Ecuaciones en Diferencias

Octubre 1995

Ecuaciones en diferencias

Estudiamos leyes del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada.
Si tomamos como punto de partida un número $x_0 \in \mathbb{R}$ podemos construir de modo recursivo una sucesión

$x_0, \ x_1 = f(x_0), \ x_2 = f(x_1), \ \ldots$

La sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es una solución de la ecuación en diferencias y x_0 recibe el nombre de condición inicial.
Observamos que a cada condición inicial le corresponde una única solución.

Ejemplos

1. $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$

En este caso $f(x) = \frac{1}{2} x$ es lineal
Construimos soluciones con distintas condiciones iniciales

$x_0 = 1 \ , \ x_1 = \frac{1}{2} x_0 = \frac{1}{2}, \ x_2 = \frac{1}{2} x_1 = \frac{1}{4}, \ x_3 = \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{8}, \ldots$

$$x_n = \frac{1}{2^n}$$

Solución $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \right\}$
(progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y término inicial 1)

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2}x_0 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 = 0, \dots, x_n = 0$

$$\{0, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

(solución constante)

$x_0 = -1,\ x_1 = \frac{1}{2}x_0 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{4}, \dots$

$$x_n = -\frac{1}{2^n}$$

$$\{-1, -\tfrac{1}{2}, \dots, -\tfrac{1}{2^n} \dots\}$$

(progresión geométrica de razón $+\frac{1}{2}$)

2. $x_{n+1} = 2x_n + 1$

La función $f(x) = 2x + 1$ es afín

Dada una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}$

$x_1 = 2x_0 + 1,\ x_2 = 2x_1 + 1 = 2^2 x_0 + 2 + 1,$

$x_3 = 2x_2 + 1 = 2^3 x_0 + 2^2 + 2 + 1, \dots$

$$x_n = 2^n x_0 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$$

Usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica también podemos escribir x_n como

$$x_n = 2^n x_0 + 2^n - 1$$

Recuerda: Si $a_n = a_0 r^n$ es una progresión geométrica

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \frac{a_n r - a_0}{r - 1}$$

Discutimos la fórmula de la solución según la condición inicial x_0.

$\boxed{x_0 = -1}$ $\quad x_n = -1$ Solución constante

$\boxed{x_0 > -1}$ $\quad x_n = 2^n \underbrace{(x_0+1)}_{>0} - 1 \longrightarrow +\infty$ si $n \to \infty$

$\boxed{x_0 < -1}$ $\quad x_n = 2^n \underbrace{(x_0+1)}_{<0} - 1 \longrightarrow -\infty$ si $n \to \infty$

3. $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} x_n (1 - x_n)$

$f(x) = x + \frac{1}{2} x (1-x)$ es cuadrática (no lineal)

$x_0 = 2$, $\quad x_1 = x_0 + \frac{1}{2} x_0 (1 - x_0) = 1$

$x_2 = x_1 + \frac{1}{2} x_1 (1 - x_1) = 1$

$x_3 = 1, \ldots, x_n = 1$

$\{2, 1, 1, \ldots\}$ Después de un paso la solución se estabiliza en 1

- $x_0 = 1$ $\quad x_n = 1 \quad \forall n$

$\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ Solución constante

$x_0 = 3$, $\quad x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots$

$\{3, 0, 0, \ldots 0 \ldots\}$

$x_0 = 0$ $\quad \{0, 0, \ldots 0 \ldots\}$

$x_0 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = -5$, $x_3 = -20, \ldots$

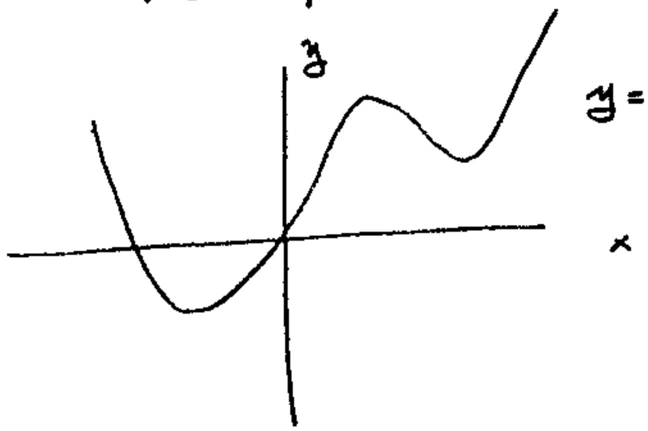
en este caso no es fácil obtener una fórmula general pero parece que la solución se va a $-\infty$, $x_n \to -\infty$.

Resolución gráfica

Imagina que estudiamos la ecuación

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

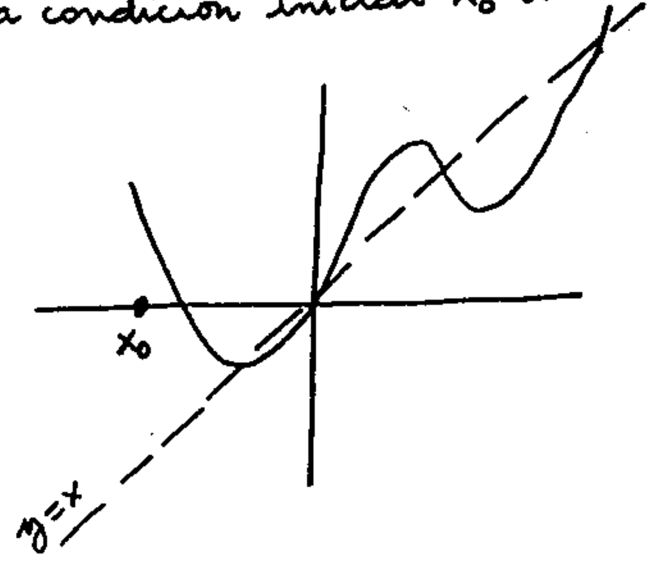
donde la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no está dada analíticamente (por fórmulas) sino por medio de su gráfica



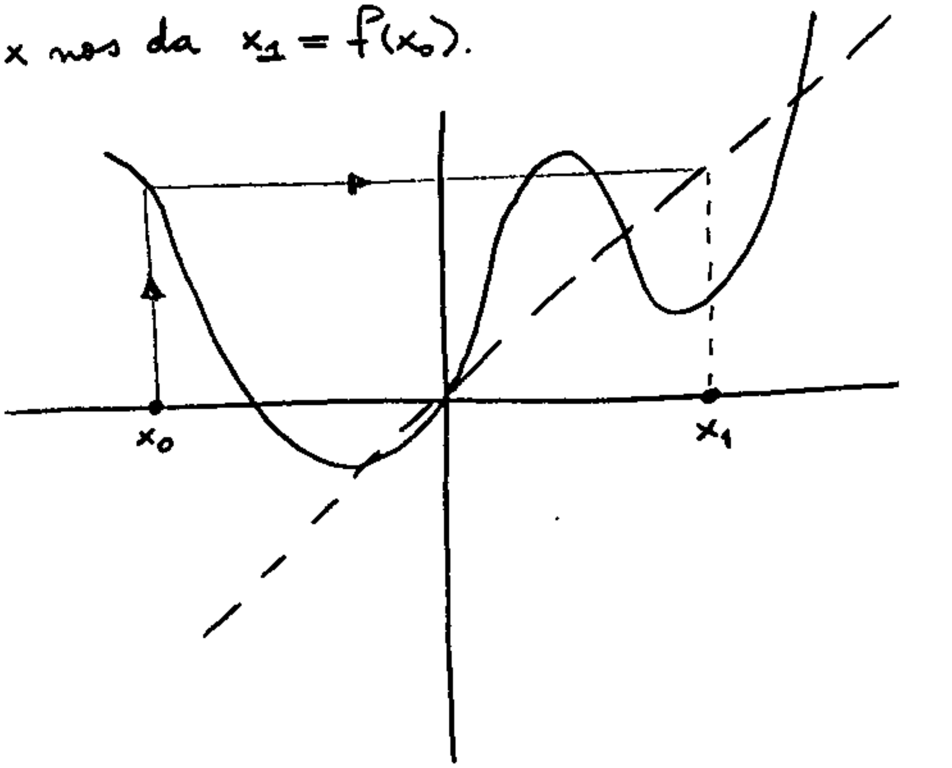
¿Podemos dibujar las soluciones de la ecuación en diferencias?

