Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

Departamento de Álgebra.

Co-anillos y Categorías de Co-módulos.

Tesis Doctoral

Laiachi El Kaoutit.

Granada, 27 de Septiembre del 2004.

Co-anillos y Categorías de Co-módulos.

Laiachi El Kaoutit

27 de Septiembre del 2004.

Co-anillos y Categorías de Co-módulos.

por

Laiachi El Kaoutit

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Dr. D. José Gómez Torrecillas, para alcanzar el grado de doctor.

V. B
El director

El aspirante al grado.

Co-anillos y Categorías de Co-módulos.

Laiachi EL Kaoutit

Resumen

. Esta Tesis pertenece al campo de teoría de anillos asociativos posiblemente con unidades locales. Precisamente con el estudio de bimódulos unitarios que admiten ciertas estructuras algebraicas externas (comultiplicación y counidad), llamados coanillos. Los comódulos sobre un coanillo son módulos unitario junto con un morfismo de módulos (la coacción) que satisface cierta compatibilidad con la comultiplicación y la counidad. Un morfismo entre dos comódulos es un morfismo de módulos que es compatible con las coacciones de comódulos. Los comódulos y sus morfismos forman una categoría llamada categoría de comódulos. Ejemplos de categoría de comódulos son los módulos unitarios, los módulos graduados (por un grupo o por un grupo-conjunto), los módulos de Hopf, los módulos de Yetter-Drinfeld, los módulos de Doi-Koppinen y más general los módulos entrelazados de Tomasz Brzeziński.

En esta memoria ofrecemos, de una parte, varios nuevos ejemplos de coanillos además de la definición de un ideal y un sub-coanillo de un coanillo y el coanillo cociente. Tales definiciones se adaptan perfectamente con la noción de un morfismo de coanillos según la definición de José Gómez Torrecillas. En el caso de que el coanillo forma parte de un par racional sobre un anillo con unidades locales caracterizaremos la categoría de comódulos en términos de módulos racionales unitarios. Un resultado similar sobre bicomódulos es también ofrecido. De otra parte estudiaremos algunas propiedades del coanillo que se reflejan sobre toda la categoría de comódulos. También, recíprocamente, caracterizaremos algunos coanillos a través de las propiedades de sus categorías de comódulos.

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a mucha gente que me ha ofrecido su ayuda y apoyo durante la realización de esta memoria.

- A mi director de las dos tesis Pepe Gómez Torrecillas, por el montón de tiempo y la paciencia que ha gastado para formarme y introducirme al maravilloso mundo de los anillos.

- A todos mis amigos del Departamento de Álgebra especialmente a Pascual Jara Martínez, Pedro A. García Sanchez, J. Ignacio García García, Antonio Martínez Cegarra, Luis Merino González y Evangelina Santos Aláez.

- A cada uno de mis compañeros del grupo de investigación por su atención y apoyo J. Luis Bueso Montero, Javier Lobillo Borrero, Carlos Alberto Rabelo Rosillo y Mohsinne Zarouali.

- A mis amigos Erwin De Groot y Joost Vercruysse de la Universidad VUB por el interés y el apoyo que han puesto sobre esta tesis y a Stefaan Caenepeel por invitarme a la VUB.

- A mi amigo Juan Cuadra Díaz por el apoyo moral y científico que siempre me ha prestado.

- A Tomasz Brzeziński por el interés que ha puesto sobre los resultados de esta tesis y también por invitarme a la Universidad de Swansea.

- A mi madre Menana y mis hermanos Abdul, Mohamed, Khalid y su novia Anika, Adel, Ahmed y especialmente a mi hermana Malika.

- A mi mujer Juana María Sabiote Gimenez, no solamente por aguantar a un marido matemático, y también por mantenerlo durante estos tres últimos años. Espero quitarte la segunda, porque la primera te la tienes que seguir aguantando cariño.

- Sin olvidar a mi niña María Menana El Kaoutit Sabiote por la bonita sonrisa que me ofrece todos los días.

Índice general

Convenciones y notaciones

$\mathcal{A}b$	la categoría de grupos abelianos
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}^o$, $\mathcal{B}^o$)	categorías aditivas (categorías duales)
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)$	el grupo abeliano de morfismos en $\mathcal{A}$
$F \dashv G$	el funtor F es un adjunto por la izquierda de G
$id_{\mathcal{A}}$	el funtor identidad sobre $\mathcal{A}$
$\mathrm{Funt}(\mathcal{A},\mathcal{B})$	la categoría de funtores entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$
$(f^c) - f^k$	el morfismo (co)–núcleo de f, si existen en $\mathcal{A}$
$\mathbb{K}$ ($\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$)	un anillo conmutativo con 1 (la categoría de $\mathbb{K}$–módulos unitarios)
$A, A'..\ B, B'..$	un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales o bien una $\mathbb{K}$–álgebra con unidad
$\mathbf{Idemp}(A)$	el conjunto de todos los idempotentes de A
M_A (${}_AM$)	M es un A–módulo por la derecha (por la izquierda)
M^A	el sub-anillo de elementos invariante para un A–bimódulo M
M^* (${}^*M$)	el dual por la derecha (por la izquierda) de M_A (${}_AM$)
$\mathfrak{M}_A$ (${}_A\mathfrak{M}$)	la categoría de todos los A–módulos por la derecha (por la izquierda)
${}_A\mathfrak{M}_B$	la categoría de todos los (A,B)–bimódulos
$\mathcal{M}_A$ (${}_A\mathcal{M}$)	la categoría de los A–módulos unitarios por la derecha (por la izquierda)
${}_A\mathcal{M}_B$	la categoría de (A,B)–bimódulos unitarios
$\mathrm{Hom}_A(-,-)$	el $\mathbb{K}$–módulo de morfismos en $\mathfrak{M}_A$, ${}_A\mathfrak{M}$
$\mathrm{Hom}_{A-B}(-,-)$	el $\mathbb{K}$–módulo de morfismos en ${}_A\mathfrak{M}_B$
$U(A)$	los inversibles en A, si A tiene unidad
$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$	un A–anillo, no necesariamente extensión de A
$\mathrm{Jac}(M_A)$ ($\mathrm{Soc}(M_A)$)	el radical de Jacobson de (el zócalo de) M_A
$\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'.., \mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$	A, A'–coanillo, B, B'–coanillo
$M_{\mathfrak{C}}$(${}_{\mathfrak{C}}M$)	un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha (por la izquierda)
ρ_M (λ_M)	la coacción por la derecha (por la izquierda) de M
$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,N)$	el $\mathbb{K}$–módulo de los morfismos $\mathfrak{C}$–colineales entre M y N
$\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ (${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$)	la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha (por la izquierda)
$h_A(M,f)$ ($h_A(g,N)$)	la imagen de f (de g) por el funtor $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ ($\mathrm{Hom}_A(-,N)$)
$h_{\mathfrak{C}}(M,f)$ ($h_{\mathfrak{C}}(g,N)$)	la imagen de f (de g) por el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,-)$ ($\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-,N)$)

Introducción

Si entendemos por la dualización, volver a definir nociones u objetos en la categoría dual, la definición de una coálgebra es, entonces, una definición dual de una álgebra. Desde este punto de vista, es lógico pensar en dualizar las propiedades y los teoremas de estructura conocidos para algunas álgebras o quizás vice-versa. Este camino de investigación constituye en gran parte la teoría moderna de coálgebras. Pero cuando uno trata las álgebras graduadas por un grupo, cae en el mismo pensamiento de ver cuales de las propiedades de álgebras pueden ser reflejadas en álgebras graduadas; aquí, por supuesto, el problema está mucho más lejos de ser un problema de dualización. Si esta vez trataremos con categorías de módulos relativos (por ejemplo los módulos graduados, los módulos de Hopf, de Yetter-Drinfeld, de Doi-Koppinen,...etc) o mucho más generalmente con los módulos entrelazados, las técnicas de comódulos sobre coálgebras y de módulos graduados sirven de poca ayuda. Los coanillos y sus comódulos proporcionan un formalismo adecuado para unificar la dualización, las generalizaciones de anillos y las estructuras entrelazantes.

Los coanillos han sido introducido por M. E. Sweedler en 1975 [96] para re-demostrar el primer teorema de la correspondencia de Galois para anillos de división conocido por el Teorema de Jacobson-Bourbaki-Hochschild, usando para ello nuevas estructuras; naturalmente, la de coanillos extraídos de una extensión de anillos de división, conocidos hoy en día por el nombre de coanillos canónicos de Sweedler. Pero el origen de los coanillos se traza en el año 1968 y en los trabajos de Jonah sobre las cohomologías de coálgebras en categorías monoidales [63], que aparece como referencia en el articulo de F. Guzman [58]. Además de este trabajo de Guzman y los de A. Masuoka [75, 74] y de M. Kleiner [68], en los años 80 y 90, los coanillos se manifestaron bajo el nombre de *BOCS* en los trabajos de A. V. Rojter [**?**] y R. Bautista et al [11]. El interés por los coanillos y sus comódulos ha sido parcialmente recuperado, en estos cuatro últimos años, gracias a una anterior observación de M. Takeuchi indicando que nuevos ejemplos de coanillos pueden construirse de las estructuras entrelazantes introducidas por T. Brzeziński y S. Majid en [22], véase [17]. [17] ha sido el primero de una amplia serie de artículos ilustrando el interés revelado por la teoría de coanillo y sus comódulos, véase [14] y sus referencias.

En esta memoria introducimos varios nuevos ejemplos de coanillos, los más importantes son: Los coanillos de comatrices finitas y los coanillos de comatrices infinitas. El primer ejemplo es crucial para una teoría del Descent Generalizado fielmente plano y para una teoría de coanillos de Galois posiblemente sin elementos grouplike. El segundo ejemplo de coanillo servirá además de la reconstrucción de cualquier coanillo a partir de un conjunto de comódulos por la derecha generadores finitamente generados y proyectivos como módulos; de dar un Teorema de estructura de coanillos cosemisimples y de coanillo semiperfectos (por la derecha). Esto ha sido en pocas palabras el contenido de esta memoria. Para más precisión y detalles, hemos dotado cada capítulo por una pequeña introducción, allí explicamos el objetivo del capítulo así mismo las técnicas y las maneras ampliadas para alcanzarlo. Falta indicar que aquí investigamos los coanillos y sus comódulos usando anillos de escalares con unidades locales. En realidad la idea de utilizar un anillo con unidades locales no es casual pero más bien necesaria, dado que este tipo de anillo surge de manera natural a la hora de definir un coanillo de comatrices infinitas. Hemos visto forzados de completar la memoria por un capítulo de apéndices, donde exponemos todo el material utilizado en resto de los otros capítulos y esencialmente relacionado con los anillos con unidades locales.

Finalmente, querría mencionar que cualquier crítica o pregunta sin resolver de parte de cualquier lector, será siempre bien recibida.

Nota: Cualquier referencia de cualquier resultado o ecuación que empieza por la letra **A**, se refiere a un resultado o ecuación del Capítulo de apéndices.
Durante toda esta memoria utilizamos la siguiente notación: Si X es un objeto en cualquier categoría, denotemos por X el morfismo identidad de X.

Los resultados Originales de esta Tesis son:

En el capítulo 1:

Sección 1.1: El Corolario 1.1.34. Las Definiciones 1.1.29, 1.1.35. Los Ejemplos 1.1.2(b)(c)(d), 1.1.5, 1.1.7, 1.1.8, 1.1.11, 1.1.14, 1.1.15, 1.1.18(3)(4), 1.1.33. Las Observaciones 1.1.3, 1.1.12, 1.1.19, 1.1.22, 1.1.24(a)(b)(d), 1.1.25, 1.1.26(c), 1.1.28, 1.1.32. Las Proposiciones 1.1.9, 1.1.10, 1.1.30. Los Lemmata 1.1.31, 1.1.36.

Sección 1.2: El Corolario 1.2.14. Los Ejemplos 1.2.2(b), 1.2.3, 1.2.11, 1.2.21. Las Observaciones 1.2.9, 1.2.17, 1.2.19, 1.2.20. Las Proposiciones 1.2.7(generalización de [18, Lemma 5.1]), 1.2.12, 1.2.18. Los Lemmata 1.2.5(generalización de [17, Example 2.1]), 1.2.10.

Toda la Sección 1.3 (menos los enunciados de la Proposición 1.3.1 y del Corolario 1.3.2) es una extensión de la teoría de módulos racionales para coálgebra sobre anillos conmutativos formalizada en [51], al caso de un anillo de escalares con unidades locales. El resultado sobre bimódulos racionales es nuevo incluso para coálgebras.

Sección 1.4 es una generalización trivial, al caso no-unitario, de diversos resultados conocidos sobre el producto cotensor y esencialmente escogidos de [52, Section 2.5].

Todos los resultados de la Sección 1.5.

Sección 1.6 es una generalización trivial, al caso no-unitario, de [52, Section 3].

Todos los resultados de la Sección 1.7 y que forman parte de una pré-publicación.

En el Capítulo 2: Todas las Secciones menos la Sección 2.1 que es una generalización trivial, al caso no-unitario, de [52, Section 4]. Los resultados de la Sección 2.6 forman parte de una pré-publicación.

En el Capítulo 3: Todos los resultados.

En el Capítulo 4: Todos los resultados forman una generalización, al caso de coanillos sobre anillos QF, de los resultado [54] y [55] para coálgebras.

Los Capítulos 5 y 6: Todos los resultados forman parte de una pré-publicación.

Algunos de los resultados arriba citados han sido publicados o van a serlo en las siguientes referencias [42, 41, 40, 43] (véase la Bibliografía).

Capítulo 1

Coanillos, Comódulos y Funtores.

Introducción

En este capítulo unimos las nociones básicas sobre coanillos y sus comódulos, juntos con algunos resultados y ejemplos nuevos. Los coanillos tratados aquí vienen definidos sobre anillos de base no necesariamente unitarios; así nos hemos visto forzados de re-demostrar y ampliar las nociones clásicas y por supuesto añadir versiones y puntos de vista recientes. La sección 1.1 contiene una variedad de ejemplos de estos coanillos y sus morfismos y también una definición de "ideal en un coanillo" y su coanillo cociente. Tal definición generaliza la noción clásica de un co-ideal [96] y se adapta mejor a los morfismos de coanillos sobre distintos anillos de base [52]. Para cada ejemplo de coanillo citado en la sección 1.1, hemos intentado caracterizar su correspondiente categoría de comódulos en la sección 1.2. Las categorías de bicomódulos y bimódulos racionales se analizan en la sección 1.3, donde nos hemos basado en las técnicas de [51] (compare con [3]). Las secciones 1.4 y 1.6 representan en parte la versión no-unitaria del material construido en [52, Sections 2, 3], lo cual servirá para demostrar los resultados de los próximos capítulos. En la sección 1.5 caracterizamos la categoría de comódulos sobre el coanillo coproducto de una familia de coanillos; para ello hemos utilizado ciertos resultado de la sección 1.4. En la sección 1.7, presentaremos una noción alternativa de coanillo y sus comódulos, usando la noción de cotriple y su cogenerador universal definidos en [38].

Las letras $A, A', B, B', \ldots$ designan $\mathbb{K}$–*anillos* (a veces $\mathbb{K}$–álgebras con 1) *con unidades locales*: estos son $\mathbb{K}$–bimódulos unitarios centrales, cuya multiplicación es un morfismo $\mathbb{K}$–bilineal, $\mathbb{K}$–equilibrado y que poseen unidades locales, es decir, para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$, existe un elemento idempotente $e^2 = e \in A$, tal que $a_1 = ea_1 = a_1e$ y $a_2e = a_2e = a_2$, i.e. e es una unidad del conjunto $\{a_1, a_2\}$. Véase el capítulo de apéndices la section **A**.3 por más detalles sobre estos anillos y sus (bi)-representaciones. Cada objeto o morfismo en su correspondiente categoría es, por consideración, $\mathbb{K}$–módulo o $\mathbb{K}$–lineal. Los módulos bajo consideración no son siempre unitarios al menos que se diga lo contrario; así mismo son todos los bimódulos. Un A–bimódulo unitario es un A–bimódulo que es unitario por la derecha y por la izquierda. Sea M un A–bimódulo unitario y $e \in \mathbf{Idemp}(A)$, denotaremos por ${}^eM^e$ el $\mathbb{K}$–sub-bimódulo de M generado por el conjunto $\{m \in M |\ em = me = m\}$. Se puede ver claramente que ${}^eM^e$ es un eAe–bimódulo unitario, recuerde que eAe es un anillo con $1 = e$. El *sub-anillo de invariantes* asociado a M, es por definición

$$M^A = \{a \in A |\ am = ma, \text{ para todo } m \in M\}.$$

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, denotemos por A^o su $\mathbb{K}$–*anillo con unidades locales opuesto*, es decir con el producto $(a_1a_2)^o = a_2^o a_1^o$, $a_1, a_2 \in A$. En general, si M_A es cualquier módulo por la derecha, denotemos por M^o el A^o–*módulo por la izquierda opuesto* de M_A, con la acción $a^o.m^o = (ma)^o$, para todo $a^o \in A^o$ y $m^o \in M^o$. Por supuesto que a cualquier morfismo A–lineal por la derecha $f : M \to N$, le corresponde su morfismo A^o–*lineal por la izquierda opuesto*, $f^o : M^o \to N^o$, vía $m^o \mapsto f^o(m^o) = (f(m))^o$. El mismo procedimiento se aplica sobre los A–bimódulos y las aplicaciones A–bilineales. Si M es un A–módulo por la derecha y $\mathrm{End}(M_A)$ su anillo de endomorfismos (el producto es la composición), entonces M es considerado, de manera natural, como $(\mathrm{End}(M_A), A)$–bimódulo. El producto del anillo de endomorfismos $\mathrm{End}({}_AN)$ de un A–módulo por la izquierda N, es por convención el opuesto de la composición; de esta manera se tiene también una estructura de $(A, \mathrm{End}({}_AN))$–bimódulo sobre N.

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $f, g : M \to M'$ son morfismos A–lineales por la derecha y sea $\mathfrak{k} : K \to M$ el *igualador* de f y g (i.e. el núcleo del morfismo $f - g$). Se dice que un A–módulo por la izquierda N *preserva el igualador* de la pareja (f, g), si $\mathfrak{k} \otimes_A N : K \otimes_A N \to M \otimes_A N$ es el igualador de la pareja $(f \otimes_A N, g \otimes_A N)$. Por supuesto que cada módulo plano ${}_AN$ preserva cualquier igualador. Si ahora $f, g : M \to M'$ son morfismos (A', A)–bilineales, A' es otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Se dice que la pareja de módulos $(X_{A'}, {}_AY)$ preserva el igualador de (f, g), si $X \otimes_{A'} \mathfrak{k} \otimes_A Y$ es el igualador de $(X \otimes_{A'} f \otimes_A Y, X \otimes_{A'} g \otimes_A Y)$. Por supuesto que cada pareja $(X_{A'}, {}_AY)$ de módulos planos preserva también cualquier igualador.

Un A–submódulo por la derecha N de M_A, se dice que en *puro*, si $N \otimes_A X \to M \otimes_A X$ es un monomorfismo, para cualquier módulo ${}_AX$. La definición de puro por la izquierda es simétrica.

1.1. Coanillos y morfismos de coanillos.

La noción de coanillo ha sido introducida por vez primera por M. Sweedler en [96], allí los anillos de base son anillos con unidad. En los siguientes pasos, vamos a recordar esta noción modificando el anillo (unitario) de base por un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Fijamos pues A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. *Un Coanillo* es una terna $(\mathfrak{C}, \Delta, \varepsilon)$ que consiste en un A–bimódulo unitario $\mathfrak{C}$ y dos morfismos de A–bimódulos

$$\Delta : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, \qquad \varepsilon : \mathfrak{C} \longrightarrow A$$

tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "\mathfrak{C}\otimes_A \Delta"] \\
\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta\otimes_A \mathfrak{C}"] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "\mathfrak{C}\otimes_A \varepsilon"] \\
& \mathfrak{C} \otimes_A A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "\varepsilon\otimes_A \mathfrak{C}"] \\
& A \otimes_A \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

son conmutativos; se suele llamar a Δ la *comultiplicación* y a ε la *counidad* del coanillo $\mathfrak{C}$. También llamaremos a $\mathfrak{C}$ un A–*coanillo*, a fin de precisar el anillo de escalares sobre el cual $\mathfrak{C}$ está definido. Para facilitar los cálculos, vamos a utilizar la notación de Sweedler por la comultiplicación, i.e.

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)},$$

con la suma implícitamente entendida.

