Relación de problemas 5. Curvas y campos vectoriales diferenciables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Las funciones trigonométricas hiperbólicas *coseno hiperbólico*, cosh, y *seno hiperbólico*, senh, son funciones reales de variable real definidas mediante $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ y $\operatorname{senh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$. Comprueba:
   (I) $\cosh(-x) = \cosh(x)$ y $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$,
   (II) $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$ y $(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x)$,
   (III) $(\cosh(x))^2 - (\operatorname{senh}(x))^2 = 1$.

   Representa gráficamente ambas funciones.

2. Para las siguientes curvas, determina su dominio, calcula su vector tangente (también llamado velocidad) en un instante t y su rapidez. Particulariza los resultados obtenidos en $t = 0$ y obtén la ecuación implícita de la recta tangente a la curva en dicho punto. Además, determina en cada caso si se trata de curvas regulares.

   (I) $\alpha(t) = (3\,\cos(2t), 3\,\operatorname{sen}(2t))$,
   (II) $\alpha(t) = (3\cos(t), -2\sin(t)$,
   (III) $\alpha(t) = (\cosh(t), 4\sinh(t))$,
   (IV) $\alpha(t) = (t^2 - 2t + 1, t)$,
   (V) $\alpha(t) = (\ln(t), t^2 + 1, e^{2t})$,
   (VI) $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t^2 - t}, \sqrt{t-1}, 3t - 1\right)$,
   (VII) $\alpha(t) = (e^{5t}\,\cos(t), e^{5t}\,\sin(t), t)$,
   (VIII) $\alpha(t) = (t^3 - 4t, \operatorname{arc\,tg}(t))$.

   ¿Cuál es la traza de las curvas (i)–(iv)?

3. Calcula la longitud de las siguientes curvas en el intervalo indicado:
   (I) El segmento de recta $\alpha(t) = (t3, t + 2, -2t + 1)$, para $t \in [0, 1]$. ¿Sabrías calcular dicha longitud de otra forma? Obtén además las ecuaciones implícitas de dicha recta.
   (II) La circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r: $\alpha(t) = (r\cos(t) + x_0, r\operatorname{sen}(t) + y_0)$, para $t \in [0, 2\pi]$.
   (III) $\alpha(t) = (e^{-t}\sin(t), e^{-t}\cos(t))$, para $t \in [0, 4\pi]$.

4. Obtén una curva cuya trayectoria sea:
   (I) El segmento de recta $2x + 3y = -3$ desde el punto $(0, -1)$ hasta $(-3, 1)$.
   (II) El trozo de la parábola $4y = (x - 1)^2 + 2$ desde el punto $(0, 3/4)$ hasta $(1, 1/2)$.
   (III) El trozo de la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 2 recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj desde el punto $(-1, 1)$ hasta $(1, -1)$.
   (IV) El trozo de elipse de centro $(0, 0)$, eje mayor horizontal y semiejes mayor 5 y menor 3 recorrida en sentido de las agujas del reloj desde el punto $(0, 3)$ hasta $(5, 0)$.

5. Se considera un punto de masa 1 situado en el origen de coordenadas del plano al que se aplica una velocidad inicial $v_0 = (1, 1)$. Teniendo en cuenta la fuerza de la gravedad y la segunda ley de Newton, determina la trayectoria que recorrerá dicho punto. ¿En qué punto vuelve a estar sobre el eje x?

6. Calcula la divergencia y el rotacional del campo E dado por $E(x, y, z) = (2xz - y^3, z^2x - y^3z, 3xy + 3xz + 3yz)$. Comprueba que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(E)) = 0$.

7. Se considera las funciones $f(x, y) = e^x\operatorname{sen}(y)$ y $g(x, y, z) = x^{yz}$. Calcula el campo gradiente y el laplaciano de ambas funciones, y el rotacional del campo ∇g. ¿Cuánto vale la divergencia de ∇f y ∇g?

8. Recordemos que dados un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}, \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_o \vec{J}$$

donde ρ es la densidad de carga, μ_o es la permeabilidad magnética, ε_o es la permeabilidad eléctrica y $\vec{J}$ es el campo *corriente eléctrica*.

Se consideran los campos

$$\vec{E}_t(x,y,z) = \left(2t(\mathrm{e}^x - 1)y, 2t\mathrm{e}^x, t^3\right), \quad \vec{B}_t(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, -t^2\right).$$

(I) Comprueba que $\vec{E}_t$ y $\vec{B}_t$ cumplen las ecuaciones segunda y tercera de Maxwell.

(II) Si asumimos $\varepsilon_o = 1$, calcula la función ρ.

(III) Calcula la corriente eléctrica $\vec{J}$.

9. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas F sobre una partícula que recorre el camino especificado en cada caso:

(I) $F(x,y) = (-x, -2y)$, sobre la curva de ecuación $y = x^3$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,8)$.

(II) $F(x,y) = (2x, -y)$, sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

(III) $F(x,y,z) = (x, y, -5z)$, sobre la curva $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t), t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

10. Recuerda que para un campo conservativo, el trabajo sólo depende de los puntos inicial y final del recorrido. Comprueba si los siguientes campos son conservativos y calcula la integral de línea sobre la curva que se indica en cada caso:

(I) $F(x,y) = (2xy, x^2)$ sobre la curva $\alpha(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

(II) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ sobre la curva $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

En caso de que el campo sea conservativo intenta calcular su función potencial.

11. Dada la función $f(x,y,z) = x \ln(1 + y^2 + z^2)$, calcula el trabajo del campo $F = \nabla f$ sobre la curva $\alpha(t) = (t^2, t, 3t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Indicación: ¿Es el campo F conservativo? ¿Cuál es su función potencial?

12. Considérese el campo $X(x,y) = (x - 2y^2, 2xy)$. Calcula la integral de la función $f(x,y) = \operatorname{div}(X)(x,y)$ en el disco de centro el origen y radio 2.

13. Considérense el campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (2xy, x^2 + y^2)$, el segmento de recta C_1 que une los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ y el arco de circunferencia C_2 parametrizado por la curva $\alpha : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$.

(I) Calcula el trabajo del campo F a lo largo de C_1. Análogamente, obtén el trabajo del campo F a lo largo de C_2.

(II) ¿Cuánto vale el trabajo del campo F a lo largo del camino cerrado determinado por dichas dos curvas?

(III) ¿Es el campo F conservativo? En caso afirmativo obtén su función potencial.