SESIÓN 4:

COMPROBACIÓN DE RELACIONES PARAXIALES

TRABAJO PREVIO

○ CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Aproximación paraxial**

Aproximación de ángulos con el eje óptico pequeños (sen $\sigma \approx \sigma$, tg $\sigma \approx \sigma$). En aproximación paraxial hay estigmatismo para todos los pares objeto-imagen.

- **Lente**

Sistema formador de imágenes formado por asociación de dos dioptrios.

- **Elementos cardinales**

Puntos del eje óptico y planos perpendiculares al eje óptico con características particulares (focos y planos focales, puntos y planos principales y antiprincipales, puntos y planos nodales y antinodales).

- **Puntos y planos principales (H,H')**

Puntos conjugados objeto e imagen con aumento lateral unidad (β'=1), y planos perpendiculares al eje que pasan por dichos puntos.

- **Focos**

Punto del eje imagen del infinito (foco imagen) o punto del eje cuya imagen está en el infinito (foco objeto), como se esquematiza en la figura 4.1.

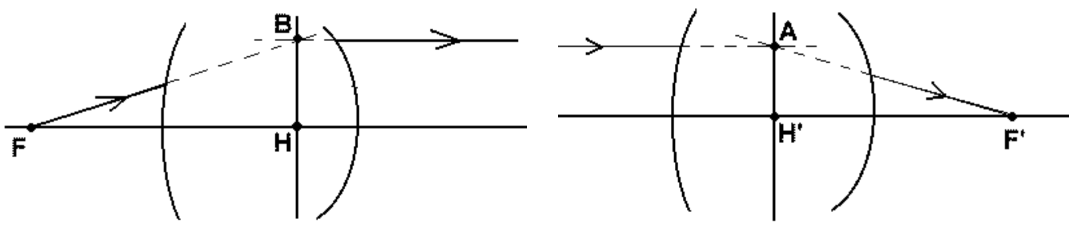

Figura 4.1. Foco objeto e imagen de un sistema óptico.

- **Distancias focales objeto e imagen**

Distancias $f=\overline{\mathrm{HF}}$ (objeto) y $f'=\overline{\mathrm{H'F'}}$ (imagen).

- **Relaciones paraxiales más importantes**
  - Ecuación de Newton (origen en los focos):

$$zz'=ff' \tag{4.1}$$

donde $z=\overline{\mathrm{FO}}$ y $z'=\overline{\mathrm{F'O'}}$.

  - Ecuación de Gauss (origen en los puntos principales):

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'} \tag{4.2}$$

donde $a=\overline{\mathrm{HO}}$ y $a'=\overline{\mathrm{H'O'}}$.

  - Relaciones del aumento lateral:

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{na'}{n'a}=\frac{f}{f-a}=\frac{f'-a'}{f'} \tag{4.3}$$

- **Lente delgada convergente**

En la figura 4.2 se muestran las distancias *z*, *z’*, *a* y *a’* en este caso.

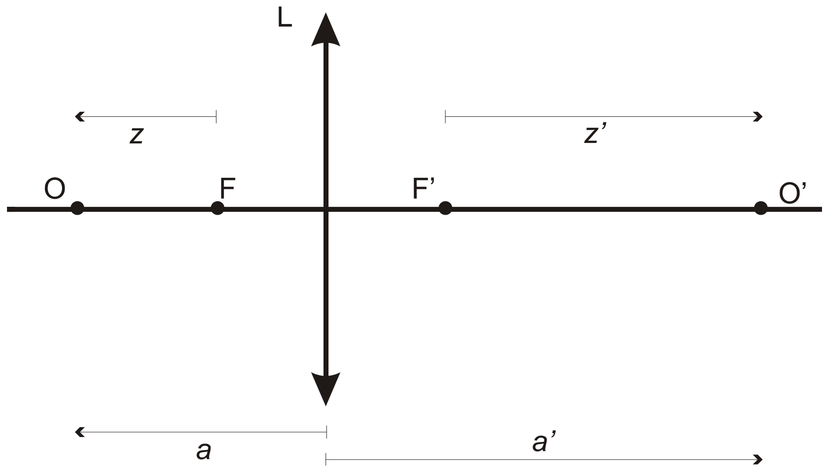

Figura 4.2. Distancias *a*, *a’*, *z* y *z’* para una lente delgada.