Observación 1.1.1. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, consideramos A^o el $\mathbb{K}$–anillo opuesto de A. Si $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo, entonces el A^o–bimódulo unitario opuesto $\mathfrak{C}^o$ de $\mathfrak{C}$, admite una estructura de A^o–coanillo, con comultiplicación y counidad definidas por

$$\begin{aligned} \Delta^o : \mathfrak{C}^o &\longrightarrow \mathfrak{C}^o \otimes_{A^o} \mathfrak{C}^o \\ c^o &\longmapsto \left(c_{(2)}\right)^o \otimes_{A^o} \left(c_{(1)}\right)^o \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon^o : \mathfrak{C}^o &\longrightarrow A^o \\ c^o &\longmapsto \varepsilon(c)^o. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.2. (a) *El coanillo trivial.* Cada $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales A es trivialmente un A–coanillo con la comultiplicación $A \cong A \otimes_A A$ y la counidad la identidad; A será llamado el *coanillo trivial.*

(b) *El coanillo idempotente.* Sea ahora $\mathfrak{a}$ un ideal idempotente ($\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$) de un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales A tales que $\mathfrak{a}_A$ satisface las siguientes condiciones: (1) $\forall a \in \mathfrak{a}$, existe $x \in \mathfrak{a}$ tal que $a = ax$, (2) $\mathfrak{a}_A$ es un sub-módulo puro de A_A. Recuerde que en el caso unitario (1) y (2) son equivalente (véase [92, Chap.I, §11] para más caracterizaciones de este tipo de ideales en este caso). Se puede comprobar que el isomorfismo $\Delta : \mathfrak{a} \cong \mathfrak{a} \otimes_A \mathfrak{a}$ definido vía $a \mapsto a \otimes_A x$ con $ax = a$, y la inclusión $\mathfrak{a} \subset A$, inducen una estructura de A–coanillo sobre $\mathfrak{a}$. Todo coanillo isomorfo, como A–coanillo (véase la Definición 1.1.6), a este último tipo será referido como el *coanillo idempotente.*

(c) *El coanillo de involución.* Sea (A, σ) un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales e involución, esto es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales A y que tiene un anti-automorfismo (véase el capítulo de apéndices sección **A**.2), σ tal que $\sigma^2 = 1$. Consideramos $\mathfrak{C} = (A, +)$ el $\mathbb{K}$-sub-bimódulo subyacente de A dotado de la siguiente estructura de A–bimódulo

$$a.(c.a') = (a.c).a' = \sigma(a')c\sigma(a), \quad a,\, a' \in A,\ c \in \mathfrak{C}.$$

Con esta A–biacción, $\mathfrak{C}$ se convierte en un A–bimódulo unitario. Consideramos las siguiente aplicaciones $\mathbb{K}$–lineales:

$$\begin{array}{ll} \Delta : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, & \varepsilon : \mathfrak{C} \longrightarrow A \\ c \longmapsto c \otimes_A e & c \longmapsto \sigma(c), \end{array}$$

donde $c = ce = ec$, $e \in \mathbf{Idemp}(A)$; Δ es bien definida porque si existe otro idempotente $e' \in \mathbf{Idemp}(A)$ tal que $e'c = ce' = c$, escogiendo $e'' \in \mathbf{Idemp}(A)$ una unidad del conjunto $\{e, e'\}$, se tiene que $c \otimes_A e = c \otimes_A e' = c \otimes_A e''$. La aplicación ε es por hipótesis A–bilineal y Δ es claramente A–lineal por la izquierda; sea $a \in A$ y $c \in \mathfrak{C}$

$$\begin{aligned} \Delta(c.a) &= (c.a) \otimes_A e, \quad e \text{ es una unidad de } \{c, \sigma(a)\} \\ &= c \otimes_A (a.e) \\ &= c \otimes_A \sigma(a) \\ &= (c \otimes_A e).a \\ &= \Delta(c).a \end{aligned}$$

Las propiedades coasociativa y counitaria son fáciles de comprobar. En resumen $(\mathfrak{C}, \Delta, \varepsilon)$ es un A–coanillo. Nos referimos a (A, σ) como *el coanillo de involución.*

(d) Supongamos ahora que A es una $\mathbb{K}$–álgebra y sea σ un automorfismo interior de A asociado a un elemento inversible $u \in U(A)$. Consideramos pues la extensión de Ore $\mathfrak{C} = A[x; \sigma]$ este es un A–módulo por la izquierda libre de base $\{x^0, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ y al mismo tiempo un anillo que contiene A como sub-anillo cuyo producto esta determinado por la formula $xa = \sigma(a)x = uau^{-1}x$, para todo $a \in A$. Es fácil de ver que las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ll} \Delta : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, & \varepsilon : \mathfrak{C} \longrightarrow A \\ ax^n \longmapsto ax^n \otimes_A u^{-n}x^n & ax^n \longmapsto au^n \end{array}$$

son A–bilineales y que inducen una comultiplicación y una counidad sobre $\mathfrak{C}$; por las cuales $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo. La counidad es ahora un isomorfismo de anillos, véase las propiedades de las extensiones de Ore [82].

Observación 1.1.3. Realizamos las siguientes observaciones respecto de los ejemplos (b) y (c) citados en el Ejemplo 1.1.2.

(i) Supongamos que A es una $\mathbb{K}$–álgebra. Considere $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, ponga $\mathfrak{a} = \varepsilon_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C})$. Está claro que $\mathfrak{a}$ es un ideal idempotente de A. Suponemos que ${}_A\mathfrak{a}$ es puro en ${}_AA$ y que $\varepsilon_{\mathfrak{C}}$ es un monomorfismo. Entonces $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{a}$ es un isomorfismo de A–coanillos (véase la Definición 1.1.6) y luego $\mathfrak{C}$ es un coanillo idempotente.

(ii) Consideramos (A, σ) una $\mathbb{K}$–álgebra con involución, como en el Ejemplo 1.1.2(c). Dando un elemento $\zeta \in U(Z(A))$ (el grupo de unidades del centro de A) tal que

$\zeta\sigma(\zeta) = 1$, se puede obtener una estructura de A–coanillo sobre el A–bimódulo ${}_AA_A$, cuyas comultiplicación y counidad vienen dadas por

$$\begin{array}{ll} \Delta_\zeta : A \longrightarrow A \otimes_A A, & \varepsilon_\zeta : A \longrightarrow A \\ a \longmapsto a \otimes_A \zeta & a \longmapsto a\sigma(\zeta). \end{array}$$

(iii) En el caso (d) del Ejemplo 1.1.2, supongamos ahora que σ no es necesariamente interior y consideramos la extensión de Ore $\mathfrak{C} = A[x;\sigma]$ asociada a este automorfismo. Se puede ver que las siguientes aplicaciones A–bilineales

$$\begin{array}{ll} \Delta : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, & \varepsilon : \mathfrak{C} \longrightarrow A \\ x^n \longmapsto x^n \otimes_A 1 + 1 \otimes_A x^n, \text{ si } n \neq 0 & x^n \longmapsto 0, \text{ si } n \neq 0 \\ a \longmapsto a \otimes_A 1 & 1 \longmapsto 1 \end{array}$$

dan una estructura de A–coanillo sobre $\mathfrak{C}$. Más tarde veremos una clase de coanillos que cubre este tipo de coanillos.

Vamos a seguir dando más ejemplos de coanillos.

Ejemplo 1.1.4. (a) *El coanillo de Sweedler*. Este es el primer tipo de coanillos que ha sido inventado y estudiado por M. Sweedler y que vamos a recordar. Sea $\varphi : B \to A$ una extension de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, i.e. para todo $a \in A$, existe $e \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ tal que $ea = ae = a$ (equivalente a que para todo $f \in \mathbf{Idemp}(A)$ existe $e \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ tal que $ef = fe = f$), véase el capítulo de apéndices sección **A**.2. Consideramos A de manera natural como B–bimódulo (unitario por hipótesis). El producto tensor $A \otimes_B A$ es pues un A–bimódulo unitario; además existen dos aplicaciones A–bilineales

$$\begin{array}{ll} \Delta' : A \times A \longrightarrow (A \otimes_B A) \otimes_A (A \otimes_B A), & \varepsilon : A \otimes_B A \longrightarrow A \\ (a, a') \longmapsto a \otimes_B e \otimes_A e \otimes_B a', & a \otimes_B a' \longmapsto aa', \end{array}$$

donde $e \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ es una unidad de $\{a, a'\}$. Comprobemos si Δ' está bien definida (ε evidentemente lo es); supongamos que existe otro idempotente $e' \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ unidad de $\{a, a'\}$, sea pues $e'' \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ unidad de $\{e, e'\}$. Se puede ver entonces que

$$\begin{aligned} a \otimes_B e \otimes_A e \otimes_B a' &= a \otimes_B ee'' \otimes_A e''e \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B e'' \otimes_A e'' \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B e'e'' \otimes_A e''e' \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B e' \otimes_A e' \otimes_B a' \end{aligned}$$

Finalmente, sean $b \in B$, $a, a' \in A$ y $e \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ unidad del conjunto $\{\varphi(b), a, a'\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta'(ab, a') &= ab \otimes_B e \otimes_A e \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B \varphi(b)e \otimes_A e \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B e\varphi(b) \otimes_A e \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B e \otimes_A e\varphi(b) \otimes_B a' \\ &= a \otimes_B e \otimes_A e \otimes_B ba' = \Delta'(a, ba') \end{aligned}$$

luego Δ' se extiende a

$$\begin{aligned} \Delta : A \otimes_B A &\longrightarrow A \otimes_B A \otimes_A A \otimes_B A \\ a \otimes_B a' &\longmapsto a \otimes_B e \otimes_A e \otimes_B a' \end{aligned}$$

donde $a = ea = ae$, $a' = a'e = ea'$, para un cierto $e \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$. Δ y ε inducen sobre $A \otimes_B A$ una estructura de A–coanillo. Nos referimos a este coanillo como *el coanillo de Sweedler asociado a la extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales φ.*

(b) *El coanillo dual*. Sea $\varphi : A \to B$ esta vez una extension de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, también se dice que B un A–anillo extensión de A véase el capítulo de apéndices section **A**.1. Consideramos $B^* = \mathrm{Hom}_{-A}(B, A)$, el dual por la derecha de B_A, de manera canónica como (A, B)–bimódulo, después como A–bimódulo por restricción de escalares respecto de φ (estas bi-acciones no son necesariamente unitarias). Supongamos ahora que B_A es finitamente generado y proyectivo. Según el capítulo de apéndices sección **A**.2, existe una base dual por la derecha $\{b_i, b_i^*\}_{1 \le i \le n}$, i.e. para cualquier $b \in B_A$, $b = \sum_i b_i b_i^*(b)$ (el criterio de la base dual). Está claro que ${}_AB^*$ es ahora un módulo unitario finitamente generado y proyectivo, además cualquier $x \in B^*$, $x = \sum_i x(b_i)b_i^*$, usando las acciones canónicas. Veamos si B_A^* es unitario, para ello sea $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ una unidad de todos los b_i. Entonces para cualquier $x \in B^*$, se tiene

$$x.e = \sum_i (x.e)(b_i)b_i^* = \sum_i x(eb_i)b_i^* = \sum_i x(b_i)b_i^* = x$$

lo que implica que B_A^* es unitario. Utilizando el criterio de la base dual y la noción de una unidad local, se comprueba fácilmente que las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} \Delta : B^* &\longrightarrow B^* \otimes_A B^*, & \varepsilon : B^* &\longmapsto A \\ x &\longrightarrow \textstyle\sum_i xb_i \otimes_A b_i^* & x.f = x &\longmapsto x(\varphi(f)). \end{aligned}$$

donde $f \in \mathbf{Idemp}(A)$, están bien definidas y satisfacen las propiedades coasociativa y counitaria. El A–bimódulo B^* es un A–coanillo con la comultiplicación y la counidad arriba definidas. Notemos que esta comultiplicación es independiente de la base dual escogida. B^* se le llama el *A–coanillo dual* del A–anillo B.

Ejemplo 1.1.5. *Los coanillos de matrices generalizadas triviales.* Presentamos aquí un ejemplo muy conocido en teoría de anillos, las matrices generalizadas, al que vamos a dotar de un estructura de coanillo, llamado trivial por que en el proceso de construcción se utilizan coanillos triviales.

(1) Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y M un A–bimódulo unitario. Considere el A–bimódulo unitario $\mathfrak{C} := A \oplus M$ junto con las siguientes aplicaciones A–bilineales

$$\begin{aligned} \Delta : \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} & \varepsilon : \mathfrak{C} &\longrightarrow A \\ (a, m) &\longmapsto (a, 0) \otimes_A (e, 0) + (0, m) \otimes_A (e, 0) & (a, m) &\longmapsto a \\ &\quad + (e, 0) \otimes_A (0, m) \end{aligned}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ es unidad de $\{a, m\}$ (i.e. $ea = ae = a$ y $me = em = m$). Se puede comprobar fácilmente que Δ y ε induce sobre $\mathfrak{C}$ una estructura de A–coanillo.

(2) Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $A \times B$ el $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales producto de A y B, junto con un (A, B)–bimódulo unitario M. Consideramos pues el $\mathbb{K}$–anillo de matrices triangulares

$$\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Está claro que es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y además admite una $(A \times B)$–biacción unitaria (con el producto matricial). Definamos

$$\Delta : \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} \otimes_{(A\times B)} \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

por

$$\Delta \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_{(A\times B)} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \otimes_{(A\times B)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_{(A\times B)} \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_{(A\times B)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ y $f \in \mathbf{Idemp}(B)$, son tales que $ea = ae = a$, $bf = fb = b$, $em = mf = m$. Sea

$$\varepsilon : \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} \longrightarrow A \times B$$

definida por

$$\varepsilon \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Es fácil de comprobar que Δ y ε inducen sobre $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ una estructura de $(A \times B)$–coanillo. Este Ejemplo es claramente un caso particular del Ejemplo citado en el item (1), escogiendo adecuadamente la estructura de $(A \times B)$–bimódulo sobre M.
El $(A \times B)$–coanillo $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ será referido como el *coanillo de matrices generalizadas triviales*.

Vamos a recordar de [52] la noción de un morfismo de coanillos. Como se va observar, esta noción unifica todas la nociones clásicas, es decir la de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y en particular la de $\mathbb{K}$–álgebras y también la de $\mathbb{K}$–coálgebras.

Definición 1.1.6. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Consideramos $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Un *morfismo de $A - B$–coanillos* consiste en un par de morfismos $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ donde $\varphi : A \to B$ es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un morfismo de A–bimódulos ($\mathfrak{D}$ es un A–bimódulo por la restricción de φ), tales que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[rr, "\Delta_{\mathfrak{C}}"] \arrow[dd, "\phi"'] & & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[dr, "\phi\otimes_A\phi"] & \\
& & & \mathfrak{D} \otimes_A \mathfrak{D}, \arrow[dl, "\omega_{A,B}"] \\
\mathfrak{D} \arrow[rr, "\Delta_{\mathfrak{D}}"] & & \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathfrak{C}}"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathfrak{D} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathfrak{D}}"] & B,
\end{tikzcd}$$

conmutan, donde $\omega_{A,B} : \mathfrak{D}\otimes_A\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}\otimes_B\mathfrak{D}$ es la aplicación obvia inducida por la extensión φ, véase el capítulo de apéndices sección **A**.2 por la definición y por otras aplicaciones similares.

Ejemplo 1.1.7. Sean (A, σ_A) y (B, σ_B) dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y con involución. Según [81], un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales $\varphi : A \to B$, es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y con involución, denotemos $\varphi : (A, \sigma_A) \to (B, \sigma_B)$ si $\sigma_B \circ \varphi = \varphi \circ \sigma_A$. Consideramos ahora las estructuras de coanillo sobre (A, σ) y (B, σ_B) como en el Ejemplo 1.1.4(b). Entonces, se puede comprobar sin dificultad que $(\varphi, \varphi) : (A, A) \to (B, B)$ es un morfismo de $A - B$–coanillos si y sólo si $\varphi : (A, \sigma_A) \to (B, \sigma_B)$ es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y con involución.

Ejemplo 1.1.8. Recuperamos la notación del Ejemplo 1.1.5(1) i.e. A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, M un A–bimódulo unitario y el $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales extensión trivial $A \oplus M$, vía $\varphi : A \to A \oplus M$, enviando $a \mapsto (a, 0)$. Consideramos $(A \oplus M, \Delta, \varepsilon)$ como A–coanillo con Δ y ε del ejemplo referido. De otra parte consideramos el $A \oplus M$–coanillo de Sweedler $(A \oplus M, \Delta', \varepsilon')$ asociado a la extensión φ. La siguiente aplicación

$$\begin{aligned}
\phi : A \oplus M &\longrightarrow (A \oplus M) \otimes_A (A \oplus M) \\
(a, m) &\longrightarrow (a, 0) \otimes_A (e, 0) + (0, m) \otimes_A (e, 0) - (e, 0) \otimes_A (0, m),
\end{aligned}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ una unidad del conjunto $\{a, m\}$; es A–bilineal y claramente satisface $\varepsilon' \circ \phi = \varphi \circ \varepsilon$. Además $\Delta' \circ \phi = \omega_{A,A\oplus M} \circ (\phi \otimes_A \phi) \circ \Delta$, es decir que

$$(\varphi, \phi) : (A, A \oplus M) \to (A \oplus M, (A \oplus M) \otimes_A (A \oplus M))$$

es un morfismo de $A - (A \oplus M)$–coanillos.

1.1.9. Fijamos $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Consideramos $\{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathbb{K}$–módulos donde $\mathfrak{C}_i$ es un A_i–coanillo, para todo $i \in I$; denotaremos por τ_i y π_i, respectivamente, las inyecciones y las proyecciones de la suma directa asociada $\oplus_{i\in I}\mathfrak{C}_i$ en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$. De otra parte consideramos el $\mathbb{K}$–anillo producto $A := \prod_{i\in I} A_i$ junto con sus proyecciones canónicas $p_i : A \to A_i$. Está claro que cualquier idempotente $e_i \in \mathbf{Idemp}(A_i)$ es la imagen por p_i de un idempotente $e \in \mathbf{Idemp}(A)$, lo que implica que los p_i son extensiones de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales (véase el capítulo de apéndices sección **A**.2). Ahora cada uno de los $\mathfrak{C}_i$ es un A–bimódulo por la restricción de p_i. Está claro pues que estas estructuras de A–bimódulo inducen una estructura de A–bimódulo unitario sobre $\oplus_{i\in I}\mathfrak{C}_i$, para la cual τ_i, π_i siguen siendo los morfismos canónico de A–bimódulos unitarios. Por lo tanto, se tiene

Proposición. *El A–bimódulo unitario $\mathfrak{C} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{C}_i$ admite una única estructura de A–coanillo para la cual cada pareja $(p_i, \pi_i) : (A, \mathfrak{C}) \to (A_i, \mathfrak{C}_i)$ es un morfismo de $A - A_i$–coanillos.*

Demostración. Denotaremos por Δ_i, ε_i la comultiplicación y la counidad de cada $\mathfrak{C}_i$. La comultiplicación y la counidad de $\mathfrak{C} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{C}_i$, vienen dadas por

$$\begin{array}{ll} \Delta : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, & \varepsilon : \mathfrak{C} \longmapsto A \\ \tau_i(c_i) \longrightarrow \tau_i\left((c_i)_{(1)}\right) \otimes_A \tau_i\left((c_i)_{(2)}\right) & \tau_i(c_i) \longmapsto (a_i)_{i\in I}, \end{array}$$

donde $a_i = \varepsilon_i(c_i)$, $a_j = 0$; $\forall j \neq i$ y $\Delta_i(c_i) = \left((c_i)_{(1)}\right) \otimes_{A_i} \left((c_i)_{(2)}\right)$. La propiedad counitaria del morfismo (p_i, π_i) es, por definición, satisfecha. Sea ahora $c \in \mathfrak{C}$, denotaremos por $Sop(c)$, el soporte de c; entonces

$$\begin{aligned} \omega_{A,A_i} \circ (\pi_i \otimes_A \pi_i) \circ \Delta(c) &= \textstyle\sum_{j\in Sop(c)} \pi_i\tau_j(\pi_j(c)_{(1)}) \otimes_{A_i} \pi_i\tau_j(\pi_j(c)_{(2)}) \\ &= \pi_i(c)_{(1)} \otimes_{A_i} \pi_i(c)_{(2)} = \Delta_i \circ \pi_i(c). \end{aligned}$$

La unicidad de esta estructura de coanillo, respecto de dicha A–biacción, es evidente. □

En la definición del morfismo de coanillos enunciada en 1.1.6, uno puede escoger dos coanillos sobre el mismo anillo de base (i.e. $A = B$), en este caso φ puede tomar la identidad y los morfismos de $A - A$–coanillos serán llamados simplemente morfismos de A–coanillos. Para un A–coanillo $\mathfrak{C}$, denotaremos por

$$\mathrm{End}_{A-cor}(\mathfrak{C}) = \{f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}, \text{ morfismo de } A - \text{coanillos}\}.$$

su anillo de endomorfismos de A–coanillos.

El siguiente es el caso de un solo anillo de base, pero contiene un resultado distinto al de la Proposición 1.1.9.

Proposición 1.1.10. *Sea $\{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de A–coanillos, consideramos la suma directa asociada $\oplus_{i\in I}\mathfrak{C}_i$ en A–bimódulos unitarios. Existe una única estructura de A–coanillo sobre $\oplus_{i\in I}\mathfrak{C}_i$ por la cual cada inyección canónica se convierte en un morfismo de A–coanillos.*

Demostración. Denotemos por τ_i las inyecciones canónica de $\oplus_i\mathfrak{C}_i$ en A–bimódulos y por Δ_i, ε_i la comultiplicación y la counidad de cada $\mathfrak{C}_i$. La comultiplicación y la counidad de $\mathfrak{C} = \oplus_i\mathfrak{C}_i$, vienen dadas por

$$\begin{array}{ll} \Delta : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, & \varepsilon : \mathfrak{C} \longmapsto A \\ \tau_i(c_i) \longrightarrow \tau_i\left((c_i)_{(1)}\right) \otimes_A \tau_i\left((c_i)_{(2)}\right) & \tau_i(c_i) \longmapsto \varepsilon_i(c_i), \end{array}$$

donde $\Delta_i(c_i) = (c_i)_{(1)} \otimes_A (c_i)_{(2)}$. El resto de la demostración es un cálculo inmediato. □

Ejemplo 1.1.11. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $A = \prod_{i\in I} A_i$ el $\mathbb{K}$–anillo producto cartesiano asociado. Si consideramos cada A_i como A_i–coanillo trivialmente; entonces, según la Proposición 1.1.9, $\oplus_{i\in I} A_i$ admite una estructura de A–coanillo, por la cual cada proyección canónica se convierte en morfismo de $A - A_i$–coanillos. De otra parte la inyección de $\mathbb{K}$–módulos

$$\bigoplus_{i\in I} A_i \hookrightarrow \prod_{i\in I} A_i = A$$

identifica $\oplus_{i\in I} A_i$ con un ideal idempotente que satisface $\forall a \in \oplus_I A_i$, existe $e \in \oplus_I A_i$ tal que $a = ae$ y que $(\oplus_I A_i)_A$ es puro en A_A. Por lo tanto $\oplus_I A_i$ es un A–coanillo. Además la estructura A–coanillo construida en la Proposición 1.1.10 es isomorfa (véase la Definición 1.1.6) al estructura de A–coanillo idempotente de $\oplus_{i\in I} A_i$. En conclusion $\oplus_{i\in I} A_i$ es un A–coanillo idempotente.

Observación 1.1.12. Para cada $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales A fijo se puede considerar su categoría de A–coanillos, que denotemos aquí por $A - \mathfrak{coring}$, y que consiste en A–coanillos y sus morfismos como han sido definidos en 1.1.6. Se sabe que la categoría de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales admite cualquier producto, la Proposición 1.1.10 nos indica pues el dual de este resultado respecto de la categoría $A - \mathfrak{coring}$.

Observación 1.1.13. *El coanillo extensión de escalares.* Sea $\varphi : A \to B$ una extension de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales junto con un A–coanillo $\mathfrak{C}$.

(a) Consideramos $B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B$ de forma natural como B–bimódulo unitario. Se puede comprobar sin dificultad que los siguientes morfismos de B–bimódulos

$$\begin{aligned} \Delta' : B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B &\longrightarrow B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B \otimes_B B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B \\ b \otimes_A c \otimes_A b' &\longmapsto b \otimes_A c_{(1)} \otimes_A \varphi(e) \otimes_B \varphi(e) \otimes_A c_{(2)} \otimes_A b', \end{aligned}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ tal que $c_{(1)}e = c_{(1)}$, $c_{(2)} = ec_{(2)}$, para todos los $c_{(1)}$, $c_{(2)}$;

$$\begin{aligned} \varepsilon' : B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B &\longrightarrow B \\ b \otimes_A c \otimes_A b' &\longmapsto b\varphi(\varepsilon(c))b', \end{aligned}$$

inducen una estructura de B–coanillo sobre este B–bimódulo. Con esta estructura podemos ver, de una parte, que la aplicación $(\varphi, \widetilde{\varphi}) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B)$, donde $\widetilde{\varphi}$ es definida vía $c \mapsto \varphi(e) \otimes_A c \otimes_A \varphi(e)$ con $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ tal que $ec = ce = c$; es un morfismo de $A - B$–coanillos. Nos referimos a $B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B$ como *el coanillo extensión de escalares* de $\mathfrak{C}$. De otra parte, el morfismo de B–bimódulos

$$\begin{aligned} \widetilde{\varepsilon} : B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B &\longrightarrow B \otimes_A B \\ b \otimes_A c \otimes_A b' &\longmapsto b \otimes_A \varepsilon(c)b' \end{aligned}$$

es claramente un morfismo de B–coanillos, donde el último es el coanillo canónico de Sweedler asociado a la extensión φ.

