Departamento de Geometría y Topología

Curvas y superficies, Grado en Matemáticas

Relación de problemas 2: Superficies en el espacio

1. En cada uno de los siguientes casos: (i) demuestra que S es una superficie regular; (ii) encuentra una parametrización suya; (iii) calcula el plano tangente y la recta normal en un punto arbitrario de S; (iv) calcula la primera forma fundamental del S.

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$, con $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

   (b) Elipsoide. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, con $abc \neq 0$, es el elipsoide de semiejes a, b y c centrado en el origen de coordenadas.

   (c) Paraboloide Elíptico. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$, con $ab \neq 0$.

   (d) Paraboloide Hiperbólico. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\}$, con $ab \neq 0$.

   (e) Hiperboloide reglado (o de una hoja). $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1\}$, con $abc \neq 0$.

   (f) Hiperboloide elíptico (o de dos hojas). $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1\}$, con $abc \neq 0$.

   (g) Catenoide. Sea S la superficie obtenida al girar la traza de $\alpha(s) = (\cosh(s), 0, s)$, $s \in \mathbb{R}$, alrededor del eje z. En este caso, parametriza además el trozo de S delimitado por los planos $z = -1$ y $z = 1$ que está contenido en el abierto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$.

   (h) Toro de revolución. Sea α una circunferencia situada en el plano $x = 0$, de radio r y centro $(0, a, 0)$ con $a > r$. Llamamos S a la superficie generada al rotar dicha curva alrededor del eje z. En este caso, prueba que los puntos de S cumplen la ecuación $z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$.

2. Cuádricas.

   (a) Dada una matriz A simétrica de orden 4, se define

   $$S_A = \left\{ p \in \mathbb{R}^3 \ : \ (1, p^t) A \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

   Supongamos que $S_A \neq \emptyset$ y que para cada $p \in \mathbb{R}^3$, $(1, p^t)A \neq 0$. Prueba que S_A es una superficie. Esto unifica los ejemplos de esferas, elipsoides, hiperboloides, paraboloides y cilindros circulares.

   (b) Sea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz simétrica real, $b \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto

   $$S(B, b, c) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Bp, p\rangle + 2\langle b, p\rangle + c = 0\}.$$

   Relaciona S_A con $S(B, b, c)$. ¿Para qué matrices B, vectores b y números reales c es $S(B, b, c)$ una superficie? Cuando $S(B, b, c)$ sea una superficie, calcula el plano tangente en un punto arbitrario $p \in S(B, b, c)$.

3. Calcula los valores $c \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación $xy + z(z - 2) = c$ define una superficie regular.

4. Prueba que, dado un punto p en una superficie S, existe un abierto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ con $p \in O$ y una función diferenciable $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ tal que $S \cap \mathcal{O} = F^{-1}(\{0\})$, siendo 0 un valor regular de F.

5. Comprueba que la ecuación del plano tangente afín en (x_0, y_0, z_0) de una superficie regular definida por la ecuación $f(x, y, z) = c$, donde c es valor regular de f, es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

6. Prueba que la ecuación del plano tangente afín al grafo de una función diferenciable $z = f(x, y)$, en el punto $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, viene dada por:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

7. Prueba que si una superficie regular corta a un plano en un único punto entonces dicho plano es el plano tangente afín.

8. Sea $C = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\|^2 - \langle p, a\rangle^2 = r^2\}$ el cilindro de radio $r > 0$ y eje la recta vectorial de dirección $a \in \mathbb{R}^3$, $\|a\| = 1$. Prueba que dado $p \in C$,

$$T_pC = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v\rangle - \langle p, a\rangle\langle a, v\rangle = 0\} = (p - \langle p, a\rangle a)^{\perp}.$$

   Deduce que todas las rectas normales a C cortan el eje del cilindro perpendicularmente.

9. Prueba que las siguientes parejas de superficies son difeomorfas:

   (a) Un plano y un paraboloide elíptico.
   (b) Un hiperboloide de una hoja y un cilindro.
   (c) Un cilindro y una catenoide.
   (d) Un plano y un helicoide.
   (e) Una esfera y un elipsoide.
   (f) La esfera doblemente punteada $\mathbb{S}^2(1) - \{(0, 0, \pm 1)\}$ y el cilindro $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

10. Sean S una superficie que no pasa por el origen y $F\colon S \to \mathbb{S}^2(1)$ la aplicación dada por

$$F(p) = \frac{p}{\|p\|}, \quad p \in S.$$

   (a) Prueba que F es diferenciable y calcula su diferencial.
   (b) Demuestra que, dado $p \in S$, dF_p tiene núcleo no trivial si y sólo si la recta vectorial que pasa por p es tangente a S en p.

