounker, que originó la teoría de las fracciones continuas

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\text{etc.}}}}}$$

Poco después Mercator da á conocer sus series

$$1-x+x^2-\ldots\ldots,\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots,\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots,$$

publicadas en su *Logarithmotechnia*, que le permiten calcular las áreas hiperbólicas, cuando x es menor que 1, y á los descubrimientos de este matemático siguen el método de las fluxiones de Newton, fundado, como el de Neper, en la consideración de dos movimientos simultáneos, y el de los infinitamente pequeños de Leibnitz; pero con el fin de no rebasar los límites del Algebra á que debemos circunscribirnos, pasaremos á indicar la evolución de esta ciencia, que principia á manifestarse en las investigaciones de Harriot sobre la naturaleza y formación de las ecuaciones, asunto que ya bosquejó Vieta. La composición de las ecuaciones que efectuaba multiplicando las diferencias entre cada raíz y la incógnita, la inmediata consecuencia de que el número de raíces es igual al grado de una ecuación, el modo de formarse los coeficientes con las raíces y la conclusión de que si las raíces son enteras deben dividir al último término, constituyen los más importantes descubrimientos de aquel geómetra.

La propiedad de ser el último término de una ecuación de forma entera, con su primer coeficiente igual á la unidad el producto de todas sus raíces, es origen de nuevos descubrimientos, pues la idea de evitar las numerosas comprobaciones necesarias en el caso de admitir el último término muchos factores, conduce á los resultados obtenidos por Beaune, Newton, Maclaurin y Schooten, relativos á los límites de las raíces. Respecto á las raíces irracionales, ya Lagni en 1712 emplea el procedimiento de sustituciones sucesivas de los números 1, 2, 3,..... para determinar límites entre los que se hallen comprendidas y respecto á las imaginarias, Gedua en 1741, amplifica las investigaciones de Newton y Stirling, pues con auxilio de la representación gráfica de las ecuaciones, según el método cartesiano y alterando convenientemente el valor del término conocido, lo que equivale á transportar el eje de la curva ó de las x, paralelamente, el modo de cortar ó no cortar sus diversas sinuosidades le sirve de indicio para obtener resultados importantes acerca de las raíces que pasan á ser imaginarias. Estas y otras investigaciones de Segner relativas á la construcción con la regla y el compás de las ordenadas correspondientes á cada abscisa, conducen á la considera-

ción de los *máximos* y *mínimos*, á la de la existencia de una raíz real entre dos números que corresponden á ordenadas de signo contrario, y en fin, recordaremos para terminar este género de descubrimientos, la representación de las ecuaciones de grado par por una curva parabólica cuyas dos ramas se extienden hacia el mismo lado del eje para valores suficientemente grandes de x, y la consecuencia de que toda ecuación de grado impar tiene necesariamente una raíz real de signo contrario al del último término representada por la desviación de las dos ramas de la curva á lados distintos del eje.

Estas tentativas, cuyo exclusivo objeto era obtener medios de resolver las ecuaciones que ofrecían dificultades á ser resueltas como resolvieran Cardán y Ferrari las de tercero y cuarto grado, conducen paulatinamente á estudiar las funciones en su estructura ó composición, así como en su manera de variar.

El nombre de Lagrange revela la transición de un período de la ciencia á otro, pues á la par que tan extraordinario geómetra resume, sintetiza y discute con elevada crítica la ciencia de los pasados siglos, la engrandece con notables descubrimientos en sus diferentes ramas, donde deja indelebles huellas de su genio y ofrece un nuevo núcleo á la ciencia que podemos llamar contemporánea.

Su propósito de sustituir al concepto de los infinitamente pequeños de Leibnitz el de las derivadas, y fundar la teoría de las funciones en su desarrollo según la serie de Taylor y la consideración del resto, si no ha tenido el éxito que se propusiera en su *Théorie des fonctions analytiques*, pues la admisión de dicho desarrollo, más bien que la base del Análisis debe considerarse como una consecuencia sujeta á numerosas restricciones que exige ser establecida con rigor, ha señalado nuevos modos de proceder que hoy se utilizan para las investigaciones y exposición del Análisis matemático. Los progresos que realizó en la teoría de las diferencias con su método de interpolación y dándole una organización definitiva, influyeron considerablemente en el Álgebra; pues tal modo de proceder para determinar ó aproximar los valores de las raíces, constituye un algoritmo regular que aventaja á otros procedimientos de tanteo. En fin, su nuevo método de separación y determinación de la naturaleza de las raíces mediante el empleo de la ecuación del cuadrado de las diferencias de éstas y el de aproximación de los valores de las inconmensurables por medio de las fracciones continuas, dan nuevo carácter de rigor á dicha teoría que hasta entonces se hallara en estado rudimentario á pesar de tantas y tan continuadas tentativas.

No nos detendremos en el descubrimiento de Fourier y Budan que se reduce á un nuevo método cuyo fundamento se halla en el teorema conocido con el nombre de este segundo matemático á quien corresponde la prioridad (1811), si bien el primero lo dedujo entre sus varias investigaciones, método que basado en la formación de las derivadas de órdenes sucesivos, ofrece un inconveniente análogo al teorema de Descartes por conducir á indicar la posibilidad más bien que la existencia; pero cuando Sturm, sustituyendo á las funciones derivadas, las que se conocen con su nombre, lleva la teoría de las ecuaciones numéricas á un alto grado de perfección, al menos, bajo el punto de vista ideal, ya que no bajo el de la fácil realización del problema, puede concluirse con rigor el número de raíces reales que existen entre dos límites cualesquiera; y cuando Cauchy extiende este resultado á las raíces imaginarias al enunciar y demostrar su fundamental teorema relativo al número de raíces reales ó imaginarias contenidas en el interior de un contorno, llega la resolución del problema á su grado más perfecto; y si bien la demostración primera basada en su nuevo cálculo de los resíduos y en consideraciones del análisis infinitisimal y contenida en su Memoria *Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites*, etc., presentada á la Academia de Turin (1831), excede de los límites del Algebra, la publicada en el tomo XXV del *Journal de l'École Polytechnique* fundada en el cálculo de índices de las funciones, es más elemental y las de Sturm, Liouville y el abate Moignó contenidas en los tomos I y V del *Journal de mathématiques pures*, etc., son una nueva simplificación que las hace adecuadas para figurar en los tratados elementales de la ciencia algebraica.

Y no se reduce á tan importante principio de la teoría de las ecuaciones todo lo que debe la ciencia matemática á Cauchy, pues universal en sus descubrimientos, acrece por igual las diferentes ramas de aquélla, siendo casi imposible examinar uno de sus descubrimientos sin evocar otros varios con el mismo íntimamente relacionados, y esto puede observarse al tratar de resumir lo que se debe á su inventiva respecto á la resolución de las ecuaciones.

En su *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (1829), además de establecer el teorema de D'Alembert á cuya demostración también se consagró Legendre en su *Théorie des nombres*, sin dejar de recurrir un instante al modo de variación continua y simultánea de los módulos de la función algébrica entera propuesta y de las variables, llega no sólo á conseguir su propósito, sino á exponer un nuevo método de obtención de las raíces por medio de una serie sucesiva de valores x_1, x_2,..... aproximados del límite x hacia el cual convergen, mientras el polinomio correspondiente se aproxima indefinidamente á cero, á la manera del procedimiento newtoniano. Este método, que expone también con nuevo desarrollo en su *Mémoire sur la théorie des quantités géométriques*, estriba en la disminución sucesiva del módulo R correspondiente al primer miembro de una ecuación

$$Z=a+bz+.....+hz^n=0$$

para valores sucesivos de z, admitiendo Cauchy como método de resolución todo procedimiento que permita designar á una variable z de una función entera Z un valor al cual corresponda un módulo R de ésta sensiblemente inferior al módulo del término constante a que se obtiene haciendo $z=0$; y su método le conduce á las demostraciones dadas por Argand en el tomo VI de los *Annales de Mathématiques de Gergonne* y por Legendre en su *Théorie des nombres*.

La teoría de la continuidad alcanza un alto grado de perfección y desarrollo bajo la influencia de Cauchy, cuyos trabajos versan principalmente sobre este concepto del Análisis que constituye el carácter más esencial de las funciones. Partiendo de su definición de las funciones continuas dada en su *Cours d'Analyse algébrique*, según la que una función es tal entre límites dados de la variable cuando entre los mismos conserva constantemente un valor finito y determinado y cuando á un incremento infinitamente pequeño de ésta corresponde otro infinitamente pequeño de aquélla, hace importantes descubrimientos sobre la teoría de las series cuya convergencia funda en la de la continuidad, aplicándola á la resolución de las ecuaciones algebraicas y transcendentes.

Fija con especial cuidado el carácter de convergencia de las series hasta él no tenido en cuenta como se debiera, originando entre sus antecesores tal descuido consecuencias erróneas ó paradógicas, y después de haber demostrado Abel que si una serie ordenada, según las potencias crecientes de la variable, es convergente para cierto módulo de ésta, lo será para otro cualquiera inferior, Cauchy lo establece y completa demostrando á su vez: 1.° Que si en una serie los diversos términos son funciones continuas de una variable, siendo además aquélla convergente para valores de ésta comprendidos entre ciertos límites, la función representada por la misma será también continua en dicho intervalo. 2.° Que si dos series ordenadas según las potencias de una variable son convergentes para cierto módulo de ésta y tienen igual valor para todo módulo inferior, serán idénticas, lo que equivale á establecer la existencia de un sólo desarrollo de una función según las potencias ascendentes de la variable.

Pero la proposición fundamental que establece por primera vez Cauchy en su Memoria sobre el cálculo de los límites, se halla enunciada de la siguiente manera: Si x es una variable real ó imaginaria, una función real ó imaginaria de x será desarrollable en serie convergente ordenada según las potencias ascendentes de x, mientras el módulo de dicha variable conserve un valor inferior á aquél por el cual la función cesa de ser infinita y continua, proposición que conduce á la consideración del *círculo de convergencia*; y establece como condición necesaria y suficiente para el desarrollo de una función en serie ordenada, según las potencias enteras positivas y crecientes de la variable, el que dicha función sea *sinéctica* en toda la extensión del círculo. Además deberemos consignar la generalidad á que llega fijando las condiciones de convergencia de la serie por medio de la cual se desarrolla una función $f(x, y, z.....)$ de diversas variables según las potencias ascendentes de estas, á saber, que sus módulos respectivos conserven valores inferiores á aquéllos para los que la función permanece finita y continua.

Estos principios, expuestos en la Memoria presentada á la Academia de Turín, son aplicados al desarrollo de las funciones implícitas, quedando reducida también la ley de convergencia á la de continuidad, y respecto á esta cuestión nos limitaremos á citar la importante conclusión siguiente, expuesta en sus *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique:*

Sea $f(z, u)=0$ una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio entero en z y u de grado m con relación á u que se supone irreducible, ó no susceptible de descomponerse en un producto de polinomios enteros en z y u. Si se atribuye á z cierto valor, la ecuación en u tiene m raíces, y si el parámetro z varía de una manera continua, estas m raíces también varían de una manera continua, conclusión que resulta del teorema: *Si para* z=a *la ecuación tiene* n *raíces iguales á* b, *para un valor próximo de* a *tendrá* n *raíces próximas á* b.

La teoría de las funciones llamadas por Ampère *interpolares* de los diferentes órdenes, es decir, las funciones $f(a, b)$, $f(a, b, c)$,... definidas por las expresiones

$$f(a, b)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \quad f(a, b, c)=\frac{f(a, b)-f(a, c)}{b-c},$$

$$f(a, b, c, d)=\frac{f(b, c, d)-f(a, b, c)}{d-a}, \ldots\ldots$$

en las que $a, b, c, \ldots\ldots$ designan una serie de valores atribuidos á la variable x de una función $f(x)$, sirven de base á Cauchy para llegar á importantes resultados, no sólo respecto á la resolución de las ecuaciones algebraicas y transcendentes, sino para el desarrollo de las funciones en series, pues en cuanto á esta segunda cuestión, las fórmulas arriba escritas conducen á las siguientes:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f(x),$$
$$f(x)=f(a)+(x-a)f(a,b)+(x-a)(x-b)f(a,b,x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x)=f(a)+(x-a)f(a,b)+\ldots+(x-a)(x-b)\ldots(x-h)f(a,b,\ldots,h,x),$$

siendo la función interpolar $f(a, b, \ldots\ldots, h, x)$ de grado cero respecto á x, pues $f(x)$, $f(a, x)$, $f(a, b, x)$,....., según las fórmulas fundamentales son respectivamente de grados n, $n-1$, $n-2$,....., y así se habrá obtenido el desarrollo de $f(x)$ en una serie de términos proporcionales á productos de funciones lineales cuyos grados respectivos son 0, 1, 2, 3,....., y además, sustituyendo por a, b, c,....., h, k, las expresiones

$$a,\ a+h,\ a+2h, \ldots\ldots\ a+(n-1)h,\ a+nh,$$

y adoptando la notación del cálculo de las diferencias finitas, se convierte el anterior en el conocido desarrollo de una función por medio de sus diferencias, y estos resultados que se hallan establecidos en la Memoria de Ampère, se completan en la de Cauchy *(Comptes rendus*, etc., 1840) por la determinación de los límites de los restos que deben completar dichos desarrollos.

Respecto á la resolución de las ecuaciones, Cauchy consigue aplicar los principios de la teoría de las funciones interpolares, obteniendo los valores de sus raíces con aproximaciones cada vez mayores, á la manera del método de Newton *(Comptes rendus*, 1840). Pero anteriormente á estos notables resultados, la fecundidad inagotable de tan extraordinario talento había producido otros métodos basados en el concepto de continuidad, cuyo espíritu debe siquiera ser conocido por todo el que desee seguir la evolución del Álgebra, bajo el punto de vista, objeto de este artículo. Así, pues, partiendo de que una raíz de una ecuación no deja en general de ser función continua de un parámetro contenido en aquélla hasta que adquiere raíces iguales, y considerando los parámetros correspondientes á raíces comunes á una ecuación y su derivada que distingue con la denominación de *principales*, su definición de la función continua le permite

deducir que: *toda raíz es desarrollable según las potencias ascendentes del parámetro, mientras el módulo de éste permanezca inferior á los módulos de todos sus valores principales.* Y estos principios le conducen á obtener varios métodos para la resolución de ecuaciones de todos los grados *(Extrait d'une lettre à M. Coriolis* C. R. 1837). Así, como primer ejemplo, al establecer que las raíces de una ecuación de grado cualquiera son todas desarrollables según las potencias ascendentes ó descendentes y fraccionarias del último término, según que éste es inferior ó superior á los módulos de todos sus valores principales, observa que cuando esto no sucede, la ecuación podrá descomponerse en otras cuyos coeficientes sean desarrollables según las potencias ascendentes ó descendentes del término de que se trata.

Este método, basado en la descomposición de las ecuaciones, por el que, por ejemplo, la resolución de una de 5.º grado se reduce á la de dos de 2.º, adquiere mayor grado de sencillez, al elegir Cauchy como ecuaciones auxiliares las binomias; pues si $F(x)=0$ es una ecuación de grado n en la que el coeficiente de x^n se reduce á la unidad, siendo $F(x)$ una función real, y las raíces desconocidas, podrán determinarse las de la ecuación auxiliar $F(x)=k$, siempre que la constante k tenga un módulo superior á todos sus valores principales; y para pasar de esta ecuación á la propuesta, bastará hacer variar un nuevo parámetro entre los límites $i=0$, $i=k$ en la nueva ecuación $F(x)=k-i$. Esto sentado, la hipótesis de que la relación $\frac{i}{k}$ permanezca real y positiva en dicho intervalo le conduce á varios teoremas que dan la resolución de la ecuación propuesta, expresando el desarrollo en serie de las raíces de la ecuación $F(x)=k-i$, cuando $\frac{i}{k}=1$ ó $\frac{i}{k}<1$, y además la descomposición de la propuesta en otras cuatro que ofrecen respectivamente las raíces reales para las que $F'(x)$ es positiva ó negativa, y las raíces imaginarias en las que el coeficiente de $\sqrt{-1}$ es positivo ó negativo.

El principio fundamental para el desarrollo de una función en serie convergente según las potencias ascendentes de la variable (pág. 16) y su proposición relativa al desarrollo de una raíz según las de un parámetro (pág. 19), son el punto de partida para nuevas investigaciones que desenvuelven las anteriores conclusiones y las expuestas en su Memoria presentada á la Academia de Turín (*Première lettre sur la détermination de toutes les racines des équations* C. R. 1837), y suponiendo el parámetro t función de la variable x, observa que cada una de las raíces α, β, γ,..... de la ecuación $F(x)=0$ será generalmente desarrollable según las potencias de t para valores muy pequeños de éste, así como las sumas de aquéllas y las de sus potencias de grado cualquiera. Al aumentar sucesivamente el módulo de t, dos ó varias raíces, por ejemplo, α y β, ó α, β y γ,..... se hacen iguales para cierto valor del mismo, y á partir de este instante, las raíces α, β ó α, β, γ,..... dejarán de ser funciones continuas de t y desarrollables separadamente según las potencias ascendentes de t; pero la suma de estas raíces ó la de sus potencias semejantes, no dejará de ser función continua de t y desarrollable según sus potencias ascendentes, verificándose esto hasta que por el crecimiento del módulo de t una de las raíces del grupo (α, β) ó (α, β, γ),..... llegue á ser igual á una ó varias de las no comprendidas en el mismo. Entonces éstas y las que con ellas podían ya agruparse formarán un nuevo grupo compuesto de más raíces, cuya suma, así como las de sus potencias semejantes, sea desarrollable en series, según las potencias ascendentes de t. La determinación del número de grupos de raíces para cada valor determinado del módulo de t y la descomposición de la ecuación $F(x)=0$ en otras de las cuales cada una contenga separadamente las raíces de cada grupo constituye un teorema, que en seguida Cauchy se propone deducir de su Memoria ya citada, con auxilio de representaciones geométricas, pues haciendo $z=x+y\sqrt{-1}$, y considerando las variables x é y como susceptibles de representar dos coordenadas rectangulares, parte de la ecuación,

$$\Pi(x+y\sqrt{-1})+t\Psi(x+y\sqrt{-1})=0, \text{ ó } t=-\frac{\Pi(x+y\sqrt{-1})}{\Psi(x+y\sqrt{-1})},$$

en las que Π y Ψ designan funciones enteras de x, para construir las diversas curvas representadas por la ecuación

$$T=\text{mód}\,\frac{\Pi(x+y\sqrt{-1})}{\Psi(x+y\sqrt{-1})},$$

en la que T designa el módulo del parámetro t, la cual para $T=0$, representa tantos puntos como raíces distintas hay en la $\Pi(x+y\sqrt{-1})=0$; pero creciendo T, cada uno de éstos se reemplaza por una curva cerrada que se extiende sucesivamente, y las diferentes curvas permanecerán independientes y aisladas hasta que al adquirir T uno de sus valores principales, dos ó varias curvas se reunan en un punto múltiple, para reducirse en seguida á una curva. También puede suceder que una de estas se encuentre ella misma en cierto punto, ó que dos verifiquen esto en dos puntos distintos para transformarse en dos de especie diferente, de manera que la una se dilate y la otra se contraiga sucesivamente para valores crecientes de T, ó curvas de primera y segunda especie, subsistiendo solamente cuando T se haga infinitamente pequeño, las de primera especie cuyos perímetros se extienden á distancias muy pequeñas de los puntos correspondientes á la ecuación $\Pi(x+y\sqrt{-1})=0$, cuando la función $\Pi(x)$ es de grado superior al de $\Psi(z)=0$; y al contrario, cuando T sea infinitamente grande sólo subsistirán las curvas de segunda especie, cuyos perímetros se extenderán á muy pequeñas distancias de los puntos representados por la ecuación $\Psi(z)=0$. En fin, para un valor cualquiera del módulo T el número de curvas de primera especie, ó al menos el de las que no se hallarán totalmente envueltas por otras de la misma especie, será precisamente el número de grupos de raíces mencionadas en el teorema de que se trata.

Después de hallar el medio de descomponer la ecuación $\Pi(x)+t\Psi(x)=0$ en otras particulares cuyo número sea igual al número de grupos de raíces á que se refiere el teorema mencionado, y sin seguir á Cauchy en sus prolijas investigaciones sobre la resolución de las ecuaciones, cuyo carácter acabamos de diseñar, citaremos un nuevo método que funda en el siguiente teorema: *Si* f(x) *y* F(x) *son dos funciones positivas para* x=a *que permanecen finitas y continuas entre los límites* x=a, x=b, *siendo constantemente en este intervalo* f(x)<F(x). *Si la segunda de las ecuaciones* f(x)=0, F(x)=0 *ofrece una ó varias raíces reales comprendidas entre dichos límites y* c *es la raíz más próxima de* a, *la ecuación* f(x)=0 *contendrá una ó varias raíces reales comprendidas entre* a *y* c, método que le sirve para desenvolver el ya citado, con el auxilio de las funciones interpolares.

Posteriores á los descubrimientos de Cauchy deberemos de citar dos importantes métodos debidos á Sylvester y Hermite y otro más excelente por la amplitud de sus resultados que descubrió el matemático Gräffe y perfeccionó el astrónomo Encke.

El descubrimiento de Sylvester se reduce á la obtención de unas funciones que difieren de las de Sturm por ciertos factores esencialmente positivos, los cuales pueden suprimirse, deduciendo de su consideración un método para obtener las raíces imaginarias de una ecuación. Hermite también llega á este resultado fundándose en las propiedades de las funciones homogéneas, pues siendo $a, b, \ldots$ las raíces de una ecuación $F(z)=0$, y supuesta la función homogénea

$$f=\frac{1}{a-t}(x_0+a_1x_1+\ldots+a^{m-1}x_{m-1})^2+\frac{1}{b-t}(x_0+bx_1+\ldots)^2+\ldots$$

en la cual t expresa una indeterminada, si por una sustitución lineal se reduce f á una suma de cuadrados, de funciones lineales reales, el número de cuadrados que tengan coeficientes positivos será igual al número de pares de raíces imaginarias de la ecuación propuesta, conforme al enunciado de un teorema de dicho matemático, que comprende como uno de sus corolarios al de Sturm, y es el fundamento del método de Hermite.

El método de Gräffe, que se aplica á la obtención de toda clase de raíces, aventajando á los anteriores por la preciosa condición de una brevedad considerablemente mayor, se funda en la idea de sustituir la ecuación propuesta

$$x^n+[a]x^{n-1}+[ab]x^{n-2}+\ldots+[abc\ldots l]=0$$

en la cual los coeficientes designan las sumas de las n raíces $a, b, \ldots$, las de sus productos binarios, ternarios,..... otra ecuación auxiliar

$$x^n+[a^m]x^{n-1}+[a^mb^m]x^{n-2}+\ldots+[a^mb^m\ldots l^m]=0$$

cuyas raíces son potencias del grado m de las de la propuesta, y que tiende á confundirse con la siguiente

$$x^n+a^mx^{n-1}+a^mb^mx^{n-2}+\ldots+a^mb^m\ldots l^m=0,$$

en el supuesto de ser m muy grande y $a>b>c\ldots>l$, pues deduciéndose inmediatamente que

$$\frac{b^m+c^m+\ldots}{a^m}<\frac{n-1}{1+mh},$$

resulta que la suma $b^m+c^m+\ldots$ tiende á hacerse despreciable respecto de a^m cuando m crece de una manera suficiente, quedando, desde este momento, el coeficiente $[a^m]$ reducido al a^m con un error sumamente pequeño, y de la misma manera los $[a^mb^m]$, $[a^mb^mc^m]$..... á a^mb^m, $a^mb^mc^m$,..... Así, pues, establecido el principio en que el método estriba, lo esencial del mismo se reduce al tránsito de una á otra de las ecuaciones consideradas, según se expresa en los trabajos de Gräffe y de Encke.

§ 3.º—Generación del concepto de cualidad y del Álgebra geométrica.

La cualidad en el Algebra abstracta.—Las cantidades negativas para cuyo cálculo estableció Descartes las reglas, y las imaginarias que ya preocupaban á Cardan y Bombelli, aun para los matemáticos de la época de Laplace aparecían envueltas en cierta oscuridad, y este eminente geómetra considera el tránsito de lo positivo á lo negativo y de lo real á lo imaginario sólo como un medio de investigación semejante á la inducción y la analogía, que necesitaba ser confirmado por demostraciones directas.

Cauchy en sus *Exercices mathématiques* y en su *Cours d'Analyse* establece las reglas del cálculo de las cantidades y ecuaciones imaginarias atribuyéndoles el carácter de meros símbolos, definiendo la *expresión simbólica* ó el *símbolo* como toda combinación de signos algebraicos que nada significa por sí, á la cual se atribuye un valor diferente del que naturalmente debe tener, y las *ecuaciones simbólicas* como todas las que, tomadas al pie de la letra é interpretadas según las convenciones establecidas, son inexactas ó no tienen significado; pero de las que pueden deducirse resultados exactos, modificando ó alterando según reglas fijas, ó dichas cantidades ó las cantidades que contienen. Y así una ecuación imaginaria es la representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales.

Este modo de concebir que restringía considerablemente y relegaba á un lugar muy secundario el inmenso dominio que comprende las cantidades hoy llamadas *complejas*, es sustituído por otro más amplio y fecundo en resultados, que ha excitado sin interrupción la actividad de los geómetras durante el siglo actual, revistiendo á la ciencia matemática de un nuevo carácter que la distingue profundamente de la que nos legaron los matemáticos de los pasados siglos.

La cualidad en el Álgebra geométrica.—Si bien se cita al prusiano Kühn como el que en 1750 (*Medit. de quantit. imagin.*, etc.) realizó la primera tentativa de representación geométrica de las cantidades por entonces, y aun actualmente, sin duda por costumbre inveterada, conocidas con la denominación de *imaginarias*, realmente el verdadero origen de esta nueva evolución científica lo hallamos en las Memorias publicadas por Bouée en Inglaterra y Argand en Francia, que hacen corresponder la perpendicularidad al símbolo $\sqrt{-1}$, pues desde este momento varios geómetras concurren á sistematizar este especial orden de ideas, que constituye un nuevo cálculo en el cual el concepto de *magnitud absoluta* se une al de *dirección*; François un poco más tarde concurre al mismo fin, estableciendo su notación $a_p = a.1_p$, hoy empleada, y llega á la consideración de los arcos de circunferencia imaginarios como logaritmos, expresada por la ecuación simbólica

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \log(\sqrt{-1}).$$

A los trabajos de Argand y Bouée suceden los de Mourey

y Warren en 1828; el primero se propone establecer una *Algebra directiva*, y suple el signo radical con un índice de inclinación que denomina *versor*, el segundo discute con especial cuidado las raíces de la unidad, constituyendo un trabajo más completo. Faure, basándose en la consideración simultánea de la velocidad giratoria de las magnitudes dirigidas y de sus potencias, establece el modo de distribución de las raíces alrededor de un punto y la división de un plano en fajas para representar la simultánea generación de una de éstas y del plano por el exponente de una función y por ésta, pues si en la expresión

$$e^{u+x\sqrt{-1}} = e^u \times e^{x\sqrt{-1}}$$

el segundo factor corresponde á una unidad giratoria al variar x, el primero puede considerarse como el *módulo*, dando el uno la *dirección* y el otro la *longitud de la función*, y estas dos variaciones combinadas hacen recorrer á la extremidad de la exponencial todo el plano, mientras el exponente adquiere un incremento 2π que necesita para recorrer cada faja.

Sin omitir á Gauss, que representa por puntos la variable $x+iy$ en su obra *Zur theorie der complexen zahlen*, ni á Saint Venant que publicó su Memoria sobre las sumas geométricas, hallamos entre los geómetras cuyas investigaciones tienden á constituir la teoría del Algebra, según nuestro actual punto de vista, al autor de la obra *Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, Poinsot, que concibe la existencia de una Algebra superior fundada en la teoría del *orden* y de la *combinación*, proponiéndose establecer la distinción entre la *magnitud* ó *cantidad* y el *número*, *orden* y *situación* de las cosas, doble objeto de las especulaciones matemáticas.

Poinsot observa en sus *Recherches sur l'analyse des sections angulaires* que la teoría de los ángulos no pertenece exclusivamente á la Geometría, puesto que es además una parte esencial del Análisis matemático, y estas entidades geométricas se presentan en Algebra de una manera tan natural y necesaria como los exponentes ó los logaritmos, pues si la división de un logaritmo en partes iguales corresponde á la extracción de la raíz de una cantidad real, la misma operación en un ángulo corresponde á la extracción de la raíz de una cantidad imaginaria.

