Departamento de Geometría y Topología

Curvas y superficies, Grado en Matemáticas

Relación de problemas 3: Curvatura de Gauss y media en Superficies

1. Prueba que la curvatura de Gauss y la curvatura media del paraboloide elíptico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$ vienen dadas por
$$K(x, y, z) = \frac{4}{(1 + 4z)^2}, \quad H^2(x, y, z) = \frac{4(1 + 2z)^2}{(1 + 4z)^3}.$$
Deduce que todos los puntos de S son de tipo elíptico.

2. Prueba que la curvatura de Gauss y la curvatura media del paraboloide hiperbólico $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 - y^2\}$ vienen dadas por
$$K(x, y, z) = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}, \quad H^2(x, y, z) = \frac{16z^2}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^3}.$$
Deduce que todos los puntos de S son hiperbólicos.

3. Prueba que la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de la catenoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ vienen dadas por
$$K(x, y, z) = \frac{-1}{\cosh^4 z}, \quad H = 0, \quad -k_1(x, y, z) = k_2(x, y, z) = \frac{1}{\cosh^2 z}.$$

4. Calcula la curvatura de Gauss de un toro de revolución. Estudia qué puntos del toro son elípticos, hiperbólicos y llanos.

5. Sea $a > 0$. Consideremos la parametrización global $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ del helicoide $S = \{(x, y, z) \mid x \sin(z/a) = y \cos(z/a)\}$. Prueba que S es una superficie mínima, y que la curvatura de Gauss de S viene dada por
$$K(X(u, v)) = \frac{-a^2}{(a^2 + u^2)^2}.$$
En particular, el helicoide no tiene puntos umbilicales y su aplicación de Gauss N es un difeomorfismo local. ¿Es N un difeomorfismo?

6. Sea $S = S(B, b, c) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Bp, p\rangle + 2\langle b, p\rangle + c = 0\}$ la cuádrica definida en la relación de problemas anterior, donde $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica no nula, $b \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que
$$N(p) = \frac{Bp + b}{\|Bp + b\|}, \quad p \in S,$$
es una aplicación de Gauss en S, y que la segunda forma fundamental asociada es
$$\sigma_p(v, v) = -\frac{1}{\|Bp + b\|}\langle Bv, v\rangle, \quad p \in S, \ v \in T_pS.$$
Concluye que un elipsoide tiene curvatura de Gauss positiva en todos sus puntos.

7. Sea $S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$ el grafo de una función diferenciable $f\colon U \subset \mathbb{R}$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Tomamos la aplicación de Gauss $N = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$ de S. Prueba que la curvatura Gauss y la curvatura media de S respecto a N vienen dadas por
$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

8. Sea Π un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha\colon I \to \Pi$ una curva regular que es un homeomorfismo sobre su imagen. Dado $a \in \mathbb{R}^3$ vector unitario ortogonal a Π, definimos $X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(t,s) = \alpha(t) + sa, \quad \forall t \in I,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Prueba que $S = X(I \times \mathbb{R})$ es una superficie llana, llamada *cilindro recto con directriz* $\alpha(I)$, y calcula su curvatura media.

9. Banda de Möbius. Comprueba que la curvatura de Gauss de la superficie no orientable $S = X(\mathbb{R}^2)$, siendo $X(u,v) = \left(\left(2 + v \operatorname{sen}\frac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u, \left(2 + v \operatorname{sen}\frac{u}{2}\right) \cos u, v \cos\frac{u}{2}\right)$, viene dada por

$$K(X(u,v)) = \frac{-1}{\left(\frac{v^2}{4} + \left(2 + v \operatorname{sen}\frac{u}{2}\right)^2\right)^2}$$

10. Sea $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(p) = \lambda p$, la homotecia de razón $\lambda > 0$. Prueba que, si S es una superficie, entonces $\widetilde{S} = \phi(S)$ es una superficie difeomorfa a S y que sus curvaturas cumplen:

$$\widetilde{K} \circ \phi = \frac{1}{\lambda^2} K, \quad \widetilde{H} \circ \phi = \frac{1}{\lambda} H.$$

(H, $\widetilde{H}$ son las curvaturas medias de $S, \widetilde{S}$ respecto a los normales $N, \widetilde{N} = N \circ \phi^{-1}$).