Sí, vamos a ver de qué manera.

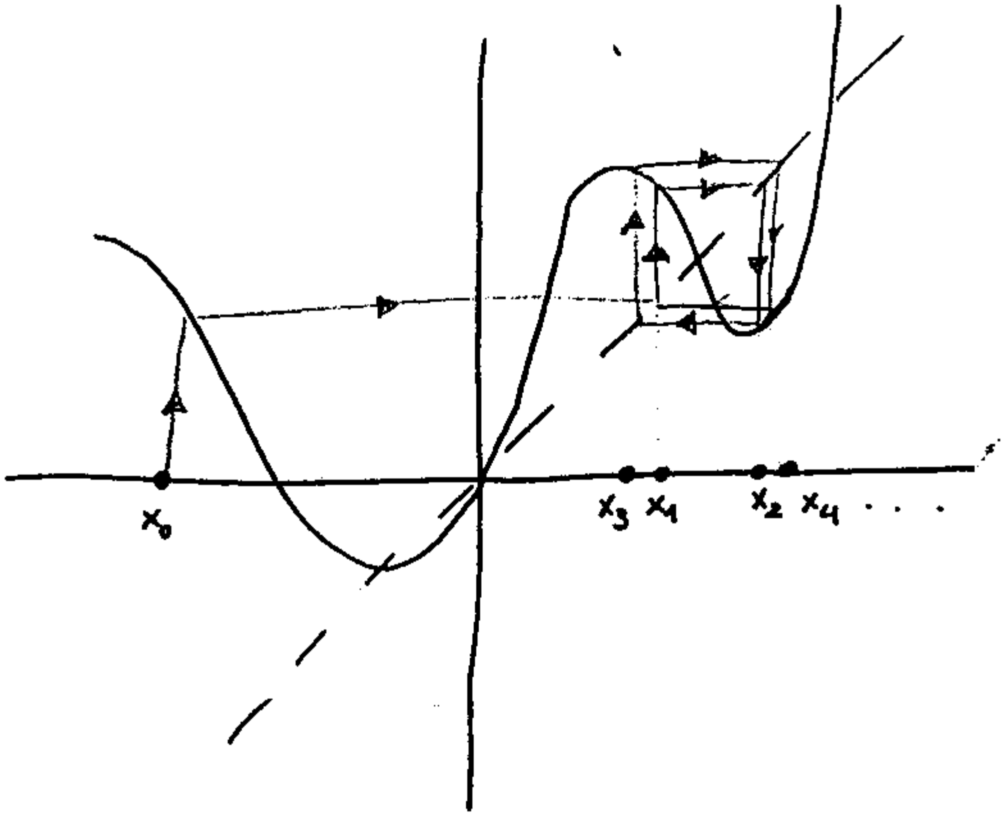
En primer lugar trazamos la diagonal $y = x$ y señalamos la condición inicial x_0 sobre el eje de abcisas



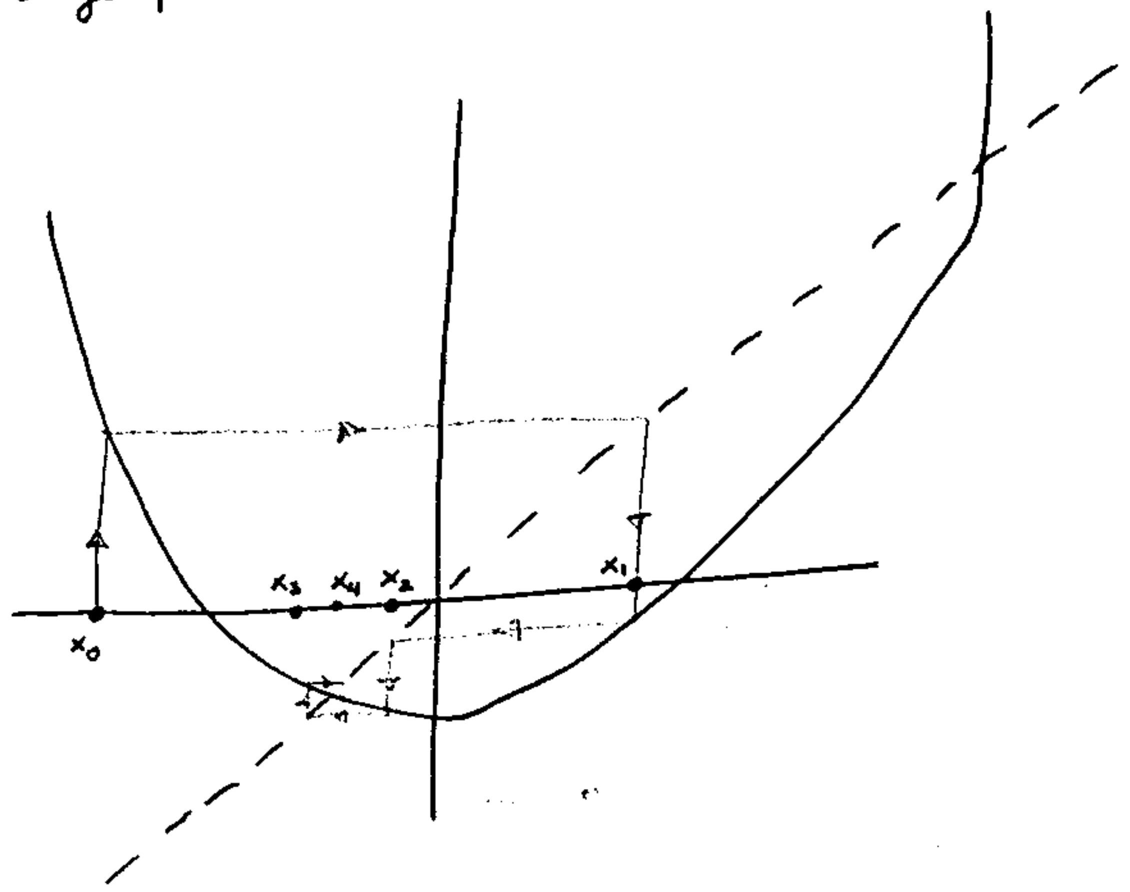
Desde $x=x_0$ trazamos una vertical hasta encontrar la gráfica $y=f(x)$. Calculamos así $f(x_0)$. Desde ese punto trazamos una horizontal hasta encontrar $y=x$. La proyección sobre el eje x nos da $x_1=f(x_0)$.



Podemos repetir el proceso muchas veces y obtener:



Otro ejemplo :



(Es claro que si continuamos nos vemos acercando al punto donde se cortan la parábola y la diagonal.)

La ecuación en diferencias lineal

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un número fijo. Vamos a estudiar la ecuación

$$x_{n+1} = \lambda x_n .$$

En este caso $f(x) = \lambda x$ es una función lineal.
Esta ecuación siempre admite la solución constante $x_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ que llamaremos solución trivial.
Buscamos las restantes soluciones. Sea x_0 la condición inicial

x_0, $x_1 = \lambda x_0$, $x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$, $x_3 = \lambda x_2 = \lambda^3 x_0, \dots$

$$x_n = \lambda^n x_0$$

Las soluciones $\{\lambda^n x_0\}_{n\geq 0}$ son progresiones geométricas de razón λ y término inicial x_0.