Estas conclusiones de Poinsot se desarrollan por Vallés en su interesante obra *Études philosophiques sur la science du calcul* y su tratado *Des formes imaginaires*, donde creyendo necesario hacer entrar en la expresión de las cantidades dos elementos, el número abstracto y lo que llama *módulo*, ó sea un tipo de la cantidad de que se trata con todas las cualidades que dependen de su naturaleza, de manera que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ son los números de veces que un módulo μ debe repetirse para formar determinadas cantidades, estas se hallarán representadas por las expresiones

$$\alpha_1\mu,\ \alpha_2\mu,\ \alpha_3\mu, \ldots,$$

hace ver que la división, y en general las expresiones fraccionarias y los números concretos, tienen su interpretación en la división del módulo cuando éste es una longitud, y por consiguiente susceptible de dividirse en cualquier número de partes iguales, y así un número

$$a\lambda_3+b\lambda_2+c\lambda_1+d\lambda_0$$

expresado en pies, pulgadas, líneas y puntos puede también representarse por un sólo módulo correspondiente á la especie superior,

$$a\lambda_3+b\frac{\lambda_3}{12}+c\frac{\lambda_3}{144}+d\frac{\lambda_3}{1728},$$

efectuándose la división en el módulo y no en el número, contra la costumbre que nos hace mentalmente realizar la operación sobre el número y prescindir del módulo. Y respecto á las cantidades negativas é imaginarias, el módulo, que representa las longitudes dirigidas debe recibir la modificación que expresan los signos

$$+,\ -,\ \sqrt{-1},\ \cos\alpha+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \alpha,$$

de manera que, desarrollando las ideas de Poinsot, Vallés establece la necesidad de adoptar en Algebra, además del sistema de numeración cuantitativa, el ordinal representado por los símbolos

$$\cos\alpha+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \alpha,\ \cos 2\alpha+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ 2\alpha, \ldots$$

$$\cos\frac{\alpha}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{\alpha}{n},\ \cos\frac{2\alpha}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2\alpha}{n}, \ldots$$

ó prescindiendo de la consideración de la magnitud del número

$$\cos 1+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ 1,\ \cos 2+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ 2, \ldots,$$

es decir, el conjunto de los números imaginarios que expresan el orden, la situación ó los diferentes modos de existencia de las magnitudes.

Esta serie de investigaciones que se acumulan durante la primera mitad del siglo XIX llegan al punto culminante de su desenvolvimiento cuando Cauchy después de haber expuesto en su *Cours d'Analyse* y en sus *Résumés analytiques* la teoría de las cantidades imaginarias, considerando á éstas como símbolos, cree necesario tratarla según otro punto de vista en su *Mémoire sur les quantités géométriques*. Y así, á la par que vemos á Fourier dando numerosos ejemplos de discontinuidad de las funciones, que ha contribuído á establecer la noción moderna de la función analítica y ofrecido con sus importantes investigaciones motivo para ulteriores y fecundos resultados, hallamos á Cauchy como el iniciador de una nueva evolución que modifica profundamente el carácter y el aspecto general del Análisis.

El objeto de la Memoria de Cauchy es sustituir la teoría de las cantidades imaginarias por las que denomina geométricas, aprovechando los descubrimientos de Argand, François, Faure, Mourey, Vallés y Saint Venant. Y no sólo establece un sistema de cálculo basado en la representación de las mismas bajo la forma r_p y la relación $r_p=1_p.r$, empleando también las coordenadas rectangulares, sino que establece una teoría de las funciones que resulta como el núcleo de los trabajos de los geómetras que le suceden durante el siglo actual.

Considerando los incrementos simultáneos de la función y la variable representados geométricamente, demuestra, como ya se indicó, el teorema de D'Alembert y el relativo al número n de las raíces de una función entera de grado n, mediante el empleo de la ecuación auxiliar que se obtiene cuando se reemplaza en la propuesta cada término por su módulo; además, estableciendo series sucesivas de valores de z que hagan disminuir indefinidamente el módulo R de la función, obtiene su procedimiento de resolución de las ecuaciones.

Citaremos tan sólo sus investigaciones sobre la cantidad geométrica $i=1_{\pi:2}$ basadas en el examen simultáneo de dos puntos A y B determinados por coordenadas polares ó rectangulares y sus afijas respectivas z y Z, ó según su modo de expresarse: *la posición de un punto en un plano puede hallarse completamente determinada, no sólo por el sistema de dos coordenadas rectangulares, sino también por su afija, de manera que la igualdad de dos afijas lleva consigo la coincidencia de los puntos correspondientes, con la igualdad de sus abscisas, ordenadas y distancias al polo.* No insistiremos en la exposición de los desarrollos correspondientes á las funciones trigonométricas basados en el empleo de las cantidades geométricas y deducidos de fórmulas como las siguientes

$$1_p=\cos p+i \operatorname{sen} p, \quad 1_{-p}=\cos p-i \operatorname{sen} p, \quad 1_{p+p'}=1_p . 1_{p'} \text{ etc.},$$

ni en las series correspondientes á la exponencial trigonométrica e^{pi}, ni en la teoría de los logaritmos que estriba en fórmulas como estas

$$e^{\lambda}=e^{\alpha+\beta i}=1_{\beta} e^{\alpha}, \quad \lambda=l(r)+pi, \text{ etc.},$$

ni en las exponenciales cuyos exponentes y bases son cantidades geométricas, ni en su exposición relativa al *argumento principal*, adoptando la denominación de Bjorling de *potencia principal*, pues todo esto constituye una síntesis amplificada de los descubrimientos de los geómetras anteriormente citados; pero sí vamos á indicar cómo sobre estos preliminares funda una doctrina completamente suya que contribuyó de una manera eficaz á dar nuevo aspecto al análisis matemático, señalando los vastos horizontes en que había de desenvolverse esta rama de la ciencia

matemática. Esta doctrina es su teoría de *las funciones de las cantidades geométricas*.

Si dejándonos llevar por la analogía, dice Cauchy, *se extienden á las funciones de las cantidades geométricas las definiciones generalmente adoptadas para las funciones de las cantidades algébricas, se llega á conclusiones singulares y muy legítimas que indicaré brevemente.*

Considerando, pues, como anteriormente hizo, dos puntos A y B en un plano, cuyas afijas sean las variables z y la función Z de manera que la posición del punto móvil A determine la del B, se propone examinar las propiedades de las funciones que, ó subsisten para todos los valores de la variable, ó sólo para ciertos valores de ésta, es decir, entre dos límites a y b si se trata de funciones de variables reales, ó para los valores de z que representan las afijas de puntos encerrados en una área plana S limitada por cierto contorno, si se trata de una variable imaginaria.

Dos circunstancias especiales de las funciones son los puntos á que se reducen las investigaciones de Cauchy, á saber: 1.º El caso en que, á un valor de la función corresponden varias determinaciones de la función en número finito ó infinito, que denomina *tipos*, como ocurre en las funciones explícitas

$$Z=(1-z)^{\frac{1}{2}}, \quad Z=-(1-z)^{\frac{1}{2}},$$

correspondientes á la ecuación $Z^2+z^2=1$, ó en la función

$$Z=2k\pi \pm \operatorname{arc} \cos z,$$

correspondiente á la ecuación $\cos Z=z$.

2.º El caso en que hay solución de continuidad, como se verifica en las funciones $\frac{a}{x}$ y x^{-m} para $x=0$, siendo m entero.

Y, si en un plano se construye una curva cuyas coordenadas sean la variable real x y una función y de ésta, cuando la función de *implícita* pase á ser *explícita* podrá estar determinada por varias ramas, ó estará determinada por el sistema de éstas. Y pasando, en fin, al caso general de la función de una variable imaginaria $z=x+yi$, Cauchy examina los casos de ser finito ó infinito el número de valores de z para los que la función se hace discontinua, que son las afijas de todos los puntos situados en ciertas líneas ó partes de líneas que denomina *líneas de parada* (lignes d'arrêt), como sucede para las funciones $z^{\frac{1}{2}}$, $l\,z$ cuando se verifica que $x=$ ó <0, $y=0$, es decir, en toda la longitud del eje polar, á partir desde el origen, siendo las extremidades de dichas líneas los *puntos de parada* (points d'arrêt).

Estas consideraciones conducen, en fin, á la distinción de los *puntos singulares*, de las *funciones monodromas, evódicas* y *monogenas* que establece Cauchy como la base de la teoría moderna de las funciones.

Expuestos los fundamentos de la teoría de las funciones, que no es nuestro principal objeto, bastará que consignemos brevemente cómo ha llegado al grado de su actual desarrollo, y diremos de Puiseux, que sus *Recherches sur les fonctions algébriques* se refieren casi exclusivamente al examen de la función u de una variable z definida por una ecuación algébrica $f(u, z)=0$, que considera variando de una manera continua, principalmente en la proximidad de puntos donde adquiere valores múltiples. Las propiedades que resultan según los diferentes *caminos* que recorre el punto correspondiente á la función, consistentes en que la función vuelva ó no á adquirir su valor inicial, y que dependen de que el camino seguido por el punto Z pueda deformarse sin pasar ó pasando por algún punto en que la función se hace infinita ó raíz múltiple de la ecuación $f(u, z)=0$; el examen de *sistemas circulares* de los valores $u_1, u_2, \ldots u_p$ de la función que se hacen iguales á un mismo valor b alrededor del punto singular A; la diversa manera de agruparse formando ciclos, y en fin, la reducción de un camino cualquiera á otro formado por contornos elementales, son los puntos más notables por su originalidad que deben ser citados.

Liouville y Hermite han concurrido con notables resultados á la constitución de la teoría de las funciones, y para no ir demasiado lejos en este resumen histórico, bastará consignar la representación de la doble periodicidad que dió el primero de

estos matemáticos considerando el plano en que se verifican la variación de la función y la variable, dividido en paralelogramos cuyos lados expresan por su longitud y dirección los dos períodos.

A estos progresos que realizan los matemáticos franceses se unen los realizados por los alemanes, cuya primera tendencia hacia la constitución de esta exposición de la teoría de las funciones, con auxilio de representaciones geométricas, se halla en la Disertación inaugural de Riemann, que concurre al fin general desarrollando los gérmenes existentes en las obras de Gauss y Dirichlet, bastándonos citar de tan importantes desarrollos que hoy se hallan expuestos en las obras destinadas á la enseñanza de la juventud, su representación geométrica de las funciones dependientes del camino recorrido por la variable mediante una superficie helizoidal, que en virtud de una deformación se reduce á un plano *múltiple*, compuesto de cierto número de hojas, llamado *superficie de Riemann*, siendo además el pie del eje del helizoide lo que este geómetra llama *punto de ramificación*, artificio que le permite reducir las funciones multiformes de varios puntos de ramificación al caso de las funciones uniformes ó de una determinación.

El impulso dado por Riemann se continúa por Hankel, Durege y Neumann principalmente, que desarrollan los puntos de vista del maestro, y estos resultados se enlazan con los de los matemáticos Weierstrass, Cantor, Bois-Reymond y otros que hoy contribuyen al progreso científico; y sin analizar detalladamente tan múltiples descubrimientos, que hoy se asocian para constituir con amplitud y generalidad la teoría de las funciones, tan sólo examinada en este trabajo por cuanto se refiere al Algebra, cuya circunscripción hallamos dentro de tan vastos dominios, citaremos varios trabajos, entre ellos la importante Memoria sobre las funciones discontinuas de M. Darboux, donde se esclarece la cuestión acerca de la existencia de las derivadas de las funciones continuas, cuya demostración rigurosa había ensayado Ampère, cuestión resuelta por Riemann en sentido negativo, y concurriendo á este fin, el sólo hecho de existir funciones continuas susceptibles de integración, permite á M. Darboux demostrar la existencia de funciones continuas que no tienen derivadas, y la teoría de las series le conduce á formar directamente una multitud de funciones de esta clase. Ciertas particularidades que pasan como evidentes y que exigen atento examen, entre las cuales un ejemplo es la existencia de funciones continuas no crecientes ni decrecientes en ningún intervalo y la de funciones discontinuas que no pueden variar de un valor á otro sin pasar por todos los intermedios, se hallan examinadas en esta Memoria. El teorema II, á saber, que: Dada una función $f(x)$ de x finita y continua en el intervalo (x_0, x_1), cuando x varía desde x_0 hasta x_1, pasará por todos los valores comprendidos entre $f(x_0)$ y $f(x_1)$, considerada antes como definición, resulta, pues, no ser característica de las funciones continuas.

La existencia de funciones que tienden hacia un valor límite cuando x se aproxima á un número fijo x_0, pero que para $x=x_0$ tiene un valor diferente del valor límite, es otra circunstancia notable diseñada en tan importante trabajo. Y, en fin, el estudio de la función *bien determinada*, ó en la que, á cada valor de x corresponde un valor único. La existencia entre dos límites fijos A y B, de dos números M y m superior ó igual é inferior ó igual respectivamente á los diversos valores de la función, ó el uno superior á $M-\varepsilon$ y el otro inferior á $m+\varepsilon$, para un valor suficientemente pequeño de ε, ó sus *límites máximo* y *mínimo*, así como la diferencia $M-m$, que según Riemann es la *oscilación* de la misma. El modo de obtener los resultados en intervalos subdivididos indefinidamente, dentro de los cuales se analiza la variación y estructura interna de las funciones. Las series cuyos términos son funciones continuas ó discontinuas de x, tratadas por Heine y Cantor *igualmente* ó *uniformemente* (gleichmässig) *convergentes* en un intervalo dado (a, b). El examen del *dominio de un punto* que hace M. Darboux corresponder á la denominación *Umgebung* expresando la porción del plano en que ciertos desarrollos en series de una función son convergentes, como ocurre con el círculo de convergencia, son puntos cuyo enunciado basta para formar idea, con la mayor brevedad posible, del trabajo del ilustrado matemático francés.

Weierstrass, uno de los más notables analistas contemporáneos que han introducido innovaciones de consideración en la teoría de las funciones elípticas empleando notaciones preferibles á las que usaran sus predecesores, es uno de los matemáticos á quienes debe la teoría de la continuidad el haber llegado al grado de perfección actual, y por consiguiente, de las funciones, que estriba en tan fundamental concepto. Citaremos desde luego su teorema: *Una función* F x, *finita y continua entre* x_0 *y* X, *llega, por lo menos una vez á su límite superior* L *y á su límite inferior* l, *cuando* x *varía de* x_0 *á* X, en que M. Ossian Bonnet ha fundado una nueva demostración del teorema de Rolle; pues si Fx es una función finita y continua desde x_0 hasta X, que tiene para cada valor de x una derivada única, siendo además $Fx_0=0$, $FX=0$, cuando Fx es constante en un intervalo tan pequeño como se quiera, entre x_0 y X, $F'x$ es nula, quedando demostrado el teorema. Y cuando Fx no es constante en ninguno de dichos intervalos, y tiene, por consiguiente, al menos un valor positivo (ó negativo) superior (ó inferior) á $Fx_0=Fx=0$, Fx llegará, según el teorema de Weierstrass, á un límite $F\xi=L$ (ó l) diferente de Fx_0 y de FX, que será mayor (ó menor) que sus valores próximos, por ejemplo, mayor. Luego, para h suficientemente pequeño, se tendrá $F\xi > F(\xi \pm h)$, y entonces las relaciones

$$[F(\xi+h)-F\xi]:h \quad \text{y} \quad [F(\xi-h)-F\xi]:(-h)$$

serán, la una negativa y la otra positiva; y como deben tener por hipótesis el mismo límite, á saber, $F'\xi$, resulta, en fin, que $F'\xi=0$.

Aunque ciertas nociones desenvueltas en las obras de Weierstrass, Cantor, Tannery, Casorati y Bois-Reymond corresponden naturalmente á la teoría de las funciones, creemos necesario evocarlas, porque forman un núcleo de verdades de las que se desprenden como consecuencias, no pocas constitutivas del organismo algebraico. Weierstrass, en sus investigaciones sobre las funciones $2r$ veces periódicas, expresa la propiedad de toda función que posee las mismas propiedades y el mismo sistema de períodos que una función $f(u_1,\ldots, u_r)$ *unívoca* (eindeutig) $2r$ veces periódica, con el carácter de una función racional para todos los valores finitos de las variables $u_1,\ldots, u_r$, de ser expresable racionalmente por medio de $(r+1)$ funciones $f_1, \frac{\partial f_1}{\partial u_1},\ldots \frac{\partial f_1}{\partial u_r}$, ligadas mediante una ecuación algébrica, ó bien que: *todas las funciones pertenecientes á una misma clase pueden determinarse racionalmente, por medio de una de ellas y de sus derivadas parciales arriba indicadas*, y cuando considera simultáneamente las variables $u_1,\ldots, u_r$ emplea la denominación *punto* en el *dominio* de $u_1,\ldots, u_r$ para designar cada sistema de estas variables, y siendo $(a_1,\ldots, a_r)$ un punto determinado del dominio, y δ un número real y positivo dado, el conjunto de valores para los que

$$| u_r - a_k | < \delta \quad (k=1, 2,\ldots, r)$$

forma la vecindad (voisinage) (δ) de dicho punto. Y cuando una función unívoca $f(u_1,\ldots, u_r)$ puede representarse en la vecindad de un punto $(a_1,\ldots, a_r)$ por una serie convergente de la forma

$$\Sigma A_{nm},\ldots (u_1-a_1)^n (u_2-a_2)^m \ldots \quad (n, m,\ldots=0, 1,\ldots, \infty)$$

llama *regular* en el punto $(a_1,\ldots, a_r)$ á dicha función, formando el conjunto de puntos en que es regular, un *continuum* de $2r$ dimensiones; y todo punto $(a'_1,\ldots, a'_r)$ situado en el límite del *continuum* es un punto *singular* de aquélla. Cuando el producto de $f(u_1,\ldots, u_r)$ por una serie entera $P_0(u_1,\ldots, u_r \mid a'_1,\ldots a'_r)$ que se anula para $u_1=a'_1,\ldots, u_r=a'_r$, es una función regular en el punto $(a'_1,\ldots, a'_r)$, entonces para todos los puntos $(u_1,\ldots, u_r)$ situados en la vecindad de $(a'_1,\ldots, a'_r)$ puede escribirse $f(u_1,\ldots, u_r)$ bajo la forma

$$\frac{P_1(u_1,\ldots, u_r \mid a'_1,\ldots, a'_r)}{P_0(u_1,\ldots, u_r \mid a'_1,\ldots, a'_r)}.$$

En este caso considera Weierstrass el punto $(a'_1,\ldots, a'_r)$ como un *punto singular no esencial*, y en cualquier otro caso dicho punto se denomina *esencial*, resultando de aquí que el conjunto

de puntos en los cuales $f(u_1,\ldots, u_r)$ se comporta como una función racional, es decir, el conjunto de sus puntos no singulares y singulares no esenciales es un *continuum* con $2r$ dimensiones, cuyo límite está formado por los puntos esenciales de la función.

En fin, el teorema fundamental cuyo enunciado es el siguiente: Toda función unívoca $f(u_1,\ldots, u_r)$ que no tiene ningún punto esencialmente singular en todo el dominio de las variables $u_1,\ldots, u_r$ es una función racional; la conclusión de que, si por un procedimiento cualquiera se forma con auxilio de r variables $u_1\ldots, u_r$ un *continuum* de $2r$ dimensiones, se pueden formar funciones unívocas que se comportan como funciones racionales en todos los puntos situados en el interior de dicho *continuum* y en ningún punto de su límite, no existiendo, por consiguiente, aislados los puntos singulares esenciales de una función unívoca de r variables, siendo posible, por el contrario, su representación por medio de uno ó varios de los complejos (Gebilde) susceptibles de formarse en el dominio de r variables imaginarias; la existencia en número finito de períodos ó grupos de puntos $(u_1,\ldots, u_r)$ correspondientes á un mismo sistema $(s_1,\ldots, s_r)$ de variables ligadas á las anteriores por las r ecuaciones

$$f_1(u_1,\ldots, u_r)=s_1,\ldots, f_r(u_1,\ldots, u_r)=s_r,$$

número que designa el grado del sistema de funciones $f_1,\ldots, f_r$; la adjunción, de infinidad de maneras, de una función cualquiera f_1, $2r$ veces periódica, á otras funciones $f_2,\ldots, f_r$ de la misma clase que la primera, cuya determinante funcional

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right| (i, k=1, 2,\ldots, r)$$

no sea nula; y la existencia de una infinidad de funciones $2r$ veces periódicas de la clase á que pertenecen $f_1,\ldots, f_r$, ligadas á éstas por una ecuación irreducible de grado m, de manera que si f_{r+1} designa una de ellas, puede expresarse $f(u_1,\ldots, u_r)$ en función racional de $f_1, f_2,\ldots, f_{r+1}$, constituyen los resultados que expresa el célebre analista alemán en sus investigaciones sobre las funciones $2r$ veces periódicas.

Con objeto de consignar en esta reseña histórica cuanto contribuya á formar un concepto del actual grado de progreso del Análisis, y con el fin de circunscribirnos después á cuanto debe constituir los dominios del Algebra, terminaremos la relación sucinta de los descubrimientos de Weierstrass indicando las más importantes conclusiones de su Memoria sobre algunos puntos de la teoría de las funciones analíticas.

Dado un número infinito de funciones $f_0(x)$, $f_1(x)$,..... define la *región de convergencia* de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

como el conjunto de valores de x para los que ésta tiene un valor finito, y su convergencia uniformemente en la proximidad del punto a, cuando perteneciendo éste á dicha región puede determinarse una cantidad positiva ρ tal, que suponiendo $|x-a| \leqq \rho$, la serie converge uniformemente. De esto resulta que el conjunto de puntos en la proximidad de los cuales se verifica esta última condición, constituye en el plano una superficie simple, que puede comprender varias partes separadas. Y si A es el conjunto de puntos de la naturaleza en cuestión, é imaginamos que partiendo de uno de ellos se elija otro en el dominio del primero, un tercero en el dominio del segundo, etc. El conjunto de los puntos A de esta manera obtenidos constituye en el plano de la variable x cierto *continuum* A_1, cuya limitación podrá comprender una ó varias líneas, y también puntos aislados. Si existen fuera de A_1 puntos de A, existirá por lo menos un segundo *continuum* A_2 de igual naturaleza que A_1, sin contener punto alguno común con A_1, aunque ciertas partes de los límites de A y A_2 puedan ser comunes. Si existen todavía puntos no pertenecientes á A_1 ni á A_2 existirá al menos un tercer *continuum* A_3, y así sucesivamente. Esto sentado, después de probar que si la serie considerada converge uniformemente en la proximidad de cada punto situado en el interior ó sobre el contorno de una área continua, converge también uniformemente en el interior de ésta, demuestra que la serie, en cada una de las áreas A_1,..... pertenecientes á la región de convergencia, representa, en general, una rama uniforme de una función analítica monogena de x, y que en casos particulares puede representar completamente tal función. En fin, respecto á la cuestión de si en el caso de descomponerse la región de convergencia en varias partes A_1, A_2,....., es posible que la serie se presente en cada una de éstas, ramas de una misma función monogena, llega á concluir que: *Si la región de convergencia de una serie cuyos términos son funciones racionales de una variable* x *puede dividirse en partes tales, que la serie converja uniformemente en la proximidad de cada punto situado en el interior de dichas partes la serie representa en cada una de ellas una rama uniforme de una función monogena de* x; *pero no representa necesariamente una misma función.*

La teoría general de las funciones del matemático alemán Bois-Reymond ofrece una síntesis muy importante de cuanto concierne al cálculo y á los diversos géneros de cantidades considerado bajo el punto de vista filosófico. Proponiéndose examinar principalmente los conceptos de magnitud y de límite, así como la aplicación de este estudio á las teorías del argumento de la función, parte del examen de las representaciones de nuestro pensamiento, cuya sucesión acompaña y rige todo acto mental, siendo los materiales primitivos de todo estudio referente á la teoría del conocimiento. Definida la palabra «representación» (Vorstellung), y entendiendo por concepto de límite cierto modo de razonamiento en virtud del cual, de la naturaleza de una serie de valores susceptibles de ser medidos ú observados, se deduce la existencia de otros que llegan á hacerse imperceptibles y cuya existencia no puede ser demostrada, formula el criterio de la convergencia ó divergencia que reduce á la proposición: *Si la diferencia* $f(x_1)-f(x)$, $(x_1>x)$, *á partir de un valor suficientemente grande de* x_1 *y para valores arbitrarios de la diferencia* x_1-x, *permanece inferior á un número elegido tan pequeño como se quiera, la función* $f(x)$ *tiene un valor límite determinado. Pero si para cierto valor de* x, *tan grande como se proponga, se hallan para* f (x_1)—f (x) (*siempre* $x_1 > x$) *valores superiores á un número pequeño cualquiera, independiente de la variación de* x, f (x) *no tiene límite.*

Antes de exponer la teoría del límite y de la magnitud hace una excursión por las varias maneras de presentársenos la cantidad, examinando y distinguiendo además la metafísica de las operaciones y del mecanismo del cálculo. Respecto al primer punto, pretende hallar una forma fundamental del concepto matemático de la magnitud que domina, no sólo en el mundo exterior, sino que también en la vida interna del alma, es decir, lo que llama *cantidades matemáticas lineales.* Presentando el concepto de número expresado por cifras como uno de los más desprendidos de las representaciones reales que los engendraran, considera en seguida las cantidades continuas: longitud, superficie, volumen, peso, tiempo, velocidad, fuerza, cantidad de calor, intensidad de luz y de sonido, tensión eléctrica, fuerza de corriente, etc. Estas cantidades tienen la notable propiedad común de poderse reducir á las longitudes, sus diferencias, sus partes y sus múltiplos son cantidades de la misma especie, como las longitudes son susceptibles de llegar á ser muy pequeñas y muy grandes, son, en fin, comparables y mensurables. Si, pues, suponemos entre cierta cantidad y una de las cantidades lineales arriba indicadas una relación tal, que aquélla sea una función continua de ésta, y que aumentando ó disminuyendo al mismo tiempo que la longitud, se cambia en una magnitud de la misma especie, de donde se sigue que siendo continua y variando por grados tan pequeños como se quiera, debe comenzar por cero, será preciso considerarla como magnitud lineal, aun cuando no deba aumentar indefinidamente. *Se podrá, pues, hacerla corresponder punto por punto al menos á la recta limitada, y como ésta, á excepción de la extensión, poseerá las propiedades de las magnitudes lineales.* Así, la relación de una cantidad de substancia en disolución á una cantidad fija de un líquido disolvente ofrece un ejemplo de magnitudes lineales limitadas. Respecto á las cantidades del mundo exterior, observa que bajo la influencia de una impulsión interna inferimos de los fenómenos la existencia de las fuerzas primeras, y los efectos en nuestras representaciones

son equivalentes en cantidad á las fuerzas que los producen, y como estos efectos, presiones, tensiones, movimientos, son magnitudes lineales, lo mismo debe suceder con las fuerzas, y aunque actualmente no son representables matemáticamente todos los fenómenos del mundo externo, podemos esperar acaso algún día verlos comprendidos en el concepto de las cantidades lineales. Además de considerar las cantidades del mundo de la percepción interna y las sensaciones graduadas según la intensidad, como el dolor, las sensaciones de la piel, etc., considera las cantidades que crea la inteligencia humana sin relación directa con el mundo de la percepción; pues los procedimientos lógicos de la combinación de las cantidades conducen á ciertos símbolos, llamados cantidades, como vemos verificarse en las claves algébricas de Cauchy, y en los cálculos del Hankel y Grassmann.

Con estos preliminares procede á determinar el concepto de límite que reduce á la investigación del límite de una fracción decimal, valiéndose para considerar la aproximación de la fracción

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n = \frac{\alpha}{10} + \frac{\alpha_1}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

hacia su límite, de la concepción geométrica de una serie sucesiva de múltiplos de décimas, centésimas,...... $0\alpha_1$, $0, \alpha_1\alpha_2$,...., cuyas longitudes correspondientes tomadas sobre la unidad de longitud 0..... 1, partiendo de 0 aproximan indefinidamente sus extremidades hacia el punto 1, estrechando cada vez más los espacios que las separan.

Después de establecer el concepto de límite por su método de las *construcciones numéricas*, expone la teoría del argumento según sus propias ideas y fundándose también en los importantes resultados á que ha llegado el matemático alemán Cantor. El argumento que es la variable independiente, se considera en la teoría de las funciones ya como la extremidad de una longitud ó un *punto* que define una distancia, ya como un *número*, es decir, como una relación numérica á una unidad de longitud. El argumento es una sucesión de determinaciones numéricas;

pero la representación geométrica predomina en el lenguaje, y nos referimos á *cierta extensión* sobre la que se hallan distribuídos los valores del argumento como *puntos*, dividiendo las extensiones en extensiones parciales y *construyendo* sobre los puntos de éstas los valores de las funciones. El modo de agrupación y distribución de los puntos sobre la extensión del argumento son la base de esta teoría, desenvuelta por M. Bois-Reymond, así como por el geómetra citado y por M. Tannery. La diferencia entre longitud y extensión del argumento se hace visible cuando se procede á la partición de ésta. Así, un valor particular x_1 puede dividir los valores del argumento del intervalo $(0,1)$ de las tres maneras siguientes:

$$0 \leqq x < x_1 \text{ y } x_1 < x \leqq 1, \quad 0 \leqq x < x_1 \text{ y } x_1 \leqq x \leqq 1, \quad 0 < x < x_1 \text{ y } x_1 < x \leqq 1,$$

cuya representación puede hacerse por las tres figuras

$$\overset{x}{\overline{0 \qquad x_1}} \; \overset{x}{\overline{\qquad 1}}; \quad \overset{x}{\overline{0 \qquad}} \; \overset{x}{\overline{x_1 \qquad 1}}; \quad \overset{x}{\overline{0 \qquad x_1}} \; \overset{x}{\overline{\qquad 1}};$$

de manera que dos fórmulas dadas, la una variable en el primer intervalo y la otra en el segundo, no estarán completamente determinadas si no se indica á cuál de los tres casos corresponden. En el primero, se hallan comprendidas todas las magnitudes menores que x_1 tomadas en la longitud unidad, á partir de cero con la magnitud x_1 y además todas las superiores á ésta; en el segundo, todas las menores que x_1 y además la x_1 con todas las superiores; en el tercero, todas las inferiores á x_1, además la x_1 y además todas las superiores á ésta.