(b) Siguiendo las notaciones de (a), se puede ver además que a cada morfismo (φ, ϕ) : $(A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ de $A - B$–coanillos, definición 1.1.6, se le asocia un morfismo

$$\begin{aligned} \overline{\phi} : B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ b \otimes_A c \otimes_A b' &\longmapsto b\phi(c)b' \end{aligned}$$

de B–coanillos tales que el diagrama de morfismos de coanillos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\phi"'] & B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}"] \arrow[d, "\overline{\phi}"] & B \otimes_A B \\ & \mathfrak{D} & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

es conmutativo.

(c) La construcción del coanillo de extensión de escalares de cualquier coanillo, es un hecho funtorial. En efecto, utilizando la notación de la Observación 1.1.12, es fácil de comprobar que existe un funtor $\mathbb{K}$–lineal

$$\begin{aligned} F_\varphi : A - \mathfrak{coring} &\longrightarrow B - \mathfrak{coring} \\ \mathfrak{C} &\longrightarrow B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B \\ \phi &\longrightarrow B \otimes_A \phi \otimes_A B \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.14. *El coanillo de matrices* $\mathrm{M}_n(\mathfrak{C})$. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Consideramos, de manera canónica, $A^{(2)}$ el producto de A, 2–veces, como un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Esto nos proporciona la extensión de $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales $\varphi : A \to A^{(2)}$, vía $a \mapsto (a, a)$. Es evidente que $A^{(2)} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A A^{(2)} \cong \mathfrak{C}^{(2\times 2)}$; representando ahora los elementos de este último A–bimódulo en forma de matrices 2×2, el citado isomorfismo se traduce por el siguiente

$$\begin{aligned} A^{(2)} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A A^{(2)} &\longrightarrow \mathfrak{C}^{(2\times 2)} \\ (a_1, a_2) \otimes_A c \otimes_A (b_1, b_2) &\longmapsto \begin{pmatrix} a_1cb_1 & a_1cb_2 \\ a_2cb_1 & a_2cb_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

cuya aplicación inversa es definida por

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{(2\times 2)} &\longrightarrow A^{(2)} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A A^{(2)} \\ \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22} \end{pmatrix} &\longmapsto (e,0) \otimes_A c^{11} \otimes_A (e,0) + (e,0) \otimes_A c^{12} \otimes_A (0,e) \\ &\quad +(0,e) \otimes_A c^{21} \otimes_A (e,0) + (0,e) \otimes_A c^{22} \otimes_A (0,e) \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ es una unidad de los c^{ij}. De otra parte si representamos los elementos de $A^{(2)}$ en forma de matrices cuadradas diagonales 2×2, entonces la estructura de $A^{(2)}$–bimódulo sobre $\mathfrak{C}^{(2\times 2)}$ se convierte en el producto matricial usual, es decir

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac^{11} & ac^{12} \\ a'c^{21} & a'c^{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{11}a & c^{12}a' \\ c^{21}a & c^{22}a' \end{pmatrix}.$$

Utilizando estas notaciones, la comultiplicación de $\mathfrak{C}^{(2\times 2)}$, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22}\end{pmatrix} \longmapsto & \begin{pmatrix} {c^{11}}_{(1)} & {c^{11}}_{(1)} \\ 0 & 0\end{pmatrix} \otimes_{A^{(2)}} \begin{pmatrix} {c^{11}}_{(2)} & 0 \\ {c^{11}}_{(2)} & 0\end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} {c^{12}}_{(1)} & {c^{12}}_{(1)} \\ 0 & 0\end{pmatrix} \otimes_{A^{(2)}} \begin{pmatrix} 0 & {c^{12}}_{(2)} \\ 0 & {c^{12}}_{(2)}\end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {c^{21}}_{(1)} & {c^{21}}_{(1)}\end{pmatrix} \otimes_{A^{(2)}} \begin{pmatrix} {c^{21}}_{(2)} & 0 \\ {c^{21}}_{(2)} & 0\end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {c^{22}}_{(1)} & {c^{22}}_{(1)}\end{pmatrix} \otimes_{A^{(2)}} \begin{pmatrix} 0 & {c^{22}}_{(2)} \\ 0 & {c^{22}}_{(2)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde $\Delta(c^{ij}) = {c^{ij}}_{(1)} \otimes_A {c^{ij}}_{(2)}$. La counidad toma la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22}\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \varepsilon(c^{11}) & 0 \\ 0 & \varepsilon(c^{22})\end{pmatrix}$$

Por supuesto que la construcción de arriba se puede aplicarse sobre $A^{(n)}$, para $2 \leq n \in \mathbb{N}^*$. El $A^{(n)}$–coanillo $\mathfrak{C}^{(n\times n)}$ se llama el *coanillo de* $(n \times n)$*–matrices* de $\mathfrak{C}$ y será denotado por $\mathrm{M}_n(\mathfrak{C})$.

Ejemplo 1.1.15. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y J un ideal bilátero de A, con la extensión de canónica de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales $\pi : A \to A/J$. Consideramos $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $(A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J)$ el (A/J)–coanillo extensión de $\mathfrak{C}$, véase la Observación 1.1.13, junto con el morfismo de extensión de coanillos

$$(\pi, \widetilde{\pi}) : (A, \mathfrak{C}) \longrightarrow (A/J, (A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J)),$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} : \mathfrak{C} &\longrightarrow (A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J) \\ c &\longmapsto \pi(e) \otimes_A c \otimes_A \pi(e), \end{aligned}$$

y donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ tal que $ec = ce = c$. Sea ahora $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ un morfismo de coanillos tal que $J \subseteq \mathbf{Ker}(\varphi)$ y $\varphi' : A/J \to B$, la prolongación de φ. Siguiendo la notación de la Observación 1.1.13, se tiene el siguiente diagrama conmutativo de morfismos de coanillos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & & \mathfrak{D} \\ (A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J) \arrow[rr, "\cong \circ \widetilde{\varphi'}"] & & B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B \arrow[u, "\overline{\phi}"'] \end{tikzcd}$$

Vamos a comprobar que

$$\mathbf{Ker}(\widetilde{\pi}) = J\mathfrak{C} + \mathfrak{C}J.$$

para ello vamos a utilizar implícitamente la versión no-unitaria de [92, Examples 1, p.30]. Se sabe pues que existe una sucesión exacta

$$\mathfrak{C} \otimes_A J \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A (A/J) \longrightarrow 0$$

luego $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}J \cong \mathfrak{C} \otimes_A (A/J)$, como A–módulo por la izquierda. Por lo tanto, se tiene otra sucesión exacta

$$J \otimes_A (\mathfrak{C}/\mathfrak{C}J) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{C}/\mathfrak{C}J \longrightarrow (A/J) \otimes_A (\mathfrak{C}/\mathfrak{C}J) \longrightarrow 0$$

donde la imagen de α es $\mathbf{Im}(\alpha) = (\mathfrak{C}J + J\mathfrak{C})/\mathfrak{C}J$, luego

$$\mathfrak{C}/(J\mathfrak{C} + \mathfrak{C}J) \cong (A/J) \otimes_A (\mathfrak{C}/\mathfrak{C}J) \cong (A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J)$$

la definición de $\widetilde{\pi}$, implica ahora que $\mathbf{Ker}(\widetilde{\pi}) = J\mathfrak{C} + \mathfrak{C}J$.

Ejemplo 1.1.16. [22]. Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra con multiplicación μ y (C, Δ, ε) una $\mathbb{K}$–coálgebra junto con un morfismo $\mathbb{K}$–lineal $\psi : C \otimes_{\mathbb{K}} A \to A \otimes_{\mathbb{K}} C$ que satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\psi \circ (C \otimes_{\mathbb{K}} \mu) = (\mu \otimes_{\mathbb{K}} C) \circ (A \otimes_{\mathbb{K}} \psi) \circ (\psi \otimes_{\mathbb{K}} A), \\
&(A \otimes_{\mathbb{K}} \Delta) \circ \psi = (\psi \otimes_{\mathbb{K}} C) \circ (C \otimes_{\mathbb{K}} \psi) \circ (\Delta \otimes_{\mathbb{K}} A), \qquad (1.5)\\
&\psi \circ (C \otimes_{\mathbb{K}} 1) = 1 \otimes_{\mathbb{K}} C, \qquad (A \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon) \circ \psi = \varepsilon \otimes_{\mathbb{K}} A.
\end{aligned}$$

La terna $(A, C)_\psi$ se le llama una *estructura entrelazante*. Según una Observación de M. Takeuchi (véase [17, Section 2]) $A \otimes_{\mathbb{K}} C$ admite una estructura de A–bimódulo que viene dada por ψ y cuyo lado derecho es $(a \otimes_{\mathbb{K}} c)a' = a\psi(c \otimes_{\mathbb{K}} a')$ y por la cual $A \otimes_{\mathbb{K}} C$ se convierte en un A–coanillo con las siguientes comultiplicación y counidad

$$\begin{aligned}
\Delta' : A \otimes_{\mathbb{K}} C &\longrightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} C \otimes_A A \otimes_{\mathbb{K}} C \\
a \otimes_{\mathbb{K}} c &\longmapsto a \otimes_{\mathbb{K}} c_{(1)} \otimes_A 1 \otimes_{\mathbb{K}} c_{(2)}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varepsilon' : A \otimes_{\mathbb{K}} C &\longrightarrow A \\
a \otimes_{\mathbb{K}} c &\longmapsto a\varepsilon(c).
\end{aligned}$$

El ejemplo más relevante de estructuras entrelazantes, viene en seguida. Sea $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–biálgebra, eso es una $\mathbb{K}$–álgebra y una $\mathbb{K}$–coálgebra al mismo tiempo tales que la comultiplicación y la counidad son morfismos de $\mathbb{K}$–álgebras. Considere un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra por la derecha (A, ρ_A) (i.e. $\rho_A : A \to A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$ es un morfismo de álgebras) y un $\mathcal{H}$–módulo coálgebra por la derecha (C, μ_C) (i.e. $\mu_C : C \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H} \to C$ es un morfismo de coálgebras). Existe pues una aplicación canónica

$$\begin{aligned}
\psi : C \otimes_{\mathbb{K}} A &\longrightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} C \\
c \otimes_{\mathbb{K}} a &\longmapsto a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} ca_{(1)}
\end{aligned}$$

donde $\rho_A(a) = a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}$ (la suma se entiende) y que satisface las ecuaciones de (1.5). Por lo tanto $(A, C)_\psi$ es una estructura entrelazante.

Ejemplo 1.1.17. (1) Siguiendo las notaciones del Ejemplo 1.1.16, consideramos la aplicación $\phi : C \to A \otimes_{\mathbb{K}} C$ definida por $c \mapsto 1 \otimes_{\mathbb{K}} c$. Es fácil ver pues que $(\eta, \phi) : (\mathbb{K}, C) \to (A, A \otimes_{\mathbb{K}} C)$, $\eta : \mathbb{K} \to A$ la unidad de A, es un morfismo de $\mathbb{K} - A$–coanillos (C es considerado como $\mathbb{K}$–coanillo).

(2) Sean ahora $(A, C)_\psi$ y $(A', C')_{\psi'}$ dos estructura entrelazadas. Según [16] un morfismo de estructuras entrelazantes entre $(A, C)_\psi$ y $(A', C')_{\psi'}$ es un par (φ, φ') de morfismos de álgebras $\varphi : A \to A'$ y de coálgebras $\varphi' : C \to C'$ tales que:

$$\begin{tikzcd} C \otimes_{\mathbb{K}} A \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "\varphi' \otimes_{\mathbb{K}} \varphi"'] & & A \otimes_{\mathbb{K}} C \arrow[d, "\varphi \otimes_{\mathbb{K}} \varphi'"] \\ C' \otimes_{\mathbb{K}} A' \arrow[rr, "\psi'"'] & & A' \otimes_{\mathbb{K}} C'. \end{tikzcd}$$

Con un calculo inmediato, se pueda comprobar que (φ, ϕ), donde $\phi = \varphi \otimes_{\mathbb{K}} \varphi'$, es un morfismo de $A - A'$–coanillos entre $A \otimes_{\mathbb{K}} C$ y $A' \otimes_{\mathbb{K}} C'$, véase [52, 5.7].

Ejemplo 1.1.18. Basándonos en las estructuras entrelazantes, vamos a relacionar la noción de coanillo con los anillos graduados; así también los morfismos de anillos graduados y G–conjuntos. Fijamos A una $\mathbb{K}$–álgebra a lo largo de este ejemplo.

(1) Sea G un grupo multiplicativo con elemento neutro e. Supongamos que A es un anillo G–graduado, es decir $A = \oplus_{g \in G} A_g$ suma directa de grupos ($\mathbb{K}$–módulos) tales que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todo g, $h \in G$, véase [77]. Sea ahora X un G–conjunto por la derecha, esto es un conjunto X junto con una aplicación

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\longmapsto xg \end{aligned}$$

que verifica $x(gh) = (xg)h$, $xe = x$, para todo g, $h \in G$ y $x \in X$. Consideramos $\mathfrak{C}(X) = A[X]$ el A–módulo libre por la izquierda de base X. La siguiente A–acción por la derecha sobre $\mathfrak{C}(X)$

$$(ax).a_h = (aa_h)(xh), \text{ donde } a \in A,\ a_h \in A_h,\ h \in G,\ x \in X.$$

le convierte en un A–bimódulo. Con esta estructura de A–bimódulo, $\mathfrak{C}(X)$ es realmente un A–coanillo con comultiplicación y counidad dadas por

$$\begin{aligned} \Delta : \mathfrak{C}(X) &\longrightarrow \mathfrak{C}(X) \otimes_A \mathfrak{C}(X), \\ x &\longmapsto x \otimes_A x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon : \mathfrak{C}(X) &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

De otra parte, sea C el $\mathbb{K}$–módulo libre de base el conjunto X dotado de la estructura de $\mathbb{K}$–coálgebra con comultiplicación $\delta(x) = x \otimes_{\mathbb{K}} x$ y counidad $\varepsilon(x) = 1$, para todo $x \in X$. Ahora $\mathfrak{C}(X)$ es claramente isomorfo, como A–módulo por la derecha, a $A \otimes_{\mathbb{K}} C$; además existe una aplicación $\psi : C \otimes_{\mathbb{K}} A \to A \otimes_{\mathbb{K}} C$, enviando $x \otimes_{\mathbb{K}} a_h \mapsto a_h \otimes_{\mathbb{K}} xh$, $a_h \in A_h$, $h \in G$, $x \in X$ y que satisface las ecuaciones (1.5) del Ejemplo 1.1.16. Por lo tanto $(A, C)_\psi$ es una estructura entrelazante cuyo coanillo asociado es isomorfo a $\mathfrak{C}(X)$.

(2) Fijamos $\varrho : G \to G'$ un morfismo de grupos. Consideramos X y Y, respectivamente, un G–conjunto por la derecha y un G'–conjunto por la derecha. *Un morfismo de conjuntos de grupos* (véase [83]) $\mathfrak{f} : X \to Y$ es una aplicación que verifica

$$\mathfrak{f}(x.g) = \mathfrak{f}(x).\varrho(g), \qquad \text{para todo } x \in X,\ y \in Y,\ g \in G.$$

Fijamos también $\mathfrak{f} : X \to Y$ un morfismo de conjuntos de grupos. Sean ahora $A = \oplus_{g \in G} A_g$ y $B = \oplus_{g' \in G'} B_{g'}$ dos anillos graduados juntos con un morfismo de anillos graduados $\varphi : A \to B$, esto es un morfismo de anillos que satisface $\varphi(A_g) \subseteq B_{\varrho(g)}$, para todo $g \in G$, [77]. Finalmente consideramos $\mathfrak{C}(X)$ y $\mathfrak{D}(Y)$ los coanillos asociados a X y a Y como en el apartado (1). Está claro ahora que $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}(X)) \to (B, \mathfrak{D}(Y))$, donde $\phi(ax) = \varphi(a)\mathfrak{f}(x)$, $a \in A$, $x \in X$, es un morfismo de $A - B$–coanillos.

(3) Ejemplos prácticos de los morfismos citados en el punto anterior, son los siguientes: Sea G un grupo y considere el morfismo de grupos $\varrho : G \to G \times G$, definido por $\varrho(g) = (g, g)$, $g \in G$. Para cada G–conjunto por la derecha X, es evidente que $X \times X$ es un $G \times G$–conjunto por la derecha, tal que $\mathfrak{f} : X \to X \times X$, vía $x \mapsto (x, x)$, $x \in X$ es un morfismo de conjuntos de grupos. Si A es un anillo G–graduado, entonces se puede graduar el anillo tensor $B = A \otimes_{\mathbb{K}} A$ por el grupo $G' = G \times G$ de tal manera que $B_{(g,h)} = A_g \otimes_{\mathbb{K}} A_h$, para $(g, h) \in G'$. De esta manera $\varphi : A \to B$, vía $a \mapsto a \otimes_{\mathbb{K}} a$ es un morfismo de anillos graduados. En total $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}(X)) \to (B, \mathfrak{D}(X \times X))$, donde $\phi(ax) = (a \otimes_{\mathbb{K}} a).(x, x)$, $a \in A$, $x \in X$, es un morfismo de coanillos.
Sea ahora H un subgrupo de G y consideramos $G/H = \{Hg|\ g \in G\}$ el conjunto de clases de equivalencias respecto de la traslación por la derecha. Se sabe que G actúa canónicamente por la derecha sobre G/H. Si $\varrho : G \to G'$ es un morfismo de grupos, tal que $\varrho(H) \subseteq H'$, para un cierto subgrupo H' de G', la prolongación $\overline{\varrho} : G/H \to G'/H'$, es claramente un morfismo de conjuntos de grupos. Por lo tanto cualquier morfismo de anillos graduados $\varphi : A = \oplus_{g \in G} A_g \to B = \oplus_{g' \in G'} B_{g'}$ induce un morfismo de coanillos entre $\mathfrak{C}(G/H)$ y $\mathfrak{D}(G'/H')$.

Observación 1.1.19. *Coanillo de Semigrupo.* En el Ejemplo 1.1.18(1), la estructura de coanillo correspondiente a la comultiplicación y la counidad de la ecuación (1.6) está bien definida gracias a la hipótesis de que la $\mathbb{K}$–álgebra de base A es graduada por un grupo. En lo siguiente vamos a dar una hipótesis alternativa bajo la cual existe una estructura de coanillo diferente. Consideramos pues G un semigrupo con elemento neutral e (i.e. un monoide) y supongamos que A es, esta vez, una $\mathbb{K}$–álgebra y un G–conjunto por la izquierda $G \times A \to A$, vía $(g, a) \mapsto g.a$. Vamos a utilizar la siguiente notación: $g.a := a_g$, donde $g \in G$ y $a \in A$, con esta notación la asociatividad toma la forma de $a_{gg'} = (a_{g'})g$, para cualquier $a \in A$ y $g, g' \in G$. Supongamos además que $(ab)_g = a_g b_g$, para cualquier $g \in G$, $a, b \in A$ y que $a_e = a$, $\forall a \in A$ y $1_g = 1$, $\forall g \in G$. Sea pues $A^{(G)}$ el A–módulo libre por la izquierda de base G. Asociando a G su $\mathbb{K}$–coálgebra de semigrupo $\mathbb{K}[G]$ con la comultiplicación y la counidad

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G], \\ g &\longmapsto g \otimes_{\mathbb{K}} 1 + 1 \otimes_{\mathbb{K}} g, \text{ si } g \neq e \\ e &\longmapsto e \otimes_{\mathbb{K}} e \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ g &\longmapsto 0, \text{ si } g \neq e \\ e &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Por hipótesis la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} A &\longrightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G] \\ g \otimes_{\mathbb{K}} a &\longmapsto a_g \otimes_{\mathbb{K}} g, \end{aligned}$$

satisface las ecuaciones de (1.6). Por lo tanto $(A, \mathbb{K}[G])_\psi$ es una estructura entrelazante, luego $A[G] := A^{(G)}$ es un A–coanillo con las siguientes comultiplicación y counidad

$$\begin{aligned} \Delta' : A[G] &\longrightarrow A[G] \otimes_{A} A[G], \\ g &\longmapsto g \otimes_{A} 1 + 1 \otimes_{A} g, \text{ si } g \neq e \\ e &\longmapsto e \otimes_{A} e \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon' : A[G] &\longrightarrow A \\ g &\longmapsto 0, \text{ si } g \neq e \\ e &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

De otra parte podemos observar que $A[G]$ es un anillo unitario con la multiplicación

$$(ag)(bh) = (ab_g)(gh), \quad a, b \in A,\ g, h \in G. \tag{1.7}$$

El siguiente es un ejemplo concreto de esta situación. Sea σ un endomorfismo de A, entonces A es un $\mathbb{N}$–conjunto por la izquierda cuya acción es $(n, a) \mapsto \sigma^n(a)$ y que además satisface las condiciones arriba citadas. Por lo tanto $A[\mathbb{N}]$ es un A–coanillo. Dada una indeterminada X, se puede comprobar que $A[\mathbb{N}] \cong A[X; \sigma]$, como anillos unitarios, donde el primer producto es (1.7) mientras el segundo es de la extensión de Ore asociada a σ. En conclusión hemos recuperado la estructura del A–coanillo $A[X; \sigma]$, definida antes en la Observación 1.1.3.

Se sabe que el producto tensor de dos álgebras (resp. coálgebras) es también una álgebra (resp. coálgebra). En lo siguiente vamos a extender eso al caso de coanillos, escogiendo el anillo tensorial el anillo de base $\mathbb{K}$.