Discutimos las soluciones según los valores del parámetro λ.

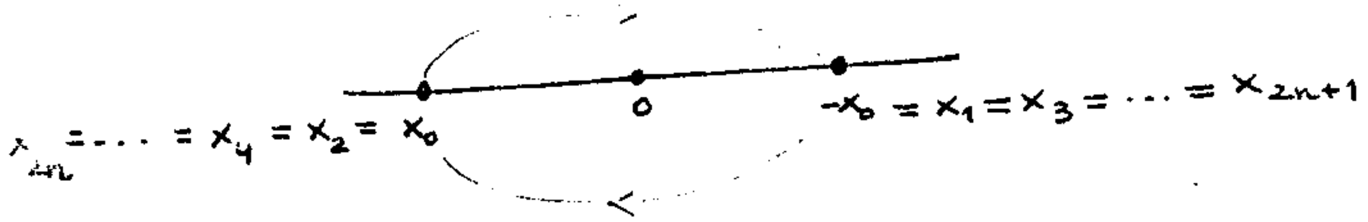
Hay algunos casos especiales muy simples:

$\boxed{\lambda = 1}$ $\quad x_n = x_0 \;\forall n \geq 1$ toda solución es constante

$\boxed{\lambda = -1}$ $\quad x_n = (-1)^n x_0 = \begin{cases} x_0 & n \text{ par} \\ -x_0 & n \text{ impar} \end{cases}$

Las soluciones son sucesiones alternadas

$$\{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots\}$$



$\boxed{\lambda = 0}$ $\quad x_n = 0,\; n \geq 1$

$$\{x_0, 0, 0, \dots, 0\}$$

Distinguimos ahora los siguientes casos

I $\quad 0 < \lambda < 1$

II $\quad -1 < \lambda < 0$

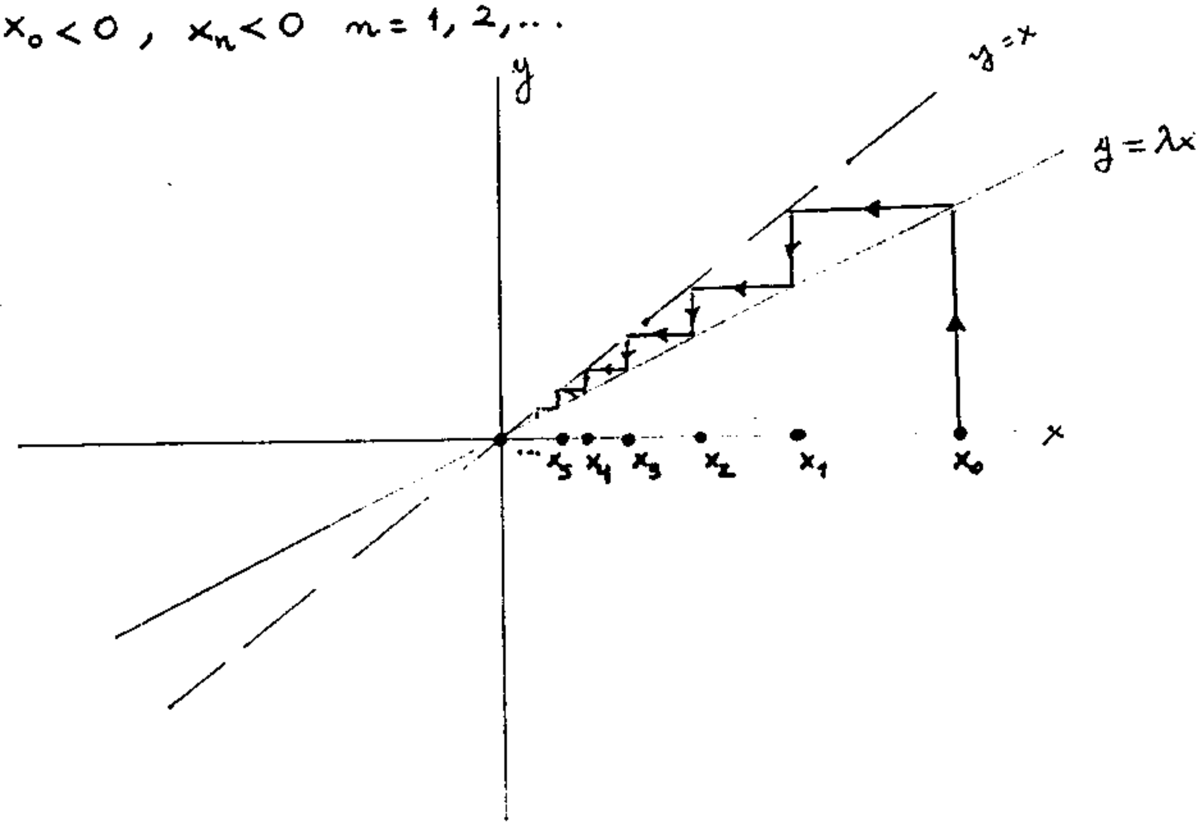
III $\quad \lambda > 1$

IV $\quad \lambda < -1$

(I) $x_n = \lambda^n x_0 \longrightarrow 0,\ n \to \infty \qquad (0<\lambda<1)$

Si $x_0 > 0$, $x_n > 0$ $n = 1, 2, \dots$

Si $x_0 < 0$, $x_n < 0$ $n = 1, 2, \dots$



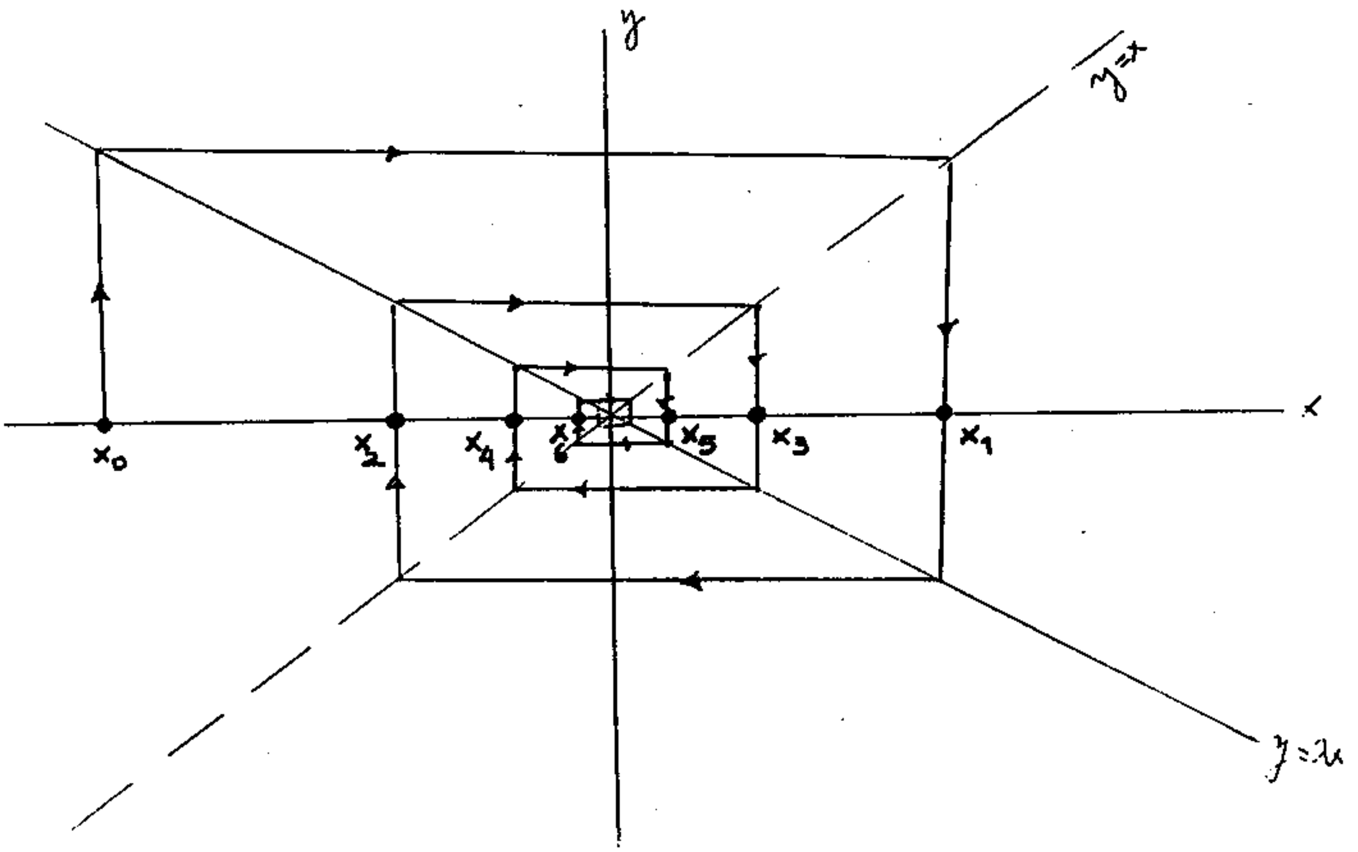
Hemos obtenido una escalera que desciende a 0.