Teniendo presente la circunstancia esencial de que una extensión de argumento designa una serie de valores ordenados según su magnitud, de manera que una cantidad numéricamente determinada *sólo pueda presentarse una vez*, bosquejaremos la importante doctrina de las *pantaquias* y de las *apantaquias*, fundamental en la teoría de las funciones, es decir, las distribuciones de puntos de cierta especie, tales, que en todo intervalo tan pequeño como se quiera, existan puntos de la misma especie ó

distribuciones *pantáquicas*. Las definiciones de los puntos diádicos ó decádicos, en las que las α pueden tener todas las combinaciones posibles de 0 ó 1, ó bien de 0, 1, 2,....., 9.

$$Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{2^n}, \quad Z = \frac{\alpha_1}{10} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

son pantaquias, pues dado un intervalo tan pequeño como se quiera sobre la extensión unidad, las α y las n pueden siempre determinarse de manera que un punto Z se halle siempre en el mismo. Cuando la definición de Z da lugar á un número finito tan grande como se quiera de puntos, si se aumenta éste disponiendo convenientemente de las cantidades arbitrarias de la definición, acaban por presentarse en todo intervalo tan pequeño como se quiera, y resulta, según la denominación de Bois-Reymond una *pantaquia ilimitada*, y el conjunto límite de las pantaquias ilimitadas, es decir, el conjunto de todos los puntos posibles, es lo que llama *pantaquia completa*. En fin, las innumerables pantaquias que forman las clases intermedias entre dichas dos clases extremas, son las *pantaquias infinitas*. En cuanto á las *apantaquias*, debemos considerar primeramente los *sistemas de puntos aislados* que forman las *apantaquias limitadas*; éstas forman sistemas de puntos en número finito, tan densos como se quiera, pero determinados de manera que no pueden aproximarse cuanto se quiera, disponiendo de los parámetros. Un ejemplo de tales sistemas nos ofrece la fórmula

$$Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_7}{2^7},$$

cuando se sustituyen por las α todas las combinaciones de cero y de uno. También los puntos $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$,..... que se estrechan indefinidamente aproximándose al punto $\frac{1}{2}$ forman otro sistema de puntos aislados. A las *apantaquias ilimitadas* corresponden *los sistemas de puntos de convergencia*, es decir, puntos aislados que convergen indefinidamente hacia puntos particulares y pueden ser de diversos órdenes finitos ó de orden indefinidamente elevado. Y en estos sistemas pueden irse excluyendo de una manera sucesiva, por ejemplo, los de orden n, luego los de orden $n-1$, con auxilio de extensiones suficientemente pequeñas, hasta llegar á un sistema aislado. Además de estos sistemas de puntos pueden considerarse sistemas de convergencia de extensiones de orden arbitrario, que pueden cubrirse de sistemas de puntos cualesquiera. Así, considerando el sistema de extensiones que convergen alrededor de los puntos de convergencia de los ceros de sen $\frac{1}{x}$, y sobre una extensión primera cualquiera un sistema de puntos con un punto de convergencia de primer orden, en una extensión próxima en la dirección del punto $x=0$, imaginemos un sistema de puntos con un punto de convergencia de segundo orden, etc., de manera que el orden de los puntos de convergencia crezca indefinidamente cuando se acerca al punto $x=0$, siendo este un punto de convergencia de orden indefinidamente elevado. Podemos, por exclusión sucesiva de puntos, llegar á un sistema aislado, pues cuando por una extensión suficientemente pequeña llegamos á excluir el punto cero, el sistema que resulta á ambos lados no contiene más que puntos de convergencia de orden finito.

El concepto de la enumeración, debido á M. Cantor, permite relacionar ó en cierto modo medir conjuntos ilimitados, comparándolos á un conjunto particular, es como una extensión de la numeración. Cuando en una serie de objetos se les hace corresponder á los números 1, 2, 3,..... de modo que no pueda considerarse ningún elemento, sin que le corresponda un número, dicha serie se dice enumerable aunque sea ilimitada.

La determinación de números $Z=\varphi(m_0, m_1, \ldots, m_n, n)$ en la que cada una de las m_p, así como n, pueden tomarse arbitrariamente, designa muchas especies de números, por ejemplo, entre otras, las pantaquias

$$Z=\frac{m_1}{m_2}, \quad 0=m_n+m_{n-1}z+\ldots+m_0 z^n$$

respectivamente, de todos los números racionales y de todos los números algebraicos, esto cuando Z representa las raíces reales de la última ecuación.

Al concepto de la enumeración se une el de la potencia relativa de los conjuntos, que ha expuesto Cantor en el *Borchardts Journal*, entendiéndose por conjuntos de igual potencia aquéllos que pueden corresponderse sin ambigüedad y completamente elemento por elemento, mientras que si un conjunto M comprende todos los elementos de otro M', éste será una porción de aquél que tendrá mayor potencia; así dos conjuntos finitos no son de igual potencia, mientras el número de puntos no sea el mismo, y *los conjuntos enumerables son siempre de menor potencia que el* Continuum *de los números ó la pantaquia completa*, según establece Cantor. Además demuestra este matemático que: *El conjunto de todos los valores posibles no puede expresarse bajo la forma de una serie simple; pero toda serie de valores determina en todo intervalo* (a, b) *valores que no le pertenecen*, pues considerando las cantidades enumerables dispuestas en una serie $\omega_1, \omega_2, \ldots$ y siendo $a_1, b_1, (a_1<b_1)$, las primeras cantidades de esta serie que se hallan comprendidas en el *interior* del intervalo (a, b), é incluyendo de igual manera en este intervalo $(a_1 b_1)$ otro (a_2, b_2), y así sucesivamente, establece dos series $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ de cantidades ω ascendente y descendente, que si son limitadas llegan á comprender un sólo valor ω con los demás extraños á la serie de las ω y si es ilimitada ningún valor del intervalo (a_∞, b_∞) pertenece á esta serie.

Basado en estos preliminares, Bois-Reymond desenvuelve la teoría de la función y explica el concepto de *valor de una función* haciendo corresponder á un valor de argumento particular, ya un número limitado ó ilimitado de valores, ó todo un intervalo de valores, ó una serie de intervalos de este género, de manera que empleando la representación cartesiana imagina, según el punto de vista idealista, una ordenada construída sobre cada valor del argumento, considerando sobre ésta un *continuum* de números, como sobre la extensión del argumento, obteniendo el conjunto de todas las funciones al tomar sobre todos los valores del argumento todas las combinaciones de valores de la ordenada, teniendo presente que el concepto general de función, en el moderno análisis, no exige que ésta se halle dada para todo valor del argumento, pues puede ser dada para uno solo de los sistemas de pantaquias ó apantaquias arriba considerados, y en cuanto á los valores del argumento, se distinguirán las funciones dadas *completamente* ó para la pantaquia completa de valores del argumento, de las dadas *incompletamente* para una pantaquia ó apantaquia cualquiera.

Estos elevados puntos de vista conducen á Bois-Reymond á una clasificación sistemática de las funciones que le permite establecer una comparación con la que la ciencia de la naturaleza constituye para los seres vivientes, considerando las clases sucesivas de la teoría de las funciones hasta hoy establecidas, como el germen de la teoría futura, que ha de aproximarla cada vez más á la clasificación de las ciencias naturales.

Un resumen importante de lo constituído en la teoría de las funciones ó un trabajo de clasificación, como indica en el prefacio, es la obra del profesor Tannery *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.*

El punto de partida es la definición que M. Bertrand da del número irracional consistente en expresar cuáles son todos los números racionales menores que él, y cuáles todos los mayores; manera que cree la más natural de presentar dichos números cuando se trata de la medida de las magnitudes inconmensurables con la unidad. La consideración de la ecuación $x^2-3=0$, á la cual ningún número racional satisface, le permite separar todos los números positivos en dos clases: la primera, que contiene todos aquéllos cuyo cuadrado es inferior á 3; la segunda, que contiene todos aquéllos cuyo cuadrado es superior á 3; y así todo número de la primera clase es inferior á cualquiera de la segunda; y siempre que se haya conseguido esta separación se habrá definido un número irracional. Además, una descomposición análoga para un número racional, permite también definir los números racionales. Para llegar á la teoría de las operaciones aritméticas admite dos modos distintos: ó emplear las series

como definición de los números irracionales, ó considerar la descomposición en dos clases de los números racionales. La consideración de los *conjuntos* de números que satisfacen á cierta condición, cuyos elementos son éstos, le conduce á las nociones de *límite superior é inferior* relativos al conjunto considerado, según la idea de Weierstrass. La definición de un número racional ó irracional por medio de una serie infinita de números racionales fundada en la propiedad siguiente: *Dada una serie convergente de números racionales* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *que no admite cero por límite, todos sus términos llegan después de cierto lugar* n, *por ser de igual signo y mayores en valor absoluto que cierto número racional positivo* ε, le conduce á definir las operaciones de los números así definidos, y extender las propiedades concernientes á éstas, al caso de los números irracionales. Al examen de las series convergentes refiere la teoría de los productos infinitos convergentes, y estudia la ley de correspondencia *unívoca*, es decir, una correspondencia entre dos números i, j tal, que cuando uno de ellos está dado, el otro lo sea también, pudiéndose así concebir una serie infinita, compuesta de los mismos números enteros colocados en orden distinto que el de la serie 1, 2, 3,..... debiendo figurar cada número entero positivo en un lugar único, y determinado, estableciéndose así una ley de correspondencia entre los términos de dos series, permitiendo esta consideración establecer la igualdad de su suma, que es la aplicación de la teoría de la *enumeración* del matemático Cantor (*Act. math., t. II, p. 306*). Esta ley de correspondencia unívoca, aplicada á la serie de doble y triple entrada, permite á M. Tannery establecer la teoría de las series y de los productos infinitos absolutamente convergentes. En fin, el examen de una función definida para los valores de un conjunto (E), de sus límites, sus oscilaciones, particularidades como la de que si una función continua en un intervalo (a, b) es continua para cada valor de x perteneciente á éste, aunque no se verifica la recíproca, según ha demostrado el profesor y matemático alemán Heine, el modo de completar, fundándose en la noción de continuidad, la definición de una función no definida para todos los valores de la variable, la demostración de la propiedad fundamental de las funciones continuas de no poder pasar de un valor á otro sin pasar por todos los valores intermedios, que no es característica de las funciones continuas, según estableció M. Darboux en su Memoria ya citada, la teoría de las series *uniformemente convergentes*, la consignación del interés filosófico que existe por prescindir en el Análisis cuanto sea posible de datos experimentales y por consiguiente de las consideraciones geométricas respecto á las funciones trigonométricas, el estudio de las series independientemente de las funciones que representan, la convergencia uniformemente de los productos infinitos en un intervalo (a, b), la definición de funciones por medio de ciertos productos infinitos, la definición de funciones de n variables $u, v, w, \ldots$ en el *campo* (E) formado por el conjunto de valores atribuídos á éstas, que verifican las desigualdades

$$A \leqq u \leqq A', \quad B \leqq v \leqq B', \quad C \leqq w \leqq C', \ldots$$

y otras muchas cuestiones que sería prolijo enumerar, hacen de la obra que consideramos una síntesis de los resultados á que ha llegado el Análisis matemático respecto á las funciones de una variable real.

Pasando á otro orden de ideas, como exige la necesidad de no interrumpir la relación de los progresos verificados, especialmente en cuanto se refiere á la continuidad, observamos que comienza otro desenvolvimiento de las teorías del Álgebra en la obra de Möbius *Der barycentrische calcul* que apareció casi al mismo tiempo que las de Warren y Mourey ya citadas, y cuya idea fundamental es la de hallar el centro de gravedad ó *baricentro* de un sistema de puntos $A, B, \ldots, L$ en los cuales se supone pesos $a, b, \ldots, l$ respectivamente.

Al cálculo baricéntrico sucede pocos años después la teoría de las equipolencias, debida al matemático italiano Bellavitis, que realiza el deseo expresado por Carnot de hallar un algoritmo que represente á la vez la magnitud y la posición de las diversas partes de una figura, y comprende como caso particular el cálculo baricéntrico, constituyendo, no sólo un nuevo sistema

de Geometría analítica en que se expresan las relaciones entre los puntos de un plano, independientemente de todo sistema particular de coordenadas, sino que además ofrece al Análisis objetos geométricos reales en lugar de los símbolos imaginarios y un sistema de cálculo geométrico ó aplicación de las reglas del Álgebra á la Geometría, ocurriendo que toda fórmula idéntica de aquélla puede considerarse como un teorema relativo á varios puntos en línea recta; y tan notables resultados se obtienen considerando las rectas bajo el doble punto de vista de su dirección y magnitud, de manera que toda equipolencia implica dos cantidades que determina. Y la dependencia de esta teoría con respecto al Álgebra se expresa en el principio fundamental siguiente: *Se pueden efectuar sobre las equipolencias relativas á las figuras planas todas las operaciones y transformaciones que son legítimas para las ecuaciones algebraicas, siendo exactas las equipolencias que resultan.*

En Alemania é Inglaterra los brillantes resultados obtenidos por Grassmann y Hamilton, que adquieren luego considerable desarrollo y generalización, contribuyen á ensanchar los límites del Álgebra geométrica y simbólica.

Grassmann, en su Ansdehnungslehre de 1844, tuvo la idea, acaso derivada del cálculo baricéntrico, de considerar cantidades simbólicas, que llamó *magnitudes extensas*, estableciendo un nuevo cálculo, en el cual dos puntos A y B se consideran como factoıes del símbolo AB; su producto $[AB]$ y su diferencia $B-A$ son respectivamente el rotador y el vector AB. Y en este sistema la multiplicación de las unidades imaginarias se halla sometida á las dos leyes siguientes: $i_p i_q = -i_p i_q$, $i_p i_q = 0$. De manera que, si $\mathrm{A} = \Sigma a_p i_p$, $\mathrm{B} = \Sigma b_q i_q$, se deduce

$$\mathrm{AB} = \sum \begin{vmatrix} a_p & a_q \\ b_p & b_q \end{vmatrix} i_p i_q \text{ y } \mathrm{BA} = \sum \begin{vmatrix} b_p & b_q \\ a_p & a_q \end{vmatrix} i_p i_q = -\mathrm{AB}.$$

Este cálculo de las cantidades *alternadas*, según la denominación de Hankel, ó cantidades *polares*, según la denominación de Sylvester, fué desarrollado también por Cauchy con el nombre de *clefs algébriques*, y tanto Grassmann como este matemático observaron que el producto de n funciones homogéneas, de n cantidades alternadas ó de la forma $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots\ldots$ es el producto de la determinante de los coeficientes por el producto de dichas cantidades, teniendo esta especie de cálculo grandes analogías con el de las determinantes. Y si las cantidades complejas A, B,..... representan líneas *dirigidas* en un plano ó en el espacio, el producto de dos líneas OA=A, AB=B representará en magnitud y posición el área del paralelogramo construído sobre OA y AB, representando el producto de tres rectas el volumen del paralelepípedo construído sobre las mismas.

Estas investigaciones acerca del *mecanismo de las leyes del cálculo* se desarrollan en la obra de Hankel *Vorlesungen über die complexen Zahlen*, etc., cuya exposición se subordina á su principio de la *permanencia* de las reglas de cálculo, en virtud del que, para las cantidades generalizadas, debe aplicarse á las cantidades de orden inferior, no pudiendo la generalización introducir nuevas propiedades, ni dar lugar, por consiguiente, á reglas que no resulten de las propiedades ya admitidas. Además, algunas propiedades pueden desaparecer en la generalización, y cuando varias propiedades llegan á hacerse contradictorias, se debe conservar las más importantes. Esta generalización conduce al empleo de nuevos signos para designar las operaciones que sólo en casos particulares se reducen á los del cálculo ordinario, y respecto á las cantidades, se designan con la expresión *substrata* de las operaciones, palabra que sustituyó Hoüel por el término más vago y comprensivo de *objetos*. El examen de las operaciones como *uniformes*, *conmutativas*, *asociativas* y *distributivas* constituye lo que caracteriza los resultados obtenidos por Hankel, y á cuya generalización contribuye la singular idea del hiper-espacio que expuso por vez primera Riemann en su célebre disertación inaugural (1854) y desenvuelta también por Helmholtz dos años después, en la teoría general de las operaciones, en lugar de puntos de un espacio de una ó de dos dimensiones, se representan funciones de un número cualquiera n de variables, ó puntos de un espacio de n dimensiones, siendo preciso, para corresponder á esta generalidad, introducir cantidades com-

plejas de orden superior, en cuya formación entran, por lo menos, n valores numéricos independientes entre sí, pudiéndose, á causa de la multiplicidad de los medios de pasar de un punto dado á otro también dado en un espacio de n dimensiones, elegir de varias maneras la composición de los símbolos que representan dichos puntos y la definición de las operaciones fundamentales, al pasar de un punto á otro.

Los trabajos del filósofo y matemático Boole, de gran influencia en Inglaterra, han sido el punto de partida de la evolución que ha experimentado la teoría del cálculo simbólico, caracterizando muy especialmente el desenvolvimiento matemático que realizaron los matemáticos ingleses, en diferente sentido que el realizado por los geómetras del continente. Hoy los descubrimientos de Hamilton, Cayley y Sylvester son el núcleo sobre que se ha desarrollado el vasto cuerpo de doctrina que constituye el Álgebra moderna.

Boole se propuso extender los dominios de la lógica deductiva, y como la operación deductiva sustancialmente se reduce á la eliminación de un término medio en un sistema de tres términos, generaliza el problema que se reduce á eliminar de un sistema de términos en número cualquiera, tantos términos medios como se desee, y determinar todas las relaciones que implican las premisas entre los elementos que se desea conservar. De esta manera el silogismo antiguo, que antes constituía toda la lógica, quedaría reducido á un caso particular de dicho problema, como la eliminación de un símbolo de cantidad entre dos ecuaciones dadas en Álgebra, lo es de la teoría general de la eliminación.

Es un principio reconocido por los matemáticos que la validez del análisis algebraico depende, no de la interpretación de los símbolos empleados, sino de las leyes de su combinación; de manera que en una fórmula analítica, todo sistema de interpretación, que no afecta á la verdad de las relaciones supuestas, es admisible, pudiendo aquélla representar según los casos, ya la solución de una cuestión relativa á los números, ya la de un problema de geometría ó de mecánica ó de óptica, etc.; y si prescindimos de toda interpretación, sólo queda un sistema de operaciones dotadas de propiedades especiales. Además, la Matemática abstracta tiene por objeto, no las nociones de cantidades numéricas, geométricas ó mecánicas, sino las operaciones consideradas en sí, prescindiendo de los objetos diversos á que se aplican. Así, la adición, por ejemplo, tiene significados distintos según se trate de números, líneas, superficies, etc., sin que ninguna de estas especies pueda tomarse como tipo de las demás; pero si en cada una se prescinde del objeto á que se aplica, resultan ciertas propiedades comunes expresadas por las igualdades siguientes:

1.ª Para $a=a'$, $a+b=a'+b$, 2.ª $a+(b+c)=(a+b)+c$,
3.ª $a+b=b+a$, 4.ª $a+0=0+a=a$.

Estas consideraciones conducen naturalmente á examinar si el análisis matemático rechaza ó no toda interpretación que no sea cuantitativa y si le está vedado el tratar algebraicamente las operaciones realizadas por la inteligencia en la inferencia deductiva, y Boole, bajo la influencia de las mismas, procede á la constitución de la lógica algebraica.

Para conseguir este propósito de identificar el cálculo algebraico con el lógico, que exige el análisis de las operaciones de la inteligencia, su expresión en lenguaje simbólico y el deducir las propiedades de estos símbolos de las leyes de su combinación, el filósofo inglés adopta tres especies de símbolos: numéricos y literales 1 y 0, x, y, z, etc., para expresar las cosas en cuanto son objetos de nuestras percepciones, los signos de las operaciones $+$, $-$, $\times$ para representar las operaciones intelectuales, y en fin, el signo de la identidad $=$. El signo 1 expresa *todo*, es decir, la clase que comprende todos los seres posibles; el signo 0, *nada*, es decir, la clase que comprende todo lo que no existe. Así, por ejemplo, $1x$ expresa la totalidad de los seres que posee en el carácter común x, otra clase se representará por y, otra por z, etc., y la clase que comprende los tres caracteres ó atributos por xyz, expresión en la cual se reconoce que el orden

de los signos es indiferente, es decir, que los símbolos lógicos poseen la propiedad conmutativa, de manera que $xy=yx$. Las operaciones por las que reunimos en un todo partes, ó dividimos un todo en partes, se expresan con los signos $+$ y $-$; así, españoles y franceses, los europeos excepto los españoles, se expresarán mediante las notaciones $x+y$, $x-y$. Y puesto que $x+y$ representa la totalidad de los individuos contenidos en la clase x y en la clase y, el orden es indiferente, dicho símbolo posee la propiedad *conmutativa*, y el símbolo $z(x+y)=zx+zy$, indica la posesión de la propiedad *distributiva*. La expresión $xx=x$ ó $x^2=x$ correspondiente á la repetición de una clase, como por ejemplo, hombre hombre, que es lo mismo que hombre, conduce á una conclusión importante, pues siendo $x-x^2=0$ ó $x(1-x)=0$, como el símbolo $1-x$ debe representar, no x, dicha fórmula se traduce así: el producto formal $x(1-x)$ representa los individuos que son á la vez x y no x, que es igual á cero, y expresa el *principio de contradicción*.

Bastando con los ejemplos citados para dar idea del sistema de Boole, terminaremos indicando que de la correspondencia establecida por los símbolos algebraicos y lógicos, deduce que en lógica se puede, como en Álgebra, sumar y restar ecuaciones y transponer los términos, conduciéndole estas consideraciones á formular su regla fundamental, que se reduce á: Prescindir de la interpretación lógica de los símbolos en la ecuación dada; convertirlos en símbolos cuantitativos, susceptibles solamente de los valores 0 y 1, someterlos en tal estado á los procedimientos que requiere su solución y, en fin, darles su interpretación lógica.

Si Boole expuso el problema lógico, que consiste en determinar la descripción de una clase bajo ciertas condiciones lógicas dadas, y aun ha mostrado la posibilidad de resolverlo, no llegó á una solución clara y definitiva del mismo, porque el medio empleado adolece de defectos, entre ellos el exclusivo empleo de los dos valores 1 y 0, y además el pretender privar á la Lógica de su generalidad, subordinándola á la Matemática. Estas deficiencias han sido salvadas por el filósofo inglés Jevons, cuyas ideas se hallan expuestas en su *Pure Logic* y en *The principles of science*. Resumiremos su doctrina de la manera siguiente: Simbólicamente los términos del razonamiento se expresan por las letras del alfabeto, las mayúsculas indicarán los positivos, las minúsculas los negativos. La expresión simbólica de términos compuestos de otros más simples se obtendrá escribiendo éstos á continuación unos de otros, como en la multiplicación algebraica, así ABC, y estos símbolos poseen la propiedad conmutativa. Las leyes fundamentales del pensamiento en el sistema de Mr. Jevons son tres: la de *identidad* (lo que es, es), la de *contradicción* (una cosa no puede ser, y no ser al mismo tiempo) y la de *dualidad* (una cosa puede ser ó no ser).

Considerando que en las proposiciones lo único que aprecia la lógica es la *forma*, cuantifica el predicado, siguiendo á los filósofos Hamilton y Boole, y reemplaza el verbo *ser* por el signo $=$. Tres identidades distingue Mr. W. S. Jevons, simples, parciales y limitadas: las primeras comprenden todas las definiciones, son de la forma $A=B$, las segundas de la forma $A=AB$ (por ejemplo, triángulos = polígonos que son triángulos), cuyo segundo miembro denota exactamente los mismos individuos que el sujeto A, puesto que expresa los individuos que poseen simultáneamente las cualidades A y B, las terceras, de la forma $AB=AC$, corresponden á ciertas cosas que sólo pueden ser idénticas bajo ciertas condiciones, por ejemplo, si A expresa, estado sólido, B el oro y C maleable, dicha identidad expresará que el oro es maleable en el estado sólido, ú oro sólido igual á sólido maleable. Para indicar la diferencia ó completa desemejanza emplea el signo $\sim$, y para un modo general de relación el siguiente $\backsim$. En conformidad con lo arriba indicado, siendo A y a, B y b,..... términos contradictorios, la ley de contradicción se expresará por las ecuaciones $Aa=o$, $ABb=0$, $ABCa=0$, etc. La combinación de un término consigo mismo que expresa la *ley de simplicidad* (Law of simplicity) ya conocida por Bœcio que dice: «Velut si dicam, sol, sol, sol, non tres soles effecerim, sed uno», etc. (De Trinitate et Unitate Dei), tiene su representación simbólica $A=AA=AAA=$etc. El carácter de esta nueva

lógica consiste en prescindir de las restricciones del sistema de Aristóteles y proceder por *sustitución de los semejantes*, admitiendo el *principio de inferencia*, á saber, que *lo cierto de una cosa ó circunstancia es cierto de otra cosa ó circunstancia idéntica ó equivalente*. El caso más sencillo de la inferencia inmediata consiste en agregar un calificativo á los dos miembros de una identidad, así de $A=B$ se concluye $AC=BC$, de $A=AB$ resulta $AC=ABC$. De una identidad simple $A=B$ y de una parcial $B=BC$, se deduce, sustituyendo el segundo miembro de ésta en el de la primera, que $A=BC$, de

$$A=AB,\ B=BC,\quad \text{resulta}\quad A=ABC,$$
$$\text{de}\ A=AB,\ B=AB,\quad \text{resulta}\quad A=B,\ \text{etc.}$$

No son estos los únicos resultados del procedimiento de la sustitución, pues empleando las proposiciones disyuntivas, y aplicando las leyes de contradicción y dualidad, llegamos á resultados que exceden extraordinariamente á los límites de la lógica peripatética, y revelan toda la fecundidad del sistema de Boole, que de una manera más clara, sencilla y conforme con las leyes de la inteligencia, ha expuesto el filósofo Jevons.

Las tres leyes arriba mencionadas permiten analizar todos los resultados de una afirmación cualquiera. La ley de dualidad desarrolla todas las clases que pueden constituir todas las combinaciones posibles de las condiciones contenidas en dicha afirmación, la de identidad nos autoriza á sustituir á un término lo que se afirma ser idéntico al mismo, la de contradicción nos permite eliminar toda clase ó alternativa contradictoria con las condiciones dadas. Empleando el signo $\cdot|\cdot$ de la alternativa, si con las premisas $A=B$, $B=C$, se trata de obtener la descripción completa de A, como las alternativas en cuestión deben contener A, se obtendrá que

$$A=ABC\cdot|\cdot ABc\cdot|\cdot AbC\cdot|\cdot Abc;$$

pero las alternativas AbC y Abc expresan contradicción y se anulan, en virtud de $A=B$, pues cada una contiene B contradictorio con b, y la alternativa ABc se elimina en virtud de ser $B = C$; luego ABC es la descripción completa de A, según las premisas consideradas.

Para cualquier número de condiciones, el sistema lógico que examinamos se reduce á las operaciones de clasificación, de selección y eliminación; por ejemplo: A y B producen cuatro combinaciones; A, B y C ocho; A, B, C y D dieciséis, etc.; y esto conduce al *alfabeto lógico* de Jevons, que concibe cualquier grupo de combinaciones como una parte de la clase superior ó *summum genus*; y el abaco *(The Logical Abacus)*, ideado por dicho filósofo, tiende á simplificar mecánicamente el trabajo de combinación y eliminación.

Además de cuanto se acaba de exponer acerca de este sistema que aproxima y relaciona las ideas de cantidad y cualidad, se expresan las analogías de los términos numéricos y lógicos, estableciéndose que los símbolos matemáticos se subordinan á las leyes de los símbolos lógicos. Respecto á la inferencia matemática, el principio universal es el que nos permite sustituir lo igual por lo igual, que puede enunciarse de la manera siguiente: *Cualquiera que sea la relación de una cantidad con otra, existe la misma relación con toda igual á ésta,* y en conformidad con el filósofo Morgan, que halló la validez de muchos argumentos en que los razonamientos matemáticos y lógicos se hallan combinados, concluye al establecer el significado numérico de las condiciones lógicas, que á cualquiera ecuación de cualidades podemos hacer corresponder una ecuación de números.

