Relación de problemas 3. Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Calcula el dominio de definición y las derivadas parciales de las siguientes funciones de dos variables:

   (I) $f(x,y) = xy + x^2y^3$,

   (II) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

   (III) $f(x,y) = \sqrt{xy}$,

   (IV) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$,

   (V) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

   (VI) $f(x,y) = \log(4x^2 - y^2)$,

   (VII) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(x + \operatorname{sen} y)$,

   (VIII) $f(x,y) = (x^2 + 4y^2)\, e^{1-x^2-y^2}$.

2. Calcula las siguientes derivadas parciales:

   (I) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x^2}{\operatorname{sen} y}}\right)$

   (II) $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\ln\big(\operatorname{tg}[x^2 + \cos(y^2)]\big)\Big)$

   (III) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2\, (\operatorname{sen} y)\, (\ln(x + \operatorname{tg} y))\right)$

3. Dada una función de dos variables f y un punto (x_0, y_0) de su dominio el *plano tangente* a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es el plano que pasa por dicho punto y es paralelo a los vectores $u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ y $v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$.

   (I) ¿Cuál es el vector normal al plano tangente?

   (II) ¿En qué puntos de la gráfica de f su plano tangente será horizontal, es decir, su vector normal lleva la dirección del eje z?

4. Se considera la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcula la ecuación implícita del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,2)$.

5. Se dice que una función de dos variables es *armónica* si su laplaciano se anula en todos los puntos de su dominio. Demuestra que la función definida por $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ para cada $(x,y) \neq (0,0)$ es armónica.

6. Se considera la función de dos variables definida en $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(x,y) = x^2y + y^2 + 4xy.$$

   (I) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ según la dirección del vector $(\sqrt{2}, 0)$.

   (II) Clasifica los puntos críticos de f.

7. Clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

   (I) $f(x,y) = x^2 + y^2$,

   (II) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

   (III) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$,

   (IV) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

   (V) $f(x,y) = x^2y + y^3 - y$,

   (VI) $f(x,y) = x - \operatorname{arc\,tg} x + y^2$,

   (VII) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2$.

8. Clasifica los puntos críticos de la función $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

9. Se considera la función de tres variables dada por $f(x,y,z) = (\operatorname{sen} x)(\cos y)\, e^{xyz}$. Calcula la derivada direccional de $f(x,y,z)$ en el punto $(0,0,0)$ según la dirección del vector $(1,-2,6)$. Comprueba que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z).$$

10. Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones de tres variables:

(i) $f(x,y,z) = x^2 - 6y + 2z + y^2 + z^2 + 10$,

(ii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xz - 4yz + 10z$,

(iii) $f(x,y,z) = x^2\, y^2\, z^2$,

(iv) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z}$,

(v) $f(x,y,z) = x^3 - 2xy^2 + z^2 y$,

(vi) $f(x,y,z) = g(x,y)$, donde $g(x,y)$ es una función de dos variables arbitraria,

(vii) $f(x,y,z) = xy + z^2 + xe^z$.