¿Qué pasa si $x_0 < 0$?

(II) $x_n = \lambda^n x_0 \longrightarrow 0,\ n \to \infty \qquad (-1<\lambda<0)$

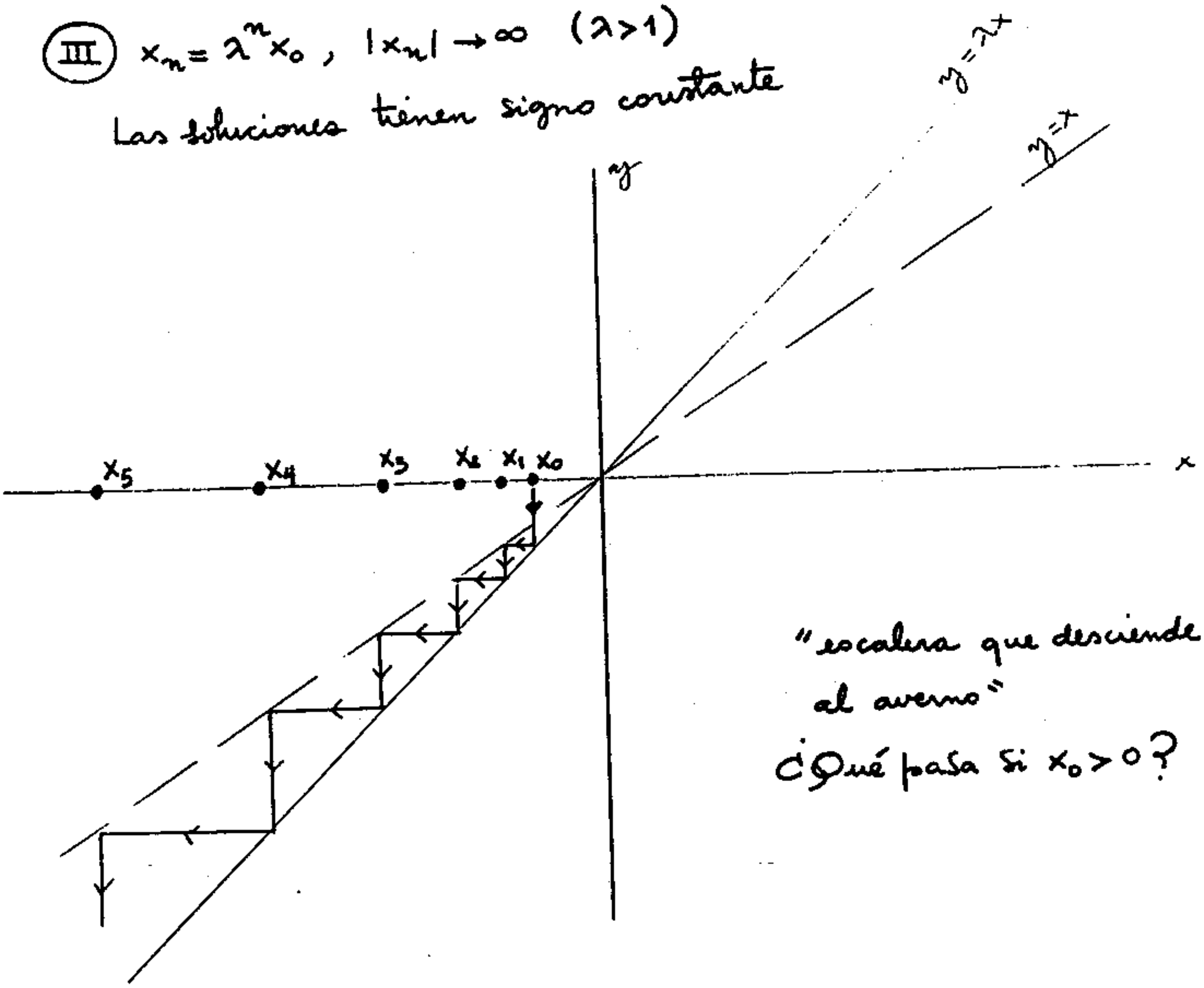
Como λ es negativo los signos de x_n y x_{n+1} son siempre opuestos, así que las soluciones van alternando el signo. Gráficamente obtenemos una figura conocida como "telaraña" y que hace una espiral hacia cero.

Lo vemos :