Un nuevo desenvolvimiento del Álgebra geométrica, esencialmente distinto de los que emanaron de la obra de Argand, algo parecido á la teoría de las equipolencias extendida al espacio, revela el concepto del matemático Sir W. R. Hamilton, que agrega á los dominios del Algebra y de la Geometría su teoría de los cuaternios, en la cual, además de un nuevo cálculo, aparecía un nuevo sistema de Geometría analítica, ó un nuevo sistema de coordenadas que traducen con suma sencillez las relaciones de las magnitudes extensas y dirigidas.

El descubrimiento de Hamilton se enlaza con el cálculo generalizado de Grassmann y Hankel, con las equipolencias de

Bellavitis y con las tendencias la lógica deductiva de Boole y Jevons. Fundándose en la distinción de dos especies de magnitudes reales, á saber, las magnitudes numéricas ordinarias, denominadas en este sistema *escalares*, por concebirse originadas en la idea de una escala que se extiende sobre una recta desde las regiones del infinito negativo á las del infinito positivo, en la cual se hallasen inscritos los valores numéricos, y las magnitudes que incluyen en sí los atributos de longitud rectilínea y *dirección definida*, expresadas con la denominación de *vectores.* Como en las obras de Bellavitis, todas las rectas iguales y paralelas, se representan por un mismo símbolo, que depende en el sistema de Hamilton de tres elementos numéricos, sirviendo un *vector* para expresar una *traslación* en el *espacio*, y análogamente al concepto fundamental de la teoría del geómetra italiano, *si entre tres vectores*, por ejemplo, *no paralelos á un mismo plano, existe una relación con coeficientes reales* l, m, n *de la forma*

$$l.AB + m.CD + n.EF = 0,$$

sin que ninguno de los vectores sea nulo, ésta se descompondrá en las tres siguientes: $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, lo que expresa la condición esencial de dichos vectores, designados por i_1, i_2, i_3, ó por i, j, k, de representar tres unidades *irreducibles* entre sí. En cuanto á la analogía de las propiedades de los cuaternios y los símbolos de la lógica de Boole dados á conocer en su obra: *On the laws of thought*, citaremos las palabras del matemático inglés Sr. Tait: «La semejanza sorprendente de estos dos sistemas de símbolos, tipos de procedimientos que son en el fondo los mismos, nos sugiere la observación de que sólo existe una ciencia única de Análisis matemático, con diversas ramas, si bien con distintos procedimientos en cada una. Por la una, esta ciencia nos descubre los misterios de la Geometría de posición, fuera del dominio del razonamiento geométrico ordinario; por la otra, permite al lógico llegar á verdades de deducción que no habría podido jamás obtener sin el auxilio del instrumento de las fórmulas.

En la teoría de Hamilton, el símbolo $\sqrt{-1}$ se emplea como una *realidad geométrica*, apta para representar una posición cualquiera en el espacio. Por la expresión de un cuaternio bajo la forma $N(\cos\theta+\omega\,\mathrm{sen}\,\theta)$ en la que N es una cantidad numérica, θ un ángulo real y ω corresponde á la relación $\omega^2=-1$, aparece una notable analogía con la fórmula de Moivre, si bien ω no es equivalente al elemento algebraico $\sqrt{-1}$, pues representa la unidad de longitud, *según una dirección* DADA *en el espacio.* Y si los demás sistemas de representación geométrica se fundan en la elección de una dirección particular para representar la de las cantidades reales, en el de Hamilton se pueden considerar como imaginarias ó como geométricamente reales todas las direcciones sin excepción; el método de los cuaternios es independiente del empleo de ejes coordenados ó de otras direcciones cualesquiera tomadas *a priori.*

Sin detenernos en la adición de los vectores, conforme totalmente con los sistemas anteriores, cuya expresión general está dada por la fórmula $\overline{AB}+\overline{BC}+.....+\overline{YZ}=\overline{AZ}$, indicaremos la descomposición de un vector, según tres vectores dados, no paralelos entre sí dos á dos, ni paralelos á un mismo plano que le conduce á la expresión $\rho=xi+yj+zk$ del mismo, siendo i, j, k vectores-unidades perpendiculares entre sí, y pasaremos á la cuestión de los productos y cocientes de vectores que hace diferir absolutamente el método de los cuaternios de los demás métodos matemáticos.

La transformación de un vector $\overline{OA}$ en otro $\overline{OB}$ que no le es paralelo, se verifica mediante dos operaciones, independientes una de otra, consistentes: 1.º, en aumentar ó disminuir la longitud de $\overline{OA}$, según la razón $\frac{OB}{OA}$; 2.º, en hacer girar OA alrededor de O hasta coincidir en dirección con OB. La primera operación se expresa por un número, la segunda exige conocer tres elementos, á saber, los *dos* ángulos que determinan el plano en que se efectúa la rotación de OA y el *ángulo* que expresa el valor de ésta. Por consiguiente, el operador ó agente que transforma un vector en otro, el cual se denomina multiplicador, por asimilarse sus propiedades á las de este elemento algorítmico, depende de cuatro números distintos, derivándose de aquí la pala-

bra *cuaternio.* Dichas dos operaciones ó factores constituyen el *tensor* y el *versor* del cuaternio, denominaciones que caracterizan la *extensión en longitud* y la *rotación*, siendo el tensor de un simple versor igual á la *unidad.* Pero en conformidad con la teoría de los pares de Poinsot, un cuaternio puede representarse por una longitud tomada perpendicularmente al plano del versor, es decir, según el *eje del versor*, cuya dirección positiva se define considerando un espectador sobre dicho plano y según el eje, de manera que vea efectuarse el giro producido por el versor, de derecha á izquierda *(sinistrorsum)* ó en sentido directo, y la longitud del expresado eje, que para un versor es la unidad lineal, para un cuaternio en general será una longitud igual á la relación $\frac{OB}{OA}$; y la consideración de los *versores-cuadrantes*, fundamental en la teoría de los cuaternios, se establece fácilmente, pues suponiendo tres vectores-unidades perpendiculares entre sí I, J, K, dispuestos entre sí de manera que una rotación positiva de un ángulo recto alrededor de I (considerado como eje respecto al plano JOK) conduzca á J á coincidir con K, por una rotación alrededor de J, K coincida con I, y por otra alrededor de K, I coincida con J, y designando en cada caso por i, j, k los versores-cuadrantes, tendremos las relaciones:

$$\frac{K}{J}=i \text{ ó } K=iJ,\ \frac{I}{K}=j \text{ ó } I=jK,\ \frac{J}{I}=k \text{ ó } J=kI.$$

Además, en virtud de ser $\frac{-J}{K}=\frac{K}{J}$, resultará también que:

$$\frac{-J}{K}=i \text{ ó } -J=iK,\ \frac{-K}{I}=j \text{ ó } -K=jI,\ \frac{-I}{J}=k \text{ ó } -I=kJ,$$

deduciéndose, en fin, que:

$$-J=iK=i(iJ)=i^2J,\ -K=jI=j(jK)=j^2K,\ -I=kJ=k(kI)=k^2I,$$

ó las relaciones fundamentales $i^2=-1$, $j^2=1$, $k^2=1$; y de estas relaciones se deducen los valores de los productos, dos á dos, de los versores cuadrantes, es decir, que: $ij=k$, $ki=j$, $jk=i$.

Pero pudiendo emplear las letras i, j, k ya en su acepción propia, ya en la de las mayúsculas correspondientes, en lo cual nada hay que sea contradictorio, puede enunciarse el siguiente principio fundamental: *Un vector-unidad*, CUANDO DESEMPEÑA LAS VECES DE FACTOR, *puede ser considerado como un versor-cuadrante cuyo plano es perpendicular al vector*. De esto resulta además que: *el producto y por consecuencia el cociente de dos vectores perpendiculares entre sí, será un tercer vector perpendicular á los dos primeros.*

Otra representación del cuaternio es bajo la forma de suma, pues siendo $\overline{OA}$ el vector unidad y $\overline{OB}$ otro vector cualquiera, bajando por B una perpendicular $\overline{BC}$ á la dirección de $\overline{OA}$ en el plano AOB se obtiene un triángulo AOC, que según los principios de la suma geométrica conduce á la expresión $OB = OC + CB$, siendo $OC = x . \overline{OA}$ y $CB = \gamma\, \overline{OA}$, representando γ un vector perpendicular á dicho plano, conforme á lo arriba expuesto, y así el cuaternio constará de dos partes: *escalar* y *vector*. Pero sin entrar en más detalles, terminaremos expresando la circunstancia característica de las operaciones del cálculo, aplicadas á los cuaternios, pues mientras la suma posee las propiedades que en el cálculo de Grassmann definen esta operación, y si la multiplicación, que se reduce en este sistema á una *suma esférica*, posee las propiedades asociativa y distributiva, no sucediendo lo mismo con la propiedad conmutativa.

Grassmann, además de su *Ausdehnungslehre de 1844*, publicó su Memoria sobre los diferentes géneros de multiplicación, exterior, interior, progresiva, regresiva, planimétrica, estereométrica, definiendo con estos términos las interpretaciones que deben darse á los símbolos en ciertas combinaciones, y en su *Ausdehnungslehre de 1862* trató de referir á su método el de los cuaternios, así la concepción de un vector en el espacio y la adición y sustracción de los vectores son comunes en ambos sistemas, si bien la suma de un escalar con un vector, fundamental en esta teoría no tiene su correspondiente en la obra de Grassmann, y la idea del cociente de dos vectores es peculiar al cálculo de los cuaternios; pues, en la obra de Grassmann los cocientes son operadores que convierten simultáneamente tres vectores dados en otros tres, implicando una representación de la transformación homográfica en el espacio. Además, tratándose de un producto $3 \times 5 = 15$, podemos considerar el 15 deducido de los números 3 y 5 por un procedimiento en que ambos desempeñan iguales funciones, ó bien derivado del número 3 por la operación de quintuplicarlo, es decir, según que los dos sean números, ó que 3 sea un número y 5 una operación. Cuando una línea es considerada como el producto de dos puntos ó un paralelogramo como el producto de sus lados, los dos factores son de igual naturaleza; cuando en una ecuación como $q\alpha = \beta$, en la que α y β son vectores, el cuaternio q expresa la doble operación de girar y variar en extensión, siendo absolutamente distinto en calidad del vector α. Y estos dos modos de concebir corresponden respectivamente á Grassmann y Hamilton.

Los resultados de Grassmann sobre las cantidades extensas y de Hamilton sobre los cuaternios, de Kirkman *(on Plusquaternions and Homoid Products of Sums of* n *Squares)*, de Cauchy sobre los números alternados, de Gauss y Dirichlet sobre los números enteros complejos, de Kummer sobre los números ideales, unidos á las investigaciones de Hankel, en la obra de este matemático ya citada, ofrecen una notable síntesis de la teoría de los números y de las operaciones.

En fin, las diversas obras del matemático Schlegel, intérprete de las ideas de Grassmann, *Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungslehre*, etc. *System der Raumlehre*, etc., el interesante escrito del Dr. Ernest Schröder *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, referente á los trabajos de Boole y de Grassmann, complementan el orden de ideas de que actualmente nos ocupamos.

La teoría de los tornillos *(screws)* del Dr. Ball, constituye un progreso de alguna importancia. Una cantidad geométrica compuesta consistente en un rotador, ó según la denominación de Clifford un rotor, y de un vector con el mismo eje, es de la misma naturaleza que el tornillo, siendo el grado de elevación de éste el cociente de la longitud absoluta del vector por la del rotor, cantidad compuesta que Clifford denominó un *motor*, denominación sugerida por el teorema de estática que expresa la composición de un sistema de fuerzas.

Las múltiples investigaciones del malogrado geómetra inglés W. K. Clifford, sobre las teorías modernas de la ciencia, especialmente de carácter geométrico, reunidas en la obra *Matematical papers*, editada por Mr. R. Tucker (1882), constituyen una importante síntesis de los resultados obtenidos por los más notables inventores matemáticos de la segunda mitad de este siglo, que aquél generalizó y amplificó con sus propios descubrimientos.

Ciñéndonos á lo que tiene relación con el Álgebra, la teoría expuesta por Grasmann en la obra ya citada, cuyos principios excitaran la admiración de Clifford al considerar la influencia que deben ejercer en la Matemática futura, los cuaternios de Hamilton y los descubrimientos de Riemann, Beltrami, Klein sobre el hiper-espacio y las diversas clases de Geometría, constituyen los fundamentos en que se apoyan las disquisiciones de Clifford respecto del Álgebra.

Relacionando la idea de Hamilton con la doctrina del Dr. Ball, se ocupa de la composición de dos fuerzas ó de dos velocidades, cuyas líneas de acción ó cuyos ejes no se encuentran, y llega á la reducción de un sistema de fuerzas á una fuerza P y á un par G cuyo plano es perpendicular á la línea de acción de aquélla ó *eje central*, que el Dr. Ball asimila á un tornillo cuyo eje coincide con el eje central, siendo el grado de elevación el cociente $\frac{G}{P}$ ó la relación del par á la fuerza. Y así como un vector *(translation-velocity)* y un rotor *(rotation-velocity)* son respectivamente una magnitud asociada con una dirección ó con un eje, la nueva cantidad, que es la suma de dos ó más rotores *(twist-velocity or wrench)* es una magnitud asociada con un tornillo *(screw)*, á la que Clifford denomina un *motor*. Pero un cuaternio es la relación de dos vectores, que es la combinación de una razón numérica con una rotación, ó como se dijo, el producto de un tensor y un versor; y la relación de dos rotores es la combinación de una razón numérica con una torsión *(twist)*, y estos resultados conducen á definir la operación que transforma un motor en otro.

Así, habiendo considerado Clifford cada *motor* como la suma de dos rotores que no se encuentran, designándolos por α y β, y por t un *tensor-twist* cuyo eje los encuentra según ángulos rectos, $t\alpha$ es un rotor γ y $t\beta$ otro δ, y suponiendo la existencia de la propiedad distributiva, resulta

$$t(m\alpha+n\beta)=m\gamma+n\delta \quad \text{ó} \quad t=\frac{m\gamma+n\delta}{m\alpha+m\beta},$$

encontrando el eje de t, según ángulos rectos, á los de los motores $m\alpha+n\beta$ y $m\gamma+n\delta$, reduciéndose cada uno de estos ejes al otro por la misma operación que reduce α á γ ó β á δ. En fin, siendo A y B dos motores y ω el símbolo que aplicado á un motor lo cambia en un vector paralelo á su eje y proporcional al rotor parcial del mismo, la expresión $\frac{B}{A}=t+q\,\omega$ á que llega Clifford, indica que *la relación de dos motores se expresa por la suma de dos partes, una de las cuales es un tensor-torsor* (tensor-twist) *y la otra* ω *está multiplicada por un cuaternio*, y cuando los motores son $\alpha+\omega\beta$ y $\gamma+\omega\delta$, haciendo $\frac{\gamma}{\alpha}=q$, obtiene

$$q(\alpha+\omega\beta)=\gamma+q\,\omega\beta=\gamma+\omega\,q\,\beta,$$

y definitivamente,

$$(q+\omega r)(\alpha+\omega\beta)=\gamma+\omega\delta \quad \text{ó} \quad q+\omega r=\frac{\gamma+\omega\delta}{\alpha+\omega\beta},$$

expresión que por no introducir una nueva palabra llama *bi-cuaternio*, por más que Hamilton designó con este nombre los cuaternios de coeficientes complejos.

Pero Clifford, metafísico á la par que matemático, era ante todo geómetra inclinado al método simbólico de Cayley, hondamente preocupado por la doctrina de Riemann sobre el hiper-espacio, de influencia decisiva en casi todas sus investigaciones. El sistema geométrico fundado por Lobatchewsky, independientemente del postulado de Euclides, en que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor que dos rectos, la noción del espacio de curvatura constante positiva, que radica en la teoría de las superficies de Gauss, el espacio de curvatura constante negativa en que se funda la geometría pseudo-esférica del matemático italiano Beltrami, denominados respectivamente por el geómetra Klein espacios *elíptico* é *hiperbólico*, así como el de tres dimensiones en esta clasificación es el espacio *parabólico*, los cuales originan las tres especies de geometría *elíptica, hiperbólica* y *parabólica*, son para Clifford la amplia base sobre que se desarrollan sus propias investigaciones sobre las teorías de Hamilton y de Grasmann.

La noción de lo *absoluto* que en la teoría de *las distancias* hace consistir Cayley en dos puntos imaginarios fijos y la recta que los contiene, situados á una distancia infinita (Phil. trans. 1860 *A sixt Memoir upon Quantics)*, si se trata de la geometría del plano, sustituyendo á aquéllos la circunferencia imaginaria en que la superficie esférica corta al plano, si se trata de la geometría de la superficie esférica, conduce á caracterizar las tres especies de geometría arriba enunciadas, conforme lo hace Clifford, según que la forma cuadrática *(quadric)* que sustituye Cayley al círculo imaginario á distancia infinita es *imaginaria*, ó una forma cuadrática real umbilical, ó una cuadrática imaginaria que degenera en una sección cónica al perder una de sus dimensiones; en fin, la consideración de dos *puntos conjugados* ó distantes entre sí en un cuadrante, y en general la de dos *líneas polares* entre sí, que permite reducir una línea á otra mediante una rotación alrededor de dos ejes polares, desarrollada también en la Memoria de Cayley, constituyen el fundamento sobre que expone Clifford sus generalizaciones acerca de la teoría de los cuaternios. En su *Preliminary sketch of biquaternions* una velocidad de torsión *(twist-velocity)* de un cuerpo rígido, puede considerarse respecto á dos ejes, porque una traslación, según un eje, es lo mismo que una rotación alrededor del eje polar y viceversa, de manera que una velocidad de torsión se compone de dos velocidades de rotación *(rotation-velocities)* alrededor de dos ejes polares θ y Φ, y el movimiento puede considerarse, ya como una velocidad de

torsión alrededor de un tornillo *(screw)* cuyo grado de elevación es $\frac{\Phi}{\theta}$ y cuyo eje es el primero, ya alrededor de un tornillo cuyo grado de elevación *(pitch)* es $\frac{\theta}{\Phi}$ y cuyo eje es el polar. Y si un cuerpo rígido adquiere simultáneamente una rotación alrededor de un eje é igual traslación según el mismo, todos sus puntos describirán rectas paralelas, siendo dicho movimiento al mismo tiempo una rotación alrededor de una de estas líneas, combinada con una traslación igual respecto á la misma. Pasando por alto las importantes consideraciones de Clifford respecto á los motores representados en el espacio elíptico, á la teoría de los tornillos en el espacio de curvatura constante *(On the theory of screws*, etc.), al movimiento de un cuerpo en un espacio elíptico *(Motion of a solid*, etc.), llegamos al desenvolvimiento de su doctrina sobre el Algebra extensiva. En su Memoria «*Applications of Grassmann's extensive Algebra*» se propone determinar el lugar de los cuaternios y lo que él llamó bi-cuaternios en este sistema, explanando las leyes de esta Algebra, y generalizarla por la aplicación á cualquier número de dimensiones. Observando que el *Ausdehnungslehre* está fundado en el caso de la multiplicación cuyos factores son números y que los cuaternios en el de significar uno de los factores un número y el otro una operación, y opinando que cuaternios corresponden no á los «*Elementargrösse*» del *Ausdehnungslehre*, sino á sus productos binarios, considera los símbolos i, j, k de la teoría de los cuaternios como versores rectangulares actuando sobre las cantidades $i_0 i_1$, $i_0 i_2$, $i_0 i_3$, que son unidades de longitud medidas sobre los ejes en direcciones positivas, es decir, cantidades que tienen magnitud, dirección y posición *(rotors)*, distintas de los vectores *(vectors)* que no tienen posición, cuya naturaleza es respectivamente la de las velocidades de rotación ó traslación. Y si en la geometría elíptica ó hiperbólica de tres dimensiones, los cuatro puntos i_0, i_1, i_2, i_3 representan los vértices de un tetraedro conjugado consigo mismo respecto al absoluto, de manera que la distancia de cada dos sea un *cuadrante*, el producto de cuatro puntos $\alpha\beta\gamma\delta$ contendrá tres clases de términos, á saber: de cuarto orden, de segundo orden y de orden cero, pudiéndose desarrollar según ocho términos como sigue:

$$\alpha\beta\gamma\delta = a + \Sigma b_{rs}\, i_r\, i_s + c\, i_0\, i_1\, i_2\, i_3,$$

siendo r y s diferentes, y todo producto de un número *par* de factores lineales, tendrá la misma forma, que es el bicuaternio de Clifford ó la forma $q + \omega r$, siendo q y r cuaternios, pues haciendo $\omega = i_0\, i_1\, i_2\, i_3$, tenemos que

$$i = i_2\, i_3,\; j = i_3\, i_1,\; k = i_1\, i_2,$$

$$\omega i = i\omega = i_1\, i_0,\; \omega j = j\omega = i_2\, i_0,\; \omega k = k\omega = i_3\, i_0,\; \omega^2 = 1,$$

y el producto de un número par de factores mayor que dos, es una función lineal de $1, i, j, k, \omega, \omega i, \omega j, \omega k$, produciendo la multiplicación por ω el efecto de cambiar un sistema en un sistema polar con respecto al absoluto.

Al proponerse Clifford el clasificar las álgebras geométricas, distingue las de un número *par* de las de un número *impar* de dimensiones. Y como la geometría de un espacio elíptico de n dimensiones es lo mismo que la geometría de los puntos á una distancia infinita en un espacio homoloidal *(flat)* ó parabólico de $n+1$, la teoría de los *puntos* ó *rotores* en el primero equivale á la de los vectores y sus productos en el segundo. Así, conduciendo el álgebra de cuatro unidades á los bicuaternios, se reduce á la de puntos y rotores en el espacio elíptico de tres dimensiones ó á la de los vectores y sus productos en un espacio homoloidal de cuatro dimensiones, siendo además análogas al Álgebra de cuatro dimensiones, todas las de un número par de éstas.

Esto expuesto, distingue Clifford la multiplicación *polar* en la que el signo del producto cambia con el orden de dos factores adyacentes, de la ordinaria ó conmutativa que llama *escalar (scalar)*, correspondientes á la *exterior* é *interior* de Grassmann. Indica además que las cantidades extensivas de este geómetra ó números alternados de Hankel permiten representar la geometría proyectiva de n dimensiones; pues, por ejemplo, mientras

en la geometría plana $a = a_1\, i_1 + a_2\, i_2 + a_3\, i_3$ representa un punto centro de inercia de las masas a_1, a_2, a_3 colocadas respectivamente en los puntos fundamentales, y (si los productos $i_2\, i_3$, $i_3\, i_1$, $i_1\, i_2$ significan rectas que unen éstos entre sí), el producto

$$a\, b = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\, i_2\, i_3 + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)\, i_3\, i_2 + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, i_1\, i_2$$

representa la recta que une los puntos a, b, el producto ternario

$$a\, b\, c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\; i_1\, i_2\, i_3$$

es proporcional al área del triángulo $a\, b\, c$ que se anula cuando los tres puntos se hallan en una recta. Representando las unidades alternadas tres puntos en un plano, las unidades en el sistema de los cuaternios representan tres vectores perpendiculares entre sí, siendo, como ya se sabe, los cuadrados de estas unidades -1, en vez de cero. Y, en fin, después de examinar Clifford las consecuencias de aplicar á un sistema de n números alternados la última condición del sistema de Hamilton, haciendo $\omega = i_1\, i_2 \ldots\ldots i_n$ deduce que $\omega^2 = \pm 1$ según que $\frac{1}{2} n(n+1)$ es par ó impar y que $i_1 = \pm\omega i_1$ según que n es impar ó par, llegando á distinguir cuatro clases de álgebras geométricas, según que:

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\text{o}}\; n \equiv 0 \text{ (mód 4)},\; \omega^2 = -1, \\ 2.^{\text{o}}\; n \equiv 1 \text{ (mód 4)},\; \omega^2 = -1, \\ 3.^{\text{o}}\; n \equiv 2 \text{ (mód 4)},\; \omega^2 = -1, \\ 4.^{\text{o}}\; n \equiv 3 \text{ (mód 4)},\; \omega^2 = -1, \end{array}\right\}\; \omega i = i\omega,$$

caracterizadas por el signo de ω^2 y la naturaleza de la multiplicación ωi.

§ 4.º—Generación del concepto de cualidad en la aplicación del Álgebra á la Geometría, ó en general, á la resolución de problemas de orden concreto.

Las correspondencias que se habían notado en la geometría cartesiana entre la variación de signos y la disposición de las figuras fueron el punto de partida de un sistema de investigaciones concernientes, más bien que á la ciencia algébrica considerada en sí, á la correlación que existe entre los principios de la misma y el modo de existir de las entidades del orden concreto á que éstos se aplican.

Carnot, en su *Géométrie de Position*, se propuso explicar lo negativo y lo imaginario, considerados hasta su época como seres de razón sin existencia real ú objetiva, y buscó la solución del problema examinando en los dominios de la geometría los modos de ser de las cantidades afectadas de los signos — y $\sqrt{-1}$, basando su nueva doctrina en lo que denominó *correlaciones directa*, *inversa* y *compleja*.

Con el fin de evitar el empleo de las cantidades negativas aisladas, considera cada cantidad como diferencia de otras dos, y establece el *orden directo*, es decir, aquél en que una cantidad CD, por ejemplo, proviene de la diferencia de otras dos BC y BD cuando $BC > BD$ y el *orden inverso*, ó aquel en que, por una variación sucesiva de estas cantidades, la que era mayor llega á hacerse menor, verificándose que $BD > BC$.

La teoría de Carnot se funda, pues, en el examen de lo que llama *sistemas correlativos*, que pueden considerarse como *los diferentes estados de un sistema variable que se transforma por grados insensibles*.

Si se trata de la figura formada por un triángulo ABC y la perpendicular AD bajada desde el vértice A á la base, de las expresiones

$$AB^2 = BD^2 + AD^2, \quad AC^2 = CD^2 + AD^2$$

se deduce que: $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$, siendo $BD = BC - CD$. Y reemplazando por BD^2 su valor deducido de esta última expresión, resulta que

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 - 2\,BC\,.\,CD.$$

Este razonamiento será aplicable, sin modificación alguna mientras D se halle entre B y C; pero si ahora suponemos que por una variación continua del punto C éste llega á situarse

entre B y D, entonces no será $CD = BC - BD$ como anteriormente, sino $CD = BD - BC$, y CD habrá pasado á ser inversa, obteniéndose para este caso que

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 + 2\,BC.CD,$$

que difiere de la arriba obtenida en el signo del término que contiene la cantidad CD, que se halla ahora en correlación inversa.

Expuestas estas breves indicaciones, nos bastará enunciar el principio general de la teoría de Carnot, que es el siguiente: Para hacer las fórmulas de un sistema cualquiera de cantidades inmediatamente aplicable á otro sistema que le sea correlativo, basta: 1.º Establecer la correlación de los valores absolutos, sustituyendo para cada una de las que pertenecen al sistema primitivo, tomado como término de comparación, el valor absoluto que le corresponde en el otro sistema. 2.º Establecer la correlación de los signos, cambiando en las fórmulas el signo de cada uno de los valores cuyas cantidades se hallan en sentido inverso en el segundo sistema, y conservando á las demás el signo de sus correspondientes en el sistema primitivo.

Pero además de la correlación directa é inversa existe lo que Carnot llama *correlación compleja*, es decir, aquella en que los cuadrados ú otras funciones de dos cantidades se hallen en correlación. Esto ocurre respecto al sistema a, x, y y al a', x', y', á que se aplican las ecuaciones

$$a^2 + x^2 - y^2 = 0, \quad a^2 - x'^2 + y'^2 = 0,$$

pues no existiendo correlación directa ni inversa entre dichas cantidades, por no poderse reducir las ecuaciones á la misma forma mediante un cambio de signo, hay correlación inversa entre los cuadrados de y é y', es decir, del sistema a^2, x^2, y^2 con el a^2, x'^2, y'^2. Y aunque las dos ecuaciones propuestas no puedan reducirse á la misma forma cambiando los signos de x', y', puede esto conseguirse sustituyendo $y'\sqrt{-1}$ por y'.

Poncelet, el continuador de este orden de ideas, iniciado por Carnot, parte en sus investigaciones (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II) de la ley de los signos de posición en la

Geometría, que reconoce hallarse expresada por los órdenes de correlaciones, y juzga necesario el admitir el *principio de continuidad* para explicar las correspondencias entre la Geometría y el Álgebra, cuyo fin es dar significado á los símbolos de esta última y hacerlos desaparecer de la categoría de *seres de razón*.