- **Posiciones de Bessel**

Para una lente delgada convergente, para que de un objeto real (situado a la izquierda de la lente) haya una imagen real (situada a la derecha de la lente), la distancia mínima objeto-imagen debe ser 4*f’*. Esta distancia mínima corresponde a un aumento lateral de –1. Para separaciones mayores objeto-imagen, hay dos posiciones posibles de la lente que dan una imagen sobre el mismo punto del eje. A estas dos posiciones se les llama Posiciones de Bessel. En una de ellas, el aumento lateral es mayor que la unidad (imagen de mayor tamaño que el objeto), mientras que en la otra el aumento lateral es menor que la unidad. Esto se demuestra a partir de la ecuación de Gauss y utilizando que la distancia fija objeto-imagen es *D=a'-a*. Eliminando *a* de la ecuación de Gauss, se llega a una ecuación de segundo grado en *a'*, cuyas soluciones son:

$$a' = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2} \tag{4.4}$$

○ CUESTIONES

1.- ¿Qué implicaciones tiene la aproximación paraxial desde el punto de vista de la formación de imágenes por un sistema óptico?

2.- Calcular el error asociado al uso de la aproximación paraxial para los dos rayos siguientes:

   a) Rayo que parte de un objeto a 3 cm de una lente delgada convergente y llega al borde de la misma, a 2 cm de altura sobre el eje.

   b) Rayo que parte de un objeto a 17 cm de una lente delgada convergente y llega a la misma a 1 cm de altura sobre el eje.

3.- Para un objeto situado 25 cm a la izquierda de una lente delgada convergente de +10 cm de focal, calcular la posición de la imagen:

   a) Utilizando la relación de Newton.

   b) Utilizando la ecuación de Gauss.

4.- Calcular el aumento lateral en la pregunta anterior para un objeto de 2 cm de altura situado en el eje óptico del sistema.

5.- Obtener la ecuación (4.4) cuyas soluciones corresponden a las dos distancias a' de las posiciones de Bessel.

6.- Si llamamos *d* a la distancia entre las dos posiciones de Bessel, obtener una expresión para *f'* en función de *D* (distancia objeto-imagen) y *d*.

7.- Demostrar que el producto de los aumentos laterales para las dos posiciones de Bessel es la unidad.

GUIÓN DE LA SESIÓN:

COMPROBACIÓN DE RELACIONES PARAXIALES

○ OBJETIVO

Estudio de la validez de algunas relaciones paraxiales para diferentes posiciones de un objeto y su imagen a través de una lente convergente, de la cual hemos medido previamente su focal.

○ LENTES CONVERGENTES: MÉTODO DE BESSEL

Friedrich Wilhelm Bessel (22 de Julio de 1784 - 17 de Marzo de 1846). Astrónomo y matemático alemán. Estudió por sí mismo Geografía, Español, Inglés, Navegación, Astronomía y Matemáticas. Conocido por determinar el método estelar Parallax Cygni 61, para medir distancias estelares. Trabajó en el Observatorio Lilienthal y a la edad de 26 años fue nombrado director del Observatorio Prusiano Guillermo Federico III. Se doctoró por la Universidad de Göttingen y más tarde se estableció en Königsberg el resto de su vida. Bessel también resolvió un problema de análisis matemático que envuelve lo que hoy se conoce como la función de Bessel, una herramienta de gran utilidad en Física e Ingeniería.

Ilumine el objeto mediante la fuente luminosa, situándola justamente detrás de él, todo sobre el banco óptico, como en el montaje de la figura 4.3. Coloque la pantalla sobre el banco óptico bastante separada del objeto, de tal forma que desplazando la lente entre el objeto y la pantalla encuentre dos posiciones diferentes de la lente (posiciones de Bessel) para las que se obtiene una imagen real, nítidamente recogida sobre la pantalla. Puede comprobar que las dos posiciones de Bessel son simétricas respecto al punto medio del segmento objeto-imagen y que las imágenes, ambas invertidas, son en una de las posiciones aumentada y en la otra disminuida.

