Relación de problemas 1
Geometría afín euclídea del plano. Cónicas.

Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{w} = (-2, -3)$. Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, los módulos $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

2. Determina los valores de a para los que el vector $\vec{v} = (a, 2)$ sea perpendicular a $\vec{w} = (2, -3)$. Calcula, para dichos valores de a, el ángulo que forman $\vec{v}$ y $2\vec{w}$.

3. ¿Existe algún vector en el plano que sea perpendicular a sí mismo? ¿Qué se puede decir sobre un vector de $\mathbb{R}^2$ que es perpendicular a todos los demás?

4. ¿Qué relación existe entre $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ cuando $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$?

5. Comprueba que dos vectores perpendiculares y no nulos son siempre linealmente independientes.

6. Calcula la distancia entre los puntos $P = (1, -1)$ y $Q = (2, 0)$, y encuentra su punto medio.

7. Encuentra un punto equidistante a los puntos $(4, -1)$ y $(-2, 3)$.

8. Halla x para que la distancia entre $P = (x, 1)$ y $Q = (2, 4)$ sea 5.

9. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio 3.

10. Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(-1, 2)$ y $(2, 1)$.

11. Los puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que cumplen la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 8 = 0$, ¿forman una circunferencia? ¿Y los que cumplen la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$?

12. Encuentra una ecuación implícita y un vector director de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

    a) $P_1 = (1, 0)$ y $Q_1 = (2, 0)$.
    b) $P_2 = (1, 1)$ y $Q_2 = (-1, -1)$.
    c) $P_3 = (4, -1)$ y $Q_3 = (0, 0)$.
    d) $P_4 = (0, 2)$ y $Q_4 = (1, 2)$.
    e) $P_5 = (1, 1)$ y $Q_5 = (1, 3)$.
    f) $P_6 = (-1, 0)$ y $Q_6 = (-1, 2)$.

13. Obtén las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

    (i) $2x + 3y = 0$.
    (ii) $3x = -1$.
    (iii) $x - y = 0$.
    (iv) $y = 2$.
    (v) $x + 3 = y$.
    (vi) $2y - 1 = 3x$.

14. Calcula unas ecuaciones implícitas de las siguientes rectas dadas en paramétricas:

    (i) $r_1 \equiv (1, 0) + \lambda(-1, 1)$.
    (ii) $r_2 \equiv (\lambda, -\lambda)$.
    (iii) $r_3 \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$
    (iv) $r_4 \equiv (1, 3\lambda)$.

15. Para cada uno de los siguientes pares de rectas y puntos:

(I) $r \equiv y = 3$, $P = (1, 0)$;
(II) $r \equiv 4x - 3y = 5$, $P = (2, 1)$;
(III) $r \equiv (1, 1) + \lambda(0, -2)$, $P = (0, 0)$;
(IV) $r \equiv (2 + \lambda, 1 - \lambda)$, $P = (1, -1)$;

calcula:

a) la recta ortogonal a r que pasa por P;
b) el punto de corte de las dos rectas;
c) la distancia de P a r;
d) la recta paralela a r que pasa por P.

16. Dados los pares de rectas siguientes, estudia su posición relativa. Si se cortan, determina el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

(I) $r_1 \equiv x = y$, $s_1 \equiv 2x - y = 0$.
(II) $r_2 \equiv x - y = 1$, $s_2 \equiv (2\lambda, 1 + 2\lambda)$.
(III) $r_3 \equiv 2x + y = 3$, $s_3 \equiv (0, 3) + \lambda(-1, 2)$.
(IV) $r_4 \equiv x = -y$, $s_4 \equiv 2x = 0$.

17. Dado un punto P en el plano y una recta r, llamamos *punto simétrico de P respecto de r* al punto Q que cumple que la recta r corta ortogonalmente al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio. Dada la parábola $(x - 1)^2 = 4y$:

(I) determina su eje y comprueba que el punto $P = (3, 1)$ pertenece a dicha parábola;
(II) calcula el punto Q simétrico a $P = (3, 1)$ respecto al eje de la parábola; y
(III) comprueba que Q se encuentra también en la parábola.

18. Halla la ecuación general de la parábola cuya directriz es la recta vertical $x = d$ y cuyo foco es el punto $F = (a, b)$. Compárala con la ecuación que conoces para una parábola cuya directriz es una recta horizontal. ¿Qué relación hay entre una y otra ecuación?