Fundándose en la variación continua de los sistemas de cantidades, examina los intervalos para los que ciertas magnitudes geométricas son inconstructibles, ó cesando de existir son puramente ideales, y en este caso cree permitido considerarlas como magnitudes indeterminadas que no dejan de existir en las ecuaciones ó relaciones métricas correspondientes. Distingue el *razonamiento explícito* que sólo se aplica á magnitudes absolutas y es el empleado por los geómetras de la antigüedad, que fundaran la Geometría sintética, del *razonamiento implícito* propio del análisis cartesiano; por el primero, las ecuaciones establecidas sólo se refieren á un estado particular del sistema, y la serie de razonamientos debe volver á establecerse de nuevo para otro estado distinto; por el segundo, las expresiones $a-b$, $\sqrt{a-b}$, etc., se consideran como verdaderas cantidades, ya sea a mayor ó menor que b; y siendo las ecuaciones que á ellas se refieren puramente algebraicas ó literales, nada podrá, en la serie de sus transformaciones sucesivas, indicar el modo de existencia para cada estado de las magnitudes; pues lo signos que las representan les hacen adquirir una indeterminación que no tienen realmente, y obligan á razonar de una manera implícita sobre las combinaciones abstractas del cálculo, sin permitir al que así procede, percibir la naturaleza de las expresiones algebraicas resultantes de dichas combinaciones, ni reconocer si ha dejado de seguir la marcha del razonamiento explícito; pero el resultado final de este razonamiento, no conservando huellas de las transformaciones que han sufrido las relaciones primitivamente dadas, y siendo la indicación de las nuevas relaciones que existen entre las magnitudes indeterminadas del sistema, ocurrirá que será preciso considerar estas relaciones como pertenecientes y aplicables á todos los estados posibles del sistema.

Esta extensión indefinida de los resultados del razonamiento,

que conducen á las consideraciones metafísicas de las cantidades negativas, infinitas, imaginarias, observa Poncelet que no difiere en el fondo del modo de proceder de los geómetras de la antigüedad, cuando empleando el método analítico admitían *a priori* como cierta y existente tal ó cual proposición que se trataba de probar ó descubrir, y que resultaba justificada cuando la conclusión de la serie de sus rigurosos razonamientos no ofrecía nada de absurdo, de contradictorio ó de imposible.

Admitiendo Poncelet el *principio de continuidad*, observa que éste supone en la figura, de cuya consideración se parte y á la cual las demás correlativas se refieren, todos los objetos y magnitudes reales y geométricos; y si una relación dada se refiere, ya á un estado ideal de dicha figura, ó indica operaciones que no son absolutas, esto proviene de haberse extendido á tal estado ó modo de ser, invocando el principio de continuidad ó empleando el razonamiento implícito, teniendo la relación de que se trata su origen en un estado anterior, donde todo era real y absoluto. Además, el principio de continuidad en su generalidad sólo tiene un carácter relativo, pues estableciendo la permanencia de las relaciones, nada establece sobre la naturaleza y existencia de los objetos. Y aun cuando algunos de éstos dejen de existir, dichas relaciones no llegan á ser absurdas ni desprovistas de significado, pues sirven para caracterizar y determinar la verdadera naturaleza del sistema á que se aplican por la incompatibilidad de dependencias que expresan entre los objetos que permanecen reales y los que han perdido su existencia geométrica individual, indicarán la no existencia de los objetos, y por su incompatibilidad servirán para caracterizar y definir el verdadero estado de la figura.

En Álgebra, la no existencia se expresa casi siempre con los mismos signos explícitos que la magnitud absoluta y real, porque

$$a-b,\ \frac{a-b}{c-d},\ \sqrt{a-b},$$

pueden indicar indistintamente magnitudes absolutas, ideales ó imaginarias. En Geometría, cuando se trata de relaciones puramente métricas, por representarse las magnitudes mediante letras, signos ó caracteres abstractos, puede hacerse persistir mentalmente la existencia de los objetos que cesan de ser construtibles geométricamente. Y así como hay nombres para expresar los diversos modos de la existencia, debe haber para expresar la no existencia, y en efecto, cuando se dice que *dos rectas paralelas se encuentran en el infinito* se da idealmente una existencia indefinida á su punto de intersección, y se establece la idea de continuidad en el movimiento posible de este punto; lo mismo puede decirse de la proposición siguiente: *Todos los puntos del espacio en el infinito deben considerarse distribuídos sobre una y única superficie plana situada en el infinito.*

Por último, pasando á cuestiones de otro género, si se considera el sistema de una recta y una curva situadas en un mismo plano, que supondremos se cortan en diversos puntos, y la recta se desvía de su posición primitiva por un movimiento continuo, podrá suceder, que llegando á pasar su punto de intersección al infinito, la recta llegue á ser *paralela* á la rama correspondiente de la curva; también podrá suceder que dos puntos de intersección, aproximándose continuamente, acaben por confundirse cesando de ser distintos, y aunque su distancia mutua haya perdido su existencia, para seguir atribuyéndole una existencia ideal se considera á la recta que los une como un *elemento infinitamente pequeño*, y, en fin, si la recta continúa separándose, los dos puntos, después de haberse aproximado á una distancia infinitamente pequeña, pierden su existencia geométrica y conservándoles una existencia, por lo menos de signo, se dice que *estos dos puntos han pasado á ser imaginarios.*

Estas importantes consideraciones desenvueltas ampliamente por el ilustre geómetra, producen como resultado las teorías de las *curvas suplementarias* y de las *cuerdas ideales*, cuya exposición pertenece de lleno á la Geometría.

Cournot en su obra *De l'origine et del limites de la correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie* hace un profundo análisis, no sólo de las relaciones que existen entre ambas ciencias, sino de los conceptos que caracterizan á la primera, fijando su modo

de ser en el dominio de la Matemática. Conforme con los puntos de vista de Poinsot, halla en el entendimiento al lado de la idea de número las no menos generales ni menos necesarias de combinación y de orden, como se revela en todos los idiomas que presentan la serie de los números *ordinales*, paralela á la de los números *cardinales*. Establecidos los conceptos primordiales de la ciencia, entre los que distingue el de *orden periódico* que surge del enlace del número y el orden, desciende á la esfera de las aplicaciones, á la medida de las magnitudes, á la correspondencia entre nuestros conceptos y los fenómenos que nos sugiere la idea de la *magnitud continua*, de la noción abstracta de número pasa á la concreta de *medida* que se refiere á la de magnitud y á la *unidad* tomada en acepción distinta á la que tiene en la Aritmética pura. Examina las inducciones por las que se extiende el cálculo á las magnitudes medidas por los números fraccionarios é irracionales, concluyendo que el problema de fijar las relaciones entre los fenómenos naturales ha conducido á inventar un sistema de signos generales que, siendo originariamente indicaciones de operaciones numéricas, se han incorporado á la expresión de las magnitudes determinadas y aisladas. A la cuestión de la elección de unidad arbitraria, sigue la cuestión de elección de origen, cuando se trata de la *situación* en el espacio ó en el tiempo; y al examinar las cantidades como positivas ó negativas, Cournot advierte la perfecta simetría entre la adición y la sustracción aplicadas á este género de cantidades, además la teoría de las ecuaciones, y, en general, todas las teorías algebraicas perderían su regularidad, su simetría y su generalidad, si no se tuvieran en cuenta los valores fraccionarios, inconmensurables ó negativos, y, en fin, los imaginarios, último grado á que Cournot llega solamente por una especie de inducción fundada en la generalidad del Álgebra.

Pero el Álgebra no es sólo una ciencia con su constitución propia, sino que además es un lenguaje; y al modo de traducir las condiciones de los problemas por medio de este lenguaje dedica la mayor parte de su obra, haciendo ver cómo la correspondencia no es siempre perfecta puesto que las cuestiones asociadas por analogías naturales se ven frecuentemente disociadas en las ecuaciones que las traducen. Estas asociaciones y disociaciones que en los problemas geométricos corresponden á las ramas de una misma curva ó á curvas distintas, le conduce á considerar el sistema cartesiano que substituye un método uniforme de combinación y deducción fundado en el mecanismo del cálculo á las construcciones variadas é ingeniosas que no procediendo de reglas fijas, sólo pueden ser obtenidas por una especie de adivinación, concluyendo que en la teoría de las funciones debe buscarse la exacta definición de los lazos de afinidad entre los diversos problemas; y distinguiendo en la teoría de las magnitudes ésta como una rama independiente de la Aritmética pura y de las propiedades de los números, siendo otra rama la logística que trata de las propiedades de las magnitudes en cuanto proceden de la teoría de los números ó que extiende á las magnitudes continuas ciertas nociones de la Aritmética pura, ciertas propiedades fundamentales de los números, dando ulteriormente origen al Álgebra propiamente dicha.

En la obra de M. Duhamel *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* que principia por una interesante exposición del análisis y la síntesis en la demostración de las proposiciones y en la resolución de los problemas, se sigue de una manera rigurosa la sucesiva generalización de los conceptos de la cantidad y de las operaciones, exigida para introducir en los dominios de la ciencia los modos de ser de aquélla como fraccionaria, inconmensurable, negativa é imaginaria, sin salir este sistema de los dominios de lo abstracto, es decir, sin dejar de expresar un sistema de correlaciones independientes de las aplicaciones.

Muy diferente de la obra del Sr. Duhamel, la obra del profesor Hoüel *Théorie élémentaire des quantités complexes*, ofrece sistematizados los descubrimientos más importantes de este siglo, que enlazan el concepto de número con el de la magnitud extensa, y que pasando de la representación geómetrica de las cantidades según las teorías de Argand, Cauchy y Hamilton hasta las eminentemente generales de Grassmann y Hankel en que se distin-

gue la materia ú objeto, de la forma de las operaciones, constituye un cuerpo de doctrina conforme al carácter armónico de la Matemática actual, muy diferente del carácter restrictivo con que en los tiempos de Laplace se admitían ciertos conceptos que hoy se han desenvuelto para darle nueva forma y hasta nueva naturaleza.

El matemático francés Vallés, tan conocido por su obra ya citada sobre la ciencia del cálculo, amplifica sus primeras ideas en su nueva obra *Des formes imaginaires en Algèbre*, principiando por analizar estas formas en el dominio abstracto, que se nos ofrecen como consecuencias de operaciones algebraicas practicadas sobre expresiones reales, poseyendo, por consiguiente, el verdadero carácter de seres algebraicos, y como la manifestación de lo imaginario es la consecuencia de una contradicción explícita ó implícita introducida, ya en los datos de una cuestión, ya en el curso del razonamiento, la imposibilidad y la contradicción deben ser equivalentes, hallando además en lo imaginario no sólo el aviso de que la cuestión es imposible en los términos según los cuales ha sido expuesta, ó con los medios empleados para resolverla, sino que por la forma del mismo, la indicación precisa de la especie de contradicción. Así, por ejemplo, siempre que para satisfacer á una cuestión sea preciso elevar el resultado al cuadrado, una solución de la forma $a\sqrt{-1}$ es comprensible, pudiéndose decir que lo imaginario $\sqrt{-1}$ es lo negativo de los cuadrados, transportado sobre sus raíces.

La manifestación de lo imaginario en la resolución de las ecuaciones, debida ya al planteo del problema, ya á los procedimientos empleados para llegar á la solución, ya á alguna imposibilidad exigida en las condiciones. El poder del Álgebra de crear nuevos tipos de relación, para que formulemos á nuestra vez, según las leyes naturales de los objetos sometidos á nuestras especulaciones y según el grado de nuestras inteligencias, las diversas aplicaciones que de ellos pueden hacerse, la relación entre nuestra inteligencia, que no siempre se da cuenta de las incompatibilidades latentes en una cuestión y el Álgebra que corresponde por medio de una operación imposible, nuestra reacción sobre cierta imposibilidad que podemos hacer desaparecer, suprimiendo los obstáculos que su presencia nos revela. Estas cuestiones á que D'Alembert, Carnot, Poncelet y Poinsot principalmente han consagrado sus esfuerzos, son tratadas en la obra del Sr. Vallés como preliminar á la teoría de lo imaginario en el orden concreto, conforme á lo que expuso en sus *Études philosophiques sur la science du calcul.*

§ V.—Generación de los conceptos de combinación y de orden.

Las ideas de combinación y de orden son las que más caracterizan al Álgebra y permiten que se distinga de las demás ramas de la Matemática, confundidas algunas veces con ella bajo ciertos puntos de vista. Los principios combinatorios que producen toda la trama del cálculo, prescindiendo de la naturaleza de los objetos á que se refieren sus símbolos, también son fundamentales en esta parte de la teoría de las ecuaciones, en que relegando á lugar secundario la idea de cantidad, se busca la multiplicidad de maneras de ser de una función, según las varias maneras de combinarse los elementos que la constituyen, orden de ideas que han explorado principalmente Vandermonde, Lagrange, Abel y Galois. Pero además de la variedad que cabe en la existencia de una función, según la distribución de sus elementos y la relación de coexistencia entre el estado de aquélla al anularse y éstos implícitamente contenidos en la misma combinados con ciertas constantes ó parámetros y enlazados por las operaciones del cálculo, debemos considerar otra coexistencia de ciertos estados de determinadas funciones ó formas que conservan entre sí una relación fija cuando las variables sufren transformaciones lineales, cuyo estudio hoy se incluye en el *Álgebra de las formas.* Lo cual exige que el modo de generación de los conceptos que constituyen esta rama del Análisis y especialmente del Álgebra, se trate en la sección de ésta que también se ocupa de la teoría algebraica de las ecuaciones.

Generación de los conceptos que constituyen la teoría de las ecuaciones.—Ya desde la época de los griegos, el concepto de combinación aparece en las propiedades de los números figurados y durante la Edad Media predomina en las propiedades que sirven para clasificarlos. En la época moderna Newton, en su célebre binomio, deja consignada una de las más brillantes y fundamentales leyes de la Combinatoria. Cramer en su *Introduction á l'analyse des lignes courbes,* su regla para determinar los valores de las incógnitas en los sistemas de ecuaciones, fundada en la teoría de la combinaciones y permutaciones, y germen de la teoría de las determinantes que más tarde elevaran á tan alto grado Gauss y principalmente Jacobi. Bezout y Euler, casi simultáneamente, hacen progresar la teoría de la eliminación, de carácter combinatorio. Vandermonde, Waring y Lagrange, á principios de este siglo, desenvuelven la teoría de las funciones simétricas. Cauchy, más tarde, se ocupa de las funciones alternadas, y forma una importante síntesis de la teoría de las sustituciones, que le debe entre otros, el descubrimiento de la transitividad, así como Jacobi, según ya hemos manifestado, establece como cuerpo de doctrina de considerable importancia la teoría de las determinantes, y especialmente en ella la de las determinantes funcionales.

Otra serie de descubrimientos que llega á enlazarse con los anteriores para constituir con su trabazón mutua la síntesis de la ciencia, es la que podemos considerar principiando en el siglo XVIII, y que está constituída por las sucesivas tentativas de los analistas, encaminadas á resolver las ecuaciones, como en el siglo XV se resolvieran las de tercero y cuarto grado, y el método de los coeficientes indeterminados, debido á Descartes, es uno de los medios para este fin más usados.

El P. Leseur, en su *Mémoire sur le calcul intégral,* siguiendo este procedimiento, llega á descomponer una ecuación de séptimo grado en una de quinto y otra de segundo, cuya resolución depende de otra de vigésimoprimero, una de décimo descompuesta en dos de octavo y de segundo grado, conducen á otra del grado noventa y uno, y así sucesivamente, de modo que la dificultad del problema acrece.

Fontaine, en las *Mémoires de l'Académie* de 1741 presenta un método original para la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, que pretende hacer extensivo á las de grados superiores, consistente en hacer la enumeración de todas las formas que pueden adquirir las de los diferentes grados, según todas las combinaciones de signos y la existencia ó ausencia de diferentes términos, desarrollando cada una de ellas en todos los factores iguales y desiguales, reales ó imaginarios que puedan producirlas, y halla para las de tercer grado dieciocho formas, para las de quinto novecientas trece y las de sexto habrían exigido un tomo. Si, pues, dada una ecuación se pudiera reconocer la combinación de factores que le convienen, existiendo tablas de todas las formas y de dichos factores correspondientes, cree este geómetra que se llegaría á la resolución completa de las ecuaciones.

Euler, en esta serie de tentativas infructuosas, aspira á descomponer las ecuaciones de grado par; pero la ecuación de los grados octavo, dieciséis, treinta y dos, etc., conducen á ecuaciones de grados que llegan á ser enormemente elevados, y desistiendo de esta tentativa intenta un nuevo procedimiento sugerido por la observación de cómo se hallan expresadas las raíces en el segundo y tercer grado, é induce que en una de grado m la raíz debiera hallarse constituída por m—1 radicales de grado m; pero las dificultades de la eliminación al aplicar este artificio á la ecuación de quinto grado, le obligan á desistir de su propósito.

No citaremos las tentativas de Bezout, Vandermonde y Waring que conducen á resultados también infructuosos; pero sí nos hallamos en el caso de citar el interesante procedimiento de Lagrange que, aunque deja sin resolver el problema, tiene gran importancia en el organismo del Álgebra, pues se funda en una de las ideas capitales de la teoría de las ecuaciones algébricas, y en efecto, este método estriba en la formación de la ecuación cuyas raíces son funciones racionales no simétricas de las de otra ecuación dada. Así, pues, para la ecuación de tercer grado forma los valores de una función lineal de las tres raíces que pueden obtenerse por todas las permutaciones de ésta, y determina la ecuación de que depende, fundándose en la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación y las funciones

simétricas de sus raíces; consigue también, empleando análogo procedimiento, resolver la ecuación de cuarto grado; pero este éxito, debido á la circunstancia de que en la de tercer grado el cubo de la función sólo puede adquirir dos valores distintos por las sustituciones de las raíces, dependiendo la solución de una ecuación de segundo grado, y en la de cuarto, de que *pueden formarse funciones de cuatro variables que sólo tienen tres valores*, no tiene lugar al tratarse de grados superiores, y así la ecuación de que depende la función

$$t = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1}$$

en la que α expresa una de las raíces imaginarias de la ecuación $\alpha^n = 1$ es del grado $1 . 2 \ldots\ldots n$ que se reduce á la de otra de grado $n - 1$ cuyos coeficientes dependen de una de grado $1 . 2 \ldots\ldots (n-2)$ cuando p es un número primo; y cuando es compuesto $m = np$, llega á reducir la cuestión á la resolución de n ecuaciones de grado p, con análogas dificultades.

Después de esta primera fase de la cuestión relativa á la resolución algébrica de las ecuaciones, que termina con la duda de Lagrange, acerca de poder llegar á resolverse con éxito, sucede otra de más positivos resultados, que comienza en las investigaciones relativas á las funciones semejantes y en la resolución negativa que da Abel al problema, demostrando la imposibilidad de la resolución general del problema.

Lagrange en las *Mémoires de l'Académie de Berlin de 1770 y 1771* demostró que cuando se halla determinado el valor de una función racional de las raíces de una ecuación, se puede obtener el valor de otra función racional cualquiera de las mismas, y Abel descubrió una clase de ecuaciones resolubles algebraicamente, pues observando en las ecuaciones á que conduce el problema de la división del círculo, la propiedad de que cada una de sus raíces puede expresarse en función racional de cualquiera de las demás, dedujo que si dos raíces de una ecuación irreducible se hallan ligadas entre sí de modo que la una se pueda expresar en función racional de la otra, puede reducirse su resolución á la de otras ecuaciones de grados menores. Así, pues, cuando n raíces pueden expresarse en función de una de ellas por la serie de valores

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots\ \theta^{n-1} x_1 \quad \text{siendo } \theta^n x_1 = x_1$$

y μ el grado de la ecuación irreducible, que es igual á mn, las μ raíces se distribuyen en m ciclos de n, y su resolución se reduce á la de m ecuaciones de grado n, que contienen respectivamente las de cada ciclo, dependiendo los coeficientes de cada una, de una ecuación de grado m que determina dicho geómetra, fundado en las investigaciones de Lagrange, llegando finalmente, á resolver cada ecuación de grado n en función racional de una expresión radical y de las cantidades conocidas.

En su Memoria *Sur la résolution algébrique des équations*, reduce la resolución de este problema á los dos siguientes: 1.º, hallar todas las ecuaciones de un grado determinado cualquiera que sean resolubles algebraicamente; 2.º, juzgar si una ecuación dada es resoluble algebraicamente ó no.

Después de definir lo que se entiende por satisfacer algebraicamente una ecuación algebraica y distinguir las ecuaciones, que son resolubles algebraicamente de las que pueden satisfacerse algebraicamente, la resolución del problema le conduce á resolver otro, á saber: *Hallar la forma más general de una expresión algebraica*, y la primera condición á que ésta deba sujetarse es la de satisfacer á una ecuación algebraica; pero verificada esta condición, para saber si puede particularizarse de manera que satisfaga á la ecuación propuesta, es preciso buscar todas las ecuaciones á las que puede satisfacer, y en seguida comparar éstas con aquélla, lo cual conduce al nuevo problema: *Hallar todas las ecuaciones posibles á que una función algebraica puede satisfacer.* Pero una función algebraica puede satisfacer á una infinidad de ecuaciones diferentes, y cuando la propuesta queda satisfecha podrá ocurrir que ésta sea la de menor grado ó que haya otra de grado menor y la más sencilla de la misma forma á que dicha función pueda satisfacer, lo que conduce: 1.º, *á juzgar si una ecuación propuesta es reducible ó no*; 2.º, *á juzgar si una ecuación irreducible puede ó no ser satisfecha algebraicamente.* Considerando

desde luego el segundo problema, cómo al ser irreducible la ecuación propuesta será la más simple á la que la expresión algebraica obtenida puede satisfacer; para asegurarse de si puede ser satisfecha ó no, será preciso buscar la ecuación de menor grado á que una expresión algebraica puede satisfacer, y en seguida compararla con la propuesta. Y el problema que es preciso resolver será el siguiente: *Hallar la ecuación menos elevada á la que una función algebraica puede satisfacer.*

Pero para evitar las complicaciones á que conduce este procedimiento, encuentra preferible: *Hallar la expresión algebraica más general que pueda satisfacer á una ecuación de grado dado.* Y aunque no llega á la resolución completa de este problema, llega á importantes teoremas que le permiten formular una regla general para reconocer si una ecuación propuesta es resoluble ó no.

En fin, *la determinación de la forma general de una expresión algebraica, la determinación de la ecuación menos elevada á que pueda satisfacer una expresión algebraica dada y la forma de la expresión algebraica que puede satisfacer á una ecuación irreducible de grado dado* son las cuestiones que sucesivamente resuelve Abel en su interesante Memoria (Oeuvr. comp. t. II, XVIII).

Kronecker, investigando acerca de estas conclusiones de Abel, observa que si al enunciado del problema: *Hallar la expresión algebraica más general que pueda satisfacer á una ecuación algebraica*, se añade lo que es necesario para hacer la cuestión determinada, precisando la manera de depender la expresión buscada de los coeficientes de la ecuación, se tendrá la proposición siguiente: *Hallar la función más general de cantidades dadas cualesquiera* A, B, C,.... *que satisfaga á una ecuación de grado dado, cuyos coeficientes son funciones racionales de estas cantidades.* Pero como, según este matemático, se debe suponer la ecuación irreducible relativamente á $A, B, C, \ldots$, es decir, que siendo $A, B, C, \ldots$ cualesquiera, la ecuación no debe poderse descomponer en factores de un grado inferior, cuyos coeficientes sean funciones racionales de $A, B, C, \ldots$, el problema anterior puede enunciarse así: *Dado un número entero* n, *hallar la función alge-*

braica más general de A, B, C *tal, que entre las expresiones que de ella se deducen atribuyendo á los radicales sus diversos valores, haya* n, *cuyas funciones simétricas sean racionales en* A, B, C,.....

En el caso de ser n (que es el grado de la ecuación cuyas raíces son las expresiones de que se acaba de tratar) primo, Abel, en la Memoria citada, dedujo las dos formas siguientes para dichas expresiones buscadas:

$$p_0+s^{\frac{1}{n}}+\dots\dots+f_{n-1}(s)s^{\frac{n-1}{n}} \quad [1] \text{ , } p_0+R_1^{\frac{1}{n}}+\dots\dots+R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, \quad [2]$$

y Kronecker observando que son demasiado generales, es decir, que contienen funciones algebraicas que no corresponden á la cuestión, y que entre las contenidas en la [2] las que satisfacen al problema deben tener además de la propiedad de ser las funciones simétricas de R_1, R_2,..... racionales en A, B, C,....., la de que las funciones *cíclicas* de R_1, R_2,..... tomadas en cierto orden, sean igualmente racionales en A, B, C,....., ó que *la ecuación de grado* $n-1$ *cuyas raíces son* R_1, R_2,....., *sea una ecuación abeliana*, entendiendo por ecuaciones abelianas la clase particular de ecuaciones resolubles consideradas por Abel en la *Memoria XI* del primer tomo de sus obras, y por función cíclica de n cantidades x_1, x_2,..... x_n la expresión $(x_1+\alpha\, x_2+\dots\dots+\alpha^{n-1}\, x_n)^n$ en la que α es raíz de $\alpha^n=1$.

Pero según el razonamiento de Kronecker, «toda ecuación resoluble algebraicamente de un grado primo n es una ecuación abeliana, cuando se considera como conocida una cantidad ρ que á su vez es raíz de una ecuación abeliana de grado $n-1$, ó bien cuando las n raíces de una ecuación resoluble se hallan siempre ligadas entre sí de manera que se tenga

$$z_2=f(z_1, \rho),\ z_3=f(z_2, \rho), \dots\dots z_1=f(z_n, \rho),$$

designando $f(z, \rho)$ una función racional de z, de ρ y de A, B, C,...., y siendo ρ una raíz de una ecuación abeliana cuyos coeficientes son funciones racionales de A, B, C,.....» y esta relación entre las raíces de toda ecuación resoluble, es para dicho analista el

verdadero origen de la propiedad señalada por Abel y Galois, como el carácter especial de las ecuaciones resolubles de grado primo, á saber: *que cada raíz debe ser una función racional de las otras*.

En fin, la consideración de que, si el problema primitivo consistía en *hallar todas las ecuaciones resolubles*, el siguiente: «Dado el número n hallar la forma más general de una función algebraica de A, B, C,..... tal, que entre las diversas expresiones que resultan de la combinación de los valores de los radicales en la misma, haya n cuyas funciones simétricas y cíclicas (siendo éstas relativas á un orden determinado de las n expresiones) sean racionales en A, B, C,.....» se reduce á *obtener todas las ecuaciones abelianas*, y el teorema siguiente que tiene lugar, no sólo para un grado primo, sino para todos los casos: *Las raíces de toda ecuación abeliana con coeficientes enteros pueden expresarse racionalmente por medio de las raíces de la unidad*, de manera que estas ecuaciones abelianas generales no son en realidad más que ecuaciones de la división del círculo, constituyen las conclusiones más importantes del trabajo de Kronecker, acerca de la resolución de las ecuaciones.

A estos resultados deben agregarse los de Galois, que se resumen en su Memoria *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1846), basados en su teoría de la *adjunción*, es decir, en considerar como conocidas ciertas irracionales, procedimiento por el cual ecuaciones irreducibles pueden pasar á la categoría de reducibles, y estableciendo la propiedad de lo que llama *grupo de la ecuación*, ó sea el *sistema conjugado propio de la ecuación*, llega á reducir sucesivamente el orden de dicho sistema por la sucesiva adjunción de radicales, hasta el caso en que reduciéndose á la unidad, la ecuación quede resuelta, terminando por aplicar sus investigaciones á las ecuaciones irreducibles, cuyo grado es un número primo, y por deducir las condiciones necesarias y suficientes para su resolución por radicales, reducidas á que *la resolvente de Lagrange tenga una raíz racional*.

Por último, además de las investigaciones de M. Hermite acerca de la obtención de las raíces de una ecuación irreducible de grado primo resoluble por radicales, mediante dos cualesquiera dadas, y de la resolución de quinto grado reducida de Jerrard á que llega obteniendo las raíces separadamente mediante el empleo de variables auxiliares, deben citarse los resultados de M. Jordan, autor de la obra *Théorie des substitutions*, que apoyándose en la idea de Galois de considerar en cada ecuación lo que llama el *grupo propio*, que permite conocer la ley de las sustituciones que dejan invariables las funciones de las raíces racionales expresables por los coeficientes, se propone hallar la naturaleza de las relaciones que pueden existir entre las diversas irracionales algebraicas, obteniendo como resultado el teorema siguiente: *La relación algebraica más general que pueda existir entre las raíces de dos ecuaciones irreducibles con coeficientes racionales, consiste en la igualdad de dos funciones racionales formadas respectivamente con las raíces de estas ecuaciones.* Además se propone determinar los *tipos de ecuaciones resolubles por radicales*, concluyendo:

1.º Que la solución del problema para un valor cualquiera n del grado se deduce de las soluciones del mismo problema para los valores de grado que son, entre los divisores de n, potencias de números primos. 2.º Que la resolución de este problema para uno de los divisores p^k se reduce á la de otros problemas análogos relativos á ecuaciones de grado menor que el propuesto, llegándose por la aplicación repetida del mismo método á ecuaciones de grado bastante poco elevado para que la resolución llegue á ser intuitiva.

