4.3. Métodos de Diferencias Finitas.

Ahora pretendemos resolver numéricamente, el p.v.f. (4.5) sin pasar por un p.v.i. asociado. Para ello, usamos derivadas numéricas adecuadas de la función desconocida, $y(x)$.

Sea, pues, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b$ una partición uniforme de paso $h = \frac{b-a}{N+1}$; entonces, en cada nodo, se tienen las derivadas numéricas (diferencias centradas):

$$\begin{aligned} y''(x_n) &= \frac{y(x_{n-1}) - 2y(x_n) + y(x_{n+1})}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 y^{iv)}(\xi_n) && (4.15)\\ y'(x_n) &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})}{2h} - \frac{1}{6}h^2 y'''(\theta_n) && (4.16) \end{aligned}$$

Si aplicamos éstas al p.v.f. obtenemos el sistema, en general, no lineal:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} &= f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}\right) \quad n = 1, \ldots, N \\ y_{N+1} &= \beta \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde $y_n \approx y(x_n)$. Así, resolver numéricamente el problema (4.5) equivale a buscar la solución del sistema (4.17). En consecuencia vamos a analizar la existencia de solución del sistema en los casos lineal y no lineal respectivamente.

4.3.1. Método de diferencias centradas: caso lineal.

Consideramos el problema (4.8) con lo que el sistema (4.17), agrupando y multiplicando por h^2, se expresaría como sigue:

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ (1 + \frac{h}{2}p_n)y_{n-1} - (2 + h^2 q_n)y_n + (1 - \frac{h}{2}p_n)y_{n+1} &= h^2 r_n \quad n = 1, \ldots, N \\ y_{N+1} &= \beta \end{aligned} \tag{4.18}$$

y queda en la forma matricial:

$$\mathbf{A}.\mathbf{Y} = h^2\mathbf{r} - \mathbf{c} \tag{4.19}$$

con matriz de coeficientes, $\mathbf{A}$, términos independientes, $\mathbf{r}$, e incógnitas, $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{N-1} & -b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & -b_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta c_N \end{pmatrix}$$

donde, $a_n = 1 + \frac{h}{2}p_n$, $b_n = 2 + h^2 q_n$, $c_n = 1 - \frac{h}{2}p_n$. Dado que el sistema obtenido es lineal, ¿admite solución única? La respuesta se explicita en el resultado siguiente:

Proposición 4.1
Supongamos que p, q, r verifican las condiciones del corolario 4.1. Sea $p^* = \text{máx}\{|p(x)| : x \in [a,b]\}$, si $h < \frac{2}{p^*}$; entonces,

- *la matriz* $\mathbf{A}$ *es estrictamente diagonal dominante;*
- *el sistema (4.19) tiene una única solución (solución numérica del P.V.F. lineal)*

Demostración.-
Hemos de verificar las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} |b_1| &> |c_1|, \quad |b_N| > |a_N| \\ |b_n| &> |a_n| + |c_n| \quad n = 2, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

En efecto, de la hipótesis sobre h se deduce que: $|a_n| = a_n,\ y\ |c_n| = c_n \quad \forall n$; es decir,

$$|a_n| + |c_n| = 1 + \frac{h}{2}p_n + 1 - \frac{h}{2}p_n = 2 < 2 + h^2 q_n = |b_n|$$

y de aquí se deducen las desigualdades mencionadas.

Como A es E.D.D. entonces es invertible y por tanto existe solución única del sistema (4.19) **C.Q.D.**

4.3.2. Método de diferencias centradas: caso no lineal.

Teorema 4.1
Consideramos el método de diferencias centradas (4.17) para el p.v.f. (4.5) verificando:

- $f, f_y, f_{y'}$ *son funciones continuas en* $D = [a,b] \times \mathbb{R}^2$;
- $f_y \geq \delta > 0$; $L = \text{máx}\{|f_{y'}|\}$ *en* D

entonces; si $h < \frac{2}{L}$, el sistema (4.17) admite una única solución que puede obtenerse mediante el método de Newton para sistemas.