1.1.20. *El coanillo producto tensor*, [53]. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras juntos con $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo, consideramos los productos $\mathbb{K}$–tensor $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ y $A \otimes_{\mathbb{K}} B$, este último como $\mathbb{K}$–álgebra de manera natural. Entonces $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ admite un estructura de $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–bimódulo que viene dada por

$$(a \otimes_{\mathbb{K}} b).(c \otimes_{\mathbb{K}} d).(a' \otimes_{\mathbb{K}} b') = aca' \otimes_{\mathbb{K}} bdb'.$$

Con esta $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–biacción, se puede comprobar fácilmente que las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} \Delta : \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} &\longrightarrow (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) \otimes_{(A \otimes_{\mathbb{K}} B)} (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) \\ c \otimes_{\mathbb{K}} d &\longmapsto (c_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} d_{(1)}) \otimes_{(A \otimes_{\mathbb{K}} B)} (c_{(2)} \otimes_{\mathbb{K}} d_{(2)}), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon : \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} &\longrightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} B \\ a \otimes_{\mathbb{K}} d &\longmapsto \varepsilon_{\mathfrak{C}}(c) \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d) \end{aligned}$$

donde $\Delta_{\mathfrak{C}}(c) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)}$ y $\Delta_{\mathfrak{D}}(d) = d_{(1)} \otimes_B d_{(2)}$, son $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–bilineales. Además se tiene

Proposición. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $\mathfrak{D}$ un B–coanillo. Entonces $(\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}, \Delta, \varepsilon)$ es un $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–coanillo. Además si $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ es un morfismo A–coanillos y $\psi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ es un morfismo de B–coanillos. Entonces $\phi \otimes_{\mathbb{K}} \psi : \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}' \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}'$, es un morfismo de $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–coanillos. En particular, existe un bi-funtor*

$$\begin{tikzcd} - \otimes_{\mathbb{K}} - : A - \mathfrak{coring} \times B - \mathfrak{coring} \arrow[r] & (A \otimes_{\mathbb{K}} B) - \mathfrak{coring} \\ (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) \arrow[r] & \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

Demostración. Denotemos por $\mathfrak{E} = \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ y por $R = A \otimes_{\mathbb{K}} B$. La comultiplicación es definida por $\Delta_{\mathfrak{E}} = \eta_{(\mathfrak{C}_A, \mathfrak{D}_B)} \circ \Delta_{\mathfrak{C}} \otimes_{\mathbb{K}} \Delta_{\mathfrak{D}}$, donde $\eta_{(-,-)}$ es la transformación natural del Lema **A**.3.2 del capítulo de apéndices. Vamos a comprobar nada más que la coasociatividad de $\Delta_{\mathfrak{E}}$, porque el resto es fácil de averiguar. Unidos todos los datos, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{E} \arrow[r, "\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \Delta"] \arrow[d, "\Delta \otimes_A \Delta"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathfrak{C}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}^2 \arrow[r, "\eta_{(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}"] \arrow[d, "\Delta \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \Delta \otimes_B \mathfrak{D}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathfrak{E} \otimes_R \mathfrak{E} \arrow[d, "\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \Delta \otimes_R \mathfrak{E}"] \\
\mathfrak{C}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}^2 \arrow[r, "\mathfrak{C} \otimes_A \Delta \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_B \Delta"] \arrow[d, "\eta_{(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}"'] & \mathfrak{C}^3 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}^3 \arrow[r, "\eta_{(\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D})}"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & \mathfrak{C}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}^2 \otimes_R \mathfrak{E} \arrow[d, "\eta_{(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})} \otimes_R \mathfrak{E}"] \\
\mathfrak{E} \otimes_R \mathfrak{E} \arrow[r, "\mathfrak{E} \otimes_R \Delta \otimes_{\mathbb{K}} \Delta"] & \mathfrak{E} \otimes_R \mathfrak{C}^2 \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}^2 \arrow[r, "\mathfrak{E} \otimes_R \eta_{(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}"] & \mathfrak{E} \otimes_R \mathfrak{E} \otimes_R \mathfrak{E},
\end{tikzcd}$$

donde hemos utilizado la siguiente notación $\mathfrak{C}^n = \mathfrak{C} \otimes_A \cdots \otimes_A \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}^n = \mathfrak{D} \otimes_B \cdots \otimes_B \mathfrak{D}$ (n veces). Ahora el rectángulo (1) es conmutativo a causa de la comultiplicación de $\mathfrak{C}$ y de $\mathfrak{D}$. Usando la naturalidad de $\eta_{(-,-)}$, se tiene la conmutatividad de (2). Vamos a comprobar que el rectángulo (3) lo es también. Sean pues $c, c' \in \mathfrak{C}$ y $d, d' \in \mathfrak{D}$

$$\begin{aligned}
&(\eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})} \otimes_R \mathfrak{E}) \circ \eta_{(\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D})} \circ \mathfrak{C} \otimes_A \Delta \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_B \Delta(c \otimes_A c' \otimes_{\mathbb{K}} d \otimes_B d') \\
&= (\eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})} \otimes_R \mathfrak{E}) \circ \eta_{(\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D})}(c \otimes_A c'_{(1)} \otimes_A c'_{(2)} \otimes_{\mathbb{K}} d \otimes_B d'_{(1)} \otimes_B d'_{(2)}) \\
&= \eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})} \otimes_R \mathfrak{E}(c \otimes_A c'_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} d \otimes_B d'_{(1)} \otimes_R (c'_{(2)} \otimes_{\mathbb{K}} d'_{(2)})) \\
&= (c \otimes_{\mathbb{K}} d) \otimes_R (c'_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} d'_{(1)}) \otimes_R (c'_{(2)} \otimes_{\mathbb{K}} d'_{(2)})
\end{aligned}$$

y de otra parte

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_R \eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_R (\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \Delta)) \circ \eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}(c \otimes_A c' \otimes_{\mathbb{K}} d \otimes_B d') \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_R \eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_R (\Delta \otimes_{\mathbb{K}} \Delta))((c \otimes_{\mathbb{K}} d) \otimes_R (c' \otimes_{\mathbb{K}} d')) \\
&= \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \otimes_R \eta_{(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}((c \otimes_{\mathbb{K}} d) \otimes_R (c'_{(1)} \otimes_A c'_{(2)}) \otimes_{\mathbb{K}} (d'_{(1)} \otimes_B d'_{(2)})) \\
&= (c \otimes_{\mathbb{K}} d) \otimes_R (c'_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} d'_{(1)}) \otimes_R (c'_{(2)} \otimes_{\mathbb{K}} d'_{(2)})
\end{aligned}$$

lo que comprueba la primera aserción. Está claro que $\phi \otimes_{\mathbb{K}} \psi$ es R–bilineal, ahora un cálculo directo demuestra que $\phi \otimes_{\mathbb{K}} \psi$ es un morfismo de R–coanillos. El caso particular es una consecuencia trivial de esta última aserción. □

Nos referimos a $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ como el *coanillo producto tensor* de $\mathfrak{C}$ con $\mathfrak{D}$.
Regresamos ahora al Ejemplo 1.1.16 y consideramos $(A, C)_\psi$ una estructura entrelazante.

En las notaciones de allí, $C \otimes_{\mathbb{K}} A$ es realmente un $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} A \cong A$–coanillo por la estructura construida en la Proposición 1.1.20, considerando A como un A–coanillo trivialmente. En este caso uno puede verificar sin dificultad que el morfismo entrelazante ψ se convierte en morfismo de A–coanillos. Sin olvidar que hay también una estructura de A–coanillo sobre $A \otimes_{\mathbb{K}} C$ como coanillo producto tensor de A con C.

Observación 1.1.21. Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Aplicando el punto 1.1.20, se tiene el $(A^{env} = A^o \otimes_{\mathbb{K}} A)$–coanillo $\mathfrak{C}^{env} := \mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C}$ que se llama el *coanillo envolvente* de $\mathfrak{C}$. Otra aplicación nos lleva al coanillo producto tensor de $\mathfrak{C}$ con sí mismo $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C}$ cuya relación es la siguiente: Consideramos el morfismo canónico de anillos $\varphi : A \to A \otimes_{\mathbb{K}} A$, vía $a \mapsto a \otimes_{\mathbb{K}} a$; también el morfismo de A–bimódulos $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C}$, vía $c \mapsto c \otimes_A c$, donde $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C}$ es considerado como A–bimódulo por restricción de φ. Se puede comprobar sin dificultad que $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (A \otimes_{\mathbb{K}} A, \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C})$ es un morfismo de $A-(A \otimes_{\mathbb{K}} A)$–coanillos.

Observación 1.1.22. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras. Consideramos $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo.

(1) Consideramos las siguientes extensiones de anillos

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi_l : A & \longrightarrow & A \otimes_{\mathbb{K}} B, & \quad & \varphi_r : B & \longrightarrow & A \otimes_{\mathbb{K}} B \\ a & \longmapsto & a \otimes_{\mathbb{K}} 1 & & b & \longmapsto & 1 \otimes_{\mathbb{K}} b. \end{array}$$

Según la Observación 1.1.13 y la Proposición 1.1.20, se tiene los siguientes $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–coanillos: $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B$, $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$, como coanillos producto tensor, $(A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_A (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B)$, $(A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) \otimes_B (A \otimes_{\mathbb{K}} B)$, como coanillos extensiones de escalares respecto de φ_l y de φ_r. Asociadas a estas estructuras existen los siguientes morfismos de coanillos

$$(\varphi_l, - \otimes_{\mathbb{K}} 1) : (A, \mathfrak{C}) \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{K}} B, \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}),$$

$$(\varphi_r, 1 \otimes_{\mathbb{K}} -) : (B, \mathfrak{D}) \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{K}} B, \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}),$$

y también

$$\mu^l : (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \cong (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_A (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B) \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B$$

$$\mu^r : (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \cong (A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) \otimes_B (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D},$$

donde μ^r (μ^l) es la multiplicación de escalares por la derecha (por la izquierda). Estos morfismos de coanillos están ligados por los siguientes diagrams conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_l}"] \arrow[dr, "-\otimes_{\mathbb{K}} 1"'] & (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_A (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B), \arrow[d, "\mu^l"] \\ & \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{D} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_r}"] \arrow[dr, "1\otimes_{\mathbb{K}} -"'] & (A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) \otimes_B (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \arrow[d, "\mu^r"] \\ & A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

(2) Consideramos ahora el producto tensor $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ como $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–coanillo. Supongamos que existe un elemento $g \in \mathfrak{D}$, tal que $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$. Entonces, es fácil de comprobar que el morfismo

$$(\varphi_l, - \otimes_{\mathbb{K}} g) : (A, \mathfrak{C}) \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{K}} B, \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D})$$

es un morfismo de $A - (A \otimes_{\mathbb{K}} B)$–coanillos; además el primer triángulo en la ecuación (1.8), se convierte en un rectángulo conmutativo de morfismos de coanillos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_l}"] \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{K}} g"'] \arrow[dr, "-\otimes_{\mathbb{K}} 1"] & (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_A (\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B), \arrow[d, "\mu^l"] \\ \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathfrak{C}\otimes_{\mathbb{K}}\varepsilon"] & \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} B \end{tikzcd}$$

En lo siguiente vamos a definir la noción de elementos idempotente y grouplike de un coanillo. Para algunos casos, esta noción se relaciona fuertemente con los morfismos de coanillos.

Definición 1.1.23. Sean A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, un elemento $g \in \mathfrak{C}$, se dice que es *idempotente* si $\Delta(g) = g \otimes_A g$, como se puede ver, usando la propiedad counitaria, la counidad en este elemento $e = \varepsilon(g)$ es un elemento idempotente de A. Si A tiene 1 y si $e = 1$, se dice que g es un *elemento grouplike*. Por ejemplo en un coanillo de Sweedler de forma $A \otimes_B A$, véase 1.1.4, está claro que cualquier elemento de forma $e \otimes_B e$, $e \in \mathbf{Idemp}(A)$, es un elemento idempotente de $A \otimes_B A$. En el caso unitario todo elemento de forma $a \otimes_B a^{-1}$, donde $a \in U(A)$, es un elemento grouplike. En el Ejemplo 1.1.2(b), los elementos de forma $u^{-n}x^n$, $n \in \mathbb{N}$, forman un subconjunto (monoide en este caso) del conjunto de todos los elementos grouplike. Mientras en el último coanillo del Ejemplo 1.1.2 el elemento ζ es el único elemento grouplike. En el coanillo de matrices generalizadas cualquier elemento de forma $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, donde e, f son elementos idempotentes en los $\mathbb{K}$–anillos de base, es un elemento idempotente. En el Ejemplo 1.1.18(1), el G–conjunto X es un sub-conjunto del conjunto de todos los elementos grouplike de $\mathfrak{C}(X)$.
Para cualquier coanillo $\mathfrak{C}$, vamos a denotar por $\mathbf{Idemp}(\mathfrak{C})$ su conjunto de elementos idempotentes y en el caso unitario por $\mathbf{G}(\mathfrak{C})$ su conjunto de elementos grouplike; implícitamente $\mathbf{G}(\mathfrak{C}) = \emptyset$ significa que $\mathfrak{C}$ no tiene ningún elemento grouplike.

Observación 1.1.24. (a) Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y M un A–bimódulo con un morfismo de A–bimódulos $\varepsilon : M \to A$. Supongamos que existe un elemento $m_0 \in M$ tal que

$$\varepsilon(m_0)m_0 = m_0 = m_0\varepsilon(m_0), \text{ y que } \varepsilon(m_0) = e \in \mathbf{Idemp}(A).$$

Consideramos el $\mathbb{K}$-submódulo ${}^eM^e = \{m \in M|\ me = em = m\}$ de M, se tiene pues que $m_0 \in {}^eM^e$; sea $\varepsilon_e : {}^eM^e \to eAe$ la restricción de ε. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} {}^eM^e \otimes_{\mathbb{K}} {}^eM^e & \longrightarrow & {}^eM^e \\ m \otimes_{\mathbb{K}} m' & \longmapsto & \varepsilon(m)m' + m\varepsilon(m') - \varepsilon(m)m_0\varepsilon(m), \end{array}$$

induce una estructura de $\mathbb{K}$–álgebra sobre ${}^eM^e$ con unidad el elemento m_0. Con esta estructura ε_e es actualmente una extensión de anillos unitarios. El caso unitario se recupera mediante un morfismo de A–bimódulos sobreyectivo.

(b) Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $g \in \mathbf{Idemp}(\mathfrak{C})$ con $e = \varepsilon(g)$. Aplicando (a), se tiene una extensión de anillos unitarios $\varepsilon : {}^e\mathfrak{C}^e \to eAe$

(c) [18]. Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo tal que existe $e \in \mathfrak{C}$ con $\varepsilon(e) = 1$, es decir la counidad es sobreyectiva. Aplicando la versión unitaria de (a) a este coanillo, se obtiene una estructura de anillo unitario sobre $\mathfrak{C}$ y también sobre $\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}$. En particular, la comultiplicación $\Delta : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}$ es una extensión de anillos unitarios si y sólo si e es un elemento grouplike.

(d) Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con elemento grouplike g invariante i.e. $g \in \mathfrak{C}^A$. Entonces $\rho : A \to \mathfrak{C}$, vía $a \mapsto ga$, es A–bilineal retracción de ε en A–bimódulos unitarios, es decir $\varepsilon \circ \rho = A$. Por lo tanto existe un suma directa de A–bimódulos $\mathfrak{C} \cong A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)$. Consideramos $A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)$ como anillo extensión trivial de A, cuyo producto es definido por

$$(a, m).(a', m') = (aa', am' + ma'), \text{ para todo } a, a' \in A,\ m, m' \in \mathbf{Ker}(\varepsilon),$$

con la unidad $(1, 0)$ y la extensión $\varphi : A \to A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)$ la inyección canónica; véase [92, p. 45]. El isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathfrak{C} & \longrightarrow & A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon) \\ c & \longmapsto & (\varepsilon(c), c - \rho\varepsilon(c)) \end{array}$$

es ahora un isomorfismo de $\mathbb{K}$–álgebras, donde $\mathfrak{C}$ es dotado de la estructura de $\mathbb{K}$–álgebra del apartado (1) de esta Observación. En efecto, sean $c, c' \in \mathfrak{C}$

$$\begin{array}{rcl} \phi(cc') & = & (\varepsilon(cc'), cc' - \rho\varepsilon(cc')) \\ & = & (\varepsilon(c)\varepsilon(c'), \varepsilon(c)c' + c\varepsilon(c') - \varepsilon(c)\rho(1)\varepsilon(c') - \rho(\varepsilon(c)\varepsilon(c'))) \\ & = & (\varepsilon(c)\varepsilon(c'), \varepsilon(c)(c' - \rho\varepsilon(c')) + (c - \rho\varepsilon(c))\varepsilon(c')) \\ & = & (\varepsilon(c), c - \rho\varepsilon(c))(\varepsilon(c'), c' - \rho\varepsilon(c')) \\ & = & \phi(c)\phi(c') \end{array}$$

y está claro que $\varphi(1, g - \rho\varepsilon(g)) = (1, 0)$. Se sabe que $0 \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)$ es un ideal de $A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)$ que satisface $(0 \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon))^2 = 0$. Supongamos que la imagen de $(0 \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)) \otimes_A (0 \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon))$ en $(A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)) \otimes_A (A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon))$ es cero; entonces ϕ se convierte en morfismo de A–coanillos, donde $A \oplus \mathbf{Ker}(\varepsilon)$ es un A–coanillo por la estructura del Ejemplo 1.1.5(1).

Observación 1.1.25. (a) Un anillo A (aquí una $\mathbb{Z}$–álgebra) es *SBN* ("single basis number") por la izquierda si todos los módulos libres no-nulos de rango finito son isomorfismos a ${}_AA$. Según [6, p. 113], A es *SBN* por la izquierda si y sólo si lo es por la derecha si y sólo si existen $a, a', b, b' \in A$ tales que $ab + a'b' = 1$, $ba = b'a' = 1$ y $b'a = b'a = 0$. Por lo tanto si A es un anillo *SBN*, entonces $g = a \otimes_{\mathbb{Z}} b + a' \otimes_{\mathbb{Z}} b' \in A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ es un elemento grouplike.

(b) Consideramos ahora un coanillo de Sweedler de forma $A \otimes_B A$ y $g \in \mathbf{G}(A \otimes_B A)$, motivados por la Observación (a) vamos a llamar la *longitud de un elemento grouplike*, el numero natural más pequeño n, tal que $g = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \otimes_B a'_i$. Por definición se tiene pues que $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i a'_i = 1$ y

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \otimes_B 1 \otimes_B a'_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i \otimes_B a'_i a_j \otimes_B a'_j.$$

Con esta nueva definición, un anillo A es *SBN*, implica que $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ tiene un elemento grouplike de longitud dos.

Observación 1.1.26. Sea $\varphi : B \to A$ una extension de $\mathbb{K}$–álgebras y consideramos el A–coanillo de Sweedler asociado $A \otimes_B A$.

(a) Para cualquier A–coanillo $\mathfrak{C}$ con $\mathbf{G}(\mathfrak{C}) \neq \emptyset$, está claro que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{A-cor}(\mathfrak{C}) \times \mathbf{G}(\mathfrak{C}) &\longrightarrow \mathbf{G}(\mathfrak{C}) \\ (\phi, g) &\longmapsto \phi(g) \end{aligned}$$

es bien definida, luego $\mathbf{G}(\mathfrak{C})$ es un $\mathrm{End}_{A-cor}(\mathfrak{C})$–conjunto ($\mathrm{End}_{A-cor}(\mathfrak{C})$ es considerado como monoide multiplicativamente). Así el conjunto $\mathbf{G}(\mathfrak{C})$ se convierte en $\mathrm{Aut}_{A-cor}(\mathfrak{C})$–conjunto, donde $\mathrm{Aut}_{A-cor}(\mathfrak{C})$ es el grupo de automorfismos de A–coanillos de $\mathfrak{C}$.

(b) [75]. Para el A–coanillo $A \otimes_B A$, se puede comprobar sin dificultad que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(A \otimes_B A) \cap (A \otimes_B A)^B &\longrightarrow \mathrm{End}_{A-cor}(A \otimes_B A) \\ g &\longmapsto [1 \otimes_B 1 \mapsto g] \\ \phi(1 \otimes_B 1) &\longleftarrow\!\shortmid\ \phi \end{aligned} \tag{1.9}$$

establece una biyección. De otra parte, como $A \otimes_B A$ está generado como A–bimódulo por el elemento $1 \otimes_B 1$, cada morfismo de A–bimódulos esta íntegramente determinado por la imagen de este último y que es claramente un elemento invariante (i.e. pertenece al sub-grupo $(A \otimes_B A)^B$). Por lo tanto existe una biyección

$$\begin{aligned} (A \otimes_B A)^B &\longrightarrow \mathrm{End}_{{}_A\mathcal{M}_A}(A \otimes_B A) \\ g &\longmapsto [1 \otimes_B 1 \mapsto g], \end{aligned}$$

que induce un estructura de anillo sobre $(A \otimes_B A)^B$ cuyo producto es definido por

$$\left(\sum_i a_i \otimes_B a'_i\right) \cdot \left(\sum_j b_j \otimes_B b'_j\right) = \sum_{i,j} b_j a_i \otimes_B a'_i b'_j.$$

este es el $\times_B$-producto de [95, Section 3]. Con esta última identificación, la aplicación (1.9), se convierte en biyección de monoides; mientras que $\mathrm{Aut}_{A-cor}(A \otimes_B A)$ se identifica como grupo con $U((A \otimes_B A)^B) \cap \mathbf{G}(A \otimes_B A)$.

(c) Sea $g \in \mathbf{G}(A \otimes_B A) \cap (A \otimes_B A)^B$ fijo. Está claro que el submódulo por la izquierda de $A \otimes_B A$ generado por g, Ag, admite una estructura de (A, B)–bimódulo. Consideramos, pues el A–bimódulo $Ag \otimes_B A$, junto con dos morfismos A–bilineales

$$\begin{aligned} \Delta : Ag \otimes_B A &\longrightarrow Ag \otimes_B A \otimes_A Ag \otimes_B A & \qquad \varepsilon : Ag \otimes_B A &\longrightarrow A \\ ag \otimes_B a' &\longmapsto ag \otimes_B 1 \otimes_A g \otimes_B a' & ag \otimes_B a' &\longmapsto aa', \end{aligned}$$

estos inducen una estructura de A–coanillo sobre $Ag \otimes_B A$, además existe un morfismo de A–coanillos

$$\begin{aligned} Ag \otimes_B A &\longrightarrow A \otimes_B A \\ ag \otimes_B a' &\longmapsto aga'. \end{aligned}$$

El elemento $g \otimes_B 1$ es un elemento generador y grouplike de $\mathfrak{C} = Ag \otimes_B A$, de este modo se puede comprobar que los isomorfismo de monoides establecidos en los apartados (a) y (b) para el coanillo de Sweedler, pasan de ser ciertos en este caso, es decir tenemos $\mathbf{G}(\mathfrak{C}) \cap \mathfrak{C}^B \cong \mathrm{End}_{A-cor}(\mathfrak{C})$ como monoides y $U(\mathfrak{C}^B) \cap \mathbf{G}(\mathfrak{C}) \cong \mathrm{Aut}_{A-cor}(\mathfrak{C})$ como grupos.

Lo que queda de esta sección vamos a dedicarlo a las definiciones de sub-coanillos, coideales y ideales de un coanillo.

Definición 1.1.27. [96]. Consideramos $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, A es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, junto con $\mathcal{J}$ un A–sub-bimódulo mediante la inyección $\varsigma : \mathcal{J} \to \mathfrak{C}$ y la sobreyección $\pi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathcal{J}$. Se dice que $\mathcal{J}$ es un *coideal* de $\mathfrak{C}$, si

coideal 1) $\Delta(\mathcal{J}) \subseteq \mathbf{Im}(\varsigma \otimes_A \mathfrak{C}) + \mathbf{Im}(\mathfrak{C} \otimes_A \varsigma)$

coideal 2) $\varepsilon(\mathcal{J}) = 0$.

