Examen parcial – 25 de abril de 2016

Curvas y Superficies, Grado en Matemáticas. Curso 2015/2016

1. **(3 puntos)** Dado $a \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, describe explícitamente todas las curvas parametrizadas por el arco $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$) que cumplen

$$\gamma'' = \gamma' \times a.$$

   ¿Qué son geométricamente estas curvas?

2. Justifica si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) **(1 punto)** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable que no es regular, entonces la traza de α no admite ninguna reparametrización regular.

   b) **(1 punto)** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular e inyectiva. Definimos $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ como $X(t,s) = (\alpha(t), 0) + (0,0,s)$. Entonces, $S = X(I \times \mathbb{R})$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

   c) **(1 punto)** Existe una superficie compacta que está contenida en el cilindro $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Considera la aplicación $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$X(u,v) = \left((2 + \operatorname{sen} v)\cos u, (2 + \operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u, v\right).$$

   a) **(1 punto)** Prueba que $S = X(\mathbb{R}^2)$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

   b) **(1 punto)** Calcula el plano tangente a S en el punto $p_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

   c) **(1 punto)** ¿Es S una superficie orientable?

   d) **(1 punto)** Prueba que S es difeomorfa al cilindro $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Duración: 2 horas