## 3.8 Sistemas de ecuaciones no lineales.

En esta sección nos ocupamos, brevemente, de la resolución numérica de un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

Dicho sistema puede expresarse mediante la ecuación vectorial:

$$F(X)=0$$

donde $F: S \subset R^2 \rightarrow R^2$ es una función vectorial de componentes las funciones reales de 2 variables reales $f_1(X)$, $f_2(X)$ con $X=(x,y)$

Puden obtenerse de forma similar al caso de una variable métodos iterativos de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} X = X_0 \\ X_n = G(X_{n-1}) \quad n=1,2,\ldots \end{array}}$$

donde la ecuación vectorial ***X=G(X)*** debe ser equivalente a la asociada al sistema inicial (***F(X)=0***). Un caso particular de método para resolver el sistema (3.10) es el de Newton para sistemas; a saber:

$$\boxed{\begin{array}{l} X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = aprox,\ inicial \\ X_n = X_{n-1} - J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(X_{n-1}) \\ f_2(X_{n-1}) \end{pmatrix} \quad n=1,2,\ldots \end{array}}$$

donde $\boldsymbol{J}$ es el Jacobiano[7] de $f_1$ y $f_2$ evaluado en la aproximación $X_{n-1}$

[7] El jacobiano de dos funciones, $f_1$ y $f_2$ de dos variables, x e y, es la matriz:

$$J(f_1,f_2)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 5**

Aplique el método de Newton para estimar la raíz del sistema no lineal:

$$x^2 + y^2 = 10$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

en el cuadrado $[1,3]\times[1,3]$

**Solución**.

Para aplicar el método de Newton al sistema hemos de escribirlo en la forma estándar:

$$x^2 + y^2 - 10 = 0$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

Ahora calculamos la matriz jacobiana asociada; es decir,

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Esta matriz ha de ser inversible en cada aproximación calculada, cosa que es cierta siempre que $(x,y) \neq (0,0)$ $(\det(J) = -8xy)$. Ahora, el método de Newton quedaría:

$$\boxed{\begin{aligned} X_0 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 1. \end{pmatrix} \\ X_n &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_{n-1} & 2y_{n-1} \\ 2x_{n-1} & -2y_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 - 10 \\ x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad n = 1,2,\ldots \end{aligned}}$$

cuyos resultados numéricos vienen dados en la figura capturada desde "Mathematica" siguiente:

•Newton para Sistemas.nb

```
In[1]:= Clear[x, y]
        f1[x_, y_] := x^2 + y^2 - 10
        f2[x_, y_] := x^2 - y^2 - 1
        jacob[x_, y_] = {{D[f1[x, y], x], D[f1[x, y], y]},
                         {D[f2[x, y], x], D[f2[x, y], y]}};

In[5]:= Clear[x, y]
        x[0] = 1. ; y[0] = 1. ;
        Do[{x[n], y[n]} = {x[n - 1], y[n - 1]} -
           Inverse[jacob[x[n - 1], y[n - 1]]].
            {f1[x[n - 1], y[n - 1]], f2[x[n - 1], y[n - 1]]},
         {n, 5}]

In[14]:= Print["n", "     ", " x[n]", "     ", "     y[n]"]
         TableForm[Table[{i, x[i], y[i]}, {i, 0, 5}]]
```

| n | x[n] | y[n] |
|---|---|---|
| 0 | 1. | 1. |
| 1 | 3.25 | 2.75 |
| 2 | 2.47115 | 2.19318 |
| 3 | 2.34842 | 2.1225 |
| 4 | 2.34521 | 2.12132 |
| 5 | 2.34521 | 2.12132 |

100%

**Figura 4**

En esta figura se puede observar como se implementa de forma básica, en MATHEMATICA, el método de Newton para un sistema no lineal y mostrar en pantalla las iteraciones calculadas ( en este caso 5 han sido suficientes para comprobar la convergencia a la solución buscada). Así, una aproximación a la solución buscada (**r,s**), será:

$$\mathbf{r} \cong 2.34521$$

$$\mathbf{s} \cong 2.12132$$