Departamento de Geometría y Topología

Curvas y superficies, Grado en Matemáticas

Relación de problemas 1: Curvas

1. Encuentra una curva parametrizada cuya traza sea:

   (a) La parábola de ecuación $y = x^2 + 3$.

   (b) Una elipse centrada en el origen con semieje mayor horizontal de longitud a y semieje menor de longitud b, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

   (c) Una rama de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y otra de $xy = 1$.

   Calcula la curvatura y sus puntos críticos (llamados *vértices*) de las curvas anteriores.

2. Estudia la regularidad de la curva $\alpha(t) = \big(2a(1+\cos t), 2a(1+\mathrm{sen} t), a\sqrt{5}t\big)$ y calcula la longitud $L(\alpha)_0^{2\pi}$.

3. Espiral logarítmica. Considera la curva plana $\alpha(t) = e^t(\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcula el dominio de regularidad y la traza de α.

   (b) Calcula la longitud $L(\alpha)_a^b$, donde $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Deduce que, aunque la traza de α se enrolla infinitas veces alrededor del origen cuando $a \to -\infty$, la longitud $L(\alpha)_{-\infty}^0 = \lim_{a\to-\infty} L(\alpha)_a^0$ es finita.

   (c) Reparametriza por el arco la curva y calcula su curvatura.

4. La cicloide. La cicloide es la trayectoria que describe un punto sobre una circunferencia que rueda a lo largo de una recta. Encontrar una parametrización de la cicloide; para ello, suponer que la recta es el eje OX, que la circunferencia que gira siempre tangente al eje OX tiene radio 1, que en instante $t = 0$ la circunferencia está centrada en $(0,1)$ y que el punto que describe la cicloide es (en $t = 0$) el origen. (Solución: $\alpha(t) = (t - \mathrm{sen} t, 1 - \cos t)$). Calcula la regularidad de la curva, su longitud en el intervalo $(0, 2\pi)$ y su curvatura.

5. Sean $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\beta\colon J \to \mathbb{R}^2$ dos curvas planas p.p.a. con trazas disjuntas. Supongamos que la distancia entre las trazas de α y β se alcanza en $\alpha(t_0)$ y $\beta(s_0)$, donde $t_0 \in I$ y $s_0 \in J$. Prueba que las rectas tangentes a α en t_0 y a β en s_0 son paralelas.

6. Prueba que si todas las rectas tangentes a una curva plana p.p.a. pasan por un punto de $\mathbb{R}^2$, entonces la curva es un segmento de recta.

7. Prueba que si todas las rectas normales a una curva plana p.p.a. pasan por un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$, entonces la curva es un arco de circunferencia centrada en p_0.

8. Evoluta. Dada una una curva plana α con curvatura $\kappa > 0$, consideramos la curva cuya traza consiste en todos los centros de curvatura de α, esto es, $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$. Esta curva se llama *evoluta* de α. Calcula la evoluta de:

   (a) Una circunferencia de radio r.

   (b) La catenaria, esto es, la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Una elipse.

   (d) La evoluta de una elipse (esta curva se llama *astroide*).

9. Curvas de Bertrand en el plano. Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ se dice *de Bertrand* si existe una curva $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ con la misma recta normal en cada instante. Prueba:

   (a) $\beta(t) = \alpha(t) + r(t)N(t)$, siendo N un normal unitario de α.

   (b) La función r (distancia entre ambas) es constante.

   Da ejemplos de curvas de Bertrand.

10. Sea $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. cuya función curvatura es par. Prueba que la traza de α es simétrica respecto a la recta afín normal a α en $t = 0$.

11. Supongamos que $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ es una curva p.p.a. cuya función curvatura es impar. Demuestra que la traza de α es simétrica respecto al punto $\alpha(0)$.

12. Sean $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}^2$ dos curvas p.p.a. de forma que sus respectivas curvaturas cumplen $\kappa_\alpha = -\kappa_\beta$ en I. Prueba que existe un movimiento rígido inverso $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = \Phi \circ \alpha$.

13. Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $0 \in I$, simétrica respecto a $\alpha(0)$. Relaciona la curvatura de α con la de la curva $\beta\colon I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = \alpha(-t)$.

14. Comparación de curvas. Sean $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\beta\colon J \to \mathbb{R}^2$ dos curvas p.p.a. con diedros de Frenet respectivos $\{T_\alpha, N_\alpha\}$, $\{T_\beta, N_\beta\}$. Supongamos que existen $t_0 \in I$, $s_0 \in J$ tales que $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = (0,0)$, $T_\alpha(t_0) = T_\beta(s_0) = (1,0)$, $N_\alpha \equiv N_\beta(s_0) = (0,1)$. Prueba que

   (a) Si $\kappa_\alpha(t_0) > \kappa_\beta(s_0)$, entonces α está estrictamente por encima de β en un entorno de $(0,0)$, es decir, α, β pueden reparametrizarse como grafos $\alpha_1(x) = (x, f(x))$, $\beta_1(x) = (x, h(x))$ de funciones derivables alrededor de $x = 0$ con $f(0) = h(0) = 0$, y $f(x) > h(x)$ para cada $x \neq 0$ en un entorno de cero.