Rafael Huertas, Eva Valero, Antonio García Beltrán.

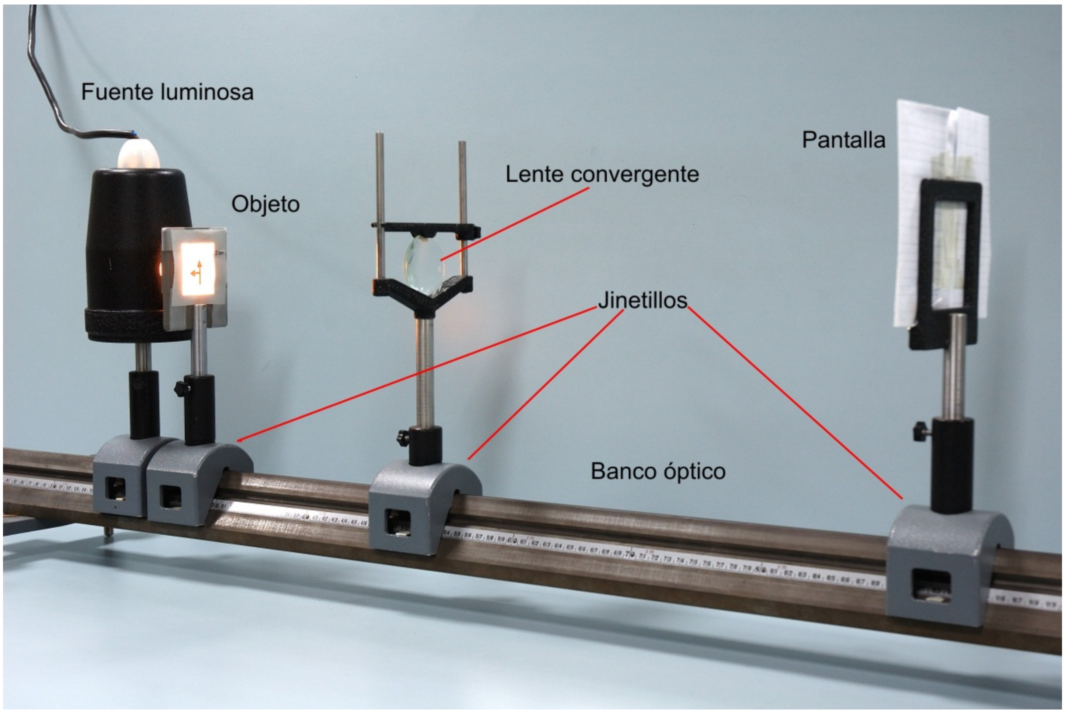

Figura 4.3. Dispositivo experimental.

- Puede demostrarse teóricamente que es posible obtener las dos posiciones de Bessel siempre que la distancia del objeto a la pantalla sea superior al cuádruplo de la focal de la lente convergente utilizada (por ahora desconocida). La existencia de 2 posiciones de Bessel puede también comprenderse considerando la reversibilidad de las trayectorias luminosas. La segunda posición de Bessel no es más que la primera considerando la imagen como objeto, y viceversa. Precisamente por este razonamiento es fácil demostrar que el producto de los aumentos laterales en las dos posiciones de Bessel vale la unidad. Ahora bien, como ya se ha dicho, no siempre existen dos posiciones de Bessel: en última instancia esto sucede porque las posiciones de Bessel son el resultado de resolver una ecuación de segundo grado que puede tener dos, una, o ninguna solución real.

Llamando *D* a la distancia en valor absoluto entre el objeto y la imagen (pantalla) y *d* a la distancia entre las dos posiciones de Bessel de la lente, puede obtener, después de algunos cálculos, la siguiente relación, que ha deducido en el trabajo previo:

$$f'_{BESSEL} = \frac{\left(D^2 - d^2\right)}{4D} \tag{4.5}$$

que permite calcular la focal imagen de la lente *f'*, a partir de los valores de *D* y *d* medidos con la escala del banco óptico.