(III) $x_n = \lambda^n x_0$, $|x_n| \to \infty$ $(\lambda > 1)$

Las soluciones tienen signo constante

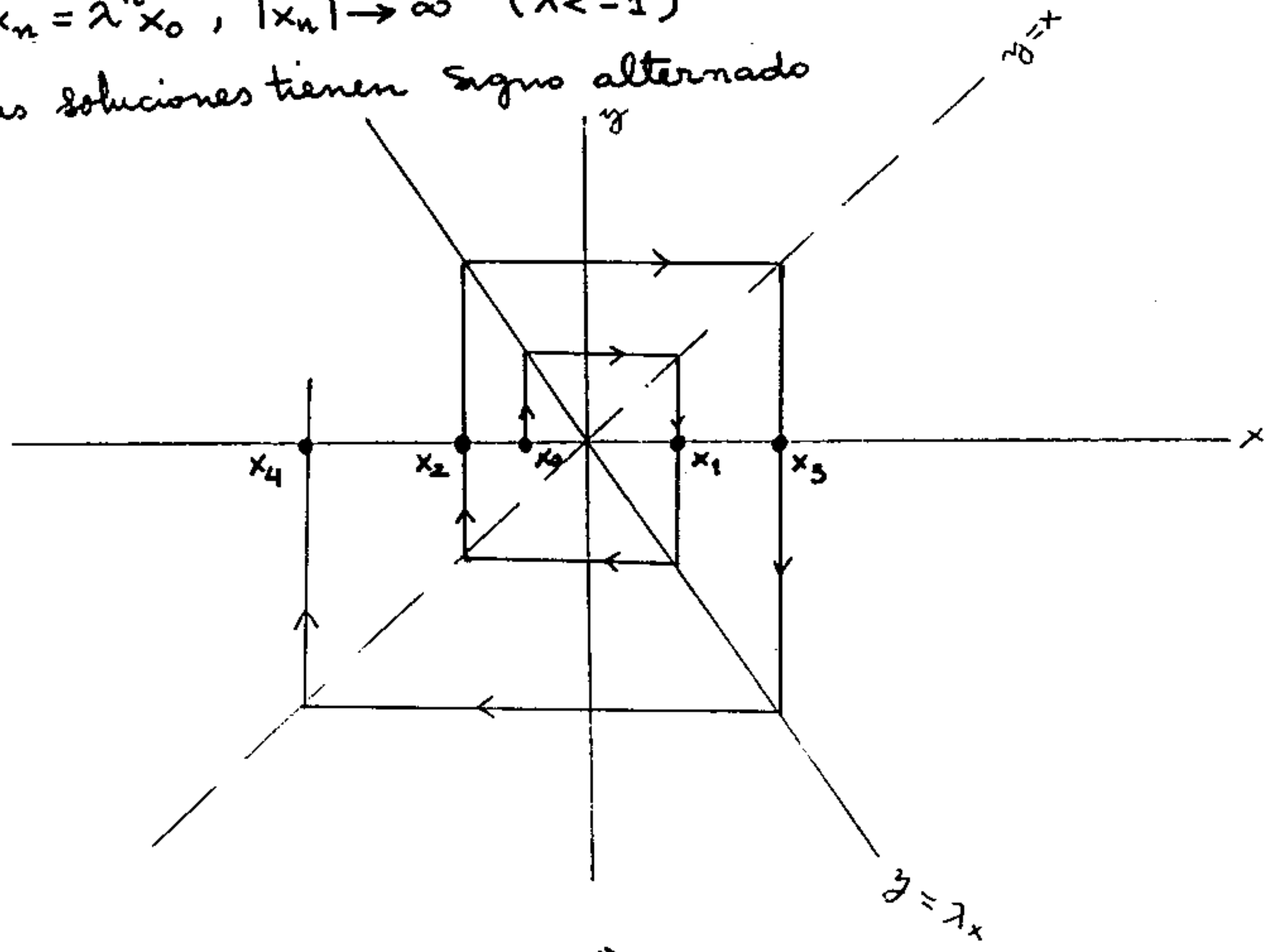


"escalera que desciende al averno"

¿Qué pasa si $x_0 > 0$?

IV $x_n = \lambda^n x_0$, $|x_n| \to \infty$ $(\lambda < -1)$

Las soluciones tienen signo alternado



"telaraña hacia infinito"

Soluciones constantes y puntos fijos

Volvemos a la ecuación en diferencias general,

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada.

Las soluciones más simples son las constantes; es decir

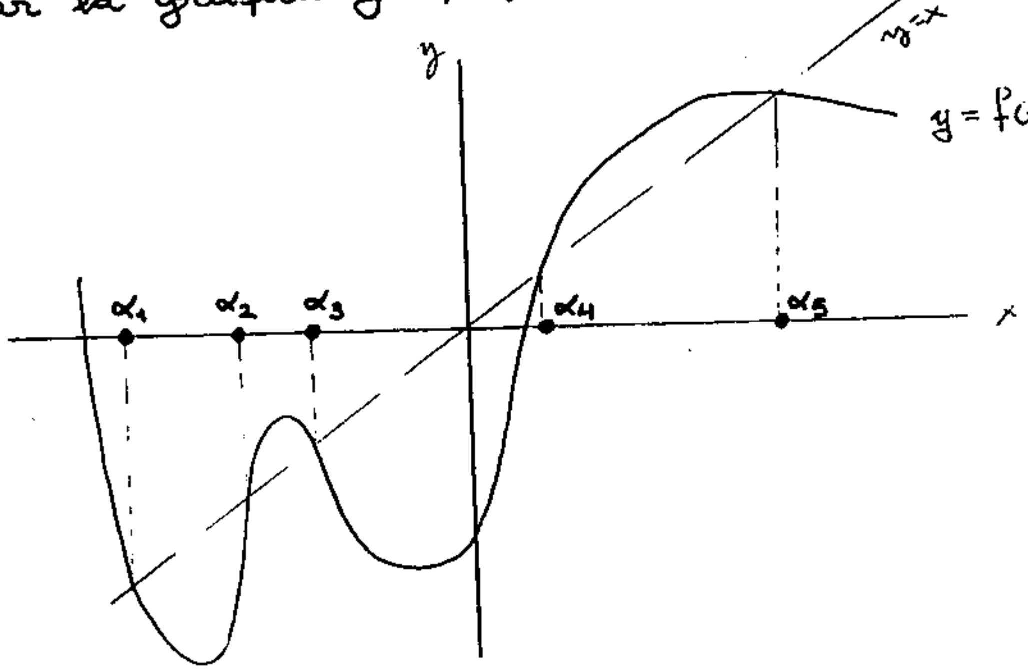
$$x_n = x_0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

La condición inicial $x_0 = \alpha$ produce una solución constante cuando cumple

$$\alpha = f(\alpha)$$

¿Por qué?

Los números α que cumplen esta ecuación se llaman <u>puntos fijos</u> de f, pues f los transforma en sí mismos.
Geométricamente los puntos fijos de f se obtienen al cortar la gráfica $y = f(x)$ con la diagonal $y = x$.

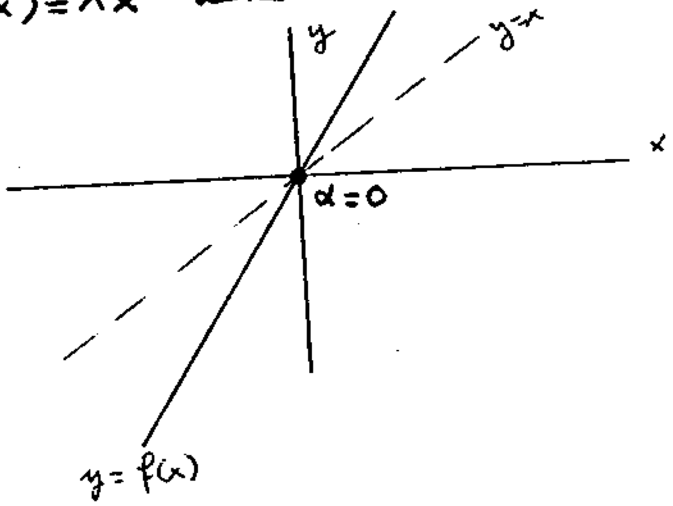


Estudiamos algunos <u>ejemplos</u>:

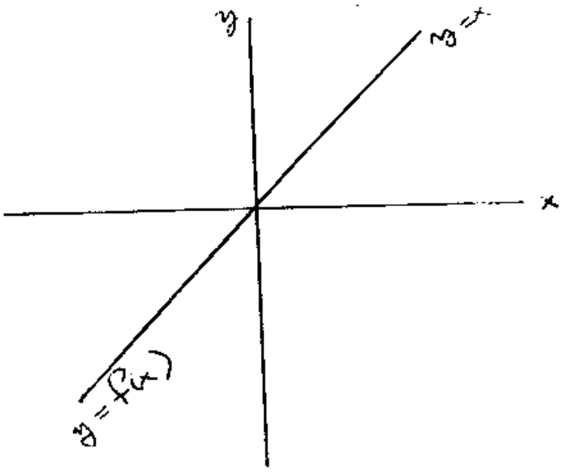
(1) La ecuación lineal $x_{n+1} = \lambda x_n$

Sabemos ya que $x_n = 0$ es una solución constante, si $\lambda \neq 1$ es la única pero si $\lambda = 1$ todas las soluciones son constantes. Dicho de otra manera

$\lambda \neq 1$, $f(x) = \lambda x$ tiene un único punto fijo ($\alpha = 0$)