   (b) Si α está por encima de β en un entorno de $(0,0)$, entonces $\kappa_\alpha(t_0) \geq \kappa_\beta(s_0)$.

   (Indicación: considera la función $g(x) = f(x) - h(x)$, que cumple $g(0) = g'(0) = 0$, $g''(0) = \kappa_\alpha(t_0) - \kappa_\beta(s_0)$).

15. Usa el principio de comparación de curvas para probar que si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ es una curva p.p.a. que alcanza su distancia máxima al origen en $t_0 \in I$, entonces su curvatura κ cumple $|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{\|\alpha(t_0)\|}$.

16. Estudia el dominio de regularidad y traza de cada una de las siguientes curvas:

   (a) $\alpha(t) = (t^3, 0, 0)$.

   (b) $\beta(t) = (t^3 + t, 0, 0)$.

   (c) $\gamma(t) = (t^3, t^3, t^3)$.

   (d) $\delta(t) = (t^3 + t, t^3 + t, 0)$.

   (e) $\tilde{\alpha}(t) = (3t \cos t, 3t^2, 0)$.

   (f) $\tilde{\beta}(t) = (\cos t, t, 1 - t - \cos t)$.

   (g) $\tilde{\gamma}(t) = (4t, 4t \tan t, 0)$.

   (h) $\tilde{\delta}(t) = (\cos t, \cot^2 t, t)$.

   Calcula el triedro de Frenet de cada una de ellas, así como su curvatura y torsión.

17. Sea $\alpha(t) = \left(a \cos \dfrac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \text{sen} \dfrac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \dfrac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$, $t \in \mathbb{R}$, una hélice circular. Demuestra que la curvatura de α es $\kappa(t) = \frac{a}{a^2+b^2}$ y la torsión es $\tau(t) = -\frac{b}{a^2+b^2}$.

18. Hélice generalizada. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, el ángulo que forma en el punto $\alpha(t_0)$ con la dirección definida por un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es el ángulo que forman los vectores $\alpha'(t_0)$ y v. Sea α una curva p.p.a.. Decimos que α wa una *hélice generalizada* si su curvatura es positiva y cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones:

    (a) La curva α forma un ángulo constante con una dirección fija.

    (b) El normal a α es perpendicular a una dirección fija de $\mathbb{R}^3$. A dicha dirección se le denomina *eje de la hélice*.

    (c) Existen $a, b \in \mathbb{R}$ no ambos nulos tales que $aT(t) + bB(t)$ es un vector que no depende de t.

    (d) La curvatura y la torsión de α son funciones proporcionales.

    Prueba que, en efecto, las afirmaciones anteriores son equivalentes.

19. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. tal que $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente dependientes en cada instante $t \in I$. Prueba que α es un segmento de recta.

20. Prueba que si todas las rectas afines normales a una curva (espacial) p.p.a. con curvatura estrictamente positiva pasan por un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$, entonces la curva es un arco de circunferencia centrada en p_0.

21. Prueba que no existe ninguna curva p.p.a. con curvatura estrictamente positiva tal que todas las rectas afines binormales (es decir, con la dirección del vector binormal en cada punto) pasan por un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$.

22. Relaciona la longitud, curvatura y torsión de una curva cuando le aplicamos una homotecia de razón $\lambda > 0$ (dado $p_0 \in \mathbb{R}^3$, la homotecia de razón λ y centro p_0 es $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $H(p) = p_0 + \lambda(p - p_0)$).

23. Dados $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido y $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a., definimos $\beta = \Phi \circ \alpha$. Demuestra que las curvaturas $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$ coinciden y que si éstas son estrictamente positivas, entonces la torsiones se relacionan por $\tau_\beta = \pm\tau_\alpha$, donde $-$ se da si y sólo si Φ es inverso. Recíprocamente, si $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ son curvas p.p.a. con curvaturas $\kappa_\alpha = \kappa_\beta > 0$ y torsiones $\tau_\alpha = -\tau_\beta$, prueba que existe un movimiento rígido inverso $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = \Phi \circ \alpha$.

24. Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura κ positiva. Prueba que si la torsión de α es constante $\tau_0 \in \mathbb{R}$ y la traza de α está contenida en una esfera, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que
$$\kappa(t) = \frac{1}{a\cos(\tau_0 t) + b\,\mathrm{sen}(\tau_0 t)}, \quad \forall t \in I.$$

25. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura y torsión positivas. Se define la curva $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ por
$$\beta(s) = \int_{s_0}^{s} B(u)\mathrm{d}u,$$
siendo B el binormal a la curva α. Prueba que β está p.p.a. y calcula su curvatura y torsión.

26. Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura estrictamente positiva. Prueba que existe una curva diferenciable $\omega\colon I \to \mathbb{R}^3$ tal que las ecuaciones de Frenet de α se escriben:
$$T' = \omega \times T, \quad N' = \omega \times N, \quad B' = \omega \times B,$$
donde $\{T, N, B\}$ es el triedro de Frenet de α. A la curva ω se le llama la *velocidad angular* de α. Demuestra que α tiene velocidad angular constante si y sólo si es un arco de circunferencia o de hélice circular.