Recuerde que

$$\mathbf{Ker}(\pi \otimes_A \pi) = \mathbf{Im}(\varsigma \otimes_A \mathfrak{C}) + \mathbf{Im}(\mathfrak{C} \otimes_A \varsigma).$$

Ejemplos de coideal son los núcleos de morfismos de A–coanillos.

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathcal{J}$ como en la definición anterior. Se puede pues construir un coanillo, llamado el *coanillo cociente* de $\mathfrak{C}$ por $\mathcal{J}$, de la siguiente manera: Consideramos $\mathfrak{C}/\mathcal{J}$ como cociente de A–bimódulos con la proyección canónica $\pi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathcal{J}$. Usando las hipótesis, está claro que

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Delta} : \mathfrak{C}/\mathcal{J} & \longrightarrow & \mathfrak{C}/\mathcal{J} \otimes_A \mathfrak{C}/\mathcal{J} \\ \pi(c) & \longmapsto & \pi(c_{(1)}) \otimes_A \pi(c_{(2)}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \overline{\varepsilon} : \mathfrak{C}/\mathcal{J} & \longrightarrow & A \\ \pi(c) & \longmapsto & \varepsilon(c) \end{array}$$

donde $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)}$ constituyen una comultiplicación y una counidad para $\mathfrak{C}/\mathcal{J}$. Por supuesto que este A–coanillo tiene una propiedad universal, es decir si $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es cualquier morfismo de A–coanillos tal que $\mathcal{J} \subseteq \mathbf{Ker}(\phi)$, entonces ϕ se extiende a $\mathfrak{C}/\mathcal{J}$ de manera que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{C}/\mathcal{J} \arrow[ur, dashed, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

se convierte en diagrama conmutativo de morfismos de A–coanillos.

Observación 1.1.28. La noción de coideal como viene dada en la definición 1.1.27 no permite dar una estructura de coideal sobre el núcleo de un morfismo de coanillos entre dos coanillos con distintos anillos de base (definición 1.1.6), porque puedan fallar las dos condiciones en la misma definición; por el momento no tenemos contra-ejemplos concretos. Para evitar futuras ambigüedades, vamos a analizar en lo siguiente esta situación.

Definición 1.1.29. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Un *ideal* de $\mathfrak{C}$, es un par $(J, \mathcal{J})$ que consiste en un ideal bilátero J de A y un A-sub-bimódulo $\mathcal{J}$ de $\mathfrak{C}$ tales que

Id 1) $\Delta(\mathcal{J}) \subseteq \mathbf{Ker}(\Pi \otimes_A \Pi)$, donde $\Pi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathcal{J}$;

Id 2) $\varepsilon(\mathcal{J}) \subseteq J$;

Id 3) $J.\mathfrak{C} + \mathfrak{C}.J \subseteq \mathcal{J}$.

Está claro que cualquier coideal en la definición 1.1.27 es un ideal con $J = 0$. Las parejas $(A, \mathfrak{C})$ y $(0, 0)$ son claramente ideales de $\mathfrak{C}$.

Proposición 1.1.30. *Sea $(J, \mathcal{J})$ un ideal de un A–coanillo $\mathfrak{C}$. Existe una única estructura de (A/J)–coanillo sobre $\mathfrak{C}/\mathcal{J}$, para la cual $(\pi, \Pi) : (A, \mathfrak{C}) \to (A/J, \mathfrak{C}/\mathcal{J})$ es un morfismo de $A-(A/J)$–coanillos. Además, cualquier morfismo de coanillos $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ tales que $J \subseteq \mathbf{Ker}(\varphi)$ y $\mathcal{J} \subseteq \mathbf{Ker}(\phi)$, se extiende únicamente a un morfismo de coanillos $(\overline{\varphi}, \overline{\phi}) : (A/J, \mathfrak{C}/\mathcal{J}) \to (B, \mathfrak{D})$.*

Demostración. La condición **Id** 3) en la definición 1.1.29, implica que $\mathfrak{C}/\mathcal{J}$ admite un estructura de (A/J)–bimódulo unitario, ahora las condiciones **Id** 2) y **Id** 1) dan razón a las siguientes comultiplicación y counidad

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Delta} : \mathfrak{C}/\mathcal{J} & \longrightarrow & \mathfrak{C}/\mathcal{J} \otimes_{(A/J)} \mathfrak{C}/\mathcal{J} \\ \Pi(c) & \longmapsto & \Pi(c_{(1)}) \otimes_{(A/J)} \Pi(c_{(2)}) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \overline{\varepsilon} : \mathfrak{C}/\mathcal{J} & \longrightarrow & A/J \\ \Pi(c) & \longmapsto & \pi(\varepsilon(c)), \end{array}$$

donde $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)}$ por las cuales (π, Π) es claramente un morfismo de $A - (A/J)$–coanillos. Además cualquier estructura de (A/J)–coanillo sobre $\mathfrak{C}$ que convierte esta pareja en un morfismo de $A - (A/J)$–coanillos es de la forma anterior. El resto de la demostración es ahora fácil de averiguar. $\square$

Lema 1.1.31. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Considere $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Si $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ es un morfismo de coanillos, tales que $(\phi \otimes_A \phi) \circ \Delta(\mathbf{Ker}(\phi)) = 0$. Entonces $(\mathbf{Ker}(\varphi), \mathbf{Ker}(\phi))$ es un ideal del coanillo $\mathfrak{C}$.*

Demostración. Se denota por $\mathcal{J}_\phi$ el núcleo de ϕ en A–bimódulos y por J_φ el núcleo de φ. Utilizando la propiedad counitaria del morfismo (φ, ϕ), se tiene que $\varepsilon(\mathcal{J}_\phi) \subseteq J_\varphi$. De otra parte

$$\phi(J_\varphi \mathfrak{C} + \mathfrak{C} J_\varphi) = \varphi(J_\varphi)\phi(\mathfrak{C}) + \phi(\mathfrak{C})\varphi(J_\varphi) = 0,$$

se obtiene pues $J_\varphi \mathfrak{C} + \mathfrak{C} J_\varphi \subseteq \mathcal{J}_\phi$. Falta comprobar la condición **Id** 1). Según la hipótesis tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ker}(\phi) \arrow[r, "\phi^k"] \arrow[ddd, dashed] & \mathfrak{C} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi^{k,c}"] \arrow[ddd, "\Delta"'] \arrow[ddr, phantom, "(1)"] & & \mathfrak{D} \arrow[ddr, "\Delta"] & \\
& & \mathbf{Im}(\phi) \arrow[ur, "\phi^{c,k}"'] \arrow[d, dashed] & & \\
& & \mathbf{Im}(\phi) \otimes_A \mathbf{Im}(\phi) \arrow[dr, "\phi^{c,k} \otimes_A \phi^{c,k}"] & & \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D} \\
\mathbf{Ker}(\phi^{k,c} \otimes_A \phi^{k,c}) \arrow[r] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[ur, "\phi^{k,c} \otimes_A \phi^{k,c}"] \arrow[rr, "\phi \otimes_A \phi"] & & \mathfrak{D} \otimes_A \mathfrak{D} \arrow[ur, "\omega_{A,B}"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Sabiendo que $\mathbf{Im}(\phi) \otimes_A \mathbf{Im}(\phi) \cong \mathbf{Im}(\phi) \otimes_{\mathbf{Im}(\varphi)} \mathbf{Im}(\phi)$ mediante $\omega_{A,\mathbf{Im}(\varphi)}$ (véase el capítulo de apéndices Proposición **A**.2.1), como $\mathbf{Im}(\varphi)$–bimódulos y utilizando el isomorfismo canónico $\mathfrak{C}/\mathcal{J}_\phi \cong \mathbf{Im}(\phi)$, tenemos una estructura de (A/J_φ)–coanillo sobre $\mathfrak{C}/\mathcal{J}_\phi$ por la cual la pareja $(\pi, \Pi) : (A, \mathfrak{C}) \to (A/J_\varphi, \mathfrak{C}/\mathcal{J}_\phi)$ es un morfismo de $(A, A/J_\varphi)$–coanillos (véase el trapecio (1) en el diagrama (1.10)). Según la Proposición 1.1.30, esto significa que $(J_\varphi, \mathcal{J}_\phi)$ es ahora un ideal de $\mathfrak{C}$. $\square$

Observación 1.1.32. En el Lema 1.1.31, la hipótesis $(\phi \otimes_A \phi) \circ \Delta(\mathbf{Ker}(\phi)) = 0$ es automáticamente satisfecha si el morfismo de anillos de escalares φ es sobreyectivo. Véase el capítulo de apéndices Proposición **A**.2.1.

Ejemplo 1.1.33. En este ejemplo comprobaremos, de una parte, que un ideal en un coanillo (Definición 1.1.29) contiene siempre un ideal que se convierte en cero en la extensión canónica de escalares. Eso nos conllevará a definir dos aplicaciones de retículos. La primera es definida del retículo de ideales del anillo de base hacia al retículo de los ideal del coanillo. La segunda del retículo de sub-bimódulos del coanillo hacia al retículo de ideales del coanillo. De otra parte daremos ejemplo de la situación del Lema 1.1.31. Fijamos pues $\mathfrak{C}$ un A–coanillo.

(a) Sea J un ideal bilátero de A, recuperamos la notación del Ejemplo 1.1.15, se sabe pues que $\mathbf{Ker}(\widetilde{\pi}) = J\mathfrak{C}+\mathfrak{C}J$, donde $\pi : A \to A/J$, luego $\varepsilon(\mathbf{Ker}(\widetilde{\pi})) = J\varepsilon(\mathfrak{C})+\varepsilon(\mathfrak{C})J \subseteq J$. Es fácil de comprobar que $\Delta(\mathbf{Ker}(\widetilde{\pi})) \subseteq \mathbf{Ker}(\Pi \otimes_A \Pi)$, donde $\Pi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathbf{Ker}(\widetilde{\pi})$, lo que completa las condiciones de la definición 1.1.29. Por lo tanto $(J, \mathbf{Ker}(\widetilde{\pi}))$ es un ideal de $\mathfrak{C}$. Supongamos ahora dado $(J, \mathcal{J})$ un ideal de $\mathfrak{C}$, según lo de antes, $(J, \mathbf{Ker}(\widetilde{\pi})) \subseteq (J, \mathcal{J})$ es una inclusión de ideals en $\mathfrak{C}$. Sea ahora $\mathcal{J}$ un A-sub-bimódulo de $\mathfrak{C}$, está claro que $\varepsilon(\mathcal{J})$ es un ideal bilátero de A, luego $(\varepsilon(\mathcal{J}), \varepsilon(\mathcal{J})\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\varepsilon(\mathcal{J}))$ es un ideal de $\mathfrak{C}$. Todo esto establece dos aplicaciones de retículos:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_A & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\mathfrak{C}} \\ J & \longmapsto & (J, J\mathfrak{C} + \mathfrak{C}J) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{B}i_{\mathfrak{C}} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{\mathfrak{C}} \\ \mathcal{J} & \longmapsto & (\varepsilon(\mathcal{J}), \varepsilon(\mathcal{J})\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\varepsilon(\mathcal{J})), \end{array}$$

donde $\mathcal{I}_{(-)}$ es el retículo de ideales de $(-)$, mientras $\mathcal{B}i_{\mathfrak{C}}$ es el retículo de todos los A-sub-bimódulos de $\mathfrak{C}$.

(b) Consideramos ahora $\varphi : A \to B$ una extensión de $\mathbb{K}$–álgebras, sea pues $B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B$ el B–coanillo extensión de escalares de $\mathfrak{C}$ junto con el morfismo asociado $(\varphi, \widetilde{\varphi}) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, B \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A B)$. Sea $c \in \mathbf{Ker}(\widetilde{\varphi})$, entonces $1 \otimes_A c \otimes_A 1 = 0$, luego $1 \otimes_A c_{(1)} \otimes_A c_{(2)} \otimes_A 1 = 0$, lo que implica que $\widetilde{\varphi} \otimes_A \widetilde{\varphi}(\Delta(c)) = 0$. Según el Lema 1.1.31, $(\mathbf{Ker}(\varphi), \mathbf{Ker}(\widetilde{\varphi}))$ es un ideal de $\mathfrak{C}$.

La aplicación de la Proposición 1.1.30 al Ejemplo 1.1.33, nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 1.1.34. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $(J, \mathcal{J})$ un ideal de $\mathfrak{C}$. Consideramos los (A/J)–coanillo canónicos $(A/J)\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A(A/J)$ y $\mathfrak{C}/\mathcal{J}$ juntos con sus morfismos de coanillos*

$$(\pi, \widetilde{\pi}) : (A, \mathfrak{C}) \longrightarrow (A/J, (A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J))$$
$$(\pi, \Pi) : (A, \mathfrak{C}) \longrightarrow (A/J, \mathfrak{C}/\mathcal{J}).$$

Se tiene pues un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathfrak{C} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] & \mathfrak{C}/\mathcal{J} \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{Ker}(\overline{\Pi}) \arrow[r] & (A/J) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A (A/J) \arrow[r, "\overline{\Pi}"] & \mathfrak{C}/\mathcal{J}, \end{tikzcd}$$

donde $\overline{\Pi}$ es un morfismo de (A/J)–coanillos definido por: $\overline{\Pi}(\pi(a)\otimes_A c\otimes_A \pi(a')) = aca' + \mathcal{J}$, con a, $a' \in A$, $c \in \mathfrak{C}$; tales que $\widetilde{\pi}(\mathcal{J}) = \mathbf{Ker}(\overline{\Pi})$.

Definición 1.1.35. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Un *subcoanillo* de $\mathfrak{C}$, es un par $(A', \mathfrak{C}')$ que consiste en un $\mathbb{K}$-sub-anillo con unidades locales A' de A (véase el capítulo de apéndices sección **A**.2) y un A'–coanillo $\mathfrak{C}'$, tales que $\mathfrak{C}'$ sea un A'–sub-bimódulo de $\mathfrak{C}$, por restricción, y que la inyección canónica $(\vartheta, \theta) : (A', \mathfrak{C}') \to (A, \mathfrak{C})$ sea un morfismo de coanillos.

Lema 1.1.36. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Si $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ un morfismo de coanillos, tales que $(\phi \otimes_A \phi) \circ \Delta(\mathbf{Ker}(\phi)) = 0$. Entonces $(\mathbf{Im}(\varphi), \mathbf{Im}(\phi))$ es un sub-coanillo de $\mathfrak{D}$.*

Demostración. Inmediata, aplicando el diagrama (1.10) de la demostración del Lema 1.1.31. □

La noción de un ideal por la derecha o por la izquierda, puede ser proporcionada adaptando un formalismo adecuado. Aquí nos limitamos al contenido anterior.

1.2. Comódulos y morfismos de comódulos

Definición 1.2.1. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Un *comódulo* por la derecha es un par (M, ρ_M) donde M es un A–módulo unitario por la derecha y $\rho_M : M \to M \otimes_A \mathfrak{C}$ un morfismo A–lineal por la derecha, tales que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "M\otimes_A\Delta"] \\ M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "\rho_M\otimes_A\mathfrak{C}"] & M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[dr, "\cong"'] & M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "M\otimes_A\varepsilon"] \\ & M \otimes_A A \end{tikzcd}$$

sean diagramas conmutativos. Para especificar la coacción, llamaremos a M un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha y denotaremos por $M_{\mathfrak{C}}$. Los $\mathfrak{C}$–comódulos por la izquierda son igualmente definidos, utilizaremos la notación $\lambda_N : N \to \mathfrak{C} \otimes_A N$ para la $\mathfrak{C}$–coacción por la izquierda sobre N. Por el momento $(\mathfrak{C}, \Delta)$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda y por la derecha.
Sean (M, ρ_M) y $(M', \rho_{M'})$ dos $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha, un *morfismo de comódulos* de $M_{\mathfrak{C}}$ a $M'_{\mathfrak{C}}$ es un morfismo $f : M \to M'$, A–lineal tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M' \arrow[d, "\rho_{M'}"] \\ M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "f\otimes_A\mathfrak{C}"] & M' \otimes_A \mathfrak{C}. \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. El $\mathbb{K}$–módulo de todos los morfismos de $\mathfrak{C}$–comódulos entre M y M', sera denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, M')$. Los morfismos de $\mathfrak{C}$–comódulos por la izquierda son igualmente definidos. Los $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha y sus morfismos forman la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Utilizaremos la notación ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ para la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la izquierda.

En los siguientes pasos vamos a dar ejemplos de categorías de comódulos correspondientes a la serie de ejemplos de coanillos citados en la sección anterior.

Ejemplo 1.2.2. Fijamos A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales.

(a) Si A es considerado trivialmente como un A–coanillo, entonces su categoría de A–comódulos (por derecha) coincide con su categoría de A–módulos unitarios (por la derecha).

(b) Para el caso del coanillo idempotente $\mathfrak{a} \subseteq A$, los $\mathfrak{a}$–comódulos (por la derecha) corresponden a los A–módulos unitarios (por la derecha) M tales que $\rho_M : M \to M \otimes_A \mathfrak{a}$ sea un isomorfismo de A–módulos, es decir la clase de A–módulos unitarios por la derecha que satisfacen $M = M\mathfrak{a}$.

Ejemplo 1.2.3. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y M un (A, B)–bimódulo unitario. Denotemos por R el $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales producto cartesiano $R = A \times B$ y por $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ el $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales de matrices generalizadas. En este caso M es considerado como R–bimódulo unitario, vía las acciones $(a, b)m = am$ y $m(a, b) = mb$, $(a, b) \in R$, $m \in M$. La representación de M en la categoría $\mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B \cong \mathcal{M}_R$, viene dada por $M_R = (0, M_B)$, mientras en la categoría ${}_A\mathcal{M} \times {}_B\mathcal{M} \cong {}_R\mathcal{M}$, viene dada por ${}_RM = ({}_AM, 0)$. Se sabe de [92, p. 47] (similar al caso de anillos con unidades locales), que cualquier $\mathfrak{C}$–módulo unitario por la derecha es un triple $Z = (X_A, Y_B, \varrho_Z)$, donde

$$\varrho_Z : X \otimes_A M \longrightarrow Y \tag{1.11}$$

es B–lineal. Los morfismos $\mathfrak{C}$–lineales son de forma $(g, g') : (X_A, Y_B, \varrho_Z) \to (x'_A, Y'_B, \varrho_{Z'})$ tales que $\varrho_{Z'} \circ (g \otimes_A M) = g' \circ \varrho_Z$. Cambiando el sentido de la flecha en la ecuación (1.11), se puede considerar la siguiente categoría: los objetos son ternas $Z = (X_A, Y_B, \rho_Z)$, donde

$$\rho_Z : Y \longrightarrow X \otimes_A M$$

es B–lineal y cuyos morfismos son $(g, g') : Z \to Z'$, tal que $(g \otimes_A M) \circ \rho_Z = \rho_{Z'} \circ g'$. En lo siguiente vamos a tratar de identificar esta categoría.

Considere $\mathfrak{C}$ como R–coanillo con la estructura del Ejemplo 1.1.5. Sea (Z, ρ_Z) un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. El R–módulo por la derecha sub-yacente de Z es por definición de la forma $Z = (X_A, Y_B)$ y $\rho_Z : Z \to Z \otimes_R \mathfrak{C}$ es R–lineal por la derecha. Es fácil de ver que ρ_Z induce un morfismo B–lineal $\rho'_Z : Y \to X \otimes_A M$; de tal modo que cualquier morfismo $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha $(f, f') : Z \to Z'$ satisface $(f \otimes_A M) \circ \rho'_{Z'} = \rho'_Z \circ f$. Entonces la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha forma parte de la categoría arriba cuestionada. Recíprocamente, sea $Z = (X_A, Y_B, \rho_Z)$ una terna, donde $\rho_Z : Y \to X \otimes_A M$ es un morfismo B–lineal por la derecha i.e. un objeto de la categoría en cuestión. Representando Z como matriz diagonal de forma $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, se define la siguiente coacción

$$\begin{aligned} \rho'_Z : \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \otimes_R \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_R \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \otimes_R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} + \\ &\qquad \textstyle\sum_i \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_R \begin{pmatrix} 0 & m_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$, tal que $xe = x$, $f \in \mathbf{Idemp}(B)$ tal que $yf = y$ y $\rho_Z(y) = \sum_i x_i \otimes_A m_i$. Un cálculo rutinario, demuestra que (Z, ρ'_Z) es realmente un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. Ahora cualquier morfismo $(g, g') : Z \to Z'$ tal que $(g \otimes_A M) \circ \rho_Z = \rho_{Z'} \circ g'$ es por definición compatible con esta nueva $\mathfrak{C}$–coacción. En conclusión la categoría en cuestión corresponde a la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha.

Observamos pues que la categoría de $\mathfrak{C}$–módulos unitarios por la derecha $\mathcal{M}_{\mathfrak{C}}$ se identifica con la categoría de diagramas conmutativos por la izquierda $\{\{1,2\}, \mathcal{M}_A, - \otimes_A M, \mathcal{M}_B\}$. Mientras que la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ se identifica con la categoría de diagramas conmutativos por la derecha $\{\{1,2\}, \mathcal{M}_B, \mathcal{M}_A, - \otimes_A M\}$. Véase [86] por la definición de una categoría de diagramas conmutativos; allí estas categorías están definidas siempre por la izquierda, como hemos visto la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha, también la de la izquierda, representan ejemplos de categorías de diagramas conmutativos por la derecha. Dados estos nuevos ejemplos y por razones lógicas es normal ahora en adelante diferenciar una categoría de diagramas conmutativos si es por la derecha ó por la izquierda.

Ejemplo 1.2.4. (a) Sea G un grupo con elemento neutro e y sea $A = \oplus_{g \in G} A_g$ una $\mathbb{K}$–álgebra G–graduada junto con un G–conjunto por la derecha X. Según [78], [79], consideramos la categoría de A–módulos por la derecha X-graduados $\mathrm{grset}_X - A$. Los objetos de esta son A–módulos por la derecha M tales que $M = \oplus_{x \in X} M_x$ (suma directa de $\mathbb{K}$–módulos) con $M_x A_g \subseteq M_{xg}$ para todo $x \in X$ y $g \in G$; sus morfismos son A–lineales $f : M \to M'$ tal que $f(M_x) \subseteq M'_x$. Consideramos ahora el A–coanillo $\mathfrak{C}(X) := A[X]$ del Ejemplo 1.1.18(1). Se puede verificar sin dificultad que el siguiente funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\mathfrak{C}(X)} & \longrightarrow & \mathrm{grset}_X - A \\ (M, \rho_M) & \longrightarrow & \oplus_{x \in X} M_x, \end{array}$$

donde $M_x = \{m \in M | \rho_M(m) = m \otimes_A x\}$; tiene como inverso el funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{grset}_X - A & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\mathfrak{C}(X)} \\ \oplus_{x \in X} M_x & \longrightarrow & (M = \oplus_{x \in X} M_x, \rho_M), \end{array}$$

donde $\rho_M(m_x) = m_x \otimes_A x$, para todo $m_x \in M_x$. El mismo isomorfismo es válido por la izquierda. En el caso $X = G$, se tiene un isomorfismo entre la categoría de A–módulos (por la derecha) graduados y la categoría de $\mathfrak{C}(G)$–comódulos (por la derecha).