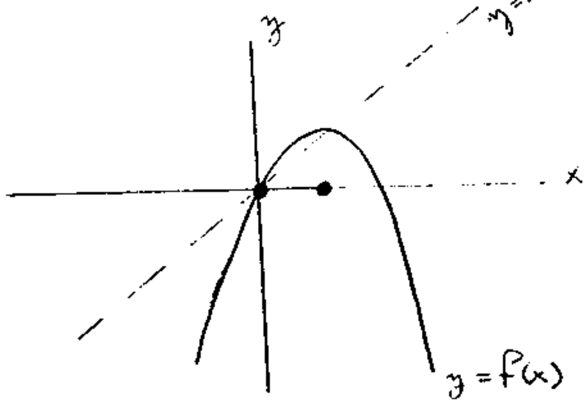
$\lambda = 1, \quad f(x) = x$ todo número real es punto fijo



② $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$

$f(x) = x(2-x), \qquad \alpha = \alpha(2-\alpha) \to \alpha = 0$; $\to 1 = 2 - \alpha, \ \alpha = 1$

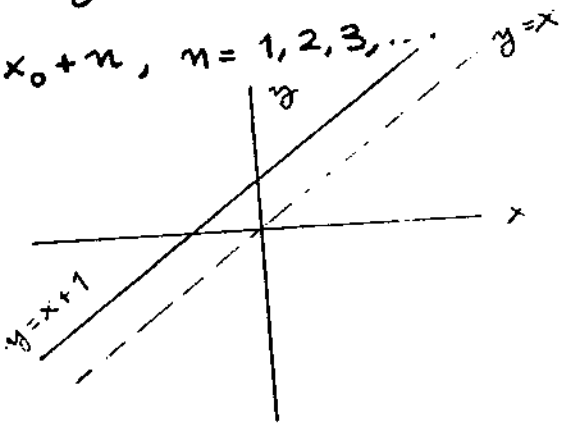
Los puntos fijos son $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$; por tanto hay dos soluciones constantes $x_n = 0$, $x_n = 1$.



③ $x_{n+1} = x_n + 1$

Es claro que no hay soluciones constantes pues

$x_n = x_0 + n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$



$f(x) = x + 1$ no tiene puntos fijos

Puntos fijos y estabilidad

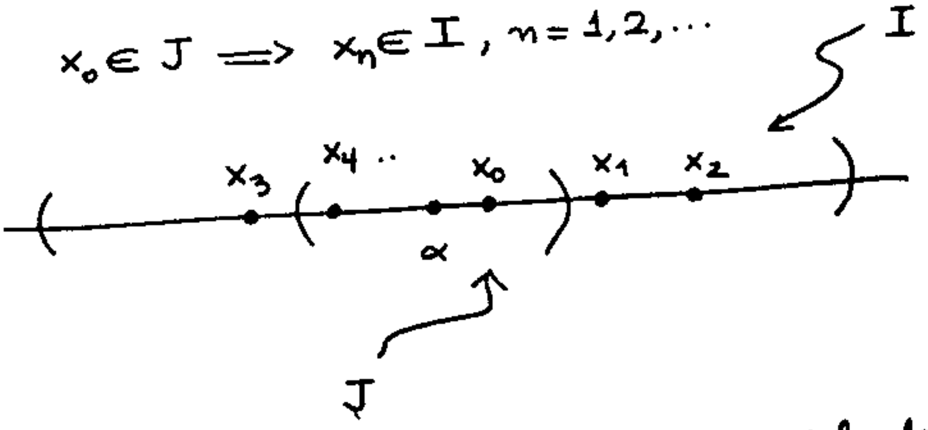
Sea α un punto fijo de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Pretendemos saber cómo se comportan las soluciones de

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

que empiezan próximas a α.

Definición 1 α se dice estable si para cada intervalo abierto I que contenga a α se puede encontrar otro intervalo abierto más pequeño J ($\alpha \in J \subseteq I$) de manera que si

$$x_0 \in J \Longrightarrow x_n \in I,\ n = 1, 2, \dots$$

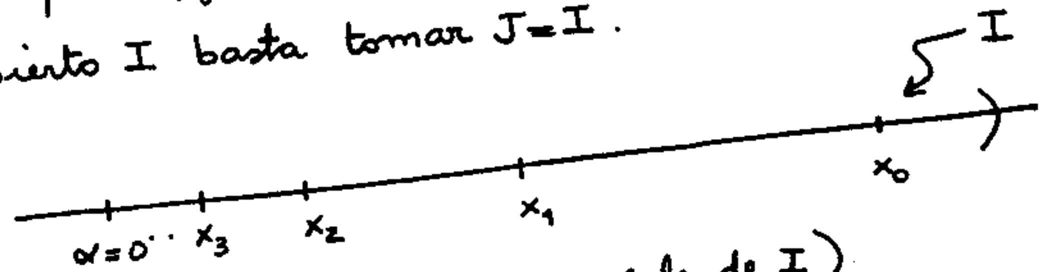


(Es decir, lo que empieza en J no se sale de I)

Ejemplos

1. $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$

El punto fijo $\alpha = 0$ es estable. Si nos dan un intervalo abierto I basta tomar $J = I$.



(Lo que empieza en I no se sale de I)

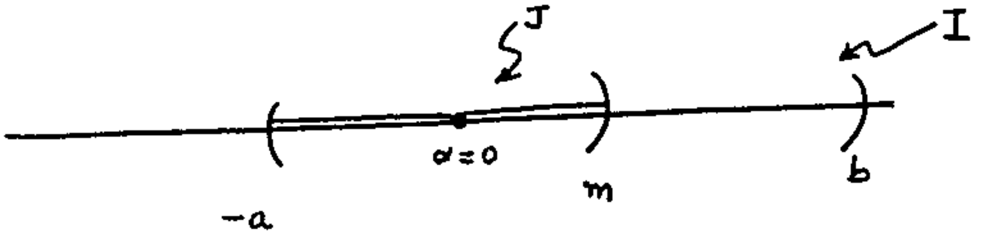
2. $x_{n+1} = -x_n$

El punto fijo $\alpha = 0$ es estable. Si nos dan un intervalo abierto

$I = (-a, b)$, $a, b > 0$, buscamos el menor de a y b

$$m = \min(a, b)$$

y escogemos $J = (-m, m)$. Lo que empieza en J no escapa de I.



3. $x_{n+1} = 2x_n$

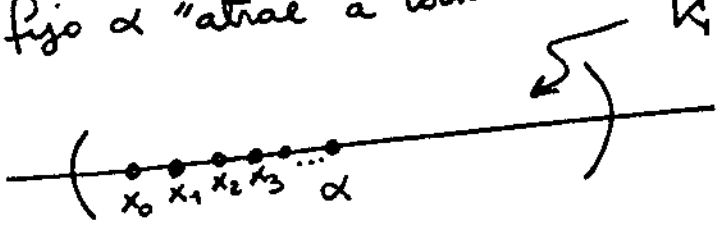
El punto fijo $\alpha = 0$ no es estable pues cualquier solución con $x_0 \neq 0$ tiende a ∞ y por tanto no se puede encerrar en un intervalo I acotado.

Piensa un rato: la definición de estabilidad te dice que las soluciones que empiezan cerca de la constante α se quedan para siempre cerca de α.

Definición 2 α se dice asintóticamente estable si es estable y además existe un intervalo abierto K_1 que contiene a α de manera que si

$$x_0 \in K_1 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

(El punto fijo α "atrae" a todas las soluciones próximas)



Ejemplos

1. $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$

El punto fijo $\alpha = 0$ es asintóticamente estable. Ya sabemos que es estable, pero además, todas las soluciones tienden a cero y podemos escoger como K cualquier intervalo abierto que contenga al cero.