Demostración.
En primer lugar, reescribimos el sistema (4.17) en la forma vectorial, equivalente, siguiente:

$$F(y_1, \ldots, y_N) = \mathbf{0} \tag{4.20}$$

donde F es una función vectorial de componentes las funciones

$$F_n(y_1, \ldots, y_N) = y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - h^2 f\left(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}\right) \qquad n = 1, \ldots, N$$

Para este sistema no lineal, bajo las condiciones impuestas sobre h se cumple que la matriz jacobiana de F; es decir,

$$J_F = J(y_1, y_2, \ldots, y_N) = \left(\frac{\partial F_n}{\partial y_j}\right)_{n,j=1,\ldots N}$$

es E.D.D. y por tanto, el método de Newton está bien definido y convergerá para una aproximación inicial adecuada. Para precisarlo aún más, teniendo en cuenta que cada F_n depende sólo de $y_{n-1},\ y_n\ e\ y_{n+1}$, la matriz J_F viene descrita por:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_j} = \begin{cases} 0 & si \quad |n-j| > 1 \\ 1 + \frac{h}{2} f_{y'} & si \quad j = n-1 \\ -(2 + h^2 f_y) & si \quad j = n \\ 1 - \frac{h}{2} f_{y'} & si \quad j = n+1 \end{cases} \qquad n, j = 1, \ldots, N \tag{4.21}$$

así, es fácil deducir lo comentado antes siguiendo un razonamiento similar al hecho en el caso lineal.

ALGORITMO DE NEWTON PARA EL SISTEMA (4.20)

ENTRADA: $f, f_y, f_{y'}, a, b, \alpha, \beta, N, tol, M$

PROCESO:
Paso 1: Valores iniciales para $\mathbf{Y} = (y_n)$.

- tomar $h = \frac{b-a}{N+1}$, $y_0 = \alpha$, $y_N = \beta$
- para $n = 1, \ldots N$ tomar, $y_n = \alpha + nh\frac{\beta-\alpha}{b-a}$

Para $m = 1, \ldots, M$:
Paso 2: Formación de la matriz $J \equiv J_F$ y el vector F.
para $n = 1, \ldots, N$ tomar:

- $x = a + nh$, $y1 = y_n$, $y2 = \frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}$,
- $F_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} - h^2 f(x, y1, y2)$;
- para $j = 1, \ldots, N$ tomar:
    - si $|n-j| > 1$, $J_{n,j} = 0$
    - si $j = n-1$, $J_{n,j} = 1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x, y1, y2)$
    - si $j = n$, $J_{n,j} = -(2 + h^2 f_y(x, y1, y2))$
    - si $j = n+1$, $J_{n,j} = 1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x, y1, y2)$

Paso 3:

- Tomar $\mathbf{u}$ =solución del sistema lineal: $J.\mathbf{u} = -F$

Paso 4: control de parada

- Si $\|\mathbf{u}\| < tol$, entonces SALIDA 1 y Fin
- Si $\|\mathbf{u}\| \geq tol$, entonces tomar nuevo vector $\mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{u}$
- Si $m = M$, entonces SALIDA 2, FIN

SALIDA:

1. solución numérica $\mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{u}$
2. Se ha excedido el número de iteraciones. Modifique los valores iniciales de $\mathbf{Y}$ o aumente M

4.3.3. Métodos en D.F. para $y'' = f(x, y)$

Si el problema es de la forma: $y'' = f(x, y)$ con $y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$, entonces, se pueden obtener métodos en D.F. en forma similar al caso de MML de k-pasos, entre los que cabe destacar el método de Numerov; a saber,

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} &= \frac{h^2}{12}\left(f_{n-1} + 10f_n + f_{n+1}\right) \quad n = 1, \ldots, N \\ y_{N+1} &= \beta \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ejercicio:

Describa de forma explícita el caso lineal y no lineal y demuestre que el sistema resultante tiene solución única.

En general, un método lineal de k-pasos tendrá la forma genérica:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j y''_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \tag{4.23}$$

Para (4.23) se tienen los conceptos de error de truncatura local, orden, consistencia, cero-estabilidad, etc...