(b) En general dada una estructura entrelazante $(A, C)_\psi$, la categoría de módulos entrelazados por la derecha (estos son A–módulos por la derecha y C–comódulos por la derecha con cierta compatibilidad, véase [17]); es isomorfa a la categoría de $A \otimes_{\mathbb{K}} C$–comódulos por la derecha, [17, Proposition2.2]. Este isomorfismo se aplica pues sobre la mayoría de las categorías de módulos relativos, como los módulos de Hopf, de Doi-Hopf, de Doi-Koppinen, etc, véase [36], [70] y [28].

1.2.5. Sea $\varphi : B \to A$ una extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Siguiendo a [81], la categoría del "descent data" por la derecha asociada a la extensión φ es definida como sigue. Sea $M \in \mathcal{M}_A$ y consideramos su B–módulo subyacente por la restricción de φ. Para cada aplicación B–lineal por la derecha $\varrho : M \to M \otimes_B A$, usando la notación de Cipolla [31], se definen tres aplicaciones B–lineales de $M \otimes_B A$ en $M \otimes_B A \otimes_B A$

$$d_\varrho^{(1)}(m \otimes_B a) = m \otimes_B a \otimes_B e, \text{ donde } a = ae = ea, e \in \mathbf{Idemp}(B).$$

$$d_\varrho^{(2)}(m \otimes_B a) = m \otimes_B e \otimes_B a, \quad e \in \mathbf{Idemp}(B),\ m = me,\ a = ae = ea.$$

y

$$d_\varrho^{(3)}(m \otimes_B a) = \varrho(m) \otimes_B a.$$

La aplicación ϱ se dice que es un *descent datum sobre* M si satisface las dos siguientes condiciones:

(1) ϱ es A–lineal sección de $\varepsilon : A \otimes_B A \to A$ enviado $a \otimes_B a' \mapsto aa'$ (ϱ es *"gluing datum" sobre* M).

(2) $d_\varrho^{(2)} \circ \varrho = d_\varrho^{(3)} \circ \varrho$ (ϱ verifica la *condición "cocycle"*).

Los objetos de la categoría $\mathfrak{Desc}_\varphi$, son pares (M, ϱ), donde M es un A–módulo y ϱ es un descent datum sobre M. Un morfismo de esta categoría, $\phi : (M, \varrho) \to (M', \varrho')$ es una aplicación A–lineal ϕ de M sobre M' verificando la regla conmutativa:

$$(\phi \otimes_B A) \circ \varrho = \varrho' \circ \phi.$$

El siguiente lema es una generalización de la observación de T. Brzeziński [17, Example 2.1]

Lema. *La categoría de descent data $\mathfrak{Desc}_\varphi$ asociada a cualquier extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales $\varphi : B \to A$ es isomorfa a la categoría de $A \otimes_B A$–comódulos por la derecha, donde $A \otimes_A A$ es el A–coanillo canónico de Sweedler asociado a φ.*

Demostración. Resulta inmediata utilizando las dos condiciones de un descent datum juntos con los isomorfismos canónicos para obtener las propiedades coasociativa, counitaria y vice-versa. □

Ejemplo 1.2.6. Sea A y (C, δ, ϵ), respectivamente, una $\mathbb{K}$–álgebra y una $\mathbb{K}$–coálgebra. Considere A como A–coanillo trivialmente, según el Ejemplo 1.1.20, $A \otimes_\mathbb{K} C$ es el $A \otimes_\mathbb{K} \mathbb{K}$–coanillo producto tensor de A con C cuya A–acción por la derecha es $(a \otimes_\mathbb{K} c)a' = aa' \otimes_\mathbb{K} c$, para todo $a, a' \in A$ y $c \in C$, la comultiplicación es $A \otimes_\mathbb{K} \delta$ y la counidad es $A \otimes_\mathbb{K} \varepsilon_C$.

Sea M un A–módulo por la derecha que es también un C–comódulo por la derecha (M, ρ_M), tales que

$$\rho_M(ma) = m_{(0)}a \otimes_\mathbb{K} m_{(1)}, \text{ para todo } m \in M, \text{ y } a \in A. \tag{1.12}$$

Un morfismos $f : (M, \rho_M) \to (M', \rho_{M'})$ entre dos objetos de este mismo tipo, es un morfismo C–colineal y A–lineal por la derecha. Claramente $\rho_M : M \to M \otimes_\mathbb{K} C \cong M \otimes_A$

$(A \otimes_{\mathbb{K}} C)$, induce sobre M un estructura de $A \otimes_{\mathbb{K}} C$–comódulo por la derecha por la cual cualquier morfismo C–colineal y A–lineal por la derecha es $(A \otimes_{\mathbb{K}} C)$–colineal por la derecha. Recíprocamente, cualquier $A \otimes_{\mathbb{K}} C$–comódulo por la derecha (M, ρ_M) es un C–comódulo por la derecha que satisface la ecuación (1.12) y por supuesto cualquier morfismo $(A \otimes_{\mathbb{K}} C)$–colineal por la derecha es un morfismo C–colineal y A–lineal por la derecha. Notemos que este tipo de comódulos ha sido estudiado por F. W. Long en [72, Section 3] bajo el nombre de *Dimódulos*, pero para el caso $A = C = H$ una $\mathbb{K}$–álgebra de Hopf.

1.2.7. En la Observación 1.1.24(b),(c), se ha visto que un coanillo sobre una $\mathbb{K}$–álgebra A y con elemento grouplike se convierten en anillo unitario cuya counidad es una extensión de anillos, lo que es equivalente, según [18, Lemma 5.1], a que A sea un comódulo por la derecha ó por la izquierda. El caso de A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, este resultado tiene su versión como sigue.

Proposición. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Supongamos que (A, ρ_A) (o (A, λ_A)) es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha (o por la izquierda) y supongamos además que, para cualquier $c, c' \in \mathfrak{C}$, existe una unidad $e \in$ **Idemp**(A), $ec = ce = c$, $ec' = c'e = c'$, tal que $e\rho_A(e) = \rho_A(e)$ (ó $\lambda_A(e) = \lambda_A(e)e$). Entonces, $\mathfrak{C}$ es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, cuya multiplicación convierte $\varepsilon : \mathfrak{C} \to A$ en una extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales.*

Demostración. La multiplicación de $\mathfrak{C}$, viene dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ c \otimes_{\mathbb{K}} c' & \longmapsto & c\varepsilon(c') + \varepsilon(c)c' - \varepsilon(c)\rho_A(\varepsilon(c')). \end{array}$$

Si A es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda, se define la multiplicación por $c.c' = c\varepsilon(c') + \varepsilon(c)c' - \lambda_A(\varepsilon(c))\varepsilon(c')$. Es fácil de comprobar que es asociativa. Sean $c, c' \in \mathfrak{C}$, por hipótesis existe $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ tales que $ec = ce = c$, $ec' = c'e = c'$ y que $e\rho_A(e) = \rho_A(e) := g$, se tiene pues $\varepsilon(g) = e$ y

$$c.g = \varepsilon(c)g + ce - \varepsilon(c)\rho_A(e) = ce = c$$

lo mismo pasa con c' i.e. $c'.g = c'$; de otra parte

$$\begin{aligned} g.c &= ec + g\varepsilon(c) - e\rho_A(\varepsilon(c)) \\ &= c + g\varepsilon(c) - e\rho_A(e\varepsilon(c)) \\ &= c + g\varepsilon(c) - e\rho_A(e)\varepsilon(c) \\ &= c + g\varepsilon(c) - g\varepsilon(c) = c \end{aligned}$$

y lo mismo pasa con c' i.e. $g.c' = c'$. Por lo tanto $\mathfrak{C}$ es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Falta ver que ε es morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales; pero esto es inmediato usando la propiedad counitaria de ρ_A. □

Ejemplo concreto de la Proposición 1.2.7 lo proporcionan los coanillos de Sweedler. En efecto sea $\varphi : B \to A$ una extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $A \otimes_B A$ el coanillo asociado. La coacción de A viene dada por

$$\begin{aligned} \rho_A : A &\longrightarrow A \otimes_B A \\ a &\longmapsto \varphi(e) \otimes_B a \end{aligned}$$

donde $\varphi(e) \in \varphi(\mathbf{Idemp}(B))$ es una unidad de a. Está claro que $\varphi(e)\rho_A(\varphi(e)) = \rho_A(\varphi(e))$. Por lo tanto, según la Proposición 1.2.7 $A \otimes_B A$ es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales cuya multiplicación $A \otimes_B A \to A$ es una extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales.

1.2.8. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Consideramos (M, ρ_M) un $(A', \mathfrak{C})$–comódulo, para un cierto $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales A'. Eso es un (A', A)–bimódulo con una $\mathfrak{C}$–coacción por la derecha ρ_M que es A'–lineal por la izquierda. Sea X cualquier A'–módulo por la derecha, entonces $\rho_{X \otimes_{A'} M} = X \otimes_{A'} \rho_M : X \otimes_{A'} M \to X \otimes_{A'} M \otimes_A \mathfrak{C}$, induce una estructura de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha sobre $X \otimes_{A'} M$. Está claro que, para cualquier morfismo de A'–módulos por la derecha $f : X \to X'$, se tiene un morfismo de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha $f \otimes_{A'} M$. Esto determina el funtor $- \otimes_{A'} M : \mathcal{M}_{A'} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. De otra parte, para cada $\mathfrak{C}$–comódulo (Y, ρ_Y), el $\mathbb{K}$–módulo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, Y)A'$ admite una A'–acción por la derecha, lo que da razón al funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, -)A' : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_{A'}$. Estos funtores inducen la siguiente adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(X \otimes_{A'} M, Y) \arrow[r, shift left] & \mathrm{Hom}_{A'}(X, \mathrm{Hom}_A(M, Y)A') \arrow[l, shift left] \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X \otimes_{A'} M, Y) \arrow[u, hook] \arrow[r, dotted, shift left] & \mathrm{Hom}_{A'}(X, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, Y)A'), \arrow[u, hook] \arrow[l, dotted, shift left] \end{tikzcd}$$

véase el capítulo de apéndices sección **A**.2, para la adjunción de la primera fila. De esta manera $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}, -)A$ es un adjunto por la derecha de $- \otimes_A \mathfrak{C}$. De otra parte *el funtor del olvido* (olvidando la estructura de comódulo) $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ es un adjunto por la izquierda de $- \otimes_A \mathfrak{C}$, vía el isomorfismo natural

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(X, X') &\xrightarrow{adj_{X,X'}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, X' \otimes_A \mathfrak{C}) \\ f &\longmapsto (f \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ (X \otimes_A \varepsilon) \circ g &\longleftarrow\!\shortmid\; g \end{aligned} \tag{1.13}$$

para cualquier pareja $(X_{\mathfrak{C}}, X'_A)$ formada por un comódulo y un módulo, denotaremos $U_A \dashv - \otimes_A \mathfrak{C}$, véase [58].

Observación 1.2.9. La categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ tiene conúcleos y coproducto y que pueden calcularse en la categoría $\mathcal{M}_A$. Así $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ admite cualquier límite inductivo. Análogamente, las mismas observaciones tienen lugar en ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$.

Lema 1.2.10. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Si ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, entonces $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría abeliana.*

Demostración. Según la Observación 1.2.9, basta comprobar la existencia de núcleos, porque el isomorfismo núcleo-conúcleo y conúcleo-núcleo se hace en $\mathcal{M}_A$. Sea $f : (M, \rho_M) \to (M', \rho_{M'})$ un morfismo de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha, consideramos la siguiente sucesión exacta en $\mathcal{M}_A$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Ker}(f) \longrightarrow M \longrightarrow M'$$

haciendo actuar el funtor exacto $- \otimes_A \mathfrak{C}$, se tiene, por la propiedad universal del núcleo, el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{M}_A$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\rho_{\mathbf{Ker}(f)}"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"] & M' \arrow[d, "\rho_{M'}"] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Ker}(f) \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r] & M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r] & M' \otimes_A \mathfrak{C}.
\end{tikzcd}$$

Luego $\mathbf{Ker}(f)$ admite un estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, por el cual se convierte en el núcleo de f en la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. □

Ejemplo 1.2.11. Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra $e \in A$ un idempotente, $f = 1 - e$. Supongamos que $fAe = 0$; en este caso se tiene $ae = eae$, para cualquier $a \in A$. Consideramos $I = eA$, entonces I es un ideal bilátero con la multiplicación por la izquierda viene dada por $a'(ea) = e(a'ea)$, para cualquier $a, a' \in A$. El A–bimódulo I es en realidad un A–coanillo idempotente. Considere los siguientes funtores

$$F = - \otimes_{eAe} eA : \mathcal{M}_{eAe} \longrightarrow \mathcal{M}^I, \qquad G = - \otimes_A Ae : \mathcal{M}^I \longrightarrow \mathcal{M}_{eAe},$$

está claro que las transformaciones naturales

$$\begin{array}{ccc}
FG(M) \longrightarrow M, & \qquad & GF(N) \longrightarrow N \\
m \otimes_A ae \otimes_{eAe} ea' \longmapsto m(aea') & \qquad & n \otimes_{eAe} ea \otimes'_A ae \longmapsto n(eaa'e),
\end{array}$$

donde $M \in \mathcal{M}^I$ y $N \in \mathcal{M}_{eAe}$, son isomorfismos naturales. Por lo tanto $\mathcal{M}^I$ es una categoría de Grothendieck. Mientras que ${}_AI$ no es plano excepto si ${}_{eAe}I$ lo es.

El siguiente resultado es para clarificar la situación creada por el Ejemplo 1.2.11.

Proposición 1.2.12. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) ${}_A\mathfrak{C}$ *es un módulo plano;*

(ii) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *es una categoría abeliana y* $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ *es exacto por la izquierda;*

(iii) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *es una categoría de Grothendieck y* $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ *es exacto por la izquierda.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (iii)$ La exactitud del funtor $- \otimes_A \mathfrak{C} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ implica que los núcleos en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ pueden ser calculados ya en $\mathcal{M}_A$, como hemos comprobado en Lema 1.2.10. Esto da que $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría abeliana co-completa con el límite directos exactos. Necesitaremos pues de encontrar un generador para $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Por esto, vamos a proceder como en la demostración de [100, 13.13]. Sea $(M, \rho_M) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y (M, ϱ_M) es A–módulo unitario por la derecha sub-yacente de M. Existe $\mathbb{K}^{(I)} \to M \to 0$ una representación libre de M en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$, esto implica una representación de forma

$$A^{(I)} \to M \otimes_{\mathbb{K}} A \to M \to 0$$

luego se tiene

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}^{(I)} \cong A^{(I)} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "g"] & M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r] & 0 \\
g^{-1}(M) \arrow[u, hook] \arrow[r] & M \arrow[u, hook, "\rho_M"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

está claro ahora que

$$\mathfrak{g}^r = \bigoplus \{L |\, L \text{ es un subcomódulo de } \mathfrak{C}^k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

es un generador de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Claramente, el funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ es exacto en este caso.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Esto es evidente.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Recuerde que U_A es un adjunto por la izquierda de $- \otimes_A \mathfrak{C}$, entonces, según [89, Corollary 3.2.3], $- \otimes_A \mathfrak{C} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es exacto por la izquierda, luego $U_A \circ (- \otimes_A \mathfrak{C}) : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ es exacto también. Por lo tanto, ${}_A\mathfrak{C}$ es plano. □

Observación 1.2.13. Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. El Ejemplo 1.2.11 nos dice que si $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck, entonces ${}_A\mathfrak{C}$ no debe de ser necesariamente plano. Esto demuestra que la conjetura de M. Wischnewsky [103, Conjecture 14] es falsa, si la coálgebra de allí se reemplaza por un coanillo con anillo de escalares cualquiera, véase [3].

Como consecuencia de la demostración de la Proposición 1.2.12, se tiene

Corolario 1.2.14. *Si ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, entonces cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha es isomorfo a un subcomódulo de un comódulo $\mathfrak{C}$–generado (se dice sub-generado por $\mathfrak{C}$).*

En lo siguiente vamos a recordar de [96] el producto convolución sobre los duales (izquierda, derecha) y el bi-dual de un coanillo. Así sus relaciones con los anillos de endomorfismos colineales y el anillo de escalares de base.

Proposición 1.2.15. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo.*

(a) El dual por la derecha $\mathfrak{C}^*$ es una $\mathbb{K}$–álgebra con la unidad ε, donde para σ, $\sigma' \in \mathfrak{C}^*$, el producto $\sigma'\sigma$ es la composición

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{\Delta} \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{\sigma' \otimes_A \mathfrak{C}} \mathfrak{C} \otimes_A A \cong \mathfrak{C} \xrightarrow{\sigma} A;$$

es decir que

$$\sigma'\sigma = \sigma \circ (\sigma' \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \Delta,$$

y $\mathfrak{C}^*$ *es una anti-extensión de* A*, vía*

$$\begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & \mathfrak{C}^* \\ a & \longmapsto & [c \mapsto a\varepsilon(c)], \end{array}$$

de esta manera la estructura de A*–bimódulo sobre* $\mathfrak{C}^*$ *inducida por* ρ *coincide con la* A*–biacción canónica de* $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{C}_A, A)$*. Además existe un anti-isomorfismo de anillos*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}) & \longrightarrow & \mathfrak{C}^* \\ f & \longmapsto & \varepsilon \circ f \\ (g \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \Delta & \longleftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

(b) *El dual por la izquierda* ${}^*\mathfrak{C}$ *es una* $\mathbb{K}$*–álgebra con la unidad* ε*, donde para* δ*,* $\delta' \in {}^*\mathfrak{C}$*, el producto* $\delta'\delta$ *es la composición*

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{\quad\Delta\quad} \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{\mathfrak{C}\otimes_A\delta} \mathfrak{C} \otimes_A A \cong \mathfrak{C} \xrightarrow{\quad\delta'\quad} A,$$

es decir

$$\delta'\delta = \delta' \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \delta) \circ \Delta$$

y ${}^*\mathfrak{C}$ *es una anti-extensión de* A*, vía*

$$\begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & {}^*\mathfrak{C} \\ a & \longmapsto & [c \mapsto \varepsilon(c)a]. \end{array}$$

de esta manera la estructura de A*–bimódulo sobre* ${}^*\mathfrak{C}$ *inducida por* λ *coincide con la* A*–biacción canónica de* $\mathrm{Hom}_A({}_A\mathfrak{C}, A)$*. Además existe un isomorfismo de anillos*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}) & \longrightarrow & {}^*\mathfrak{C} \\ f & \longmapsto & \varepsilon \circ f \\ (\mathfrak{C} \otimes_A g) \circ \Delta & \longleftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

(c) *El bi-dual* ${}^*\mathfrak{C}^*$ *es una* $\mathbb{K}$*–álgebra con la unidad* ε*, donde para* f*,* $g \in {}^*\mathfrak{C}^*$*, el producto* gf *es la composición*

$$gf : \mathfrak{C} \xrightarrow{\quad\Delta\quad} \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{g\otimes_A f} A$$

y ${}^*\mathfrak{C}^*$ *es una extensión de* $\mathfrak{C}^A$*, vía*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{C}^A & \xrightarrow{\quad\zeta\quad} & {}^*\mathfrak{C}^* \\ a & \longmapsto & [c \mapsto \varepsilon(c)a = a\varepsilon(c)]. \end{array}$$

Demostración. Véase [96, Proposition 3.2]. □

Ejemplo 1.2.16. Presentamos aquí ejemplos de $\mathbb{K}$–álgebras duales de algunos caso de coanillos.

(1) Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales considerado como A–coanillo trivialmente. Entonces $A^* = \mathrm{End}(A_A)$ y ${}^*A = \mathrm{End}({}_AA)$, que son canónicamente $\mathbb{K}$–álgebras extensiones de A.

(2) [96]. Sea $\varphi : B \to A$ una extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales A–coanillo de Sweedler asociado a φ. Consideramos las siguientes aplicaciones A–bilineales

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes_B A)^* & \longrightarrow & \mathrm{End}(A_B) \\ f & \overset{\Phi}{\longmapsto} & [a \mapsto f(a \otimes_B \varphi(e)),\ ae = ea = a,\ e \in \mathbf{Idemp}(B)] \\ [a \otimes_B a' \mapsto g(a)a'] & \overset{\Psi}{\longleftarrow\!\shortmid} & g. \end{array}$$

Es fácil de comprobar que Φ y Ψ establecen un anti-isomorfismo de $\mathbb{K}$–álgebras. Análogamente, existe anti-isomorfismo de $\mathbb{K}$–álgebras $(A \otimes_B A)^* \cong \mathrm{End}({}_BA)$. Finalmente, si A y B son dos $\mathbb{K}$–álgebras, entonces ${}^*(A \otimes_B A)^* \cong A^B$ donde A^B es el subanillo de A de los elementos invariantes respeto a la acción de B (o el centralizador de $\varphi(B)$ en A).

(3) Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y C una $\mathbb{K}$–coálgebra. Consideramos pues el A–coanillo producto tensor de C y A: $C \otimes_{\mathbb{K}} A$. El opuesto del dual por la derecha $(C \otimes_{\mathbb{K}} A)^*$ es canónicamente isomorfo al $\mathbb{K}$–módulo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, así el producto de convolución de este dual se trasforma al siguiente producto

$$(f * g)(c) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)}),\ c \in C,\ f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A),$$

muy conocido en la teoría de coálgebras, véase [94].

Observación 1.2.17. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha (M, ρ_M), admite un acción por la izquierda del anillo dual ${}^*\mathfrak{C}$ dada por

$$\delta.m = (M \otimes_A \delta) \circ \rho_M(m),\ \text{para todo } \delta \in {}^*\mathfrak{C} \text{ y } m \in M. \tag{1.14}$$

Sea ahora $f : (M, \rho_M) \to (M', \rho_{M'})$ un morfismo $\mathfrak{C}$–colineal, sean $\delta \in {}^*\mathfrak{C}$, $m \in M$, se tiene pues

$$\begin{aligned} \delta f(m) &= (M' \otimes_A \delta) \circ \rho_{M'}(f(m)) \\ &= (M' \otimes_A \delta) \circ (f \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M(m),\ (f \text{ es } \mathfrak{C} - \text{colineal}) \\ &= f \circ (M \otimes_A \delta) \circ \rho_M(m),\ (f \text{ es } A - \text{lineal}) \\ &= f(\delta m). \end{aligned}$$

Esto define el funtor $\omega^r : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to {}_{{}^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Por simetría se tiene el funtor $\omega^l : {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*}$, la acción del dual por la derecha sobre los comódulos por la izquierda, viene dada por: Para cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda (N, λ_N)

$$n.\sigma = (\sigma \otimes_A N) \circ \lambda_N(n),\ \text{para todo } \sigma \in \mathfrak{C}^* \text{ y } n \in N. \tag{1.15}$$

Finalmente, aplicando eso al propio coanillo $\mathfrak{C}$, observamos que $\mathfrak{C}$ es un $({}^*\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^*)$–bimódulo.