11. Sea S una superficie orientada, $N : S \to \mathbb{S}^2$ su aplicación de Gauss y $p \in S$. Prueba que

$$\langle \mathrm{d}N_p(v), \mathrm{d}N_p(w) \rangle = -K(p)\langle v, w \rangle + 2H(p)\langle -\mathrm{d}N_p(v), w \rangle, \quad \forall v, w \in T_pS$$

Deduce que la aplicación de Gauss de una superficie mínima sin puntos planos es una aplicación conforme; es decir, una aplicación que conserva el ángulo que forman las curvas que se cortan.

12. Sea S una superficie compacta y orientada. Prueba que la aplicación de Gauss de S es un difeomorfismo local si, y sólo si, la curvatura de Gauss de S es positiva (es decir, todos los puntos de S son elípticos).

13. Sea S una superficie conexa y $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ una aplicación de Gauss de S. Dado $p_0 \in \mathbb{R}^3$, se define la función soporte de S con base p_0 como $f(p) = \langle N(p), p - p_0 \rangle$, $\forall p \in S$.
   (a) Prueba que, en una esfera, la función soporte con base en su centro es constante.
   (b) Supongamos que existe $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que la función soporte de S con base p_0 es constante, y que la superficie S no es llana. Prueba que S es un abierto de una esfera centrada en p_0.
   (c) Prueba que si S es además compacta y admite una función soporte constante, entonces es una esfera.

14. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta, contenida en una bola cerrada de radio $r > 0$. Prueba que existe un punto $p \in S$ tal que $K(p) \geq \frac{1}{r^2}$ y $|H(p)| \geq \frac{1}{r}$.

15. Prueba que si una superficie contiene una línea recta, entonces la curvatura de Gauss de la superficie es no positiva a lo largo de la recta.

16. Sea p un punto en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Prueba que es constante la suma de las curvaturas normales en cualquier par de direcciones tangentes en p que sean ortogonales.

17. Sobre el cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, considera la curva $\alpha_n(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, nt)$, con $n \in \mathbb{N}$. Calcula la curvatura normal de α_n en $t = 0$.

18. Direcciones conjugadas. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $p \in S$ un punto. Dos vectores $v, w \in T_pW - \{0\}$ se dice que son *direcciones conjugadas* si $\sigma_p(v,w) = 0$ (claramente, esto no depende de los vectores v, w sino sólo de sus direcciones). Prueba:

    (a) En un punto de tipo plano, todo par de direcciones son conjugadas.

    (b) En un punto umbilical no llano, todo par de direcciones ortogonales son conjugadas.

    (c) Las direcciones principales en p son direcciones conjugadas.

    (d) Las direcciones asintóticas son conjugadas de sí mismas.

19. Indicatriz de Dupin. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Llamamos *indicatriz de Dupin* en $p \in S$ a

$$\mathcal{D}(p) = \{v \in T_pS \mid \sigma_p(v,v) = \pm 1\}.$$

    Prueba las siguientes afirmaciones:

    (a) Si $p \in S$ es un punto plano, entonces $\mathcal{D}(p) = \emptyset$.

    (b) Si p es umbilical y no llano, $\mathcal{D}(p)$ es una circunferencia centrada en el origen de T_pS.

    (c) Supongamos que $p \in S$ no es un punto umbilical, y sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de direcciones principales en p asociadas a las curvaturas principales k_1, k_2. Dado $v \in T_pS$, sean $(a,b)_B \in \mathbb{R}^2$ las coordenadas de v respecto a B, es decir $v = ae_1 + be_2$. Prueba que

$$\mathcal{D}(p) = \{(a,b)_B \in \mathbb{R}^2 \mid k_1a^2 + k_2b^2 = \pm 1\},$$

    que es una cónica en el plano (a,b). Esta cónica puede ser de tres tipos:

    - Si p es un punto elíptico, entonces $\mathcal{D}(p)$ es una elipse con semiejes $1/\sqrt{|k_1|}$, $1/\sqrt{|k_2|}$ apuntando en las direcciones principales en p.
    - Si p es un punto parabólico, entonces $\mathcal{D}(p)$ es un par de rectas paralelas a una de las direcciones principales en p, a distancia del origen $1/\sqrt{|k|}$, donde k es la curvatura principal no nula en p.
    - Si p es un punto hiperbólico, entonces $\mathcal{D}(p)$ es una pareja de hipérbolas que cortan a los ejes dados por las direcciones principales en los puntos $\pm(1/\sqrt{k_2}, 0)_B$, $\pm(0, -1/\sqrt{-k_1})_B$ (hemos ordenado las curvaturas principales en p de forma que $k_1 < 0 < k_2$), de forma que esta hipérbolas son asintóticas a las direcciones asintóticas de T_pS (de aquí el nombre de direcciones asintóticas, recordemos que en este caso las direcciones asintóticas forman ángulos cuyas bisectrices son los ejes $e_1 = \mathrm{OX}$, $e_2 = \mathrm{OY}$ dados por las direcciones principales).