- Al calcular la incertidumbre de *f'* recuerde que, al ser *D* y *d* distancias medidas sobre un banco óptico graduado en mm, la incertidumbre mínima asociada a cualquiera de esas dos distancias será 2 mm. En el caso de la medida de la distancia *d* la incertidumbre puede ser mayor de 2 mm, debido a las dificultades para precisar cuándo la imagen en la pantalla es perfectamente nítida.

Puede observar que una lente convergente no siempre produce una imagen real (que se pueda recoger en la pantalla) de un objeto real. Si el objeto real está próximo a la lente convergente (concretamente dentro de su distancia focal), ésta produce una imagen virtual, derecha y mayor, y se dice que la lente actúa como una lupa.

○ ESTUDIO DE LA VALIDEZ DE ALGUNAS RELACIONES PARAXIALES

Examinamos el grado de adecuación de las relaciones paraxiales de Newton, Gauss y de aumento (detalladas en el trabajo previo) al caso real de una lente convergente supuesta delgada, cuya focal hemos medido. Por tanto, a partir de ahora se considera conocida la focal *f'* de la lente convergente calculando su correspondiente incertidumbre:

- Usualmente los fabricantes suministran lentes con focales de 5 en 5 cm.

Para comprobar experimentalmente el grado de validez de las relaciones paraxiales mencionadas, ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), ha de realizar medidas de *a*, *a'* e *y'* siendo conocidos la focal *f'* de la lente y el tamaño del objeto *y*, que medirá con un calibre. Para realizarlas, desplace la lente y la pantalla y mida las distancias lente-objeto y lente-pantalla sobre el banco óptico, y también el tamaño de la imagen sobre la pantalla, con su correspondiente signo. Conviene que realice un número elevado de medidas de estos 3 parámetros, es decir, considere distintas posiciones del objeto respecto a la lente (por ejemplo, 15 posiciones). Puede ordenar los datos experimentales recogidos en una tabla apropiada.

Con los datos medidos realice las transformaciones que considere necesarias para obtener magnitudes que se relacionen de forma lineal y poder realizar las representaciones gráficas que permitan analizar la validez de las relaciones paraxiales antes indicadas mediante ajustes por mínimos cuadrados.

Para la relación de Gauss, si representa en el eje de abscisas (1/*a*) y en el de ordenadas (1/*a'*) con sus signos correspondientes, según la ecuación (4.2) los puntos experimentales deberán ajustarse a una recta de pendiente unidad y ordenada en el origen (1/*f'*). Puede comprobar hasta qué punto los valores de pendiente, *m*, y de término independiente, *n*, se corresponden con los predichos por la relación de Gauss (*m*=1, *n*=1/*f'*). Proceda de igual forma para las otras relaciones, calculando *z* y *z'* a partir de *a*, *a'* y *f'*, y transformándolas para obtener *x* e *y* de la correspondiente relación lineal. Para la relación de aumento lateral, utilice las medidas de *y'* obtenidas y mida el tamaño de la rendija (tamaño del objeto, denotado por *y* en la ecuación del aumento lateral) con un calibre.

La comparación tanto de la focal obtenida como del tamaño del objeto, mediante el ajuste y experimentalmente, le permitirá obtener conclusiones sobre la validez de ambas ecuaciones paraxiales. Por otro lado, el coeficiente de correlación de los ajustes da una medida cuantitativa del grado de cumplimiento de las ecuaciones estudiadas, en las condiciones experimentales que ha utilizado. Cuánto más próximo a la unidad sea dicho coeficiente mejor se ajustan las medidas experimentales a las ecuaciones teóricas. En las representaciones gráficas de los datos experimentales y las rectas de regresión, reflexione sobre los puntos que no verifican la relación discutiendo si corresponden a medidas mal realizadas o a posiciones para las que es más problemático que se esté trabajando en condiciones de aplicar la aproximación paraxial correctamente. Recuerde que estrictamente hablando las ecuaciones analizadas sólo son totalmente correctas dentro del ámbito de la óptica paraxial.