19. Halla las ecuaciones de las parábolas que verifican:

(I) Su directriz es $y = -6$ y su foco es $(0, 6)$.
(II) Su vértice es $(2, 0)$ y su foco es $(6, 0)$.
(III) El eje es paralelo al eje y y la parábola pasa por los puntos $(0, 3)$, $(3, 4)$ y $(4, 11)$. En este caso determinar el foco y la directriz.

20. Halla la ecuación de la elipse centrada en $(0, 0)$ y con ejes paralelos a los ejes coordenados tal que:

(I) Pasa por el punto $(5, 0)$ y la distancia semifocal (la mitad de la distancia entre los focos) es 3.
(II) Pasa por $(4, 1)$ y por $(0, 3)$.
(III) Pasa por $(3, 1)$ y tiene un foco en el punto $(-4, 0)$.
(IV) Uno de sus focos es $(2, 0)$ y uno de sus vértices es $(3, 0)$.
(V) Su eje mayor es horizontal y los puntos $(3, 1)$ y $(4, 0)$ están en la elipse.

21. Halla la ecuación de una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados que verifica:

(I) Está centrada en $(1, 1)$, pasa por el punto $(0, 0)$ su distancia focal (distancia entre los focos) es 10 y su eje mayor es horizontal.
(II) Tiene los vértices en $(0, 2)$ y $(4, 2)$ y su eje menor tiene longitud 2.
(III) Tiene sus focos en $(2, -1)$ y $(-2, -1)$ y su eje mayor tiene longitud 8.

22. Halla la ecuación de la hipérbola que verifica:

    (i) Sus focos son $(7,0)$ y $(-7,0)$ y pasa por el punto $(4,0)$.
    (ii) Sus focos son $(-3,0)$ y $(3,0)$ y pasa por el punto $(8,5\sqrt{3})$.
    (iii) Centro en el punto $(0,0)$, un vértice en $(0,2)$ y un foco en $(0,4)$.
    (iv) Sus vértices son $(2,3)$ y $(2,-3)$ y pasa por el punto $(5,0)$.
    (v) Para cualquier punto de la hipérbola, la diferencia de entre sus distancias a $(2,2)$ y $(10,2)$ es 6.

23. Determina qué tipo de cónicas definen las siguientes ecuaciones:

    (i) $x^2 - y^2 + 2xy - 3x + 2 = 0$,
    (ii) $2x^2 + 3y^2 - 4xy - 3x + 2 = 0$,
    (iii) $-y^2 + 2xy - 5x + 1 = 0$,
    (iv) $3x^2 + 4y^2 - 5xy + 7x - 4 = 0$,
    (v) $x^2 + y^2 - 7xy + 5x + 1 = 0$,
    (vi) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$,
    (vii) $x^2 + 4xy - 4y^2 + 2x + 2 = 0$,
    (viii) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$,
    (ix) $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

24. Halla la ecuación de los puntos del plano que verifican:

    (i) equidistan del punto $(3,0)$ y de la recta $x = -4$;
    (ii) la suma de las distancias a los puntos $(-1,2)$ y $(1,2)$ es constante 3;
    (iii) la distancia al punto $(1,0)$ es igual a un medio de la distancia a la recta $x = 4$;
    (iv) la distancia al punto $P = (1,3)$ es el doble de la distancia a la recta $y = 1/2$.

    Determina en cada caso el tipo de cónica que se obtiene, así como sus elementos característicos (focos, eje, directriz,...).

25. El filamento de una lámpara de flash está a 10 cm del vértice del reflector parabólico y se encuentra en su foco. Toma un sistema de coordenadas y determina la ecuación de una sección del reflector, de modo que ésta quede orientada horizontalmente hacia la derecha con su vértice en el origen.

26. La Luna orbita alrededor de la Tierra en una órbita elíptica con la Tierra en uno de sus focos. Los ejes de la órbita tienen longitudes 768 806 km y 767 746 km. Halla el *apogeo* (máxima distancia entre la Tierra y la Luna) y el *perigeo* (mínima distancia entre la Tierra y la Luna).

27. Calcula la ecuación de una parábola de foco el punto $(2,0)$ y directriz el eje y. Obtén un punto cualquiera de dicha parábola distinto del vértice y comprueba que la *propiedad reflectora de la parábola* se cumple en dicho punto.

28. Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2,1)$ y $(0,1)$ y la suma de distancias es 4. Obtén un punto cualquiera de dicha elipse distinto de los vértices y comprueba que la *propiedad reflectora de la elipse* se cumple en dicho punto.

29. Calcula la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$ y la diferencia de distancias es 2. Obtén un punto cualquiera de dicha elipse distinto de los vértices y comprueba que la *propiedad reflectora de la hipérbola* se cumple en dicho punto.