Departamento de Geometría y Topología

Curvas y superficies, Grado en Matemáticas

Relación de problemas 4: Curvas geodésicas

1. Prueba que las únicas reparametrizaciones de una geodésica que siguen siendo geodésicas son las afines.

2. Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{S}^2(p_0,r)$ una curva p.p.a. con valores en la esfera de radio $r>0$ y centro $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Demuestra que γ es una geodésica si y sólo si $r^2\gamma'' + \gamma - p_0 = 0$ en $[a,b]$. Integrando esta EDO, deduce que toda geodésica p.p.a. de $\mathbb{S}^2(p_0,r)$ se escribe como
$$\gamma(t) = p_0 + \cos(t/r)(p-p_0) + \sin(t/r)rv,$$
para ciertos $p \in \mathbb{S}^2(p_0,r)$ y $v \in T_p\mathbb{S}^2(p_0,r)$, $\|v\| = 1$.

3. Sea $\gamma\colon [a,b] \to C$ una curva p.p.a. con valores en el cilindro $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1\}$. Demuestra que $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$ es una geodésica si y sólo si sus funciones coordenadas cumplen
$$x'' + [1-(z')^2]x = 0, \quad y'' + [1-(z')^2]y = 0, \quad z'' = 0.$$
Integrando esta EDO, deduce que toda geodésica de C se escribe como
$$\gamma(t) = (x_0\cos(at) - y_0\sin(at), y_0\cos(at) + x_0\sin(at), bt + z_0)\,,$$
para ciertose $(x_0,y_0,z_0) \in C$ y $(a,b) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.

4. Considera la superficie de revolución $S = X(\mathbb{R}\times I)$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, siendo
$$X(u,v) = \big(f(v)\cos(u), f(v)\operatorname{sen}(u), g(v)\big), \quad \text{con} \quad f>0,$$
y en ella una curva $\gamma(s) = X(u(s),v(s))$ p.p.a. . Prueba que:
   (a) Si γ en un meridiano (i.e. $u = \text{cte}$), entonces es una geodésica.
   (b) Si γ es un paralelo (i.e. $v = \text{cte} = c$), entonces es una geodésica si, y solamente si, $f'(c) = 0$ (es decir, el paralelo se obtiene al girar un punto que esté a distancia crítica al eje de giro).
   (c) Si γ es una geodésica que no es un paralelo ni un meridiano y denotamos por $r(s)$ el radio del paralelo que pasa por $\gamma(s)$ y por $\phi(s)$ el ángulo que forma dicho paralelo con la curva γ en el punto $\gamma(s)$, entonces se cumple la llamada *relación de Clairaut* (que caracteriza las geodésicas de las superficies de revolución):
$$r(s)\cos(\phi(s)) = \text{constante}.$$

5. Dado un punto p de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, prueba que el dominio de definición de la aplicación exponencial $\exp_p$, $D(p) = \{v \in T_pS \mid \text{la geodésica } \gamma(\cdot\,,p,v) \text{ está definida en } t=1\}$, es un dominio estrellado desde el origen de T_pS; es decir, si $v \in D(p)$, entonces $\lambda v \in D(p)$, para cualquier $\lambda \in [0,1]$.

6. Demuestra que, dado un punto $p = (x,y,z)$ en el cilindro $C = \{x^2+y^2=1\}$, la aplicación exponencial $\exp_p\colon T_pC = \{(-ay,ax,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \to C$ viene dada por:
$$\exp_p(-ay,ax,b) = (x\cos a - y\sin a, y\cos a + x\sin a, b+z)\,.$$
Deduce que la restricción de $\exp_p$ a $\mathcal{U} = \{(-ay,ax,b) \in T_pC \mid -\pi < a < \pi\}$ es un difeomorfismo y que el correspondiente entorno normal es $\mathcal{V} = \exp_p(\mathcal{U}) = C - \{(-x,-y,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7. Dado $a>0$, encuentra una isometría local del helicoide $H_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\sin(z/a) = y\cos(z/a)\}$ en la catenoide $C_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = a^2\cosh^2(z/a)\}$.

8. Triedro y ecuaciones de Darboux. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable con aplicación de Gauss $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ y segunda forma fundamental asociada σ. Dada una geodésica p.p.a. $\gamma\colon I \to S$ definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se definen

$$T = \gamma', \quad N_\gamma = N \circ \gamma, \quad B = T \times N_\gamma.$$

Así, $T, N_\gamma, B\colon I \to \mathbb{S}^2$ son aplicaciones diferenciables y $\{T, N_\gamma, B\}$ forman una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ (llamada *triedro de Darboux*) con $T(t), B(t) \in T_{\gamma(t)}S$ para cada $t \in I$. Prueba las siguientes igualdades (llamadas *ecuaciones de Darboux*):

$$\begin{cases} T' = \sigma_\gamma(T,T)N_\gamma, \\ (N_\gamma)' = -\sigma_\gamma(T,T)T - \sigma_\gamma(T,B)B, \\ B' = \sigma_\gamma(T,B)N_\gamma. \end{cases}$$