Algoritmo de la forma.—Aunque el origen de este algoritmo se halla en una Memoria de Boole *(Mathem. Journ. Cambridg. 1841)*, cuya teoría se debe casi por completo al célebre matemático inglés Cayley en sus diversas *Memoirs upon Quantics* que se hallan contenidas en varios tomos de *Philosophical transactions*, debe comprenderse aquí cuanto se refiera á la eliminación y á las formas homogéneas y especialmente á las funciones simétricas, por el importante papel que desempeñan unas y otras en esta teoría que trata esencialmente de la propiedad de *invariación* de las formas por efecto de una substitución lineal.

Respecto á las funciones simétricas, el teorema de Newton que establece la relación entre las funciones simétricas de las raíces de una ecuación algebraica y los coeficientes de ésta es la proposición fundamental. Entre los geómetras que se han ocupado de dichas funciones deben citarse principalmente Vandermonde, que imaginó una especie de signo ó algoritmo por medio del cual se construyen fórmulas generales que dan inmediatamente la expresión de una función simétrica cualquiera *(Academ. des Sciences 1771)* y además construyó las primeras tablas de estas funciones, que Meier Hirsh después perfeccionó, Waring que expuso su muy conocido método ó ley de formación de las mismas en sus *Meditationes algebricæ*, Lagrange que las emplea continuamente en su método para calcular una función de las raíces de una ecuación dada, cuando se conoce otra función de éstas, y en sus investigaciones para obtener las resolventes de las ecuaciones de tercero, cuarto y de un grado cualquiera *(Mem. de l'Acad. de Berlin 1700 y 1771)*, Cauchy, que dió un nuevo método en su *Mémoire sur la résolution des equations numériques et sur la théorie de l'élimination* (1829) y en sus *Exercices de Mathématiques*. Más tarde Cayley y Brioschi, principalmente, perfeccionaron estos métodos empleando la consideración del peso de las funciones y las propiedades de las derivadas parciales de las funciones simétricas con respecto á las raíces y á los coeficientes, estableciendo métodos continuamente empleados en la moderna *Álgebra de las formas*, debiéndose á los matemáticos Cayley y á Sylvester el fundamental teorema que expresa el grado y la condición de ser isobárica de la función de los coeficientes á que corresponde una función simétrica.

La teoría de las determinantes cuyo origen se halla en la obra de Cramer, *Analyse des lignes courbes, 1750*, provee á dicha Álgebra de su elemento más importante. Las determinantes fueron consideradas por Cauchy como *funciones alternadas. (Jour. de l'École Politechnique XVII cahier)*, y el teorema de Binet y este matemático, acerca de la multiplicación de las determinantes, constituye una proposición fundamental de la teoría cuyo desenvolvimiento se debe principalmente á Gauss, que los empleó como elemento esencial en su teoría de la equivalencia y clasificación de las formas *(Disquis. arith.)* y á Jacobi, cuyas investigaciones se hallan en diferentes tomos del *Journal de Crelle*, entre las que deben citarse la descomposición de una determinante en una suma de productos de determinantes parciales, las propiedades de *las determinantes adjuntas* empleadas antes por Gauss en sus *Disquisitiones arithmeticæ* y desenvueltas también por Cauchy *(Jour. de l'École Polyt. XVI cahier)*, y en fin, la teoría de las *determinantes funcionales*, entre las que se hallan la *jacobiana* y la *hessiana*. Además de las propiedades de las *determinantes gauchas*, según la denominación de Cayley, descubiertas por este matemático, que también designó con el nombre de *ortogonal* al género de sustitución lineal tratado por Euler, Cauchy, Jacobi, Brioschi y otros geómetras en el problema de la reducción de las formas á sumas de cuadrados, deben citarse los variados resultados obtenidos por Hesse en esta teoría.

Los trabajos de Euler, y sobre todo de Bezout, relativos á la eliminación, pueden considerarse como el origen de una de las más importantes teorías del Análisis. De los extensos trabajos de este último, publicados en las Memorias de la Academia de Berlín, sólo citaremos el fundamental teorema acerca del grado de la ecuación final y el método que ha conservado su nombre y del que, en realidad, la mayor parte de los conocidos son meras variantes en el fondo.

Además de los métodos de Euler y el *dialítico* de Sylvester, fundados en el procedimiento de los factores indeterminados que conducen á resolver sistemas de ecuaciones lineales, hay que considerar el del máximo común divisor, cuyo perfeccionamiento se halla expresado en el teorema que Labatie dió á conocer en 1832. Las propiedades de las funciones simétricas son también base de multitud de procedimientos de eliminación. Lagrange emplea preferentemente las funciones simétricas en las eliminaciones que exigen sus métodos de resolución de las ecuaciones algebraicas, y su método *logarítmico* se funda también en la formación de dichas funciones. Cauchy lo emplea asimismo

para obtener el último término de la ecuación de las diferencias de las raíces de la propuesta. El procedimiento seguido por Poisson *(Journal de l'École Polytechnique XI^e cah.)* permite extender el teorema de Bezout relativo á la ecuación final, á un número cualquiera de ecuaciones, extensión fundada en la consideración de las funciones simétricas de las soluciones comunes á varias ecuaciones.

Para expresar el desenvolvimiento que ha obtenido hasta la actualidad la teoría que expresa la propiedad de *invariación* de las formas, á consecuencia de una sustitución lineal, sería preciso analizar las extensas y numeroras Memorias, principalmente de Sylvester, de Salmon, en Inglaterra; de Aronhold, Clebsch y Borchardt, en Alemania; de Hermite y Jordán, en Francia; de Brioschi, Betti, Battaglini y Cremona, en Italia, cuyo resumen se halla en *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, de Salmon; en la *Théorie des formes binaires*, de Faá de Bruno, y en la *Teoría de las formas*, de Rubini.

Sólo citaremos, para distinguir algunos puntos culminantes, las investigaciones de Cayley sobre las formas canónicas de las formas binarias, sobre las hiperdeterminantes, y la resultante para cuya obtención dió un metodo en que fundó sus investigaciones sobre el número de invariantes de las formas binarias *(Journal de Crelle)*, sobre la partición de los números *(Quat, Math., 1855)*, sobre las condiciones necesarias y suficientes para que una forma sea una covariante, sobre el número de covariantes fundamentales *(Second memoir upon Quantics)*, y en fin, su algoritmo para representar y formar invariantes y covariantes; las investigaciones de Sylvester, que entre otros resultados le condujeron á la *emanante* y á la *cataleticante;* las de Faá de Bruno, que denominó y caracterizó á las *intermutantes;* Hermite, cuyos variados resultados se publicaron en el *Journal de Crelle* y *Camb. and Dublin math. Jour*, á quien se debe su *ley de reciprocidad* y su teoría de las *covariantes asociadas;* Aronhold, autor también de diversas Memorias y que ha dejado un algoritmo importantísimo por las ventajas que ofrece para el estudio de las invariantes y covariantes de formas de diversas variables, constituyendo un cálculo simbólico.

No siendo fácil detallar el contenido de todas las Memorias citadas ó á que se ha hecho referencia, se hará una excepción de *Sixt Memoir upon Quantics*, de Cayley *(Phil. trans., 1860)* que se refiere á las correspondencias de la geometría con las formas binarias y ternarias. La geometría de una dimensión se halla reducida á una interpretación de la teoría de las formas binarias, y la noción de distancia se establece sobre principios puramente descriptivos. La geometría de una dimensión se trata como una geometría de puntos en una recta y la de dos como una geometría de puntos y rectas en un plano. Los diversos puntos de la recta están determinados por las coordenadas (x, y). Una ecuación lineal $(*)(x, y)=0$ representa un punto, y una ecuación tal como $(*)(x, y)^m=0$ se descompone en m ecuaciones lineales y representa un sistema de puntos de orden m. Los puntos componentes del sistema ó los factores lineales se llaman raíces. A $m=1, 2, 3\ldots\ldots$ corresponden un punto simple, par ó triple..... La ecuación $(*)(x, y)^m_-=0$ puede tener dos ó más raíces iguales ó el sistema puede tener dos ó más puntos coincidentes. Así, cuando la discriminante se anula, la ecuación tiene un par de raíces iguales ó el sistema un par de puntos coincidentes ó dobles. En el caso de la cuadrática $(a, b, c)(x, y)^2=0$, la condición es $a c-b^2$, en el de la cúbica será $a^2 d^2-6 a b c d+\ldots\ldots=0$. Una covariante de la ecuación $(*)(x, y)^m=0$ reducida á cero origina un sistema de puntos *(point-sistem)* enlazado de un modo definido con el sistema primitivo. La anulación de las invariantes y de las covariantes implica, pues, relaciones entre los puntos del sistema. En particular para los puntos *(points-pairs)* representados por las formas

$$(a, b, c)(x, y)^2=0,\ (a', b', c')(x, y)=0,$$

si la invariante $ac'-2bb'+ca'=0$ se anula, existe una relación armónica, y este género de consideraciones conduce á la teoría de la involución. Los tres puntos dobles $U=0$, $U'=0$, $U''=0$

se hallarán en involución, cuando las cuadráticas U, U', U'' se hallen ligadas por la relación lineal *(syzyg)*

$$\lambda U+\lambda' U'+\lambda'' U''=0.$$

Un sistema de puntos en una línea se llama un sistema puntual *(range)* y un sistema de líneas trazadas por un punto un haz *(pencil)*. Las teorías de los sistemas puntuales y de haces constituyen la geometría de una dimensión; pero en geometría de dos dimensiones el sistema puntual y el haz pueden coexistir en un plano como su común *locus in quo*. Si, por ejemplo, dados un punto y una línea, se trazan líneas desde aquél á los diferentes puntos de ésta, se tendrá un haz y un sistema puntual. Esto conduce á la homografía, que también se llama teoría de la reciprocidad.

En la teoría de las *distancias*, examina Cayley lo que llama el Absoluto, y trata de la distancia de los puntos armónicos respecto á este, cuya distancia es un cuadrante, considerando el cuadrante como la unidad de distancia. En la geometría de dos dimensiones el Absoluto es cierta cónica, como en la de una era cierto punto doble, y una recta cualquiera determina con el Absoluto *(cuts it in)* dos puntos que son el Absoluto respecto á dicha recta. Expuesta la noción de polo de una línea con relación al Absoluto, establece la propiedad de ser la distancia de dos puntos ó líneas igual á la distancia de sus polares, ó que las distancias de dos polos y de las polares correspondientes son iguales. Bastan estos simples enunciados para formarse idea de los puntos que trata la Memoria de Cayley, cuyas consecuencias también desenvolvió Clifford en sus *Mathematical papers*, y además se hallan expuestos en *A treatise on the higher plane curves* de Salmon, con frecuencia por el mismo Cayley; siendo algunos de estos conceptos los que sirven en las Lecciones de Geometría de Clebsch para establecer la interpretación geométrica de las formas binarias y las íntimas conexiones entre la teoría de las formas ternarias y la Geometría del plano; pues dados dos puntos *fundamentales* A y B, si p y q representan las distancias á cada uno de ellos de otro C situado en la recta que determinan, siendo la distancia AB igual á c, se tendrá siempre $p+q=c$, y C estará determinado por la relación de p y q. Un punto cualquiera de la recta estará determinado, pues, por dos números x_1, x_2 que se consideran como sus coordenadas. A cada valor de $\frac{x_1}{x_2}$ corresponde un valor único de $\frac{p}{q}$, y por consiguiente, un solo punto de la recta. Además las *transformaciones lineales* tienen una significación geométrica, pues *toda sustitución lineal cuya determinante no es nula, es idéntica á un cambio de puntos fundamentales, en la interpretación geométrica en que la relación de las variables está representada por un punto de una recta*. Representando una forma algebraica de orden n, igualada á cero, un sistema de n puntos sobre una recta, la condición para que éste posea una propiedad independiente de la situación de los puntos fundamentales está dada por la anulación de la función de los coeficientes de la forma representativa del sistema de puntos, que es la *invariante* de ésta. La invariante *simultánea* de dos formas está caracterizada por la condición de que los dos grupos de puntos correspondientes tengan un punto común, condición independiente de la posición eventual de los puntos fundamentales de las coordenadas, y en general las invariantes y covariantes de las formas binarias, igualadas á cero, representan relaciones proyectivas entre los elementos de las series de puntos y haces de radios. Pero una sustitución lineal es susceptible de otra interpretación, pues en vez de representarse un mismo punto por medio de elementos de bases diferentes, dicha sustitución podrá representarse como una relación entre dos puntos diferentes, referidos á los mismos elementos de base, ó como la expresión analítica de una *afinidad lineal*. Respecto á las series proyectivas de puntos, la ecuación $a_x+\lambda b_x=0$ representa cuando λ significa un parámetro variable, todos los puntos de la recta que sirve para figurar el campo de las formas binarias, y esta serie es proyectiva con respecto á otra $a_z+\lambda b_z=0$, si se admite que dos puntos de las dos series para los cuales λ tiene el mismo

valor, se corresponden, y respecto á estas series de puntos puede llegarse á otra

$$\rho,\ \rho\frac{c'}{c},\ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^2,\ldots\ldots,\ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^{n-1},\ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^n,$$

en la cual cada punto corresponde al precedente en virtud de la relación proyectiva establecida entre las dos series, y el examen de la condición necesaria para que por el empleo sucesivo de este procedimiento se llegue al punto inicial, conduce á la consideración del *ciclo proyectivo;* de manera que si en vez de puntos en línea recta se toma como representación geométrica un haz de radios, y se eligen las dos rectas trazadas desde el centro de éste á los puntos circulares imaginarios por radios dobles de una transformación lineal, esta es idéntica á una rotación de haz alrededor de su centro, y la condición de la proyectividad cíclica se transforma en la siguiente: un radio vuelve á su posición inicial después de haber girado n veces alrededor de su centro en un ángulo dado por la relación $\frac{c'}{c}$, lo que conduce á las *ecuaciones de la división del círculo (Leçon. sur la Geom.* pág. 250*)*. Para terminar esta teoría de la representación geométrica de las formas, bastará consignar respecto á la teoría de las formas ternarias, que teniendo esta rama del Análisis por objeto el estudio de las propiedades que no desaparecen en virtud de una transformación lineal, al que se halla íntimamente unido el de las propiedades de una curva algebraica ó sistemas de curvas independientes de la situación de las coordenadas, ya en el sistema puntual ó tangencial, en cuanto á la interpretación geométrica, dicha transformación, no sólo puede considerarse como una transformación de coordenadas, sino como una relación entre dos puntos de dos planos diferentes, ya se hallen éstos separados ó reunidos, es decir, la existencia de una *afinidad lineal* ó *colineación*, de manera que á cada punto x de uno de los planos corresponda un punto y del otro, y si el primer punto recorre una curva $f(x_1, x_2, x_3)$, el punto imagen recorrerá otra $F(y_1, y_2, y_3)$. En fin, las correspondencias geométricas que expresan en el dominio ternario las funciones que poseen la propiedad de invariación y que constituyen la variedad de clases siguientes: *invariantes, covariantes, contravariantes y formas mixtas,* completan el conjunto de consideraciones relativas al Álgebra de las formas contenidas en la obra del matemático Clebsch.

Al conjunto de las teorías combinatorias, pertenecen una multitud de Memorias ó trabajos que desenvuelven algún punto especial de las mismas, y atendida la extensión de estas indicaciones históricas citaremos algunas de ellas.

Entre los trabajos de Sylvester, citaremos sus Memorias *On a remarkable Discovery in the Theory of Canonical Forms and of Hiperdeterminants (Phil. Mag 1851), On extensions of the Dialytic Method of Elimination* y, en fin, *On a theory of the syzygetic relation of two rational integral functions,* etc. *(Trans. of the Roy Soc. 1853),* en las cuales se contienen sus notables descubrimientos sobre las funciones análogas á las de Sturm á que llega considerando la naturaleza y propiedades de los residuos que resultan del procedimiento de la división sucesiva, y sobre las formas canónicas y la eliminación, expuestos en las obras destinadas á la enseñanza.

El trabajo del matemático inglés W. Spottiswoode, conocido principalmente por sus investigaciones geométricas, *On an Extended Form of the Index Symbol in the Calculus of Operation,* se reduce á un cálculo puramente simbólico aplicado á las funciones

$$x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}=\nabla,\; y\frac{d}{dx}+x\frac{d}{dy}=\nabla_1$$

$$x\frac{d'}{dx}+y\frac{d'}{dy}=\Xi,\; y\frac{d'}{dx}+x\frac{d'}{dy}=\Xi,$$

que tienen notable semejanza con las determinantes.

De índole análoga son los trabajos de los matemáticos, Mr. W. H. L. Russell y Mr. Henry S. S. Smith. El primero, *On the calculus of Symbols with Applications to,* etc. *(Phil. trans. 1869),* es un sistema de multiplicación y división aplicado á funciones

de símbolos no conmutativos, sujetos á las mismas leyes de combinación que los propuestos en la Memoria que Boole publicó en 1844. Considerando, pues, los símbolos funcionales (ρ) y (π) combinados según la ley $\rho^n f(\pi)\, u=f(\pi-n)\, \rho^n u$, siendo u el sujeto á que se aplican, si $P, Q, R,$ son tres funciones de π y ρ tales, que PQ actuando sobre un sujeto es equivalente á R actuando sobre el mismo, ó $PQ=R$, distingue los factores P y Q, diciendo que P multiplica *externamente* á Q ó es un factor externo *(external factor)* y que Q multiplica *internamente* á P, ó es un factor interno *(internally factor),* y así llega entre otros resultados á las siguientes ecuaciones simbólicas, dependientes de las leyes de combinación arriba expuestas.

$$(\rho^a\,\pi^b)\,(\rho^{a'}\,\pi^{b'})\,u=\rho^{a+a'}(\pi+a)^b\,\pi^{b'}\,u$$

$$(\rho^a\,\pi^b)\,(\rho^{a'}\,\pi^{b'})\,u=\rho^{a-a'}(\pi-a)^{b-b'}\,u$$

La Memoria de Mr. Henry Smith se reduce al cálculo de las determinantes, considerando las matrices cuadradas en ella contenidas.

Concernientes á las funciones simétricas y á las sustituciones muchas son las Memorias donde los más importantes geómetras han expuesto sus especiales descubrimientos; y siendo imposible citar todo lo que merece consignarse, nos limitaremos á indicar algunos resultados, debidos á los matemáticos Hermite, Cockle y Harley.

M. Hermite, tratando de la representación analítica de las sustituciones, estableció la propiedad á que debe satisfacer una función entera $f(z)$ de z con coeficientes enteros para representar una sustitución de p índices incongruentes, según un módulo primo p, consistente en que en cada una de las funciones $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots\ldots f_{p-2}(z)$ el coeficiente de z^{p-1} sea congruente con cero, según el módulo p (designando por $f_m(z)$ la función entera obtenida, rebajando á un valor menor que p, mediante la congruencia $z^p \equiv z \pmod{p}$ el grado de la potencia m^{sima} del polinomio $f(z)$). Además, obteniendo dichas funciones susceptibles de representar las sustituciones bajo la forma *reducida* $\theta z = a_1 z + \ldots + a_{i-2} z^{i-2} + z^i$ (siendo $i =$ ó $< p-2$), concluye que *es necesario y suficiente, que elevando* θz *á las potencias* 2, 3,..... (p—2) *y reduciendo los resultados por la congruencia* $z^{p-1} \equiv 1$ (mód p), *los términos independientes de* z *sean cóngruos con cero, para que dicha forma reducida pueda representar una sustitución.*

Estas consideraciones y otras relativas á las sustituciones tienen gran importancia en la obra del mismo matemático *Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'equation du cinquième degré* (1859), aunque rebasando los límites del Álgebra, pues en lugar de representar por una fórmula radical con determinaciones múltiples el sistema de las raíces, estrechamente ligadas entre sí cuando se las considera como funciones de los coeficientes, consigue obtener, introduciendo funciones auxiliares, las raíces separadamente expresadas por otras tantas funciones distintas y uniformes, relativas á dichas nuevas variables, y determinar sus valores en función de las transcendentes elípticas.

Otras Memorias interesantes relativas á la teoría de las combinaciones, son las de los matemáticos Mrs. Cockle y Harley. La de este último *On the Method of Symetric Products and on Certain Circular Functions connected with that Method (Phil trans, 1861)* tiene por objeto generalizar resultados anteriormente expuestos, acerca de la aplicación de un símbolo cíclico al cálculo directo de cierta ecuación de sexto grado, de cuya resolución puede hacerse depender la general de quinto.

Considerando las funciones $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ lineales, no simétricas de la forma $x_1 + k_1 x_2 + \ldots + k_{n-1} x_n$ y su producto $\pi_{n-1}(x)$, que se llama *producto simétrico ó resolvente*, según que es ó no simétrico, y después de determinarlo para las formas cuadrática, cúbica, etc., hasta la de quinto grado, en función de los coeficientes, expone su método que á la circunstancia de simplificar cálculos laboriosos y hasta impracticables por otros procedimientos, la de presentar á la vista los resultados, sin hacer necesario examinar los resultados de la multiplicación, hallándose representados los ciclos de las raíces en la circunferencia.

CAPÍTULO III

Examen del plan del Álgebra.

§ 1.º Preliminares sobre la enseñanza y exposición del Álgebra.

Para formarse cabal concepto del Álgebra como de otra ciencia, no basta seguir en tal ó cual tratado el desarrollo de una síntesis más ó menos completa, realizado por un autor que amolda á su criterio particular y á fines especiales la exposición científica. Por esto es frecuente observar que ningún tratado, en general, satisface por completo, y el que muestra excelencias bajo un punto de vista es deficiente bajo otro. El alumno sólo llega á poseer un conjunto de verdades, unas aplicables inmediatamente á sus fines, otras que aparecen holgando sin revelar nada al espíritu, y estos efectos quedan con cierta persistencia, produciendo prejuicios y falsas apreciaciones cuando el alumno pasa á ser profesor y no traspasa los estrechos horizontes de las obras llamadas de texto ó acaso alguna que otra de consulta, sobre todo, en España, en donde la ciencia no se ha elevado á las regiones de la filosofía.

Hoy que la Matemática ha llegado á tan extraordinario grado de desenvolvimiento, se impone la necesidad de acompañar la exposición doctrinal de una sección crítica, para que después de conocer el contenido ó materias que la constituye en cada una de sus ramas, se complete con el conocimiento de la forma que los organiza y los hace aparecer como una totalidad.

Ciñéndonos al Álgebra, tres factores debemos considerar distintamente: la inteligencia, la ciencia y la enseñanza. La inteligencia es una fuerza y una fuerza continua, ya en el transcurso de la vida de la humanidad, ya en la de cada individuo, y á la manera que la acción incesante de las energías naturales bajo las formas de calor, trabajo mecánico, fuerza eléctrica, de combinación química, etc., han producido, producen y producirán los incesantes cambios que constituyen la vida de la naturaleza, la inteligencia humana bajo manifestaciones individuales, conocidas con los nombres de Arquímedes, Apolonio, Euclides, Descartes, Newton, Lagrange, Laplace, Gauss, Cauchy, etc., señalan en la región de la ciencia las trayectorias de las ideas, que son como sus diversas ramificaciones.

Ya sean las ideas formas *a priori* de nuestro conocer cómo opinan los que siguen la escuela de Kant, ó resultado de una serie de inducciones, según los empiritas, que en el polo opuesto de las escuelas filosóficas siguen la doctrina de Stuart Mill, en torno de los cuales parecen verse agrupados los matemáticos de la época presente, el resultado no afecta al modo de conocer, y la Matemática se constituye como un engranaje de verdades que resiste toda controversia y se halla fuera de toda duda. Adoptando, pues, la nomenclatura de las escuelas idealista ó espiritualista, diremos que las categorías, ya sean las de Aristóteles, las de Kant ú otro filósofo, que sinteticen de un modo más ó menos completo los puntos culminantes, según los cuales se clasifican todos los demás conceptos secundarios ó subordinados que la ciencia define por géneros y diferencias, agrupándolos, como el naturalista agrupa los seres del universo, señalan las diversas regiones de cada ciencia, que coordinadas entre sí, marchan paralelas, fundiéndose algunas veces parcialmente ó compenetrándose; pero conservando una distinción esencial dentro de la unidad del todo.

Respecto al modo de conocer, lo mismo de la humanidad que del individuo, y esto es esencial en la cuestión de la enseñanza, debe observarse que se verifica siempre según cierta discontinuidad. Ni ha existido individuo que conozca toda la trama de verdades de su tiempo, ni época en que totalmente se constituya toda la ciencia que expresan los resultados obtenidos por los espíritus más eminentes. Nuestro modo de conocer lleva el sello de la discontinuidad. La fe parece que salva á la ciencia. *Avançez et la foi vous viendra,* decía D'Alembert, encerrando en esta frase un pensamiento muy profundo. El alumno comprende unas verdades sin llegar á asimilarse las demás á que presta su asentimiento bajo la autoridad del maestro, y nuevas tentativas vencen nuevas dificultades. Y en las diversas épocas de la humanidad sucede lo mismo; la ciencia es una sucesión de grados,

es como un tejido cada vez más espeso, donde las ideas antes dispersas, luego aparecen con mayores enlaces, y hasta cada ciencia se encuentra con las demás en este choque de las ideas, tendiendo á la armonía universal en la región del pensamiento humano.

En conformidad con lo expuesto, vemos en la época griega hasta la época de decadencia en el Imperio de Oriente, y aun en la época de gestación representada por el período de la dominación árabe, que la Aritmética y la Geometría casi á la par se prestaban mutuo auxilio, siendo ésta un medio de materializar ó ó dar forma sensible á las especulaciones de los números. Y esta tendencia se expresa en los tratados de Álgebra, donde las ecuaciones se resuelven con auxilio de construcciones geométricas, estando tan materializado ó concretado el concepto de número, que fué necesario el espíritu generalizador de Descartes para llegar á la idea de una potencia superior á la de tercer grado correspondiente á los números sólidos inseparables de la idea de volumen.

A la época de gestación ó de asimilación sucede un período de actividad creadora, caracterizado esencialmente por Descartes y Newton. A contar desde el siglo XV, época de controversias que desde el campo de la filosofía habían transcendido á la región de la Matemática, vemos reproducirse las competencias entre los Tartaléas y Cardanos, en tiempo de Descartes, Roberbal, Fermat y Pascal que expresan la tendencia de elevarse de la multiplicidad de los hechos á la unidad de la ley; y en efecto, cada campeón de la ciencia, provisto de su método cuidadosamente ocultado á los demás, mostraba su aptitud para resolver las dificultades ó problemas propuestos, por la mayor ó menor eficacia de sus procedimientos, y á la par que aumenta el caudal de ideas acarreado á la ciencia, aumentan los puntos de vista según los cuales se coordinan ó los núcleos sobre que se constituyen. De igual manera que en el dominio total de los conocimientos humanos, éstos, primitivamente englobados en un todo heterogéneo, tuvieron que dispersarse en variedad de ciencias; dentro del dominio matemático se dibujaron ramas distintas que habían de constituir una especie de distribución del trabajo; y así, talentos que con gran intensidad se han mostrado como analistas, han dejado ancho campo en otras regiones á los geómetras y aun á los filósofos matemáticos, compartiendo dentro de cierta unidad de miras, la empresa de constituir y amplificar la ciencia. Cauchy, Chaslcs, Wronski y Hamilton expresan en ella manifestaciones distintas.

La teoría de los números en los trabajos de Fermat y Euler expresan tan sólo una tendencia hacia la unidad todavía ahogada en una multitud de detalles; y en la obra monumental de Gauss es donde aparece como un verdadero organismo científico que han enriquecido después los trabajos de Poinsot, Dirichlet, Kummer, Dedekind y Kronecker. Pero el número que en sí es la pluralidad ó expresa simplemente el orden, es también medida de la cantidad que se nos representa bajo la forma de espacio y tiempo con el carácter esencial de la continuidad. Y si desde Euclides el número tiene en las entidades geométricas un fondo que le da existencia real ú objetiva al considerarse asimilado con ellas, desde Descartes esta correlación ó coexistencia se sistematiza, aunque sometiéndose aquél á la extensión, y adquiriendo tal sistema considerable amplitud después de los descubrimientos de Newton y de Leibnitz. A las incoherentes relaciones que expresaba la ecuación entre los datos y las incógnitas de problemas aislados, sucede la relación de coexistencia sistemática que indica la función; y aunque en la geometría cartesiana y en el cálculo de las fluxiones, como se ha dicho, el número se somete á la extensión, también más tarde la extensión se subordina al número desde que Argand y Bouée fundan la teoría de las cantidades geométricas, convertida por Cauchy en amplísimo sistema que perfeccionan Riemann y los analistas contemporáneos. Si dada la existencia de las entidades geométricas aplicamos el mecanismo del cálculo, ó el Álgebra con sus ecuaciones y sus formas, á traducir aquéllas en los elementos de ésta, que ofrece como los esquemas correspondientes á dichas realidades, recíprocamente acompañando el número de representaciones geométricas, que dibujan en el espacio las varias maneras de sus coexistencias, ó mejor, suponiendo las funciones acompañadas de sus correspondientes afijas, haciéndose aquél perceptible á los sentidos, se constituye además un Álgebra geométrica, de igual modo que anteriormente se constituyó una Geometría algebraica.