2. $x_{n+1} = -x_n$

$\alpha = 0$ no es asintóticamente estable. La razón es que ninguna solución con $x_0 \neq 0$ tiende a cero pues

3. $x_{n+1} = 2x_n$

Ya sabíamos que $\alpha = 0$ no era estable y, por tanto, no puede ser asintóticamente estable.

<u>Un experimento</u>

Usa tu calculadora y escribe algún número positivo. Presiona la tecla de raíz cuadrada muchas veces $\boxed{\sqrt{\ }}$ ...... $\boxed{\sqrt{\ }}$

¿Qué obtienes?

Analizamos el proceso:

Se empieza con un número positivo x_0, se obtiene

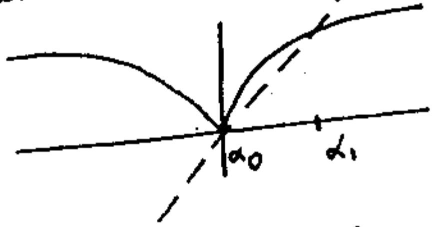
$x_1 = \sqrt{x_0}$, $x_2 = \sqrt{x_1}$, ... , $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, ...

$$x_n \longrightarrow 1.$$

La ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \sqrt{|x_n|}$$

tiene los puntos fijos $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$



Todas las condiciones iniciales $x_0 \neq 0$ son atraidas por α_1.
El punto fijo α_1 es asintóticamente estable (atrae a todas las soluciones salvo a la cero) y α_0 es inestable.

<u>Pregunta</u>: En la definición de estabilidad asintótica qué intervalo K_1 podemos escoger para $\alpha_1 = 1$.

Volvemos por un instante a la ecuación lineal

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

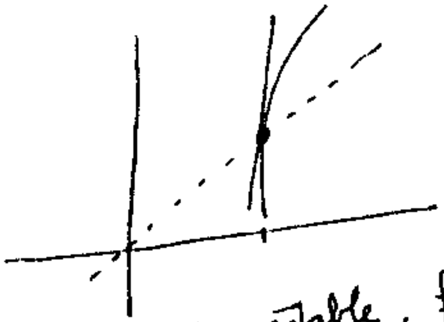
y nos preguntamos acerca de las propiedades de estabilidad del punto fijo $\alpha = 0$. Sólo con mirar las gráficas que hicimos se comprende lo siguiente:

- Si $|\lambda| < 1$, $\alpha = 0$ es asintóticamente estable
- Si $|\lambda| > 1$, $\alpha = 0$ es inestable
- Si $|\lambda| = 1$, $\alpha = 0$ es estable pero no asintóticamente.

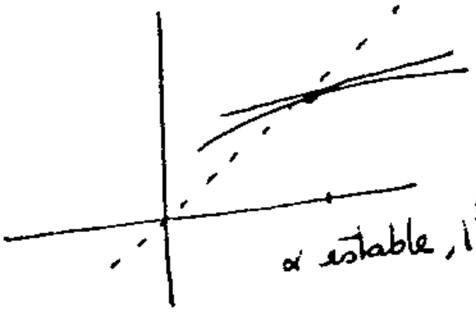
Suponemos ahora que tenemos una ecuación no lineal

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y α es un punto fijo de f. Cerca de α la gráfica de f se parece a la de su tangente



α inestable, $f'(\alpha) > 1$



α estable, $|f'(\alpha)| < 1$

y por eso las propiedades de estabilidad de α las determina casi siempre la ecuación lineal

$$y_{n+1} = f'(\alpha) y_n$$

Se cumple:

- Si $|f'(\alpha)| < 1$ entonces α es asintóticamente estable
- Si $|f'(\alpha)| > 1$ entonces α es inestable

Si f es no lineal y $|f'(\alpha)|=1$ entonces no se puede decidir usando sólo $f'(\alpha)$ (Habría que usar información sobre $f''(\alpha), f'''(\alpha), \dots$)

Ejemplo $\quad x_{n+1} = x_n + \lambda x_n(1-x_n)$

λ es un parámetro positivo. Estudiar las propiedades de estabilidad de los puntos fijos.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = x + \lambda x(1-x)$

$f(\alpha)=\alpha \iff \alpha = 0$ ó 1

$f'(x) = 1+\lambda(1-2x)$

$f'(0) = 1+\lambda > 1 \Longrightarrow \alpha = 0$ es inestable

$f'(1) = 1-\lambda$

Si $\lambda\in(0,2)$, $|f'(1)|<1$ $\quad \alpha=1$ es asintóticamente estable

Si $\lambda = 2$, $f'(1) = -1$ no sabemos lo que pasa

Si $\lambda > 2$, $f'(1) < -1$, $\alpha = 1$ es inestable

Ciclos

Las soluciones más sencillas de la ecuación

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

son las constantes $\{x_0, x_0, \dots x_0 \dots\}$ que, como sabemos, proceden de los puntos fijos de f.

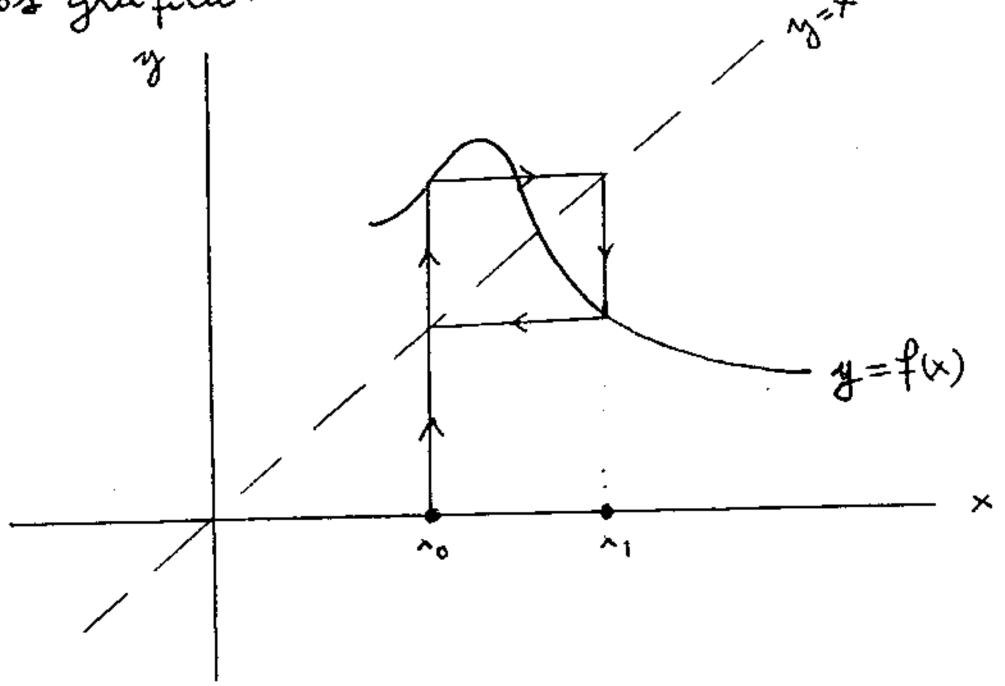
Las siguientes soluciones en orden a sencillez serán las que alternen 2 valores

$$\{x_0, x_1, x_0, x_1, \dots, x_0, x_1 \dots\} \quad x_0\neq x_1$$

Estas soluciones se llaman 2-ciclos y cumplen $x_2 = x_0$, $x_1 \neq x_0$

$$x_1 = f(x_0), \quad x_0 = f(x_1). \qquad \begin{matrix} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{matrix}$$

Veamos gráficamente cómo puede aparecer un 2-ciclo



Un ejemplo analítico: $x_{n+1} = -x_n$

Si $x_0 \neq 0$ la solución $\{x_0, -x_0, x_0, -x_0 \cdots\}$ es un 2-ciclo.