9. Curvatura geodésica y generalización de las ecuaciones de Darboux para una curva p.p.a. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable con aplicación de Gauss $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ y segunda forma fundamental asociada σ. Dada una curva p.p.a. $\alpha\colon I \to S$ definida sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se definen

$$T = \alpha', \quad N_\alpha = N \circ \alpha, \quad B = T \times N_\alpha.$$

Así, $T, N_\alpha, B\colon I \to \mathbb{S}^2$ son aplicaciones diferenciables y, para cada $t \in I$, $\{T, N_\alpha, B\}$ forma una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$, que también llamaremos *triedro de Darboux* ya que generaliza la situación del ejercicio 8.

   (a) Prueba que $T' = (\alpha'')^T + \kappa_n N_\alpha$, donde $\kappa_n = \sigma_\alpha(T,T)$ es la curvatura normal de S en la dirección de α'.

   (b) Demuestra que $(\alpha'')^T$ lleva la dirección de B. Por tanto, podemos escribir $(\alpha'')^T = \kappa_g B$, donde $\kappa_g = \langle \alpha'', B\rangle = -\det(\alpha'\alpha'', N_\alpha)$ se llama la *curvatura geodésica* de α. Concluye que α es una geodésica de S si, y sólo si, su curvatura geodésica se anula idénticamente.

   (c) Prueba que $T' = \kappa_g B + \kappa_n N_\alpha$ (comparar con la primera ecuación de Darboux del ejercicio 8).

   (d) Demuestra que $(N_\alpha)' = -\kappa_n T - \sigma_\alpha(T,B)B$, es decir, la segunda ecuación de Darboux del ejercicio 8 se cumple sin cambios en este caso más general.

   (e) Prueba que $B' = -\kappa_g T + \sigma_\alpha(T,B)N_\alpha$ (comparar con la tercera ecuación de Darboux del ejercicio 8).

10. (a) Sea p un punto de una superficie orientable $S \subset \mathbb{R}^3$ y $v \in T_pS$, $\|v\| = 1$, tal que $\sigma_p(v,v) \neq 0$, donde σ es la segunda forma fundamental de S asociada a una aplicación de Gauss N. Supongamos que la geodésica $\gamma\colon I \to S$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ es plana, es decir, existen $p_0, a \in \mathbb{R}^3$, $\|a\| = 1$, tales que

$$\langle \gamma(t) - p_0, a\rangle = 0,$$

   para todo $t \in I$. Usa las ecuaciones de Darboux para probar que existe un intervalo abierto $J \subset I$ que contiene a cero tal que $\gamma' \times N_\gamma = \pm a$ en J y que $dN_p(v)$ es paralelo a v (es decir, v es un vector propio de dN_p).

   (b) Prueba que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie es totalmente umbilical (en particular, es un abierto de un plano o de una esfera).

11. Sea $\alpha\colon [a,b] \to S$ una curva diferenciable en una superficie S. Se define la *energía* de α como

$$E(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|^2 \, dt.$$

Demuestra que la relación entre la energía y la longitud de α es

$$L(\alpha)^2 \leq (b-a)E(\alpha),$$

y que la igualdad es cierta si, y sólo si, α está parametrizada proporcionalmente al arco.

12. Sea $F\colon [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una variación diferenciable de una curva $\alpha\colon [a,b] \to S$ con campo variacional V. Prueba que, si definimos $E_F(s) = E(F_s)$ (energía de la curva longitudinal F_s), entonces la *primera fórmula de variación de la energía* viene dada por

$$\frac{1}{2}E_F'(0) = \langle V(b), \alpha'(b)\rangle - \langle V(a), \alpha'(a)\rangle - \int_a^b \langle V(t), \alpha''(t)\rangle \, dt.$$

Deduce que $E_F'(0) = 0$ para toda variación propia de α si, y sólo si, α es una geodésica. En este sentido, la energía es un funcional más apropiado para estudiar geodésicas que la longitud, que no distingue reparametrizaciones.

13. Dada una curva diferenciable $\gamma\colon [a,b] \to S$, definimos

$$\mathcal{A} = \{\alpha\colon [a,b] \to S \text{ curva diferenciable a trozos} \mid \alpha(a) = \gamma(a) \text{ y } \alpha(b) = \gamma(b)\}.$$

   (a) Prueba que si γ está p.p.a. y minimiza la longitud entre todas las curvas en $\mathcal{A}$, entonces γ minimiza la energía entre todas las curvas en $\mathcal{A}$ (en particular, γ es una geodésica).

   (b) Prueba que si γ minimiza la energía entre todas las curvas en $\mathcal{A}$, entonces γ es una geodésica y minimiza la longitud entre todas las curvas en $\mathcal{A}$.