Examen parcial – 7 de junio de 2016

Curvas y Superficies, Grado en Matemáticas. Curso 2015/2016

1. **(2,5 puntos)** Considera la superficie $S = X(\mathbb{R}^2)$, siendo $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida como:
$$X(u, v) = ((2 + \operatorname{sen} v)\cos u, (2 + \operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u, v)\,.$$
Clasifica los puntos de S en función de sus curvaturas.

2. Sean S una superficie y Π un plano afín, que se cortan formando un ángulo constante a lo largo de una curva $C \subset S \cap \Pi$. Supongamos que $\alpha\colon I \to C$ es una parametrización por el arco de C.

   a) **(1,5 puntos)** Prueba que α es una línea de curvatura de S.

   b) **(1 punto)** Demuestra que si C está contenida en una recta, entonces α es una geodésica de S.

3. **(2,5 puntos)** ¿Qué se puede decir de una superficie orientada S cuya aplicación de Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ es una isometría global?

4. **(2,5 puntos)** En el hiperboloide de una hoja $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ se considera el punto $p_0 = (1, 1, 1)$. Encuentra explícitamente dos geodésicas de H que pasen por p_0 y tales que sus respectivos vectores tangentes en p_0 sean linealmente independientes.

Duración: 2 horas y media