Además de la extensión y el número hay que considerar un tercer elemento, la combinación, característico del Álgebra; y así como al considerar un objeto no lo consideramos, según la totalidad de sus propiedades, sino con respecto á las que nos ocurre hacerlo en cada caso, desapareciendo accidentalmente la importancia de las demás, la Matemática, bajo el punto de vista predominante de la combinación, del número ó de la extensión, es Algebra, Aritmética ó Geometría.

Es la Matemática una ciencia que, según expresa Vico en su criterio, puede ser constituída *a priori*, teniendo además el privilegio de admitir una verificación *a posteriori*, ó de alcanzar una conformidad con los hechos experimentales. La inteligencia, pues, produciendo combinaciones con sujeción á ciertas reglas establecidas *a priori*, crea un cálculo independiente de todo objeto á que haya de aplicarse, según las ideas de Grassmann y Hankel, ó, en general, un sistema de cálculo simbólico, resultado á que en la enseñanza y exposición didáctica se llega por una generalización sucesiva de los conceptos de operación y cantidad. Además, frente á las combinaciones que la inteligencia crea hay que considerar todas las combinaciones posibles en la realidad externa; y en los problemas propuestos puede haber perfecta correspondencia entre los dos órdenes, en ciertos casos, y disconformidad en otros, por referirse inmediatamente al sistema intelectual, no el objetivo que se hubiera elegido, sino uno de sus correlativos, según las ideas de Carnot, Poncelet y Cournot, lo que establece la asociación y disociación de los problemas y permite la interpretación de lo negativo é imaginario. En fin, en el orden puramente abstracto, es decir, de las relaciones numéricas, podemos concebir la correlación entre el valor cero de una función cualquiera y los sistemas de valores de las variables que producen tal estado de la misma; y al tratar de obtener los valores de éstas en función algebraica de los coeficientes ó de ciertas cantidades consideradas como conocidas, es decir, la resolución algebraica de las ecuaciones, á pesar de la conclusión restrictiva dada por Abel de la imposibilidad de resolver el problema en general, á contar desde el quinto grado, amplísimos horizontes se descubren en la región de las existencias numéricas, pues el problema general de *obtener una ecuación cuyas raíces se hallen ligadas á las de otra dada por una función racional no simétrica,* permite el tránsito de unas ecuaciones á otras. Además hay que considerar, principalmente el teorema de Lagrange acerca de las funciones semejantes que pueden ser expresadas una en función racional de las otras y los teoremas de Galois y de Abel, que conducen á la distribución de las ecuaciones en otras que forman ciertos ciclos, ó son resolubles por radicales cuando existen ciertas relaciones entre algunas de las raíces. Y esta teoría eminentemente algebraica, puesto que comprende la resolución, coordinación y clasificación de las ecuaciones, según expresan los descubrimientos de los matemáticos citados y también los de Kronecker, Hermite y Jordan, se funda en la teoría combinatoria de las sustituciones. Otro sistema de correlaciones numéricas es el expresado en la teoría de las formas homogéneas, mediante transformaciones lineales de las variables, que tiene también sus correspondencias ó representaciones geométricas.

Respecto á la resolución numérica de las ecuaciones, problema que lleva la suma de los esfuerzos hechos con insistencia por los más eminentes matemáticos desde tiempos de Descartes, constituye por su extensión una verdadera rama del Álgebra, en la que al nombre de este geómetra vemos asociarse principalmente los de Newton, Lagrange, Rolle, Fourier, Budan, Sturm y Cauchy. Pero la serie de procedimientos debida á tales colaboradores de la ciencia, aunque encaminados á un fin algebraico, por su carácter discrepan de esta ciencia eminentemente combinatoria, y al mismo tiempo que nos obligan á internarnos, aunque sin traspasar mucho los umbrales, en la teoría de las funciones, de las que nos hace conocer algunas propiedades, nos llevan á la realización de prolijas operaciones del cálculo aritmético con que, en conformidad con la índole de los métodos se aislan primero las diversas raíces y después se encierran en intervalos cada vez más pequeños aquéllas cuyos valores sólo pueden obtenerse con aproximaciones, tan cercanas á la exactitud como se quiera.

Poco expondremos respecto á la enseñanza del Álgebra, siendo suficiente decir para el objeto, que el orden de rigurosa exposición científica no puede ser el de la exposición didáctica, y así la división del Álgebra en dos tratados ó partes elemental y superior, opuesta á la índole de la ciencia, que no permite fraccionamiento tan arbitrario, es conforme al desarrollo de nuestra inteligencia que, antes de llegar á la completa síntesis debe pasar por etapas sucesivas; y si en una de ellas el algoritmo algebraico en todo su desarrollo, las teorías numérica y algebraica de las ecuaciones, el álgebra ó la teoría de las formas homogéneas, debe poner en posesión de lo que abarcan los dominios del organismo algebraico, cabe perfectamente y es conforme al fin de la enseñanza en una primera exposición dar á conocer, aunque en reducidas proporciones, la variedad de ideas constitutivas de la ciencia que luego han de recibir una amplificación, á la manera que un ser orgánico, dotado primitivamente de la totalidad de los órganos esenciales para su existencia, llega á la época de máximo desarrollo por la ley gradual del crecimiento del conjunto.

También debe observarse que así como las diversas ciencias unidas en su estado rudimentario, luego se separan para desenvolverse independientemente con arreglo á la índole especial de cada una, sin que por eso dejen de tender á unificarse con fuerza de afinidad siempre creciente, dentro de la ciencia total, así en cada ciencia, el progreso conduce al doble resultado de emancipar cada teoría de las demás á la par que las une con más estrechos lazos. Y limitándonos á la Matemática, esas intrusiones de la Geometría en el Álgebra, de ésta en el Análisis infinitesimal, de la Aritmética en el Álgebra, etc., ó si se trata del Álgebra, esa intervención predominante de los procedimientos aritméticos en la teoría de las ecuaciones, el empleo de proposiciones concernientes á valor ó relaciones de número ó medida para establecer proposiciones relativas á orden ó combinación, que influye con frecuencia en la coordinación de las teorías, según un orden diferente del que la naturaleza de las cuestiones exige, esas parciales irregularidades que por fortuna van desapareciendo, dependen de la imperfección é insuficiencia de nuestros métodos y no de la índole de las ideas. Y si al irradiar de un centro esas leyes primeras é irreducibles del conocimiento, que se llaman categorías, concebidas, no cual las expresa el sistema filosófico actual más perfecto, sino cual debieran ser en la ciencia absoluta, á la manera que un rayo luminoso en cada uno de sus puntos es centro de una onda que á su vez ofrece infinidad de centros para irradiar nuevamente en todas direcciones, así la ciencia, nos ofrece la trama de sus verdades; y si los métodos sugeridos por nuestra inteligencia producen con frecuencia confusiones ó asimilaciones imperfectas entre lo que debe permanecer distinto, esto es debido á que abandonaron la dirección de las irradiaciones primitivas para internarse en el laberíntico tejido de las irradiaciones parciales.

Siendo, pues, la ciencia de tan amplia libertad y variabilidad para llegar de los primeros principios á las consecuencias más remotas, la enseñanza no debe tender exclusivamente á inculcar un plan ó un orden de ideas determinado, presentándolas según tal ó cual criterio, sino á ejercitar la actividad del espíritu que, según diversas direcciones, puede llegar á los mismos fines, comprobando la eficacia de sus variados medios, y á producir la asimilación de las verdades en la inteligencia, que así ha de hacer cada vez menos frecuente y necesaria la artificiosa intervención de la memoria, útil como recurso de carácter provisional en el primer momento de pasividad del espíritu, al explorar los resultados ofrecidos por otras inteligencias; pero de escaso valor cuando en la reacción cada inteligencia subordina estos objetos de su conocer á las leyes, según las cuales deben ser conocidos.

§ 2.º—Examen del cálculo algorítmico.

Los sistemas positivista y racionalista de Augusto Comte y Wronski aparecen como las dos teorías que partiendo de puntos

de vista completamente opuestos tienden á realizar una síntesis matemática completa. Y si opinamos que exclusivamente no deba adaptarse una ú otra, creemos que ofrecen materiales suficientes para constituir dicha síntesis independientemente de todo exclusivismo filosófico. En efecto, la idea del filósofo positivista, que parte del examen del mundo exterior para transformar sus fenómenos en leyes matemáticas al traducirlos en ecuación, como medio de pasar del orden externo al intelectual, es aceptable en sumo grado y se halla admitida en la exposición de la ciencia; y la idea de Wronski de obtener una deducción eminentemente subjetiva del organismo matemático, prescindiendo del modo especial de hacerla depender de la clasificación de las funciones de nuestra inteligencia, exclusivas de un sistema filosófico, incompatible con la universalidad de las conclusiones matemáticas, cuya independencia de todo punto de vista exclusivo es el carácter más predominante, dicha deducción es admisible y muy digna de tenerse en cuenta, para facilitar la clasificación y hacer más sólido el encadenamiento de las verdades en una síntesis.

Distinguiremos, pues, como lo hace Hoüel en la introducción de su *Cours de calcul infinitésimal*, la ciencia real de la ciencia ideal, es decir, la fundada en la observación y la experiencia que agrupando los hechos induce leyes y principios, de la que los combina, enuncia de una manera rigurosa, según los principios de la lógica, y aun predice otras nuevas que, ó llegan á realizarse ó que conduciendo á alguna contradicción son desechables y obligan á formular una nueva síntesis, según se advierte al examinar la serie de procesos científicos, por los que la humanidad se encamina al perfeccionamiento de sus ideales.

En conformidad con este precedente, la Matemática, no ciñéndose á combinar las leyes debidas á la observación del mundo real, rebasando sus límites con auxilio de la analogía, y satisfaciendo la necesidad de generalizar, toma como objeto de sus investigaciones hipótesis sin realidad correspondiente ni aplicaciones inmediatas.

La teoría general de las operaciones se deduce al examen de las propiedades abstractas, independientes del objeto á que se aplican, denominadas *propiedades combinatorias*, entendiéndose por operación, en el sentido más lato de la palabra, el acto que transforma un fenómeno en otro.

Además, con el fin de incluir en un mismo enunciado el mayor número posible de casos, ha sido preciso establecer una generación sucesiva del concepto de cada operación como se observa cuando se pasa de los números enteros á los fraccionarios, inconmensurables, y por último, complejos ó imaginarios, y esto ha conducido á establecer el *principio de la permanencia de las reglas de cálculo*, según la denominación de Hankel, que se deduce á abandonar determinadas propiedades de una operación, para que la operación generalizada sea aplicable á la operación restringida, sustituyendo también á la palabra *cantidad* el término más vago y general de *objeto*.

Tendremos también que consignar, respecto á las operaciones, que la *uniformidad* ó *no uniformidad*, la *conmutabilidad*, *asociabilidad* y la *propiedad distributiva* son puntos de vista, bajo los cuales deben ser examinadas, y respecto á las cantidades, que descompuesto en concepto según la exposición de Vallés en los dos elementos numérico y cualitativo, es decir, reducidas á la expresión $n\varphi$ en la cual el símbolo φ debe adquirir la forma explícita que le corresponde según cada caso, es preciso, para proceder conforme á esta gradación, apelar á los conceptos de continuidad y dirección ó posición, mediante los que se llega á establecer las operaciones con el símbolo $a+b\sqrt{-1}$, cuya correspondencia con las practicadas con un punto ó un vector en un plano es necesario conocer, y aún las efectuadas en el espacio, según la teoría de Hamilton, por la que el cálculo de las cantidades llamadas imaginarias tiene su realización geométrica.

Pero no resulta conforme con la marcha gradual de la enseñanza el comenzar en una exposición del Álgebra por esta síntesis de las operaciones, pues cada género de cantidad tiene su origen en una de éstas. Así, los números fraccionarios y negativos surgen de las dos primeras, ó algoritmos primitivos, y los nú-

meros inconmensurables é imaginarios resultan del tercero, todos procedentes del problema en la fase inversa.

Empleando, pues, las denominaciones de Wronski, el algoritmo de la agregación produce la generación de los números como positivos ó negativos, la reproducción como enteros ó fraccionarios, la graduación como conmensurables ó inconmensurables y como reales ó imaginarios.

Además, los conceptos de operación, ecuación y función, tan íntimamente ligados como se hallan nuestras facultades activas ó volitiva, intelectual y afectiva, aparecen solidarios en los umbrales de la Algoritmia, pues la suma, producto y potencia, son funciones de los datos respectivos; siendo los casos inversos, los primeros ejemplos de las funciones implícitas en que hay una ecuación por resolver, ó sea

$$a=b+x,\quad a=b.\,x,\quad a=x^b,$$

debiéndose observar, como lo hace Wronski, el carácter de crecimiento por *yuxta-posición* del algoritmo de la agregación y el de *intus-susceptión*, es decir, el que se efectúa en la constitución interna ú organismo de las cantidades para producirlas íntegras, según expresa la fórmula

$$m=\left(1+\mu\frac{1}{\infty}\right)^{\infty},$$

siendo la cantidad μ en la composición de cada número análoga á los elementos químicos que determinan con sus combinaciones la naturaleza de cada sustancia.

Es fácil ver que la tercera operación comprende una segunda operación inversa y llegar así al concepto del logaritmo; pero es más conveniente para la sistematización de las conclusiones, derivar este algoritmo y su correlativo de las funciones circulares, siguiendo las ideas del filósofo polaco. Y, en efecto, las fórmulas

$$f(a)+f(b)+f(c)+\ldots\ldots=f(a,\,b,\,c,\ldots\ldots),$$
$$\varphi(a).\,\varphi(b).\,\varphi(c)\ldots\ldots=\varphi(a+b+c+\ldots\ldots)$$

que realizan el tránsito de una suma de funciones de una clase á funciones de la misma clase de un producto, y el tránsito de un producto de funciones á la función de una suma, expresan la propiedad esencial de dichos algoritmos f y φ ó *logaritmo* y *seno;* y las ideas de lo *infinito* y lo *imaginario,* que implican, se halla desenvuelta por Wronski al deducir la fórmula que expresa la naturaleza del logaritmo

$$\varphi(x)=\frac{x^{\frac{1}{\infty}}-1}{\sqrt[\infty]{a}-1} \quad \text{ó} \quad \varphi(x)=\lim\frac{x^{\frac{1}{m}}-1}{\sqrt[m]{a}-1},$$

cuando m se hace infinitivamente grande, y las siguientes:

$$F(x)=\frac{a^{x\sqrt{\pm1}}+a^{-x\sqrt{\pm1}}}{2}, \quad f(x)=\frac{a^{x\sqrt{\pm1}}-a^{-x\sqrt{\pm1}}}{2\sqrt{\pm1}}$$

que comprenden á las de Euler, correspondiendo los signos superiores ó inferiores de las cantidades subradicales respectivamente á los senos y cosenos *hiperbólicos* ó *circulares.* Así, pues, estas funciones tienen un carácter esencialmente *algorítmico* y no *geométrico* en el sistema de Wronski.

Los algoritmos derivados inmediatos, de la *numeración* y las *facultades,* resultan respectivamente de la combinación del algoritmo primitivo intermediario, la reproducción con los dos primitivos y opuestos, la agregación y la graduación, que, según la doctrina de dicho filósofo, se refieren á las leyes constitutivas del entendimiento y á las reguladoras de la razón, esencialmente opuestas como dos polos de nuestra inteligencia.

Los esquemas de estos algoritmos, considerados en toda su generalidad, son:

$$A_0F_0+A_1F_1+A_2F_2+\ldots\ldots \quad \text{y} \quad \Phi_1x.\Phi_2x.\Phi_3x\ldots\ldots,$$

que expresados en formas más sencillas se reducen á

$$A_0x^m+A_1x^{m+n}+A_2x^{m+2n}+\ldots\ldots \quad \text{y} \quad (x+0)(x+\xi)(x+2\xi)\ldots\ldots$$

correspondientes á una generación secundaria, según expresa Wronski, cuyo fin es obtener la *medida* ó evaluación de las can-

tidades y transformar las funciones teóricas en funciones de numeración ó facultades, fin que es el de la Tecnia de la Algoritmia.

Pero como no se trata ahora de exponer esta doctrina filosófico-matemática, sino de utilizar su espíritu sintético con el fin de coordinar de una manera compendiosa los materiales que deben servir para hacer un estudio metódico del Álgebra, dicha transformación mediante una función arbitraria ó *medida algorítmica,* bajo un punto de vista particular conduce á las series y á las fracciones continuas que resultan así como dos ramas de la clase de procedimientos técnicos que dependen del algoritmo primitivo de la agregación, correspondientes á la comparación directa ó inversa de la función que se mide con respecto á la que sirve de unidad de medida.

La convergencia de las fracciones continuas por exceso ó por defecto, expuestas en las obras elementales, expresan la determinación más sencilla de las cantidades que comprende el concepto de Wronski, y que llama *fracciones continuas numerales.* Respecto á las series, la fórmula de Maclaurin, de la forma

$$F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots$$

es el caso de la más general

$$F(x)=A_0+A_1\varphi(x)+A_2\varphi(x^2)+\ldots\ldots$$

en que $\varphi(x)=x$, la cual á su vez está incluída en la siguiente:

$$F(x)=A_0+A_1\varphi x+A_2\varphi x^{2|\xi}+A_3\varphi x^{3|\xi}+\ldots\ldots;$$

y la fórmula

$$N=\ldots\ldots A_2x^2+A_1x^1+A_0x^0+{}_1Ax^{-1}+{}_2Ax^{-2}+\ldots\ldots,$$

según la notación de Wronski, es el esquema de la operación aritmética llamada *numeración,* siendo los coeficientes $\ldots A_2, A_1, \ldots$ números que no exceden al número x ó *base* del sistema de numeración; y es evidente que dicho esquema constituye el principio de los demás procedimientos aritméticos comprendidos en las seis operaciones fundamentales, quedando la Aritmética reducida al arte de contar, que es el procedimiento más elemental de la tecnia algorítmica.

Los procedimientos técnicos que dependen del algoritmo de la graduación son los *productos continuos* y las *facultades* cuyos esquemas son

$$F(x)=f_0(x)\ f_1(x).f_2(x)\ldots\ldots,\quad F(x)=\psi(z)^{\varphi\, x|\xi},$$

según la deducción de Wronski; y como el insistir en su exposición sería exceder los límites del Álgebra, cuya síntesis debe hallarse comprendida como inferior ó subordinada á la teoría de las funciones, bastará con lo indicado.

Los algoritmos de las derivadas y de las diferencias se hallan en la parte sistemática de la teoría algorítmica, según la clasificación de Wronski, concibiendo, no una simple neutralización ó combinación, sino una verdadera *reunión sistemática* de las dos funciones intelectuales que tienen por objeto los dos algoritmos primitivos y opuestos de la agregación y la graduación, y considerándola bajo el punto de vista *transcendental*, establece la influencia de dicha reunion en la generación ó constitución de las cantidades algorítmicas. Pero hay que distinguir la influencia sistemática de la agregación en la generación de las cantidades donde domina la graduación, de la influencia sistemática de la graduación en la generación de las cantidades donde domina la agregación. El primer caso conduce á los cálculos de las diferenciales, cuya ley fundamental establece Wronski bajo la forma siguiente:

$$\Delta^n(Fx.fx)=Fx.\Delta^n f+\frac{n}{1}\Delta Fx(\Delta^{n-1}fx-\Delta^n fx)$$

$$+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\Delta^2 Fx(\Delta^{n-2}fx-2\Delta^{n-1}fx+\Delta^n fx)+\ldots\ldots$$

que denomina *binomio de las diferencias*, por considerarla en la teoría general de las diferencias, análoga al binomio de Newton en el algoritmo de la graduación, y observando que aunque

dicho desarrollo es el de un *producto* de dos funciones por medio de las *diferencias* de los factores, dicho producto depende esencialmente del algoritmo de la graduación, como lo hace ver partiendo de la función $(Fx)^{fx}$.

El segundo caso considerado por Wronski le conduce á las nuevas teorías de los *grados* y de los *grádulos* en que se considera el *incremento por graduación*, cuya ley fundamental establece también.

Si, pues, el Álgebra en el plan total de la Matemática es un organismo contenido en el más general que comprende la teoría de las funciones, empleando algunos de sus principios, aunque de un modo restringido ó con limitación á sus fines particulares, claro es que una exposición de aquélla deberá incluir convenientemente coordinado, prescindiendo de los exclusivismos de los sistemas filosóficos, no sólo cuanto se acaba de exponer elevándose gradualmente de los algoritmos primitivos hasta los que constituyen las teorías últimamente indicadas, sino además lo que comprende el cálculo simbólico referente á las funciones homogéneas en que predomina la idea combinatoria que surge al generalizar los resultados para un número cualquiera de variables.

§ 3.º—Examen de los conceptos de ecuación y función.

Para conseguir nuestro actual propósito, debemos, ante todo, fijar los conceptos de la operación, la ecuación y la función. Esta es la verdadera *entidad analítica* ó mejor *algorítmica*, el objeto sobre que versan las investigaciones del Análisis matemático. Las operaciones combinadas de un modo arbitrario, ó según todos los casos que ocurren en la posibilidad, son como los atributos constitutivos de la esencia de cada entidad. Cuando todos los elementos están determinados, la función se convierte en un número, que representa uno de sus estados. El conjunto de todos éstos, resultante de toda la posibilidad de los valores de dichos elementos expresa las fases de su existencia, análoga á las fases sucesivas de un ser orgánico que constituyen su vida, ó el desenvolvimiento de un ser, según las condiciones de dicha existencia. Así, 45 es un estado de la función x^2-4 correspondiente á $x=7$. Resolver la ecuación $x^2-4=0$, es determinar sus ceros ± 2. El conjunto de sus valores reales ó imaginarios de x expresa las fases de su existencia. La circunstancia de corresponder un solo valor á cada valor de la variable, es una condición que determina su esencia, y se expresa diciendo que es *uniforme* ó de una determinación, así como la función $\sqrt[n]{x}$ es *n—forme* ó de n determinaciones y arc. sen x es *infinitiforme* ó de infinito número de valores, ó funciones *monótropas* y *polítropas*.

Pero la manera de nuestro conocer, ó sea del conocer de la inteligencia humana por medio de imágenes ó *per conversionem ad fantasmata* se halla sistematizada en el Análisis ó Algoritmia, dándose una representación geométrica á la serie de sucesivos estados de una función, lo cual permite establecer una correlación perfecta entre el orden numérico y el orden geométrico, según la historia de la ciencia nos revela.

Principiando por la función potencial ax^n, se ve que si la variable se representa por un radio vector movible en la extensión de un plano, la función á su vez se representará por otro cuyos movimientos ó alteraciones corresponderán á los del primero, el modo de variación de una función tendrá, pues, por imagen el simultáneo movimiento de dos puntos en un plano; y si se trata de una función entera, la representación gráfica será una línea poligonal cuyos lados corresponden á los diferentes términos de aquélla, dependiendo el movimiento de su extremidad de la serie sucesiva de deformaciones que estos experimentan á consecuencia de la alteración de la variable independiente, y por consiguiente, del término general,

$$A_m z^m = C_m \rho^m [(\cos m\,\omega + \alpha_m) + i(\operatorname{sen} m\,\omega + \alpha_m)],$$

siendo $z=\rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$, $A_m = C_m(\cos\alpha_m + i \operatorname{sen}\alpha_m)$,

ó de manera que para cada valor complejo de z los ángulos correspondientes á los grados de las potencias serán proporcionales á éstos, en conformidad con el teorema de Moivre.

Si la función es la exponencial

$$e^{y+x\sqrt{-1}} = e^y(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x),$$

para cada valor de x, al adquirir y todos los valores posibles desde $-\infty$ hasta $+\infty$ el punto que represente la función recorrerá una recta, así como recorrerá una circunferencia para cada valor de y, combinado con los sucesivos valores de x comprendidos entre 0 y 2π, 2π y 4π, etc.; y si la extensión del plano se divide en zonas por paralelas á la dirección de las cantidades reales á las distancias 2π, 4π,....., á contar desde cero, mientras el punto correspondiente á la variable recorra todo el plano, el correspondiente á la función recorrerá una de las zonas entre cada dos límites, entre los cuales se considera sucesivamente el valor de x; y al recorrer la variable sucesivamente varias veces el plano, la función irá recorriendo cada una de las zonas, quedando manifiesta con tal representación la periodicidad de la función, á la par que la multiplicidad de su inversa ó la función logarítmica, que resulta ser infinitiforme; y como para la función exponencial, resultará para todas las funciones circulares.

Expuestos estos preliminares, debe observarse ahora que siendo el objeto del Álgebra la resolución de las ecuaciones, y siendo éstas modos de ser ó estados especiales de las funciones el estudio de dicha ciencia, como ya se indicó, necesariamente exige, aunque someramente, el concurso de la rama superior del Análisis que las examina, según todos los modos de ser y propiedades.

Pero el Álgebra comprende dos partes esencialmente distintas, la una que con el auxilio de procedimientos originados en la teoría combinatoria, busca hacer explícita una función implícitamente contenida en una ecuación, la otra que fundada en ciertas propiedades de las funciones, permite determinar con exactitud ó con aproximaciones obtenidas de una manera indefinida, los valores que anulan una función dada ó que satisfacen á una ecuación.

El principio de D'Alembert, considerado como el fundamental de la teoría de ecuaciones es un simple desenvolvimiento de la noción de continuidad. En efecto, al establecerse que el módulo de un polinomio, sin término constante, tiende indefinidamente hacia cero, cuando el de la variable se hace suficientemente pequeño hasta llegar á hacer oscilar á aquél entre dos límites tan próximos como se quiera, queda desde luego establecido el predominio del módulo del primer término sobre la suma de los módulos de los demás para valores suficientemente grandes ó pequeños del de la variable, según el modo de hallarse ordenado dicho polinomio, lo que se hace visible al reducirse el polinomio $Az^m+Bz^{m\pm1}+Cz^{m\pm2}+\ldots$ á la forma $Az^m(1+\varepsilon)$ en la que el módulo de ε de la forma

$$\frac{B}{A}z+\frac{C}{A}z^2+\ldots.. \text{ ó } \frac{B}{A}\frac{1}{Z}+\frac{C}{A}\frac{1}{Z^2}+\ldots..,$$

es tan pequeño como se quiera, para valores suficientemente pequeños ó grandes del módulo de z; y en fin, la expresión

$$f(z+h)-f(z)=Ah^n(1+\varepsilon)$$

que para valores del módulo suficientemente pequeños tiende hacia cero, establece la continuidad de las funciones enteras, las cuales por esta condición tienen que anularse entre dos valores de la variable que les hacen adquirir valores de signos contrarios.

Respecto á la representación gráfica de las conclusiones arriba obtenidas, resulta que el extremo de la línea poligonal correspondiente á una función entera se hallará siempre en el interior de una circunferencia, cuyo radio sea el valor del módulo del primer término y cuyo centro el extremo de éste, resultando en particular, para valores reales de la función y de la variable, el predominio del signo del primer término al satisfacer el módulo de z las condiciones indicadas.

Además del teorema de D'Alembert en que se funda la teoría de las ecuaciones al establecerse la existencia de alguna raíz, bajo el punto de vista práctico, es fundamental en la misma el teorema de Taylor (método ó porisma de Taylor, según Wronski),

que expresa la generación por agregación de la cantidad ó función $F(a+h)$ mediante incrementos sucesiva é indefinidamente pequeños de la variable.

La forma de este desarrollo permite conocer la influencia de la derivada en el modo de ser de una función ó las diversas circunstancias que acompañan á cada una.

Respecto á la función de una variable x real, los caracteres más esenciales y fundamentales de los diversos métodos ideados para la resolución numérica de las ecuaciones, son: su crecimiento ó decrecimiento, dependiéntes del signo de la derivada sus máximos ó mínimos cuya condición necesaria es la anulación primera, de ésta, la variación ó permanencia que ofrecen por sus signos una y otra en la proximidad de las raíces.

Los métodos ó teoremas de Rolle, Budan, Sturm y Newton son meras consecuencias ó corolarios de las relaciones existentes entre una función y su primera y aun su segunda derivada, según las diversas maneras de variar aquélla.

Como al crecer ó decrecer una función de una variable real, en general, su primera derivada es necesariamente positiva ó negativa (en casos como el de la fig. 1.ª, para el punto 0 la derivada es nula, y entonces á la función creciente corresponde una derivada que *no es negativa* para ningún valor del intervalo considerado, etc.), y como al anularse aquélla decrece, si era positiva, ó aumenta si era negativa, para valores que preceden en muy poco al valor de una raíz, la función y su derivada primera tendrán signo contrario; pero variando el signo de la función al pasar por cero, para los valores inmediatos que siguen tendrán signos iguales, y en esta idea se fundan los teoremas de Sturm y Rolle, basándose también éste en la consideración de que una función continua que desde cero aumenta ó disminuye, para volver á cero tiene que disminuir ó aumentar, y su derivada cambiar de signo en el intervalo.