20. Comparación de superficies en un punto. Sean S_1, S_2 dos superficies orientables tangentes en un punto común p. Sea N_i una aplicación de Gauss en S_i, $i = 1, 2$. Podemos suponer que p es el origen de $\mathbb{R}^3$ y que $N_1(p) = N_2(p) = (0,0,1)$. Podemos expresar S_1, S_2 localmente como grafos de funciones diferenciables f_1, f_2 definidas en un entorno del origen en $T_pS_1 = T_pS_2 = \{z = 0\}$. Decimos que S_1 *está por encima de* S_2 *alrededor de* p si existe un entorno del origen en $\{z = 0\}$ tal que $f_1 \geq f_2$ en dicho entorno.

    (a) Prueba que si S_1 está por encima de S_2 alrededor de p, entonces las segundas formas fundamentales de S_1, S_2 respecto a N_1, N_2 cumplen $(\sigma_1)_p(v,v) \geq (\sigma_2)_p(v,v)$ para todo $v \in T_pS_1$. En particular, las curvaturas medias cumplen $H_1(p) \geq H_2(p)$.

    (b) Demuestra que si $(\sigma_1)_p(v,v) > (\sigma_2)_p(v,v)$ para todo $v \in T_pS_1 - \{0\}$, entonces S_1 está por encima de S_2 alrededor de p.

21. Variación paralela. Sea S una superficie orientable y $N\colon S \to \mathbb{S}^2$ una aplicación de Gauss. Dado $r > 0$, consideramos la aplicación $F_r\colon S \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F_r(p) = p + rN(p), \quad p \in S.$$

Supongamos que $F_r(S)$ es una superficie (llamada *superficie paralela*) y que para cada $r \in (0, \varepsilon)$, $F_r\colon S \to S_r$ es un difeomorfismo, para cierto $\varepsilon > 0$. Fijemos $r \in (0, \varepsilon)$.

(a) Sea $p \in S$ y $e_1, e_2 \in T_pS$ vectores unitarios y ortogonales tales que $dN_p(e_i) = -k_i(p)e_i$, para $i = 1, 2$ (es decir, $k_1(p), k_2(p)$ son las curvaturas principales en p). Demuestra que $(dF_r)_p(e_i) = (1 - rk_i(p))e_i$, $1 - rk_i(p) > 0$ y $1 - 2rH(p) + r^2K(p) > 0$.

(b) Prueba que el plano tangente a S en $p \in S$ coincide con el plano tangente a $F_r(S)$ en $F_r(p)$, y que existe una aplicación de Gauss N' para $F_r(S)$ tal que $N' \circ F_r = N$.

(c) Prueba que la recta normal afín a S en $p \in S$ coincide con la recta normal afín a $F_r(S)$ en $F_r(p)$.

(d) Prueba que las curvaturas principales de S en p y de $F_r(S)$ en $F_r(p)$ están relacionados por

$$k_i'(F_r(p)) = \frac{k_i(p)}{1 - rk_i(p)}, \quad i = 1, 2,$$

y que las direcciones principales coinciden.

(e) Demuestra que las curvaturas de Gauss y media de S y $F_r(S)$ se relacionan mediante

$$K' \circ F_r = \frac{K}{1 - 2rH + r^2K}, \quad H' \circ F_r = \frac{H - rK}{1 - 2rH + r^2K}.$$

(f) Supongamos que S tiene curvatura media constante $H = \frac{1}{2r}$. Demuestra que K no tiene ceros en S y que $F_r(S)$ tiene curvatura de Gauss constante $K' = \frac{1}{r^2}$.

22. Sean S_1 y S_2 dos superficies tangentes a lo largo de una curva regular y conexa C.

(a) Prueba que si C es línea asintótica de S_1, también lo es de S_2.

(b) Si C es una línea de curvatura de S_1, ¿también lo es de S_2?

(c) Si S_1 es un plano afín, entonces los puntso de C son puntos llanos de S_2.

23. Sea S una superficie orientable, conexa y con curvaturas principales constantes. Prueba que si S tiene un punto elíptico, entonces S es un abierto de una esfera.

24. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta y conexa, con curvatura de Gauss positiva. Si H/K es constante, prueba que S es una esfera.

25. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta y conexa, con curvatura de Gauss positiva. Si una curvatura principal de S es constante, prueba que S es una esfera.