Relación de problemas 4
Integración de funciones de dos variables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Encuentra y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones de dos variables:

   (I) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\,\cos(y)$
   (II) $f(x,y) = (x^2 - x - 2)e^{(y^2+y+3)}$
   (III) $f(x,y) = \left(\frac{y^3}{3} - y\right)e^{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}$
   (IV) $f(x,y) = \cos(x+\pi)(y^2 + y - 2)$
   (V) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(x^2 - 1)(y^2 + 4y)$
   (VI) $f(x,y) = \cos(xy)$

2. Calcula la integral de la función f en el recinto rectangular indicado en cada uno de los siguientes casos:

   (I) $f(x,y) = 3x^2y^3 + 3xy$, $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$.
   (II) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{x-y}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.
   (III) $f(x,y) = 1 + \cos(x)\cos(y)$, $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi/2$.
   (IV) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

3. Calcula la integral de la función $f(x,y) = xy$ en el recinto delimitado por las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$, y gráficas de las funciones $g_1(x) = x - 2$ y $g_2(x) = -x + 2$.

4. Calcula la integral de la función $f(x,y) = 2 - x - y$ en la región comprendida entre las gráficas de las funciones $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = 1 - x^2$.

5. Calcula la integral de la función $f(x,y) = 1 + 2xy$ en la región
   $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2\pi,\ x^2 - 2\pi x \le y \le x\}$.

6. Calcula la integral de la función $f(x,y) = 6x^2y^2$ en la región delimitada por las rectas de ecuaciones $y = 0$ y $y = 1$, y las gráficas de las funciones $g(y) = -y$ y $h(y) = y^2$.

7. Calcula la integral de la función $f(x,y) = \mathrm{e}^{(x+y)/2}$ en el recinto
   $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2 \le x \le y + 2\pi,\ -1 \le y \le 1\}$.

8. Calcula la integral de la función $f(x,y) = xy$ en la parte del disco de centro $(0,0)$ y radio 2 contenido en el primer cuadrante.

9. Calcula la integral de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 8xy$ en el anillo de centro $(0,0)$ y radios 1 y 2.

10. Se considera el anillo A de de centro $(0,0)$ y radios 2 y 3 y las rectas $r \equiv x - y = 0$ y $s \equiv 3x + 2y = 0$. Calcula la integral de la función $f(x,y) = x/(y+1)$ en cada uno de los cuatro sectores en que las rectas r y s dividen al anillo A.

11. Calcula la integral de la función $f(x,y) = y/x$ en la región
    $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le 2x\}$.

12. Se considera R la región del triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(2,5)$ que es exterior al círculo de centro $(0,0)$ y radio 1. Calcula el área de R y la integral en esa región de la función $f(x,y) = x$.

13. Calcula el área de la región plana delimitada por el eje x, la recta $y = -3x + 6$ y la parábola $y = 4x - x^2$.

14. Calcula la integral de la función $f(x,y) = x$ en la región del plano delimitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = (x-2)^2 + 2$.

15. Calcula la integral de la función $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ en el triángulo de vértices $(1,1)$, $(2,3)$ y $(3,2)$.

16. Dada una región del plano R, se define el *baricentro* de R como el punto de coordenadas

$$\left(\frac{\iint_R x \, \mathrm{d}(x,y)}{\text{Área(R)}}, \frac{\iint_R y \, \mathrm{d}(x,y)}{\text{Área(R)}} \right).$$

(i) Halla el baricentro del círculo de centro $(0,0)$ y radio R.

(ii) Halla el baricentro del anillo de centro $(0,0)$ y radios 4 y 7.

(iii) Halla el baricentro la región delimitada por la parábola $y = x^2 + 3x + 1$ y la recta $y = 3x + 2$.

(iv) Halla el baricentro del triángulo de vértices $(1,3)$, $(2,5)$ y $(3,-2)$.