Proposición 1.2.18. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo.*

(a) El dual M^* de cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M tiene una estructura de $\mathfrak{C}^*$–módulo por la derecha que viene dada por

$$x.\sigma = \sigma \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M, \quad \text{para todo } x \in M^* \text{ y } \sigma \in \mathfrak{C}^*.$$

De esta manera, el funtor dual $(-)^* : \mathcal{M}_A \to {}_A\mathfrak{M}$ se extiende al funtor $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \arrow[r, "(-)^*"] \arrow[d, "U_A"'] & \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*} \arrow[d, "U^r"] \\ \mathcal{M}_A \arrow[r, "(-)^*"] & {}_A\mathfrak{M} \end{tikzcd}$$

conmutativo, donde $U^r : \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*} \to {}_A\mathfrak{M}$ es el funtor restricción de escalares asociado al anti-morfismo canónico $\rho : A \to \mathfrak{C}^*$, enviando $\rho_a : c \mapsto a\varepsilon(c)$, $a \in A$.

(b) El dual ${}^*N$ de cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda N tiene una estructura de ${}^*\mathfrak{C}$–módulo por la izquierda que viene dada por

$$\delta.y = \delta \circ (\mathfrak{C} \otimes_A y) \circ \lambda_N, \quad \text{para todo } y \in {}^*N \text{ y } \delta \in \mathfrak{C}^*.$$

De esta manera, el funtor dual ${}^*(-) : {}_A\mathcal{M} \to \mathfrak{M}_A$ se extiende al funtor ${}^*(-) : {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to {}_{{}^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[r, "{}^*(-)"] \arrow[d, "{}_AU"'] & {}_{{}^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[d, "U^l"] \\ {}_A\mathcal{M} \arrow[r, "{}^*(-)"] & \mathfrak{M}_A \end{tikzcd}$$

conmutativo, donde $U^l : {}_{{}^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to \mathfrak{M}_A$ es el funtor restricción de escalares asociado al anti-morfismo canónico $\lambda : A \to {}^*\mathfrak{C}$, enviando $\lambda_a : c \mapsto \varepsilon(c)a$, $a \in A$.

Demostración. Basta comprobar (a), porque (b) es una versión simétrica. Sea $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $x \in M^*$, σ, $\sigma' \in \mathfrak{C}^*$; es suficiente comprobar que $(x.\sigma).\sigma' = x.(\sigma.\sigma')$, pues

$$\begin{aligned} (x.\sigma).\sigma' &= \sigma' \circ ((x.\sigma) \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ &= \sigma' \circ ((\sigma \circ x \otimes_A \mathfrak{C} \circ \rho_M) \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ &= \sigma' \circ (\sigma \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (x \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (\rho_M \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ &= \sigma' \circ (\sigma \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (x \otimes_A \Delta) \circ \rho_M; \end{aligned}$$

y de otra parte

$$\begin{aligned} x.(\sigma.\sigma') &= (\sigma.\sigma') \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ &= \sigma' \circ (\sigma \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \Delta \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ &= \sigma' \circ (\sigma \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M, \end{aligned}$$

porque Δ es A–lineal por la izquierda, lo que nos da la igualdad deseada. Ahora consideramos un morfismo $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha $f : M \to L$ y $f^* : L^* \to M^*$ su dual por la derecha. Sea $y \in L^*$, $x \in M^*$ y $\sigma \in \mathfrak{C}^*$, entonces

$$\begin{aligned} f^*(y.\sigma) &= \sigma \circ (y \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_L \circ f \\ &= \sigma \circ (y \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (f \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M, \quad f \text{ es colineal} \\ &= \sigma \circ ((y \circ f) \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \\ &= f^*(y).\sigma\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*}$ es un funtor bien definido. Finalmente, sea $x \in M^*$, $a \in A$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (a.x)(m) = (x.\rho_a)(m) &= \rho_a \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M(m) \\ &= \textstyle\sum_i \rho_a(x(m_i)c_i), \quad \rho_M(m) = \sum_i m_i \otimes_A c_i \\ &= \textstyle\sum_i a\varepsilon(x(m_i)c_i) \\ &= \textstyle\sum_i ax(m_i)\varepsilon(c_i) \\ &= ax(m), \end{aligned}$$

entonces el citado diagrama es conmutativo. $\square$

Observación 1.2.19. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Una demostración alternativa de la Proposición 1.2.18 se puede dar, como sigue. Para todo $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M, el $\mathbb{K}$–módulo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, \mathfrak{C})$ se convierte canónicamente en un $\mathrm{End}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}})$–módulo por la izquierda. Ahora utilizaremos el isomorfismo de anillos $\mathrm{End}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}})^o \cong \mathfrak{C}^*$ y el isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, \mathfrak{C}) \cong M^*$, para trasladar esta acción por la izquierda a una estructura de $\mathfrak{C}^*$–módulo por la derecha. Unos cálculos triviales muestran que esta acción por la derecha coincide con la acción citada en la Proposición 1.2.18. Como el isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, \mathfrak{C}) \cong (-)^*$ es natural, se tiene que cada morfismo f en la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ da el morfismo f^* en la categoría ${}_{\mathfrak{C}^*}\mathcal{M}$. Por lo tanto, se tiene el funtor $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to {}_{\mathfrak{C}^*}\mathcal{M}$. Finalmente la conmutatividad del citado diagrama, viene del efecto de que el isomorfismo $\mathrm{End}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}})^o \cong \mathfrak{C}^*$ actúa como identidad sobre A^o. El siguiente diagrama (no-conmutativo), resume la situación hasta hora:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \arrow[rrr, "(-)^*"] \arrow[dr, "\omega^r"] \arrow[dd, shift left, "U_A"] & & & \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*} \arrow[dd, shift left, "U^r"] \\
& {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[dd, shift left, "U^l"] & {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[l, "{}^*(-)"'] \arrow[ur, "\omega^l"'] \arrow[dd, shift left, "{}_AU"] & \\
\mathcal{M}_A \arrow[uu, shift left, "-\otimes_A\mathfrak{C}"] \arrow[rrr, "(-)^*"] \arrow[dr] & & & {}_A\mathfrak{M} \arrow[uu, shift left, "-\otimes_{A^o}\mathfrak{C}^*"] \\
& \mathfrak{M}_A \arrow[uu, shift left, "{}^*\mathfrak{C}\otimes_{A^o}-"] & {}_A\mathcal{M} \arrow[l, "{}^*(-)"] \arrow[ur] \arrow[uu, shift left, "\mathfrak{C}\otimes_A-"] &
\end{tikzcd} \tag{1.16}$$

donde cada pareja de flechas de va y viene, representa una adjunción canónica.

Observación 1.2.20. En la Proposición 1.2.18 no se consigue dar una estructura de comódulo sobre el dual de un comódulo. Pero existen casos, donde el dual si hereda una coacción. Sea pues A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Adaptamos la siguiente notación, para cualquier (M, ρ_M) $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, definimos la siguiente transformación natural

$$\begin{aligned} \xi_M : M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathfrak{C}) \\ x &\longmapsto (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M, \end{aligned}$$

que es además un morfismo A–lineal por la izquierda.

(1) Consideramos (P, ρ_P) un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha tal que P_A sea un módulo finitamente generado y proyectivo; considere $\{p_i^*, p_i\} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma$ un base dual finita por la derecha, es decir, la siguiente igualdad

$$u = \sum_i p_i p_i^*(u), \qquad \forall u \in P_A \tag{1.17}$$

es satisfecha. Primero, se sabe del capítulo de apéndices sección **A**.2, que P^* es un A–módulo unitario finitamente generado y proyectivo. Es fácil comprobar que la aplicación A–lineal por la izquierda

$$\begin{aligned} \lambda_{P^*} : P^* &\longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A P^* \\ x &\longmapsto \textstyle\sum_i ((x \otimes_A \mathfrak{C})\rho_P)(p_i) \otimes_A p_i^* = \sum_i \xi_P(x)(p_i) \otimes_A p_i^* \end{aligned}$$

induce sobre P^* un estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda. Observe que λ_{P^*} es independiente de la base dual escogida. En efecto, dada otra base dual finita por la derecha $\{q_j, q_j^*\}$ de P_A, utilizando el isomorfismo de la ecuación (**A**.5) (véase el capítulo de apéndices), se tiene el isomorfismo

$$\begin{aligned} \xi : P \otimes_A P^* &\xrightarrow{\xi_{P,P}} \mathrm{End}(P_A) \\ u \otimes_A \varphi &\longmapsto [v \mapsto u\varphi(v)] \\ \textstyle\sum_i g(p_i) \otimes_A p_i^* &\longleftarrow\!\shortmid\; g \end{aligned} \tag{1.18}$$

y luego

$$((x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_P) \otimes_A P^*(\sum_i p_i \otimes_A p_i^*) \quad = \quad ((x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_P) \otimes_A P^*(\sum_j q_j \otimes_A q_j^*)$$

(2) Como en el caso unitario, para cualquier Q_A un módulo plano, M_A un módulo finitamente presentado y ${}_AN_A$, existe un isomorfismo

$$\begin{aligned} \nu_{M,Q,N} : Q \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, Q \otimes_A N) \\ q \otimes_A f &\longmapsto [m \mapsto q \otimes_A f(m)], \end{aligned}$$

natural sobre (Q,N). Además si Q es un A–bimódulos unitario, entonces $\nu_{M,Q,N}$ es A–lineal por la izquierda.

Supongamos ahora que $\mathfrak{C}_A$ es un módulo plano y consideramos (M,ρ_M) un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha tal que M_A es un módulo finitamente presentado. El dual M^* se injecta en un A–módulo por la izquierda unitario, luego ${}_AM^*$ el mismo es unitario. Definimos

$$\lambda_{M^*} : M^* \xrightarrow{\xi_M} \mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{C}) \cong \mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{C}\otimes_A A) \xrightarrow{\nu^{-1}_{M,\mathfrak{C},A}} \mathfrak{C}\otimes_A M^*.$$

Vamos a comprobar que (M^*,λ_{M^*}) es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda. Como composición de aplicaciones A–lineales, λ_{M^*} es A–lineal por la izquierda. La propiedad counitaria viene del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{C}) \arrow[r, "\nu^{-1}_{M,\mathfrak{C},A}"] \arrow[d, "h_A(M,\varepsilon)"'] & \mathfrak{C}\otimes_A M^* \arrow[d, "\varepsilon\otimes_A M^*"] \\
\mathrm{Hom}_A(M,A) \arrow[r, "\nu^{-1}_{M,A,A}"] & A\otimes_A M^*
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo gracia a la naturalidad de $\nu^{-1}_{M,-,-}$. Consideramos ahora el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M^* \arrow[rr, "\xi_M"] \arrow[d, "\xi_M"'] & & \mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{C}) \arrow[r, "\nu^{-1}_{M,\mathfrak{C},A}"] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathfrak{C}\otimes_A M^* \arrow[dd, "\Delta\otimes_A M^*"] \\
\mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{C}) \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "\nu^{-1}_{M,\mathfrak{C},A}"'] \arrow[drr, phantom, "(1)"] & & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C}) \arrow[d, "G"] & \\
\mathfrak{C}\otimes_A M^* \arrow[rr, "\mathfrak{C}\otimes_A\xi_M"] & & \mathfrak{C}\otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,\mathfrak{C}) \arrow[r, "\mathfrak{C}\otimes_A\nu^{-1}_{M,\mathfrak{C},A}"] & \mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A M^*
\end{tikzcd}$$

donde $F = h_{\mathfrak{C}}(M,\mathfrak{C}\otimes_A\Delta)\circ adj_{M,\mathfrak{C}}$ y $G = \nu^{-1}_{M,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}\circ adj^{-1}_{M,\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C}}$, véase la ecuación (1.13) y las convenciones y notaciones de esta memoria. El rectángulo (1) es fácil de comprobar que es conmutativo. Por la conmutatividad de (2), se utilisa la siguiente composición

$$\nu_{M,\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C},A} = \nu_{M,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}\circ(\mathfrak{C}\otimes_A\nu_{M,\mathfrak{C},A})$$

de isomorfismos naturales. Así tendremos la conmutatividad del diagrama total.

Ejemplo 1.2.21. En general los duales (i.e. izquierda, derecha) de un coanillo son dos anillos distintos. El siguiente ejemplo confirma este hecho. Considere D una $\mathbb{K}$–álgebra de división. Considere el anillo de matrices generalizadas $\begin{pmatrix} D & V \\ 0 & D\end{pmatrix}$, donde V es un doble-espacio vectorial sobre D cuya dimensión por la izquierda $\dim({}_DV)\geq 1$, denotemos por

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ y } f = 1-e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Está claro que $fAe = 0$ y que $eAe = D$. Consideramos $I_A = eA$ el A–coanillo idempotente como en el Ejemplo 1.2.11. Se puede comprobar entonces que

$$\mathfrak{C}^* \cong D, \text{ mientras que } {}^*\mathfrak{C} \cong \mathrm{End}({}_D(D \oplus V)).$$

1.3. (Bi)-comódulos y (Bi)-módulos (Bi)-racionales

Consideramos A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Consideramos M un (A, B)–bimódulo tal que $(M, \rho_M) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ y $(M, \lambda_M) \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Un calculo trivial demuestra que

$$\rho_M : (M, \lambda_M) \to (M \otimes_B \mathfrak{D}, \lambda_M \otimes_B \mathfrak{D})$$

es un morfismo de $\mathfrak{C}$–comódulos por la izquierda si y sólo si

$$\lambda_M : (M, \rho_M) \to (\mathfrak{C} \otimes_A M, \mathfrak{C} \otimes_A \rho_M)$$

es un morfismo de $\mathfrak{D}$–comódulos por la derecha. Si el bimódulo M satisface una de las condiciones equivalentes de antes, se le llama un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$-*bicomódulo*. Un *morfismo de* $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$-*bicomódulos* $f : M \to M'$ es un morfismo $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha y $\mathfrak{D}$–colineal por la izquierda. Los $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulos y sus morfismos forman la categoría ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$.

Como en el caso de módulos sobre anillos unitarios, los bicomódulos cuyos anillos de escalares son $\mathbb{K}$–álgebras, son también comódulos (por la derecha), véase [53]. Ahora en adelante utilizaremos la siguiente notación: Para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, S un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y V un S–bimódulo unitario, denotemos

$$V^n = V \otimes_S V \otimes_S \cdots \otimes_S V, \text{ el producto tensor } n \text{ veces.}$$

Proposición 1.3.1. *Sean A, B dos $\mathbb{K}$–álgebras y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo, un B–coanillo. Entonces existe un isomorfismo de categorías ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \cong \mathcal{M}^{\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "{}_AU_B"'] & \mathcal{M}^{\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}} \arrow[d, "U_{A^o \otimes_{\mathbb{K}} B}"] \\
{}_A\mathcal{M}_B \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{M}_{A^o \otimes_{\mathbb{K}} B}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Denotemos por $R = A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$ y por $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ el R–coanillo producto tensor de $\mathfrak{C}^o$ y $\mathfrak{D}$, con la comultiplicación y la counidad de la Proposición 1.1.20. Sea $(M, \rho_M, \lambda_M) \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, como bimódulo está claro que $M \in \mathcal{M}_R$, consideramos

$$\begin{array}{rl}
\rho'_M : M \xrightarrow{\rho_M} M \otimes_B \mathfrak{C} \xrightarrow{\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}} \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \xrightarrow{\xi_M} M \otimes_R \mathfrak{E} \\
m \longmapsto m_{(0)} \otimes_B m_{(1)} \longmapsto m_{(-1)} \otimes_A m_{(0)} \otimes_B m_{(1)} \longmapsto m_{(0)} \otimes_R (m^o_{(-1)} \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)}),
\end{array} \tag{1.19}$$

donde ξ_{-} es la transformación natural del Lema **A**.3.1 del capítulo apéndices. Comprobaremos pues si ρ'_M induce sobre M_R una estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. Está claro que ρ'_M es R–lineal por la derecha y que

$$(M \otimes_R \varepsilon_{\mathfrak{C}}) \circ \rho'_M(m) = m_{(0)}(\varepsilon(m_{(-1)})^o \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon(m_{(1)})) = \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)}) = m.$$

lo que nos da la propiedad counitaria. Por la coasociatividad, se considera el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\lambda\otimes_B\mathfrak{D}"] \arrow[d, "M\otimes_B\Delta"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\xi_M"] \arrow[d, "\mathfrak{C}\otimes_A M\otimes_B\Delta"] & M \otimes_R \mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \arrow[ddd, "M\otimes_R\Delta_{\mathfrak{C}}"] \\
M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\rho\otimes_B\mathfrak{D}"] \arrow[d, "\lambda\otimes_B\mathfrak{D}"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & M \otimes_B \mathfrak{D}^2 \arrow[r, "\lambda\otimes_B\mathfrak{D}^2"] \arrow[d, "\lambda\otimes_B\mathfrak{D}^2"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}^2 \arrow[d, "\Delta\otimes_A M\otimes_B\mathfrak{D}^2"] \arrow[r, phantom, "(7)"] & \\
\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathfrak{C}\otimes_A\rho\otimes_B\mathfrak{D}"] \arrow[d, "\xi_M"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}^2 \arrow[r, "\mathfrak{C}\otimes_A\lambda\otimes_B\mathfrak{D}^2"] \arrow[d, "\xi_M\otimes_B\mathfrak{D}"] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & \mathfrak{C}^2 \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}^2 \arrow[d, "\xi_{\mathfrak{C}\otimes_A M\otimes_B\mathfrak{D}}"] & \\
M \otimes_R \mathfrak{C} \arrow[r, "\rho\otimes_R\mathfrak{C}"] & M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_R \mathfrak{C} \arrow[r, "\lambda\otimes_B\mathfrak{D}\otimes_R\mathfrak{C}"] & \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_R \mathfrak{C} \arrow[r, "\xi_M\otimes_R\mathfrak{C}"] & M \otimes_R \mathfrak{C}^2
\end{tikzcd}$$

ahora los rectángulos (1), (2), (3) y (4) son conmutativos por hipótesis. La transformación natural ξ_{-}, implica la conmutatividad de (5) y (6). Falta comprobar si el rectángulo (7) es conmutativo, para ello, sean $c \in \mathfrak{C}$, $m \in M$, $d \in \mathfrak{D}$.

$$\begin{aligned}
&(\xi_M \otimes_R \mathfrak{C}) \circ (\xi_{\mathfrak{C}\otimes_A M\otimes_B\mathfrak{D}}) \circ (\Delta \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \Delta(c \otimes_A m \otimes_B d) \\
&= (\xi_M \otimes_R \mathfrak{C}) \circ (\xi_{\mathfrak{C}\otimes_A M\otimes_B\mathfrak{D}}) \circ \Delta \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D}(c \otimes_A m \otimes_B d_{(1)} \otimes_B d_{(2)}) \\
&= (\xi_M \otimes_R \mathfrak{C}) \circ \xi_{\mathfrak{C}\otimes_A M\otimes_B\mathfrak{D}}(c_{(1)} \otimes_A c_{(2)} \otimes_A m \otimes_B d_{(1)} \otimes_B d_{(2)}) \\
&= \xi_M \otimes_R \mathfrak{C}(c_{(2)} \otimes_A m \otimes_B d_{(1)} \otimes_R \big((c_{(1)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(2)}\big)) \\
&= m \otimes_R \big((c_{(2)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(1)}\big) \otimes_R \big((c_{(1)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(2)}\big) \\
&= m \otimes_R (c^o_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} d_{(1)}) \otimes_R (c^o_{(2)} \otimes_{\mathbb{K}} d_{(2)}) \\
&= m \otimes_R \Delta_{\mathfrak{C}}(c^o \otimes_{\mathbb{K}} d) \\
&= (M \otimes_R \Delta_{\mathfrak{C}}) \circ \xi_M(c \otimes_A m \otimes_B d),
\end{aligned}$$

entonces (7) es conmutativo. Por lo tanto el diagrama entero lo es, lo que implica que $(M_R, \rho'_M) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Sea $f : M \to N$ en la categoría ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ y consideramos (M_R, ρ'_M) y (N_R, ρ'_N) como objetos de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ con la coacción de la ecuación (1.19). El morfismo f es

R–lineal y por definición se tiene

$$
\begin{aligned}
\rho'_N \circ f &= \xi_N \circ (\lambda_N \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_N \circ f \\
&= \xi_N \circ (\lambda_N \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (f \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M, \;\; f \text{ es } \mathfrak{D} - \text{colineal} \\
&= \xi_N \circ ((\mathfrak{C} \otimes_A f \circ \lambda_M) \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M, \;\; f \text{ es } \mathfrak{C} - \text{colineal} \\
&= \xi_N \circ (\mathfrak{C} \otimes_A f \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M \\
&= (f \otimes_R \mathfrak{C}) \circ \xi_M \circ (\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M, \;\; \xi_- \text{ es natural} \\
&= (f \otimes_R \mathfrak{C}) \circ \rho'_M
\end{aligned}
$$

es decir que f es $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha. Esto nos da el primer funtor del citado isomorfismo. Consideramos esta vez cualquier comódulo $(M, \rho'_M) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ junto con su estructura canónica de (A, B)–bimódulo. Se puede considerar los siguientes morfismos de (A, B)–bimódulos

$$
\lambda_M : M \xrightarrow{\rho'_M} M \otimes_R \mathfrak{C} \xrightarrow{\xi_M^{-1}} \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \xrightarrow{\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon_{\mathfrak{D}}} \mathfrak{C} \otimes_A M \tag{1.20}
$$

$$
\rho_M : M \xrightarrow{\rho'_M} M \otimes_R \mathfrak{C} \xrightarrow{\xi_M^{-1}} \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{C}} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}} M \otimes_B \mathfrak{D}.
$$