11. Prueba que la aplicación $F\colon \mathbb{R}^2 \to S = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2 = 1\}$ dada por $F(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$ es un difeomorfismo local. ¿Son $\mathbb{R}^2$ y S difeomorfos?

12. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Consideremos la aplicación $f\colon \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{R}$, $f(p) = \langle p, Ap\rangle$.

   (a) Prueba que f es diferenciable y calcula su diferencial.
   (b) Demuestra que $p \in \mathbb{S}^2(1)$ es punto crítico de f si y sólo si p es vector propio de A.
   (c) Prueba que si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son dos valores propios distintos de A y $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^2(1)$ son vectores propios de A asociados a λ_1, λ_2 respectivamente, entonces p_1 y p_2 son ortogonales. Prueba además que, si $p_3 \in \mathbb{S}^2(1)$ es ortogonal a p_1 y p_2, entonces p_3 es también valor propio de A. Deduce que A admite una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios.

13. Sea $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Prueba que un punto p en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es crítico para la función altura $h\colon S \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p, a\rangle$ si y sólo si a es normal a S en p (es decir, T_pS es ortogonal a a).

14. Sea $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Prueba que un punto p en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es crítico para la función $f\colon S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p - p_0\|^2$ si y sólo si $p = p_0$ ó bien $p - p_0$ es normal a S en p. Si $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$, demuestra que los puntos críticos de la función distancia a p_0 coinciden con los de la función distancia al cuadrado a p_0.

15. Sea S una superficie compacta donde se puede definir una función diferenciable con a lo más tres puntos críticos. Demuestra que S es conexa.

16. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$.

    (a) Demuestra que si S es compacta, entonces dado $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ existen al menos dos puntos de S en los que a es normal a S, y que desde cada punto de $\mathbb{R}^3$ puede trazarse al menos una recta normal a S.

    (b) Demuestra que si S es conexa y todas las rectas normales a S son paralelas, entonces S está contenida en un plano.

    (c) Prueba que si S es conexa y todas las rectas normales a S pasan por un mismo punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$, entonces S está contenida en una esfera centrada en p_0.

17. Sea S una superficie compacta y conexa. Admitiendo que todo homeomorfismo local $F\colon S \to \mathbb{S}^2(1)$ es un homeomorfismo[1], prueba que si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$ desde el cual no puede trazarse ninguna recta tangente a S, entonces S es difeomorfa a una esfera (Indicación: considera la aplicación $F\colon S \to \mathbb{S}^2(1)$ dada por $F(p) = \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|}$).

18. Dado $a > 3$, se define $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} = a\}$. Demuestra que S_a es una superficie conexa y encuentra un difeomorfismo entre S_a y $\mathbb{S}^2$.

19. Sea S una superficie, $p_0 \in S$ y $\Pi = p_0 + T_{p_0}S$ el plano afín tangente a S en p_0. Tomemos un vector $a \in \mathbb{S}^2(1)$ perpendicular a S en p_0.

    (a) Prueba que la proyección ortogonal sobre Π, $f\colon S \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = p - \langle p - p_0, a\rangle a$, cumple $f(S) \subset \Pi$. Tiene pues, sentido considerar la restricción $f\colon S \to \Pi$.

    (b) Demuestra que la diferencial de $f\colon S \to \Pi$ en p_0 es la identidad.

20. Prueba que si una superficie S es unión de dos abiertos suyos orientables y con intersección conexa, entonces S es orientable.

21. Sea $F\colon S_1 \to S_2$ un difeomorfismo local entre dos superficies. Prueba que si S_2 es orientable, entonces S_1 también lo es (en particular, la orientabilidad de superficies es invariante frente a difeomorfismos).

22. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta. Prueba que existe una recta afín que corta perpendicularmente a S en al menos dos puntos.

23. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada (no necesariamente compacta). Dado $p_0 \in \mathbb{R}^3$, prueba que la función distancia al punto p_0 alcanza su mínimo en algún punto de S.

24. Prueba que si dos superficies compactas son disjuntas, entonces existe una línea recta que corta perpendicularmente a ambas superficies.

[1] Esto se deduce de teoría de recubridores, que no abordaremos en esta asignatura.