

1.2 Valores y vectores propios. Método de las potencias y Rayleigh.

1.2.1 Cálculo del Polinomio Característico: ALGORITMO DE SOURIAU.

<p>ENTRADA: la matriz $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$, $p_1 = \text{traza}(\mathbf{A}_1)$, $n = \dim(\mathbf{A})$</p> <p>PROCESO: para $k = 1, \dots, n - 1$</p> <p style="text-align: center;">Calcular $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k - p_k \mathbf{I}$, $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{A}$ y $p_{k+1} = \frac{1}{k+1} \text{traza}(\mathbf{A}_{k+1})$</p> <p>SALIDA: \mathbf{B}_{n-1}, \mathbf{A}_n, valores p_j y</p> <p style="text-align: center;">$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n)$</p>
--

Proposición 1.5

En el algoritmo de Souriau se tiene:

1. La matriz $\mathbf{B}_n = (\mathbf{0})$ y $\frac{1}{p_n} \mathbf{B}_{n-1}$ es la inversa de \mathbf{A}
2. $P(\lambda)$ es el polinomio característico de \mathbf{A} .

Teorema 1.27 (discos de GERSCHGORIN)

Sea A matriz de orden $n \times n$, sean $f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, $c_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ik}|$ con $i, k = 1, \dots, n$. Entonces:

- Los valores propios de \mathbf{A} se encuentran en el conjunto $\mathbb{F} = \bigcup_{i=1}^n F_i$ y en el conjunto $\mathbb{C} = \bigcup_{k=1}^n C_k$
- cada componente conexa de \mathbb{F} o de \mathbb{C} contiene tantos valores propios (contadas multiplicidades) de A como discos haya en dicha componente.

(F_i =disco centrado en a_{ii} y radio f_i y C_k =disco centrado en a_{ii} y radio c_k)

1.2.2 Valor propio dominante.

Definición 1.9

Se dice que \mathbf{A} tiene valor propio dominante si existe un v.p. λ_1 verificando: $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ $i = 2, \dots, n$

Nuestro próximo objetivo es el cálculo aproximado de λ_1 . Para ello, supongamos que la matriz es diagonalizable; es decir, existe una base de vectores propios $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ tales que $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ $i = 1, \dots, n$.

Describamos pues el procedimiento conocido como método de las potencias. Este construye sendas sucesiones de vectores y valores con el objetivo de aproximar λ_1 .

ALGORITMO BÁSICO

ENTRADA: $\mathbf{A}, \mathbf{x} \neq \vec{0}$ $M = n^\circ$ de iter., $tol = \text{tolerancia}$

PROCESO: Para $k = 1, \dots, M$

- calcule $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$; $\lambda^{(k)} = \frac{y_j}{x_j}$ si $x_j \neq 0$
- si $\|\mathbf{y} - \lambda^{(k)} \mathbf{x}\| < tol$, entonces SALIDA 1 (FIN)
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

SALIDA:

1. el valor propio dominante es: $\lambda^{(k)}$
2. no se ha conseguido la aproximación requerida.

ALGORITMO NORMALIZADO

ENTRADA: \mathbf{A}, \mathbf{x} con $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, $M = n^\circ$ de iter., $tol = \text{tolerancia}$

PROCESO: para $k = 1, \dots, M$

- calcule $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$; si $x_p = 1$, $\lambda^{(k)} = y_p$
- si $\|\mathbf{y} - \lambda^{(k)} \mathbf{x}\| < tol$, entonces SALIDA 1 (FIN)
- si $|y_p| = \|\mathbf{y}\|_\infty$, entonces $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{y_p}$

SALIDA:

1. el valor propio dominante es: $\lambda^{(k)}$
2. no se ha conseguido la aproximación requerida.

ALGORITMO BÁSICO CON COCIENTES DE RAYLEIGH

ENTRADA: \mathbf{A} , $\mathbf{x} \neq \vec{\mathbf{0}}$, $M = n^\circ$ de iteraciones, tol

PROCESO: para $k = 1, \dots, M$

- calcule $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$; calcular $\sigma_k = \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{x}}$
- si $\|\mathbf{y} - \sigma_k \mathbf{x}\| < tol$, entonces SALIDA 1 (FIN)
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

SALIDA:

1. el valor propio dominante es: σ_k
2. no se ha conseguido la aproximación requerida.

Convergencia del método de las potencias.

Teorema 1.28

Si \mathbf{A} es diagonalizable con valor propio dominante λ_1 y \mathbf{u}_1 su v.p. asociado; entonces:

1. $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{\mathbf{0}}\}$ tal que $\mathbf{x}^{(0)} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n$ con $a_1 \neq 0$, el método de las potencias normalizado es convergente; es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)} = \lambda_1 \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \tilde{\mathbf{u}}_1$$

donde $\tilde{\mathbf{u}}_1$ es v.p. unitario asociado a λ_1 .

