DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ecuaciones Diferenciales. Primer Parcial, 17-02-2005.

EJERCICIO 1. Se considera la ecuación diferencial

$$(x^4 - 3t^2)x' = -tx.$$

Se pide:

i) Determina el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el cambio de variable $x = y^\alpha$ trasforme la ecuación anterior en una ecuación homogénea.

ii) Encuentra la solución que cumple $x(1) = 1$. ¿Dónde está definida dicha solución?

EJERCICIO 2. Demuestra el siguiente teorema de comparación de Sturm: "Dadas $p \in C^1(a,b)$ y $q_i \in C(a,b)$, $i = 1, 2$, con $q_1(t) < q_2(t)$, $\forall t \in (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, se consideran las ecuaciones

$$(1) \qquad (p(t)x')' + q_1(t)x = 0,$$

$$(2) \qquad (p(t)x')' + q_2(t)x = 0.$$

Entonces, entre cada dos ceros de una solución de la ecuación (1), se anula toda solución de la ecuación (2)."

EJERCICIO 3. Se considera la ecuación diferencial lineal

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

i) Estudia la acotación y convergencia de la ecuación homogénea asociada y dibuja el correspondiente diagrama de fases.

ii) Demuestra que la ecuación completa tiene una única solución 2π-periódica a la cual convergen el resto de las soluciones.

EJERCICIO 4. Se considera la ecuación de Chebyshev

$$(1 - t^2)x'' - tx' + p^2 x = 0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

a) Clasifica sus puntos singulares.

b) Decide, de forma razonada, si esta ecuación admite soluciones analíticas en $t_0 = 0$. En caso afirmativo, ¿qué se puede decir sobre el radio de convergencia de su serie de potencias?

c) Determina para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior admite como solución un polinomio (*polinomios de Chebyshev*).

d) Determina, previo rebajamiento de orden, la solución general de la ecuación para $p = 0$.