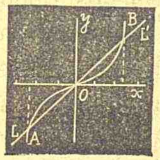

Fig. 1.ª

A estas consideraciones se une en los métodos de Newton y Budan la de la segunda derivada, cuyo signo positivo ó negativo en un intervalo corresponde al crecimiento ó decrecimiento de la primera; y las conocidas figuras 2.ª, 3.ª, 4.ª y 5.ª, son la representación gráfica de todas estas circunstancias respecto al primer método, expresando los catetos PT la función $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, tan importante en dichos métodos.

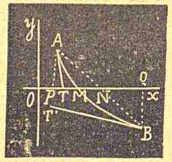
Fig. 2.ª

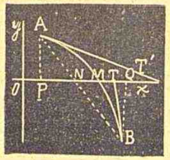
Fig. 3.ª

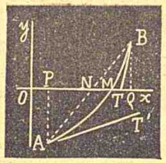
Fig. 4.ª

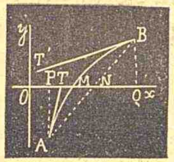
Fig. 5.ª

Pero el de Budan origina las representaciones gráficas que hacemos en las figuras 6.ª, 7.ª, 8.ª y 9.ª

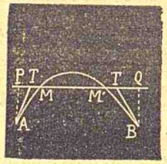
Fig. 6.ª

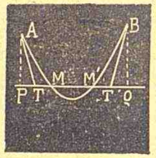
Fig. 7.ª

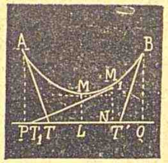
Fig. 8.ª

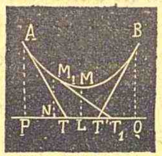
Fig. 9.ª

Desde luego el crecimiento ó descrecimiento de la función $\varphi(x)$ correspondiente á la igualdad ó desigualdad de signos de $f(x)$ y $f''(x)$ se halla representado por el cateto PT. Y en el caso de existir dos raíces reales correspondientes á los puntos M y M' de $f(x)=0$ entre dos límites α y β correspondientes á los P y Q, no comprendiendo además dicho intervalo ninguna raíz de $f''(x)=0$, según expresa la concavidad ó convexidad constante en el mismo (figs. 6.ª y 7.ª), se hace visible la relación

$$\frac{f(\beta)}{f(\beta)}-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}<\beta-\alpha,$$

deducida de que $OT'<OT$ ó $\beta-\dfrac{f(\beta)}{f'(\beta)}<\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$; en el caso de no tener $f''(x)=0$ ninguna raíz en dicho intervalo y de tener solamente una x_1 la ecuación $f'(x)=0$, siendo $f(x)$ y $f''(x)$ de igual signo, la representación está dada por las figuras 8 y 9, pues ya permanezca P fijo ó $\varphi(\alpha)$ constante y Q se aproxime hacia L,

correspondiente á x_1, ya Q sea fijo y por consiguiente $\varphi(\beta)$ constante, como $\varphi(\beta)$ en el primer caso y $\varphi(\alpha)$ en el segundo tienden hacia el infinito (pues en M la tangente será paralela al eje de las x), OT' llegará á ser menor que OT (fig. 8.ª) ú $OT>OT'$ (figura 9.ª), es decir, $\varphi(\alpha)>\varphi(\beta')$ ó $\varphi(\alpha')>\varphi(\beta)$, pudiéndose verificar para cierto valor β' ó α' suficientemente próximo á L (superior en el primer caso é inferior en el segundo) que

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\geq\beta-\alpha.$$

Si tratando de funciones de variables complejas se adopta la representación, por medio de radios vectores en el plano donde se suponen las variaciones de aquéllas, el teorema de Cauchy tiene la conocida representación por medio de los contornos que recorren la variable y la función simultáneamente. Y este principio, que permite extender á las raíces imaginarias los resultados tan sólo obtenidos mediante el teorema de Sturm respecto á las raíces reales, manifiesta cómo el Álgebra se enlaza con la teoría de las funciones y exige para su exposición evocar frecuentemente algunos de sus principios, procedimientos y desarrollos. Pues conforme con el modo de proceder de la inteligencia humana, sobre el organismo del Álgebra debe elevarse el más superior del Análisis en cuyos generales principios los de aquélla se encuentren incluídos.

Nada diremos de la serie de procedimientos que en Álgebra se exponen para descomponer el problema de la resolución de las ecuaciones en los parciales procedimientos que fijan límites, entre los cuales se hallan encerradas todas las raíces que determinan separadamente las enteras de las fraccionarias, que estrechando aquellos primeros límites llegan á intervalos donde una sola raíz queda comprendida, y que, en fin, cuando ésta no puede ser obtenida exactamente, aproximan su valor cuanto se quiera; pues el conjunto de reglas en todos ellos incluído solo tienen un valor práctico, cuyos principios se reducen al escaso número de proposiciones ya citadas, y son simples emanaciones y desarrollos de la noción de la continuidad.

§ 4.º—Examen de los conceptos del orden y de la combinación y de sus principales manifestaciones é inmediatas aplicaciones.

Además de la exposición de la teoría de ecuaciones bosquejada en el anterior artículo, que se redujo á un desarrollo del concepto de continuidad, es preciso considerar otras dos, que desenvuelven los conceptos de orden y de combinación, á saber: la teoría de las ecuaciones indeterminadas ó de los números, ó Análisis indeterminado según una denominación antigua, y la teoría algebraica de las ecuaciones ó de las ecuaciones algebraicas, de cuyo preliminar necesario, la eliminación, se tratará en este artículo.

Teoría de los números.—La teoría de los números desde que Gauss realizó su síntesis se reduce al algoritmo de la congruencia, en el cual las ideas de orden y periodicidad tienen un predominio casi exclusivo.

Las ecuaciones indeterminadas cuyas analogías con las ordinarias tanto ha hecho resaltar Poinsot, son lugares algorítmicos en los que se hallan contenidos ciertos números, como en los lugares geométricos se hallan contenidos ciertos puntos sometidos á una ley común. Las propiedades de ser los números congruentes con un tercero, congruentes entre sí, de serlo las sumas, diferencias, productos, etc., de números congruentes respecto á un mismo módulo, son las propiedades fundamentales, y conducen á la distinción y distribución de las clases, ó conjuntos de números congruentes, respecto de un número dado, siendo cualquier número de una clase un representante de su clase, de manera que partiendo de uno cualquiera de ellos se puede reconstruir toda ésta.

La teoría de la transformación y equivalencia de las formas, empleando procedimientos análogos á los propios del Álgebra de las formas, conduce al examen de las formas que mutuamente se contienen, es decir, que comprenden en sí los mismos números, ó las que se hallan contenidas en otras, siendo en rigor la teoría de la distribución de los números en lugares algorítmicos;

y así como antes se expuso la distribución de los números en clases, ahora corresponde hacer una clasificación de las formas, distinguiéndose el sistema ó conjunto de formas equivalentes entre sí bajo la designación de *clase*, de la que cada uno de sus individuos es un *representante*, llegándose á constituir los *sistemas completos de formas no equivalentes*, al resolver los problemas fundamentales consistentes en *averiguar si dos formas con iguales determinantes son ó no equivalentes*, y en *hallar todas las sustituciones por las cuales se convierte la una en la otra*, problemas completamente resueltos para las formas cuadráticas.

Para completar la exposición de la teoría de los números es preciso dar un lugar preferente á las congruencias binomias, que si bien constituyen sólo el caso más elemental de las ecuaciones indeterminadas, tienen una importancia capital por la singularidad de los conceptos que envuelven y por la fecundidad de sus aplicaciones, que llevan ampliamente á la consideración del orden, característica de esta rama del Análisis. Los teoremas de Fermat y de Euler son sus principios fundamentales, así como la propiedad de *pertenecer* ó *no pertenecer* un número á un exponente, relativamente á un módulo dado, es un carácter importantísimo, tanto que en ella estriba la distinción de las raíces en primitivas y no primitivas, que conduce á una de las más notables conclusiones, relativas á la periodicidad y el orden, pues si aquéllas forman ciclos completos en que todas se reproducen al disponerse según el orden notable en que las concibió Gauss, es decir, según expresa la serie de potencias

$$r,\ r^{a},\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ldots\ldots,\ r^{a^{p-2}},$$

tratándose de la congruencia $x^n-1\equiv 0 \pmod{p}$, las raíces no primitivas se distribuyen en ciclos parciales, correspondientes á otras congruencias subalternas; y si las primeras tienen una representación en los polígonos convexo y estrellados, cuyo número de lados es igual al grado de la congruencia, las segundas corresponden á polígonos subalternos, según que en las maneras de llegar al punto origen de los considerados, dividiendo una circunferencia en un número N de partes iguales, se considere el caso de ser primo el número N con el número h de arcos que se toman para inscribir el lado del polígono, ó el caso de no ser primos.

A esta última aplicación de las ecuaciones binomias que conducen al problema de la división del círculo, llega la teoría de las congruencias binomias por efecto de la reducción de unas á otras que Poinsot estableció manifestando que: *las raíces primitivas de un número primo* p *se hallan representadas por la fórmula que da las raíces imaginarias de la ecuación binomia de grado* p *(Mem. de la Class., etc., de l'Institut de France, 1813)*, pues juzga que las raíces imaginarias de una ecuación binomia de grado $p—1$ deben ser la representación analítica de las raíces primitivas del número de que se trata, y que consideradas como residuos relativos á dicho número primo p, deben ser equivalentes, y así, añadiendo á los números colocados bajo los radicales, múltiplos convenientes de este número primo (lo que no puede alterar los valores de los residuos) estas expresiones imaginarias se hacen reales, racionales y enteras, produciendo exactamente las raíces primitivas, de manera que lo cierto acerca de las raíces imaginarias bajo el punto de vista de la igualdad absoluta, lo será de los números enteros correspondientes, bajo el concepto de sus residuos respecto al número que se considera, correspondiendo así las ecuaciones á teoremas de análisis indeterminado.

Estas principales consideraciones, unidas á las propiedades de las raíces primitivas de un número primo impar ó de una de sus potencias, ó del doble de alguna en las mismas ó de una potencia de 2, la teoría de los índices tan semejante á la de los logaritmos y, en fin, los procedimientos para obtenerlas, constituyen lo culminante de la parte del Álgebra de que se trata, que principalmente se refiere á la idea de orden y de periodicidad.

Teoría de las sustituciones.—La teoría de las sustituciones encierra los principios combinatorios que, aplicados al modo de constitución de las funciones, forman los fundamentos de la teoría de las ecuaciones algebraicas.

Una sustitución es circular ó se halla formada por ciclos, y estos ciclos producen sus varias evoluciones en períodos determinados por el orden de la sustitución ó el número de veces que esta debe efectuarse de una manera sucesiva para producir la permutación primitiva. La potencia de una sustitución circular conduce, ya á otra sustitución también circular, que puede hacerse corresponder á un polígono regular estrellado, ya á una sustitución regular compuesta de θ ciclos de orden $\frac{n}{\theta}$ (si el grado de la potencia m y el orden n de la sustitución tienen el máximo común divisor θ), que puede hacerse corresponder á otros tantos polígonos regulares, de la misma manera que se dijo respecto á las congruencias binomias al tratar del problema de la división del círculo. La propiedad de los sistemas conjugados, consistente en que el orden de un sistema que contiene todas las sustituciones de otro, es un múltiplo del de éste, permite la agrupación de las de aquél en cierto número de series formadas multiplicando las de éste por sustituciones no pertenecientes al mismo, es fundamental no sólo en la teoría de las sustituciones, sino en las aplicaciones de ésta á la de las funciones, y desde luego resultan los importantes corolarios relativos á la divisibilidad de la factorial $n!$ por el orden de un sistema conjugado de n letras, á la divisibilidad de este orden por el de una cualquiera de las sustituciones de dicho sistema, etc.

A las nociones fundamentales sobre los sistemas, debe necesariamente seguir la resolución de los varios problemas que hasta el día resuelven parcialmente el problema general consistente en obtener los sistemas de sustituciones conjugadas que se pueden formar con n letras, de los cuales los que comprenden las $n!$ sustituciones y todas las potencias de una sustitución cualquiera son los inmediatamente conocidos; y en fin, las interesantes cuestiones de los *índices* de los sistemas y de la *transitividad* deben ser conocidos para pasar á las proposiciones en que inmediatamente se funda la teoría de las ecuaciones algebraicas; pero como ésta, según el modo actual de hallarse constituída la ciencia, depende, no sólo de la eliminación, sino de la teoría de las funciones simétricas, preciso es anteponer tales cuestiones en la exposición del Álgebra.

Eliminación, funciones simétricas y alternadas.—Difícil es fijar el orden de sucesión entre la teoría de la eliminación ó de la resultante y las de las funciones simétricas y alternadas, ó mejor de las determinantes, pues cada una interviene é influye en el desarrollo de las demás por esa compenetración de las ideas de que se trató al considerar la trama ó encadenamiento de verdades que constituyen y pueden constituir, según formas diversas, el organismo científico. Pero buscando la mayor independencia posible, dada la actual extensión é importancia de cada teoría, la eliminación que en sí envuelve la teoría de la resultante, á su vez especie de determinante, es también un procedimiento general aplicable á las demás; exige por esta razón un lugar preferente, pues ya el procedimiento fundado en el máximo común divisor, ya los de Bezout, Euler, Sylvester, etc., fundados en el método de los coeficientes indeterminados, no exigen el concurso de las demás teorías.

Las propiedades de las funciones simétricas y alternadas, es decir, las invariables en valor y signo, y las variables tan solo en éste por efecto de la permutación de dos de las cantidades, se refieren exclusivamente al concepto de combinación.

Aunque las funciones simétricas tienen este carácter, hoy su teoría se halla enclavada en los dominios de la continuidad, pues su principio fundamental es el conocido teorema de Newton, que establece la relación entre las funciones simétricas de las raíces de una ecuación y los coeficientes de ésta. Pero el carácter combinatorio se hace predominante cuando nos elevamos á las funciones de órdenes superiores, donde las analogías con los sistemas de sustituciones conjugadas se manifiestan *(Tratado de Álgebra*, p. II, págs. 393 y 394), y á su vez esta teoría conduce á un procedimiento muy importante de eliminación, al realizar su fin de establecer una correlación entre funciones simétricas de las raíces y funciones de los coeficientes de una ecuación cualquiera.

La teoría de las funciones alternadas se halla incluída en la de las determinantes cuyo origen hallan algunos autores en la teoría de la eliminación, haciendo aparecer la determinante como una resultante; pero sin necesidad de una dependencia que sólo tiene un carácter accidental, debido á la solidaridad de las ideas, dicha teoría aparece como una especie de cálculo combinatorio á la manera que Cauchy lo consideró en sus *Clefs algébriques,* siendo la discriminante, la hessiana y la jacobiana, las tres especies de determinantes funcionales que deben estudiarse en el Álgebra.

§ 5.º—Examen de la teoría de las formas homogéneas.

La teoría de las formas homogéneas en su mayor extensión es la parte del Análisis conocida con el nombre de *Álgebra de las formas.* Aunque de origen muy reciente, sus considerables progresos le han dado un lugar de gran importancia en el plan que hoy comprende el Análisis, formando una teoría de carácter esencialmente combinatorio, y además sus íntimas conexiones con el antiguo Análisis de fines esencialmente cuantitativos ó referentes á la expresión ó determinación del *valor* ó la *medida,* y con la Geometría, se han traducido en correlaciones de forma ó de posición, en que se prescinde de la evaluación ó relación cuantitativa y de la extensión.

Las formas homogéneas *(quantics,* según la denominación de Cayley) son el sujeto ó materia sobre que se efectúan ciertas modificaciones expresadas por símbolos de operaciones ú operadores, que constituyen el verdadero manantial ú origen de la especie de funciones consideradas en la rama del Análisis de que se trata. Las transformaciones lineales, produciendo los nuevos coeficientes de la forma, ó sea los de su transformada, ofrecen los elementos de dichas funciones que satisfacen á la relación fundamental expresada en el siguiente teorema: *los nuevos coeficientes* $A_0, A_1, \ldots, A_n$, *son funciones homogéneas de grado igual al de la forma dada, con relación á las constantes de la substitución, y lineales con relación á los antiguos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

El fin de pura correspondencia entre los coeficientes y variables de una forma y su transformada, realizado por las diversas especies de funciones denominadas invariantes, covariantes, etc., hace depender en algunas circunstancias el Álgebra de las formas del principio que el teorema de Newton constituye respecto á la relación existente entre las funciones simétricas de las raíces y los coeficientes de una ecuación.

El Álgebra de las formas, como organismo, no ofrece actualmente la natural distinción que debe existir entre la parte teórica ó referente á las propiedades y la de carácter práctico destinada á dar procedimientos que produzcan nuevas formas por medio de las ya obtenidas. Así, la resultante, la discriminante, la jacobiana y la hessiana son funciones que, no sólo sintetizan importantes propiedades de la teoría de las formas homogéneas, sino que además expresan por su modo de obtención procedimientos varios para obtener invariantes y covariantes, y análogamente, la propiedad de éstas consistente en satisfacer ciertas ecuaciones diferenciales, ó *ecuaciones características*, es el fundamento de un método de obtención.

Siendo la invariante de una covariante una invariante, la covariante de una covariante otra covariante, las emanantes de diversos órdenes, así como las invariantes de las emanantes covariantes, y la cataleticante, y la intermutante, etc., estas relaciones existentes entre unas y otras especies de formas, son otros tantos métodos para deducirlas. Pero entre los métodos que tienen un carácter sistemático, á parte del de las ecuaciones de derivadas, arriba citado, que se funda en el método de coeficientes indeterminados, el método de Cayley, fundado en el símbolo de operación

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}-\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{ó} \quad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2 \quad \text{ó} \quad \overline{12}$$

y sus productos y potencias, es un procedimiento regular para obtener invariantes y covariantes de una forma ó de sistemas de formas.

También el algoritmo de Aronhold y Clebsch es un método simbólico aplicable á obtener de una manera uniforme invariantes y covariantes de formas que contengan cualquier número de variables cuya expresión simbólica $(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots\ldots)^n$ debe de ser desarrollada según la regla de las potencias, para después substituirse productos como el $a_i\,a_j\,a_k$ por el coeficiente a_{ijk}, teniéndose que

$$(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^n\equiv(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^n\equiv\ldots..;$$

y reduciéndose la regla para obtener invariantes y covariantes á formar con los coeficientes $a_1, a_2,\ldots.., b_1, b_2,\ldots.., c_1, c_2,\ldots..$, cierto número de determinantes que deben ser multiplicados para después hacer la sustitución arriba indicada de $a_i\,a_j\,a_k$ por a_{ijk}, $b_m b_n b_p$ por $b_{mnp},\ldots$

Además de este examen individual de las formas, hay una manera sistemática de considerarlas, y así juntamente con cada forma se halla el número de invariantes y de covariantes fundamentales correspondientes, problema que depende del de la partición de los números y que conduce á la *ley de reciprocidad* de Hermite, característica de las formas binarias y las covariantes asociadas ó los coeficientes $\psi_0, \psi_1,\ldots..$, de las diversas potencias de X, Y del desarrollo

$$f\left(xX-\frac{1}{s}\frac{d\psi}{dx}Y\,,\ yX+\frac{1}{s}\frac{d\psi}{dy}Y\right)=(\psi_0, \psi_1,\ldots.., \psi_n)\,(X, Y)^n,$$

que resulta del siguiente

$$\varphi(x_1, y_1)=\varphi\left(xX-\frac{1}{s}\frac{d\psi}{dy}Y\,,\ yX+\frac{1}{s}\frac{d\psi}{dx}Y\right),$$

en el que $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son dos covariantes de la forma binaria $f(x_0,\ldots.., a_n)\,(x, y)^n$ de los órdenes m y s respectivamente y en el caso de ser la covariante φ la misma forma f, ofrecen otro caso correspondiente al estudio sistemático de las formas.

§ 6.º—Examen de la teoría de las ecuaciones algebraicas.

El problema fundamental en la resolución algebraica de las ecuaciones es el que determina *la ecuación de que depende una función racional y no simétrica de las raíces de una ecuación dada,* que á su vez depende de la relación entre las funciones simétricas de las raíces de una ecuación y sus coeficientes. Así, las funciones simétricas de las raíces aparecen como términos medios entre los coeficientes de una y otra ecuación. El problema de que se trata, pues, determina un enlace entre los coeficientes de dos ecuaciones cualesquiera correspondiente á un enlace establecido entre sus raíces. Pero además de este problema fundamental hay que considerar la teoría de las sustituciones, puesto que existe también una necesaria correspondencia entre el modo de distribución de las raíces en los ciclos de las sustituciones y en los sistemas conjugados y la distribución de las raíces en las ecuaciones.

En efecto, una función puede ser simétrica, en cuyo caso los $n!$ valores que adquiere por todas las sustituciones que pueden efectuarse entre sus raíces son iguales, y puede no ofrecer ninguna simetría, de manera que dichos valores sean todos desiguales. Pero puede suceder también que sólo j valores de la función resulten iguales, formando entonces las j sustituciones correspondientes un sistema conjugado, y como en este caso las $n!=ij$ sustituciones del sistema total se distribuyen en i series de sustituciones, las $n!$ funciones correspondientes admitirán la misma distribución, exigiendo este resultado el distinguir las funciones que *admiten* una sustitución, es decir, que no alteran por ella, el cual se reduce á enunciar que las sustituciones de una función de diversas variables forman un sistema conjugado, y además que el índice de éste es igual al número de valores distintos que la función puede adquirir por las sustituciones, pues de $ij=n!$, resulta $i=\frac{n!}{j}$. Establecida esta proposición y su recíproca, que expresa la existencia de funciones que admiten

exclusivamente las sustituciones de un sistema dado, es decir, establecida la correlación fundamental entre las funciones y los sistemas conjugados de sustituciones, puede enunciarse y demostrarse la propiedad de las funciones semejantes debida á Lagrange, que establece el enlace racional de dos de estas funciones, es decir, la posibilidad de expresarse cada una de dos funciones semejantes de n variables por una función racional de la otra, en la cual los coeficientes son funciones simétricas de n variables, y aun mejor, la proposición que enuncia tal modo de expresarse una función por medio de otra, cuando admite todas las sustituciones de ésta. Pero además de establecer esta proposición, Lagrange dió á conocer su método, fundado en dichas consideraciones, para calcular una función de las raíces de una ecuación, cuando se conoce otra función cualquiera de las raíces *(Mem. de l'Acad. de Berlin 1770 y 1771),* y Galois en su notable Memoria *Sur les conditions de resolubilité, etc. (Jour. de Math. pures., etc., 1846)* demostró que: *Si* $f(x)=0$ *es una ecuación cualquiera de grado* n, *que no tiene raíces iguales y* $V=\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ *es una función racional de las raíces* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ *de la ecuación propuesta, de tal modo elegida, que los* $1.2.3.\ldots n$ *valores que adquiere por las sustituciones de las raíces sean todos diferentes, se podrán expresar estas raíces* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *en función de* V; y este conjunto de proposiciones deben preceder en el plan del Álgebra á la teoría de las ecuaciones abelianas ó resolubles por medio de radicales, de manera que después de haberse demostrado la imposibilidad de resolverse el problema general de la teoría de las ecuaciones, es preciso exponerse la teoría de las que pueden resolverse manifestando los procedimientos conducentes á este fin. Esta cuestión del Álgebra se resume en las investigaciones de Abel y de Galois.

Por consiguiente: las investigaciones de Abel, dependientes de la posibilidad de reducirse la resolución de una ecuación irreducible á la de otras de grados menores, cuando dos de sus raíces se hallan ligadas entre sí, de manera que la una pueda expresarse en función racional de la otra y las de Galois relativas á la reducción de los sistemas conjugados propios de una ecuación por efecto de la adjunción de ciertas raíces, deben constituir hoy la teoría de la resolución algebraica de las ecuaciones.

La distribución de las raíces de una ecuación $f(x)=0$, cuando dos de sus raíces x' y x_1 se hallan ligadas entre sí por la ecuación racional $x'=\theta x_1$, en los grupos de n raíces cada uno,

$$x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots; x_2, \theta x_2, \theta^2 x_2, \ldots; x_m, \theta x_m, \theta^2 x_m, \ldots,$$

que expresan las relaciones de periodicidad,

$$\theta^{m+n} x_1=\theta^m x_1, \theta^{m+k} x_2=\theta^k x_2, \ldots, \theta^{m+r} x_m=\theta^r x_m,$$

de manera que una ecuación irreducible de grado $i=mn$ se reduce á la resolución de m ecuaciones de grado n, cuyos coeficientes pueden expresarse racionalmente por una misma función que depende de una ecuación de grado m, la cual, en general, no es resoluble algebraicamente, cuando su grado excede del cuarto; pero las otras lo son siempre cuando se suponen conocidos dichos coeficientes.

Cuando $m=1$, la propuesta es resoluble algebraicamente y se obtienen las raíces bajo la forma

$$x=\frac{1}{i}[-A+\sqrt[i]{v_1}+\frac{a_2}{v_1}(\sqrt[i]{v_1})^2+\ldots+\frac{a_{i-1}}{v_1}(\sqrt[i]{v_1})^{i-1}],$$

según se expresa en las obras de Abel (T. I., pág. 491, 1881), por un procedimiento análogo al que siguió Gauss para resolver las ecuaciones de que depende la división del círculo.

Cuando además de $m=1$ las cantidades contenidas en $f(x)$ y θx son todas reales, dicha fórmula se convierte en una función de las expresiones

$$\cos\frac{\omega+2k\pi}{i}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\omega+2k\pi}{i},$$

$$\cos\frac{2(\omega+2k\pi)}{i}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2(\omega+2k\pi)}{i}, \ldots,$$

la cual expresa que la resolución en este caso conduce: 1.º, *á dividir la circunferencia en* i *partes iguales; 2.º, á dividir en seguida un ángulo, que se puede construir, en* i *partes iguales; 3.º, á extraer la raíz cuadrada de cierta cantidad* a.

En el caso general de ser $i=m_1 m_2 \ldots m_n$ el mismo procedimiento reduce la resolución del problema á la resolución de n ecuaciones cuyos grados son respectivamente $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y si descompuesto e en sus factores primos se tiene que $e=\varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_2^{p_2} \ldots e_h^{p_h}$, la resolución de la propuesta quedará reducida á la de p_1 ecuaciones de grado ε_1, de p_2 ecuaciones del grado $\varepsilon_2, \ldots$

En el otro caso de resolubilidad, es decir, cuando en una ecuación algebraica todas las raíces pueden expresarse racionalmente por medio de una de ellas x, y entre otras dos cualesquiera θx, $\theta_1 x$ se verifica la relación $\theta\theta_1 x=\theta_1\theta x$, fundándose en las consideraciones anteriores, como lo hace Abel (Id. pág. 502), se reduce también la resolución en la propuesta á la de otras ecuaciones resolubles algebraicamente, cuyos grados tienen por producto el grado de aquélla.

Expuesta la teoría de las ecuaciones abelianas con sus aplicaciones á las funciones circulares ó al problema de la división del círculo, la teoría general de las ecuaciones algebraicas tendrá su complemento en el desarrollo de las investigaciones de Galois, que según se ha indicado estriban en el procedimiento de la adjunción, y se hallan fundadas en las propiedades de los sistemas de sustituciones conjugadas. Así, para una ecuación $f(x)=0$ de grado n, cuyas raíces son desiguales, existe siempre un sistema G de sustituciones conjugadas tal, que toda función racional de las raíces cuyo valor numérico es invariable por las sustituciones de G, sea expresable en función racional de las cantidades conocidas, y que, recíprocamente, toda función racional de las raíces, expresable racionalmente por las cantidades conocidas, conserve el mismo valor numérico cuando se le aplican las sustituciones de G. Además, la teoría de la adjunción de Galois, cuyo fin es reducir sucesivamente dicho sistema G, *propio de la ecuación propuesta,* á otros cuyos órdenes sean submúltiplos de éste, que conduzcan á la distribución de las raíces en cierto número de grupos, en conformidad con las indicaciones arriba expuestas, son las cuestiones que deben ser expuestas y desarrolladas en la parte del Álgebra de que finalmente nos hemos ocupado.

Todo cuanto se acaba de exponer brevemente, expresa el conjunto de las teorías que deben concurrir á la constitución del Álgebra, en conformidad con los resultados obtenidos por los más ilustres matemáticos, é impone la necesidad de reformar en España los planes de enseñanza y los programas, si no queremos permanecer extraños á cuanto han realizado con sus esfuerzos los matemáticos del presente siglo en la obra del acrecentamiento y sistematización de dicha rama de la Matemática. Y pronto tendremos ocasión de insistir en la cuestión de la enseñanza, que debe ir íntimamente ligada con el desenvolvimiento de la filosofía de la Ciencia.

FIN

Erratas: En la página 12 dice: «Gedua», léase «de Gua»; en la 120, línea 20, «en concepto», léase «el concepto»; en la 112, línea 16, «$<$», léase «$>$».