Fundamentos de Biología Aplicada I - (Ldo. en Biología. Cuarto Curso)

Relación de ejercicios Nº 2. Curso 2009-2010.

1. *Decide si las siguientes matrices admiten inversa. En caso afirmativo, calcula dicha inversa.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -9 & -18 & 26 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. *Decide, en cada caso, si el vector v es vector propio de la matriz dada:*

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 0 & 34 & 6 \\ 0 & -6 & 71 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. *Sea una matriz $A \in \mathfrak{M}_{2\times 2}$ tal que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$ son sus valores propios con vectores propios $v_1 = (1,-2)^T$ y $v_2 = (1,0)^T$ respectivamente. Calcula A.*

4. *En un modelo de Leslie, $X_{n+1} = LX_n$, la población está dividida en tres grupos de edad (G_1, G_2 y G_3). La matriz de Leslie es*

$$\begin{pmatrix} 0'1 & 0'9 & 0'2 \\ 0'4 & 0 & 0 \\ 0 & 0'3 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) *¿Cuál es la tasa de supervivencia de G_1 a G_2? ¿Y de G_2 a G_3? ¿Y de G_1 a G_3?*

   b) *¿Cuáles son las tasas de fertilidad?*

   c) *Se supone que la población inicial está dada por $X_0 = (10, 20, 15)^T$. Calcula la población tras dos periodos.*

5. *Una población se estructura en dos grupos de edad (G_1 y G_2). La tasa de fecundidad de G_1 es 1'2 y la de G_2 es 2'3. Además, la tasa de supervivencia para G_1 es $0'6$. Determina la matriz de Leslie L para esta población y decide qué ocurrirá con la población a largo plazo. (Sugerencia: método de las potencias)*

6. *La dinámica de una población, dividida en cuatro grupos de edad, viene dada por la ecuación $X_{n+1} = LX_n$, donde L es una matriz de Leslie que tiene como valor propio dominante $\lambda = 1'01$ y con un vector propio dominante dado por $v = (2,3,4,1)^t$.*

   a) *¿Qué puedes decir sobre el aumento o disminución de la población total a largo plazo?*

   b) *¿Qué puedes decir sobre la distribución por grupos de la población a largo plazo?*

   c) *Esboza la pirámide de edades.*

7. *Una determinada planta puede presentar flores de uno de estos tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Considera el siguiente programa de polinización:*

   - *Las plantas de flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).*
   - *Las plantas de flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).*
   - *Las plantas de flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).*

   Se pide que

   a) *calcules la matriz de transición de dicho diseño.*

   b) *sabiendo que la matriz obtenida en el apartado anterior es de probabilidad y ergódica, justifiques cuál será el vector de proporción para este experimento, esto es, qué proporción de cada color se dará a largo plazo.*

8. *Interpreta, desde un punto de vista biológico, el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0'3 & 0'5 \\ 0'4 & 0 & 0'5 \\ 0'6 & 0'7 & 0 \end{pmatrix} P_n.$$

9. *Considera el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:*

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 0'35 & 0'52 \\ 0'65 & 0'48 \end{pmatrix} P_n.$$

   a) *Plantea una situación real que se ajuste a esta ecuación en diferencias.*
   b) *Comprueba, de manera justificada, que el vector $v = (4,5)^T$ es un vector propio de la matriz asociada al sistema.*
   c) *Determina, de manera justificada, cuál es el valor propio asociado al vector dado en b).*
   d) *Sabiendo que la matriz asociada al sistema es de probabilidad y ergódica, haz una interpretación, para la situación propuesta en a), de los elementos calculados en los apartados b) y c).*

10. *Se considera una población estructurada es dos estados (E_1 y E_2). Se sabe que la matriz de transición viene dada por*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   a) *Teniendo en cuenta que $(5,8)$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ y que $b = 2'5a$, calcula los valores de a, b, c, d.*
   b) *¿Es M ergódica?*
   c) *¿Qué puedes decir sobre el comportamiento de la población considerada a largo plazo?*

11. *Para una población estructurada por edades se sabe que la matriz de Leslie viene dada por*

$$L = \begin{pmatrix} 0'3 & 0'2 \\ 0'2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Además, $v = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$ es un vector propio de L.

   a) *Calcula el valor propio de la matriz de Leslie asociado al vector dado.*
   b) *Justifica por qué el valor propio calculado en el apartado anterior es dominante.*
   c) *¿Qué puedes decir sobre el comportamiento de la población considerada a largo plazo?*

12. *En un parque natural, en el que hay caballos en libertad, existen tres abrevaderos, A, B y C. Los encargados del parque han observado que la distribución de los caballos cada mañana en los diferentes abrevaderos viene determinada por la expresión*

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'2 & 0'6 & 0'3 \\ 0'4 & 0 & 0'2 \\ 0'4 & 0'4 & 0'5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix},$$

   donde A_n, B_n y C_n denotan, respectivamente, los caballos que han bebido en A, B y C en un determinado día.

   a) *Determina la proporción de caballos que un día beben en B y al siguiente se van a A.*
   b) *Determina la proporción de caballos que un día beben en B y al siguiente se van a C.*
   c) *Determina la proporción de caballos que un día beben en C y al siguiente vuelven a C.*
   d) *Justifica que $v = \left(\frac{3}{2}, 1, 2\right)^t$ es un vector propio dominante de la matriz de transición asociada al modelo anterior.*
   e) *Si dispones de 9 toneladas de comida para ayudar a la alimentación de los caballos en una época de sequía, ¿cómo debes distribuir la comida entre los abrevaderos para que el reparto sea equitativo?*