Despues de los 2-ciclos podemos pensar en

3-ciclos $\{x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, x_2, \cdots\}$

4-ciclos $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots\}$

. . . .

n-ciclos $\{x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, \cdots\}$

En muchos casos la aparición de estos ciclos es un síntoma de que las restantes soluciones de la ecuación se comportan de manera muy compleja.

Modelos discretos en dinámica de poblaciones

Modelo de Malthus

Vamos a formular un modelo matemático de la evolución del número de árboles que hay en un bosque con el paso de los años. Suponemos que todos los árboles son de una misma especie y que se reproducen en un periodo concreto del año.

En primer lugar describimos algunos parámetros que dependerán del tipo de árboles y de las condiciones del bosque:

f = número de nuevos árboles producidos por semillas de un individuo en un año (tasa de fecundidad)

Por supuesto esta cantidad hay que entenderla en promedio; así $f = 2$ querría decir que hay que esperar que cada árbol produzca (en media) dos nuevos arbolillos cada año.

$$\boxed{f \geq 0}$$

Pregunta ¿Qué querría decir $f = 0$?

m = porcentaje de árboles que mueren al año (tasa de mortalidad)

Por ejemplo, $m = 0.1$ querría decir que al año muere (en media) 1 de cada diez árboles

$$\boxed{0 < m \leq 1}$$

Preguntas ¿Que querría decir $m = 1$?

¿Por qué no admitimos el caso $m = 0$?

P_0 = número de árboles del bosque en el inicio.

Suponemos ahora que conocemos f, m y P_0; es decir, que conocemos las características del bosque. Pretendemos determinar

P_n = número de árboles después de n años, $n = 1, 2, 3, \dots$

Se cumplirá

$$\underbrace{P_{n+1}}_{\substack{\text{árboles año} \\ n+1}} = \underbrace{P_n}_{\substack{\text{árboles} \\ \text{año } n}} + \underbrace{f\,P_n}_{\substack{\text{árboles} \\ \text{nacidos} \\ \text{el año } n}} - \underbrace{m\,P_n}_{\substack{\text{árboles} \\ \text{muertos el año } n}}$$

Hemos llegado a una ecuación en diferencias

$$P_{n+1} = \lambda P_n \quad , n = 1, 2, \dots$$

donde $\lambda = 1 + f - m$.

Observamos que λ es positivo pues

$$\lambda = \underbrace{1 - m}_{\geq 0} + \underbrace{f}_{\geq 0} .$$

Buscamos las soluciones positivas $P_n > 0$ y sabemos que son progresiones geométricas de razón λ

$$P_n = P_0\,\lambda^n \; , \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta es la llamada <u>ley de Malthus</u>.

Distinguimos tres casos:

$\boxed{\lambda > 1}$ $P_n \to \infty$, la población crece de modo ilimitado

$$\lambda > 1 \iff 1 - m + f > 1 \iff f > m$$

tasa de fecundidad > tasa de mortalidad

$\boxed{\lambda < 1}$ $P_n \to 0$, la población se extinguirá

$$\lambda < 1 \iff f < m$$

tasa de fecundidad < tasa de mortalidad

$\boxed{\lambda = 1}$ $P_n = P_0 \quad , n = 1, 2, \dots$

la población se mantiene constante

tasa de fecundidad = tasa de mortalidad

Esta claro que en este modelo poco importa que se trate de árboles. De igual modo se podría tratar cualquier población animal o vegetal que se reprodujese en un periodo concreto del año.

<u>Crítica</u>: este modelo puede funcionar bien por un periodo de años no muy largo pero a largo plazo, si admitimos $P_n \to \infty$, toda la tierra se cubriría de estos árboles. Lo que hace que el modelo no sea creíble a largo plazo $(n \to \infty)$ es la suposición de que las tasas de fecundidad y mortalidad son constantes. Es más razonable pensar que f y m son funciones de P, $f = f(P)$, $m = m(P)$ y que si el bosque está superpoblado m se hace grande y f pequeña.

Un modelo de población con crecimiento limitado

Vamos a formular un nuevo modelo matemático del bosque que tenga en cuenta el hecho de que el habitat tiene una capacidad limitada. Suponemos que las tasas de fecundidad y mortalidad son funciones de P,

$$f = f(P), \quad m = m(P)$$

con f decreciente y m creciente (es decir; a más población, menos nacimientos por árbol y más probabilidad de muerte).

El modelo que resulta es

$$P_{n+1} = \lambda(P_n) P_n$$

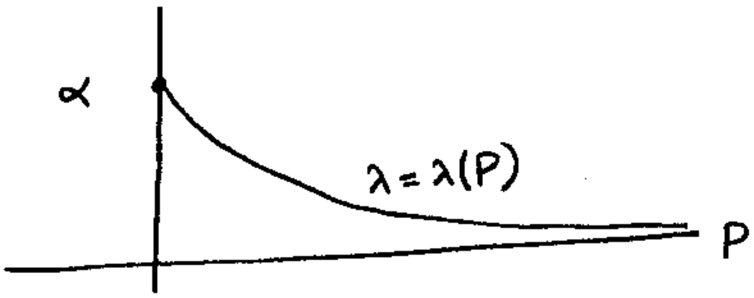
donde $\lambda = 1 + f - m$ cumple

1) $\lambda(P) > 0$ si $P > 0$
2) λ es decreciente en $[0, \infty)$.

Hay muchas elecciones posibles de la función λ; vamos a escoger una que es sencilla

$$\lambda(P) = \alpha e^{-\beta P}$$

donde $\alpha, \beta > 0$ son constantes positivas. Esta elección cumple 1) y 2) y su gráfica es



La ecuación en diferencias es

$$P_{n+1} = f(P_n)$$

donde $f(P) = \alpha e^{-\beta P} P$.

En primer lugar observamos que si $P_0 > 0$ entonces $P_n > 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Esta propiedad es importante pues la población siempre es positiva.

Buscamos los puntos fijos de f

$$f(P) = P \iff P = \alpha e^{-\beta P} P$$

$$P = 0 \text{ ó } 1 = \alpha e^{-\beta P} \iff \ln\alpha = \beta P \iff P = \frac{\ln\alpha}{\beta}$$

Hay dos puntos fijos $P_0 = 0$, $P_1 = \frac{\ln\alpha}{\beta}$

P_1 sólo nos interesa si $\alpha > 1$ pues en otro caso es negativo y no tiene sentido en nuestro modelo.

Vamos a estudiar la estabilidad de estos puntos fijos; para ello,

$$f'(P) = \alpha e^{-\beta P} - \alpha\beta e^{-\beta P} P = \alpha e^{-\beta P}(1 - \beta P)$$

$f'(P_0) = \alpha$, Si $0 < \alpha < 1$, P_0 asintóticamente estable

Si $\alpha > 1$, P_0 inestable

Cuando $\alpha < 1$, $P_{n+1} \leq \alpha P_n \Rightarrow P_n \leq \alpha^n P_0 \to 0$

La población se extingue.

No ocurre así cuando $\alpha > 1$.

Veamos qué ocurre ahora cuando $\alpha > 1$ con el otro punto fijo

$$f'(P_1) = 1 - \ln\alpha$$

$$-1 < 1 - \ln\alpha < 1 \iff 1 > \ln\alpha - 1 > -1 \iff 2 > \ln\alpha > 0$$

$$\iff 1 < \alpha < e^2$$

Si $\alpha \in (1, e^2)$ P_1 es asintóticamente estable; esto quiere decir que la población puede tender al equilibrio P_1

Si $\alpha > e^2$ P_1 es inestable; en este caso la población no puede tender al equilibrio y tendrá un comportamiento más complicado.