2. Si $|\lambda_2| \geq |\lambda_i|$ para $i = 3, \dots, n$, entonces: $\lambda^{(k)} - \lambda_1 \simeq O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1}\right)$
3. Si \mathbf{A} es simétrica y usamos el método de las potencias con cocientes de Rayleigh, entonces:

$$\sigma_k - \lambda_1 \simeq O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2(k-1)}\right)$$

Método de deflación

Éste es un método que es de utilidad si se conoce un valor y vector propio de \mathbf{A} de forma que el resto de valores propios se obtienen desde una matriz más sencilla como se indica en el resultado siguiente:

Teorema 1.29 (Deflación)

Si λ_1 y \mathbf{u}_1 son valor y vector propios de \mathbf{A} y \mathbf{v} es un vector tal que $\mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u}_1 = 1$; entonces, los valores propios de la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \mathbf{v}^t)$ son: $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (donde λ_i es v.p. de \mathbf{A})

Elecciones particulares del vector \mathbf{v}

1. **WIELANDT**: si $u_{11} \neq 0$ tomamos el vector, $\mathbf{v}^t = \frac{1}{\lambda_1 u_{11}} (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$; entonces, la matriz resultante es:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

2. **HOTELLING**: si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$, tomamos $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^t \mathbf{u}_1}$

Condicionamiento respecto del cálculo de valores propios.

Teorema 1.30 (Bauer-Fike)

Sea \mathbf{A} diagonalizable y $\|\bullet\|$ una norma matricial tal que $\|D\| = \max_i \{ |d_{ii}| \}$. Si $\mathbf{A} + \mathbf{E}$ es una perturbación de \mathbf{A} y λ un v.p. de $\mathbf{A} + \mathbf{E}$; entonces: $\min_{i=1, \dots, n} |\lambda - \lambda_i| \leq \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}^{-1}\| \|\mathbf{E}\|$ donde \mathbf{P} es tal que $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Teorema 1.31 (Cota a posteriori)

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Si λ y \mathbf{x} son aproximaciones de un v.v.p. de \mathbf{A} ; entonces: $\min_{i=1, \dots, n} |\lambda - \lambda_i| \leq \frac{\|\mathbf{Ax} - \lambda \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$

1.2.3 Cálculo global de valores propios.

Tridiagonalización de matrices simétricas.

Objetivo: Transformación de \mathbf{A} en una matriz tridiagonal semejante a ella.

Dada la matriz \mathbf{A} , procedemos como sigue:

ENTRADA: $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$

PROCESO: para $k = 1, \dots, n - 2$,

- formamos la matriz: $\mathbf{H}_k = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}}_{n-k} \end{array} \right)$ donde $\tilde{\mathbf{H}}_{n-k}$ es la matriz del teorema 1.9 (sección 1, pag. 10) asociada al vector: $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} a_{k+1,k}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k)} \end{pmatrix}$ (en la columna k -ésima de $\mathbf{A}^{(k)} = (a_{i,j}^{(k)})$).

- calculamos $\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{H}_k \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{H}_k$

SALIDA: Matriz tridiagonal: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{(n-1)}$

Conseguida la matriz tridiagonal y simétrica: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_3 & \ddots & b_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}$ con elementos

$b_i \neq 0$, entonces:

Teorema 1.32

Sean $P_0 = 1$, $P_1(\lambda) = a_1 - \lambda$, $P_k(\lambda) = (a_k - \lambda)P_{k-1}(\lambda) - b_k^2 P_{k-2}(\lambda)$ con $k \geq 2$. Entonces, $P_n(\lambda)$ es el polinomio característico de B .

Esta sucesión de polinomios tiene propiedades de interés, como:

Teorema 1.33

La sucesión $\{P_n(\lambda), P_{n-1}(\lambda), \dots, P_0\}$ cumple las propiedades siguientes:

1. para $k = 1, \dots, n-1$, si $P_k(\alpha) = 0 \Rightarrow P_{k+1}(\alpha)P_{k-1}(\alpha) < 0$
2. $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_k(\lambda) = \infty$ ($k \geq 1$)
3. para $k = 1, \dots, n-1$, los ceros de $P_k(\lambda)$ son simples y separan los de $P_{k+1}(\lambda)$
4. Sea α tal que $P_n(\alpha) \neq 0$; entonces, el número de cambios de signo en $\{P_n(\alpha), P_{n-1}(\alpha), \dots, P_0(\alpha)\}$ es el número de raíces de $P_n(\lambda) = 0$ menores que α .

En definitiva, la sucesión calculada es una sucesión de Sturm para la ecuación $P_n(\lambda) = 0$. ¿Qué ocurre si alguno de los b_i es nulo?

MÉTODO QR DE FRANCIS (1961)

Dada una matriz invertible, \mathbf{A} , podemos usar las transformaciones de tipo Householder para escribir: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ donde \mathbf{Q} =ortogonal, \mathbf{R} =triangular superior. Puesto que el problema que tratamos de resolver es el de valores propios, y como la matriz \mathbf{R} no es semejante a \mathbf{A} , ¿cómo podemos obtener una que sí lo sea?

Procedimiento:

A partir de $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$ construimos sucesiones $\{\mathbf{A}^{(m)}\}$, $\{\mathbf{Q}^{(m)}\}$, $\{\mathbf{R}^{(m)}\}$ en la forma siguiente:

- Descomposición $\mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{Q}^{(m)}\mathbf{R}^{(m)}$;
- Calculo de $\mathbf{A}^{(m+1)} = \mathbf{R}^{(m)}\mathbf{Q}^{(m)}$

Entonces se verifica:

- $\mathbf{A}^{(m+1)} \sim \mathbf{A}^{(m)}$
- bajo ciertas condiciones, $\{\mathbf{A}^{(m)}\} \rightarrow \mathbf{R}$ (tri. sup.); es decir, los elementos de la diagonal de las matrices $\mathbf{A}^{(m)}$ se aproximan a los valores propios de \mathbf{A} .