Vamos a comprobar que $({}_A M, \lambda_M) \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Antes de nada, notemos que $X \otimes_R \mathfrak{C}$ es implícitamente considerado como (A, B)–bimódulo, para cualquier R–módulo por la derecha (o un (A, B)–bimódulo), usando la estructura de R–módulo por la derecha de $\mathfrak{C}$. Por definición, se tiene el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho'_M"] \arrow[d, "\rho'_M"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & M \otimes_R \mathfrak{C} \arrow[r, "\xi_M^{-1}"] \arrow[d, "M \otimes_R \Delta"] \arrow[drr, phantom, "(4)"] & \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon"] & \mathfrak{C} \otimes_A M \arrow[ddd, "\Delta \otimes_A M"] \\
M \otimes_R \mathfrak{C} \arrow[r, "\rho'_M \otimes_R \mathfrak{C}"] \arrow[d, "\xi_M^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & M \otimes_R \mathfrak{C}^2 \arrow[d, "\xi^{-1}_{M \otimes_R \mathfrak{C}}"] & & \\
\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M \otimes_B \mathfrak{D}"] \arrow[d, "\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{C}) \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[d, "\mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{C}) \otimes_B \varepsilon"] & & \\
\mathfrak{C} \otimes_A M \arrow[r, "\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M"] & \mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{C}) \arrow[r, "\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}"] & \mathfrak{C}^2 \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, "\mathfrak{C}^2 \otimes_A M \otimes_B \varepsilon"] & \mathfrak{C}^2 \otimes_A M
\end{tikzcd}
$$

los rectángulos (1), (2) y (3) son claramente conmutativos, la conmutatividad de (4), se deduce después de comparar la siguiente ecuación

$$
\begin{aligned}
& (\Delta \otimes_A M) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon) \circ \xi_M^{-1}(m \otimes_R (c^o \otimes_{\mathbb{K}} d)) \\
&= (\Delta \otimes_A M) \circ \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon(c \otimes_A m \otimes_B d) \\
&= c_{(1)} \otimes_A c_{(2)} \otimes_A m\varepsilon(d)
\end{aligned}
$$

con esta otra

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{E}) \otimes_B \varepsilon) \circ (\xi_{M \otimes_R \mathfrak{E}}) \circ M \otimes_R \Delta(m \otimes_R (c^o \otimes_{\mathbb{K}} d)) \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{E}) \otimes_B \varepsilon) \\
&\quad \circ (\xi_{M \otimes_R \mathfrak{E}})(m \otimes_R ((c_{(2)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(1)}) \otimes_R ((c_{(1)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(2)})) \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{E}) \otimes_B \varepsilon)(c_{(1)} \otimes_A (m \otimes_R ((c_{(2)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(1)})) \otimes_B d_{(2)}) \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon) \circ \mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}(c_{(1)} \otimes_A (m \otimes_R ((c_{(2)})^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{(1)}))\varepsilon(d_{(2)})) \\
&= \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon(c_{(1)} \otimes_A c_{(2)} \otimes_A m \otimes_B d_{(1)}\varepsilon(d_{(2)})) \\
&= c_{(1)} \otimes_A c_{(2)} \otimes_A m\varepsilon(d)
\end{aligned}
$$

lo que implica la conmutatividad de todo el diagrama y por consecuencia $({}_AM, \lambda_M) \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Escogiendo esta vez el objeto (M_B, ρ_M) con ρ_M definida como en la ecuación (1.20), podemos comprobar de la misma manera que (M_B, ρ_M) es un $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha. Ahora es fácil de comprobar que cada morfismo R–colineal por la derecha $f : (M_R, \rho'_M) \to (N_R, \rho'_N)$, induce un morfismo $\mathfrak{C}$–colineal por la izquierda $f : ({}_AM, \lambda_M) \to ({}_AN, \lambda_N)$ y un morfismo $\mathfrak{D}$–colineal por la derecha $f : (M_B, \rho_M) \to (N_B, \rho_N)$. Falta comprobar la compatibilidad entre estas dos estructuras, es decir la igualdad $(\mathfrak{C} \otimes_A \rho_M) \circ \lambda_M = (\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M$, para cada $(M_R, \rho'_M) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{E}}$. Para ello

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{C} \otimes_A \rho_M) \circ \lambda_M &= (\mathfrak{C} \otimes_A \varepsilon \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon) \circ \xi_M^{-1} \circ \rho'_M \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A \varepsilon \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{E}) \otimes_B \varepsilon) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \xi_M^{-1} \circ \rho'_M \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A \varepsilon \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \varepsilon) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1} \otimes_B \mathfrak{D}) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \xi_M^{-1} \circ \rho'_M \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A \varepsilon \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \varepsilon) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1} \otimes_B \mathfrak{D}) \\
&\quad \circ (\xi_{M \otimes_R \mathfrak{E}}^{-1}) \circ (\rho'_M \otimes_R \mathfrak{E}) \circ \rho'_M
\end{aligned}
$$

de otra parte es fácil de comprobar que

$$
(\Delta \otimes_A M \otimes_B \Delta) \circ \xi_M^{-1} \circ \rho'_M = (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1} \otimes_B \xi_{M \otimes_R \mathfrak{E}}^{-1}) \circ (\rho'_M \otimes_R \mathfrak{E}) \circ \rho'_M. \tag{1.21}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{C} \otimes_A \rho_M) \circ \lambda_M &= (\mathfrak{C} \otimes_A \varepsilon \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \varepsilon) \\
&\quad \circ (\Delta \otimes_A M \otimes_B \Delta \circ \xi_M^{-1}) \circ \rho'_M \\
&= \xi_M^{-1} \circ \rho'_M
\end{aligned}
$$

Ahora la parte derecha de la igualdad deseada

$$
\begin{aligned}
(\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M &= (\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\xi_M^{-1} \otimes_B \mathfrak{D}) \\
&\quad \circ (\rho'_M \otimes_B \mathfrak{D}\varepsilon \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \xi'_M \circ \rho'_M \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\xi_M^{-1} \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\varepsilon \otimes_A (M \otimes_R \mathfrak{E}) \otimes_B \mathfrak{D}) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \xi_M^{-1} \circ \rho'_M \\
&= \mathfrak{C}(\otimes_A M \otimes_B \varepsilon \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\varepsilon \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1} \otimes_B \mathfrak{D}) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \rho'_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \xi_M^{-1} \circ \rho_M^{-1} \\
&= (\mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \varepsilon \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\varepsilon \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \mathfrak{D}) \\
&\quad \circ (\mathfrak{C} \otimes_A \xi_M^{-1} \otimes_B \mathfrak{D}) \circ (\xi_{M \otimes_R \mathfrak{E}}^{-1}) \circ \rho'_M
\end{aligned}
$$

utilizando la ecuación (1.21) y la propiedad counitaria de las dos deltas, se tiene

$$(\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M = \xi_M^{-1} \circ \rho'_M$$

lo que termina la demostración $\square$

Corolario 1.3.2. *Sea A un $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Entonces la categoría de $\mathfrak{C}$–bicomódulos es isomorfa a la categoría de los $\mathfrak{C}^{env}$–comódulos por la derecha, donde $\mathfrak{C}^{env} = \mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C}$ es el $(A^{env} = A^o \otimes_{\mathbb{K}} A)$–coanillo envolvente de $\mathfrak{C}$.*

Observación 1.3.3. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras y $\mathfrak{D}$ un B–coanillo. Consideramos M un $(A, \mathfrak{D})$–bicomódulo, es decir un $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha (M, ρ_M) con la coacción ρ_M, A–lineal por la izquierda. Es fácil de averiguar que el morfismo canónico de anillos $\lambda : A \to \mathrm{End}(M_B)$ tiene su imagen en $\mathrm{End}(M_{\mathfrak{D}})$. Sea ahora $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y supongamos que $M \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, se tiene pues dos diagramas conmutativos el primero en ${}_A\mathcal{M}_A$ y el segundo en ${}_B\mathcal{M}_B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, dotted, "\overline{\lambda}"] & \mathrm{End}(M_B) \\ \mathfrak{C} \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, dotted, "\boldsymbol{\lambda}"] & \mathrm{End}(M_{\mathfrak{D}}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, dotted, "\overline{\rho}"] & \mathrm{End}({}_AM) \\ \mathfrak{D} \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, dotted, "\boldsymbol{\rho}"] & \mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}M), \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\rho}$ completan la conmutatividad del diagrama correspondiente. Se puede observar, usando la Observación 1.1.24(b), que si uno de los coanillos considerados tiene un elemento grouplike, el diagrama correspondiente se convierte en diagrama de morfismos de anillos unitarios. Por supuesto, que en este mismo caso, cualquier $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo se convierte en un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bimódulo.

En lo que queda de esta sección vamos a dedicarlo al estudio de módulos racionales y bimódulos biracionales. Nuestro análisis utiliza las mismas técnicas y sigue la misma trayectoria de [51], donde se estudian los módulos racionales respecto de una $\mathbb{K}$–álgebra.

Fijamos A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y sean P, Q dos A–bimódulos, no necesariamente unitarios por el momento. Supongamos que existe una forma A–bilineal y A–equilibrada

$$\langle -, - \rangle : P \times Q \longrightarrow A.$$

Los datos $\mathcal{T} = (P, Q, \langle -, - \rangle)$ inducen dos transformaciones naturales, α_- y β_-:

$$\begin{aligned} \beta_N : Q \otimes_A N &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AP, {}_AN) \\ q \otimes_A n &\longmapsto [p \mapsto \langle p, q \rangle n] \\ \alpha_M : M \otimes_A P &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q_A, M_A) \\ m \otimes_A p &\longmapsto [q \mapsto m\langle p, q \rangle]\,. \end{aligned}$$

Además si M es un (A', A)–bimódulo (A' otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales), entonces α_M es un morfismo A'–lineal por la izquierda; y si $\langle -, - \rangle$ es equilibrada, entonces α_M es

$A' - A$–bilineal. Argumentos simétricos tiene lugar para β_N, si N es un (A, A')–bimódulo. Los isomorfismos canónicos nos dan dos aplicaciones A–bilineales:

$$\begin{aligned} \beta : Q &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AP, {}_AA) = {}^*P \\ q &\longmapsto [p \mapsto \langle p, q\rangle] \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} \alpha : P &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q_A, A_A) = Q^* \\ p &\longmapsto [q \mapsto \langle p, q\rangle]\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Se puede pues recuperar de nuevo la forma bilineal dada una de esas transformaciones naturales.

Lema 1.3.4. *Sea $(P, Q, \langle -, -\rangle)$ como antes, M_A, ${}_AN$ dos módulos.*

1. Los siguientes son equivalentes

   (a) β_N es inyectiva;

   (b) Si $\sum q_i \otimes_A n_i \in Q \otimes_A N$, entonces $\sum q_i \otimes_A n_i = 0$ si y sólo si para todo $p \in P$, $\sum \langle p, q_i\rangle n_i = 0$.

2. Los siguientes son equivalentes

   (a) α_M es inyectiva;

   (b) Si $\sum m_i \otimes_A p_i \in M \otimes_A P$, entonces $\sum m_i \otimes_A p_i = 0$ si y sólo si para todo $q \in Q$, $\sum m_i \langle p_i, q\rangle = 0$.

Demostración. Inmediata. □

Definición 1.3.5. El data $(P, Q, \langle -, -\rangle)$ es llamado un *sistema racional por la derecha* si P es un A–bimódulo unitario y si α_M es inyectiva para todo A–módulo por la derecha M. Se dice que es un *sistema racional por la izquierda* si Q es un A–bimódulo unitario y si β_N es inyectiva para todo A–módulo por la izquierda N.

Observación 1.3.6. ([4, Remark 2.3]). Sea $(P, Q, \langle -, -\rangle)$ un sistema racional por la derecha. Consideramos $M \in \mathcal{M}_A$ y M' un submódulo de M con la inyección canónica ι. Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M' \otimes_A P \arrow[r, hook, "\alpha_{M'}"] \arrow[d, "\iota \otimes_A P"'] & \mathrm{Hom}_A(Q, M') \arrow[d, hook, "i"] \\ M \otimes_A P \arrow[r, hook, "\alpha_M"] & \mathrm{Hom}_A(Q, M). \end{tikzcd}$$

Lo que implica que $\iota \otimes_A P$ es inyectiva. Como M ha sido escogido arbitrariamente en $\mathcal{M}_A$, se deduce que ${}_AP$ es un A–módulo plano. Ahora si $(P, Q, \langle -, -\rangle)$ es un sistema racional por la izquierda. Se tiene de la misma manera, que Q_A es un A–módulo plano.

Ejemplo 1.3.7. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y L un A–bimódulo unitario junto con su dual por la izquierda ${}^*L = \mathrm{Hom}_A(L, A)$. La forma bilineal canónica

$$\begin{array}{rcl} L \times {}^*L & \longrightarrow & A \\ (l, x) & \longmapsto & \langle l, x \rangle = x(l) \end{array}$$

induce la siguiente transformación natural $\alpha_M : M \otimes_A L \to \mathrm{Hom}_A({}^*L, M)$, vía $m \otimes_A l \mapsto [x \mapsto m\langle l, x\rangle]$. Supongamos que para cada $l \in L$, existe un conjunto finito de parámetros $\{l_i, x_i\} \in L \times {}^*L$, tales que $l = \sum \langle l, x_i \rangle l_i$; dicha propiedad puede expresase de la siguiente manera: para cualquier $l \in L$, se tiene $l \in {}^*L(l)L$. Sea M un A–módulo unitario por la derecha, si $\alpha_M(\sum_k m_k \otimes_A l_k) = 0$, entonces $\sum_k m_k \langle l_k, x\rangle = 0$ para todo $x \in {}^*L$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_k m_k \otimes_A l_k &= \sum_k \sum_i m_k \otimes_A \langle l_k, x \rangle l_i \\ &= \sum_{k,i} m_k \langle l_k, x \rangle \otimes_A l_i \\ &= \sum_i \left(\sum_k m_k \langle l_k, x \rangle \right) \otimes_A l_i = 0, \end{aligned}$$

Entonces α_M es inyectiva para todo A–módulo unitario por la derecha M, es decir que $(L, {}^*L, \langle -, - \rangle)$ es un sistema racional por la derecha. Por lo tanto ${}_AL$ debe se ser un módulo plano, según la Observación 1.3.6. En el caso unitario (i.e. A es una $\mathbb{K}$–álgebra con 1), el módulo ${}_AL$ que satisface dicha condición, se le llama un módulo *localmente proyectivo*, véase [56], [104], [3], [102]. No hay que confundir los módulos localmente proyectivos sobre un anillo unitario, con los módulos unitarios "localmente proyectivos"sobre anillos con unidades locales, definidos por G. Abrams en [1].

Lema 1.3.8. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Consideramos los data $(P, Q, \langle -, - \rangle)$, $(P', Q', [-, -])$, donde P, Q, P', Q' son A–bimódulos y*

$$\langle -, - \rangle : P \times Q \to A \;\; y \; [-, -] : P' \times Q' \to A$$

son formas A–bilineales; juntos con las transformaciones naturales asociadas, α_-, α'_- y β_-, β'_-. Supongamos que existe un morfismo $(f, g) : (Q', P) \to (Q, P')$ en la categoría ${}_A\mathfrak{M}_A \times {}_A\mathfrak{M}_A$, que satisface

$$\langle p, f(q') \rangle = [g(p), q'], \;\; para\ todo\ p \in Pyq' \in Q'.$$

Entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A P' \arrow[r, "\alpha'_M"] & \mathrm{Hom}_A(Q', M) \\ M \otimes_A P \arrow[u, "M\otimes_A g"] \arrow[r, "\alpha_M"] & \mathrm{Hom}_A(Q, M) \arrow[u, "h(f,M)"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cualquier A–módulo por la derecha M.

Demostración. Inmediata. □

La siguiente es una propiedad muy útil de un sistema racional por la derecha.

Proposición 1.3.9. *Sea $(P, Q, \langle -, - \rangle)$ un sistema racional por la derecha y $M \in \mathcal{M}_A$, M' un A-submódulo de M y $\sum_i m_i \otimes_A p_i \in M \otimes_A P$. Entonces*

$$\sum_i m_i \otimes_A p_i \in M' \otimes_A P \Leftrightarrow \sum_i m_i \langle p_i, q \rangle \in M', \quad \textit{para todo } q \in Q.$$

Demostración. Es consecuencia del Lema 1.3.4 y de la Observación 1.3.6. □

En el capítulo de apéndices, sección **A**.1, se analizan los A–anillos como $\mathbb{K}$–bimódulos centrales, A–bimódulos y cuyos producto es A–bilineal y A–equilibrado. En la siguiente definición, vamos a restringirnos al caso donde $\mathcal{B}$ es un A–anillo por extensión, es decir existe $\varphi : A \to \mathcal{B}$ un morfismo $\mathbb{K}$–lineal que respeta el producto y donde la estructura de A–bimódulo de $\mathcal{B}$ viene dada por este φ; además exigimos que la multiplicación de $\mathcal{B}$ debe de tener unidades locales, sin que haya compatibilidad con las de A vía φ (i.e. φ no es necesariamente un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales); por lo tanto $\mathcal{B}$ no es necesariamente un A–bimódulo unitario. Ejemplo de este tipo de A–anillos son los anillos de endomorfismos $\mathrm{End}({}_A A)$ y $\mathrm{End}(A_A)$ con las extensiones canónicas $A \to \mathrm{End}({}_A A)$ y $A \to \mathrm{End}(A_A)$.

Definición 1.3.10. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Un *par racional por la derecha* sobre A es un sistema racional $(\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -, - \rangle)$, donde

rPRac.1) $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo;

rPRac.2) $\mathcal{B}$ es un A–anillo extensión de A y que posee unidades locales;

rPRac.3) $\beta : \mathcal{B} \to {}^*\mathfrak{C}$ es un anti-morfismo de A–anillos extensiones de A, es decir

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & {}^*\mathfrak{C} \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo;

rPRac.4) ${}^*\mathfrak{C}$ es, por restricción de β, un $\mathcal{B}$–módulo unitario por la izquierda i.e $\mathcal{B}{}^*\mathfrak{C} = {}^*\mathfrak{C}$.

En este caso, si $\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes_A d_{(2)}$, entonces

$$\langle c, bb' \rangle = \sum_{(c)} \langle c_{(1)} \langle c_{(2)}, b \rangle, b' \rangle, \text{ para todo } b,\, b' \in \mathcal{B}. \tag{1.24}$$

Análogamente, un *par racional por la izquierda* sobre A es un sistema racional por la izquierda $(\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-, -])$, donde

lPRac.1) $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo;

lPRac.2) $\mathcal{B}'$ es un A–anillo extensión de A y que posee unidades locales;

lPRac.3) $\alpha : \mathcal{B}' \to \mathfrak{C}^*$ es un anti-morfismo de A–anillos extensiones de A, es decir

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}' \arrow[r, "\alpha"] & \mathfrak{C}^* \\ A \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo;

lPRac.4) $\mathfrak{C}^*$ es, por restricción de α, un $\mathcal{B}'$–módulo unitario por la derecha $\mathfrak{C}^*\mathcal{B}' = \mathfrak{C}^*$.

En este caso

$$[bb', c] = \sum_{(c)} [b, [b', c_{(1)}]c_{(2)}], \text{ para todo } b,\, b' \in \mathcal{B}'.$$

Ejemplo 1.3.11. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, tal que $(\mathfrak{C}, {}^*\mathfrak{C}, \langle -, - \rangle)$ es un sistema racional, por ejemplo que sea ${}_A\mathfrak{C}$ un módulo de la clase que se indica en la Observación 1.3.7. Entonces $(\mathfrak{C}, ({}^*\mathfrak{C})^o, \langle -, - \rangle)$ es un par racional por la derecha. Es fácil de comprobar, utilizando la Proposición 1.2.15 y escogiendo el producto en $\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})$ el opuesto de la composición, que $(\mathfrak{C}, \mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}), \langle -, - \rangle)$ es también un par racional por la derecha. Si ahora $\mathfrak{C}_A$ satisface la versión por la izquierda de la Observación 1.3.7, entonces $(\mathfrak{C}^{*o}, \mathfrak{C}, [-, -])$ (o equivalentemente $(\mathrm{End}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}), \mathfrak{C}, [-, -])$) será par racional por la izquierda.

Ahora en adelante fijamos $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -, - \rangle)$ un par racional por la derecha sobre A. Para la definición de la categoría de $\mathcal{B}$–módulos unitarios por la derecha $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, enviamos el lector al capítulo de apéndices sección **A**.1. Sea M un $\mathcal{B}$–módulo unitario por la derecha, un elemento $m \in M$ es llamado *elemento racional*, si existe un conjunto finito de *parámetros racionales por la derecha* $\{(c_i, m_i)\} \subseteq \mathfrak{C} \times M$, tal que $mb = \sum_i m_i \langle c_i, b \rangle$, para todo $b \in \mathcal{B}$. está claro que el conjunto de todos los elementos racional de M es, por ahora, un $\mathbb{K}$-submódulo, le denotaremos por $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$. Sea $a \in A$ y $m \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$, entonces

$$(ma)b = m(ab) = \sum_i m_i \langle c_i, ab \rangle = \sum_i m_i \langle c_i a, b \rangle, \tag{1.25}$$

donde hemos utilizado el efecto de que la forma A–bilineal $\langle -, - \rangle$ es equilibrada, recuerde que β es un morfismo de A–anillos. Entonces $\{(c_i a, m_i)\}$ son parámetros racionales por la derecha para ma. Por lo tanto $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$ pasa de ser un A-submódulo de M. está claro que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) \subseteq MA$, luego $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$ es un A–módulo unitario por la derecha. Por el momento $\mathfrak{C}$ es un $\mathcal{B}$–módulo unitario por la derecha, por restricción de β. En efecto

$$\mathfrak{C}\mathcal{B} = \beta(\mathcal{B})\mathfrak{C} = \beta(\mathcal{B})({}^*\mathfrak{C}\mathfrak{C}) = (\beta(\mathcal{B}){}^*\mathfrak{C})\mathfrak{C} = {}^*\mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{C},$$

donde hemos utilizado la condición **rPRac**.4). Además es fácil de averiguar que $\{c_{(1)}, c_{(2)}\}$, donde $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes_A c_{(2)}$, forman un conjunto de parámetros por la derecha para c.

Proposición 1.3.12. *Sea $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -, - \rangle)$ un par racional por la derecha y M un $\mathcal{B}$–módulo unitario por la derecha tal que el A–módulo subyacente M_A, sea un módulo unitario también. Entonces*

(1) $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$ *es $\mathcal{B}$-submódulo de $M_{\mathcal{B}}$.*

(2) $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(N) = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) \cap N$ *para todo $\mathcal{B}$-submódulo $N \leq M$.*

(3) $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)) = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$.

(4) $f(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)) \subseteq \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(N)$ *para cualquier morfismo de $\mathcal{B}$–módulos por la derecha $f : M \to N$.*

Demostración. (1) Si $m \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$ con parámetros racionales $\{(c_i, m_i)\}$ y $b \in \mathcal{B}$, entonces la ecuación (1.24) implica que $\{(\sum_{(c_i)} c_{i(1)}\langle c_{i(2)}, b\rangle, m_i)\}$ es un conjunto de parámetros racionales de mb. En particular $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$ es un $\mathcal{B}$-submódulo unitario por la derecha de M.
(2) Está claro que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(N) \subseteq \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) \cap N$. Sea $n \in N \cap \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$, existe $\sum_i m_i \otimes_A c_i \in M \otimes_A \mathfrak{C}$ tal que $\sum_i m_i \langle c_i, b\rangle = nb$ para todo $b \in \mathcal{B}$, la Proposición 1.3.9 implica pues que $\sum_i m_i \otimes_A c_i \in N \otimes_A \mathfrak{C}$; luego $n \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(N)$.
(3) Es una consecuencia de (1) y de (2).
(4) Es fácil de ver que $\{(c_i, f(m_i))\}$ son parámetros racionales por la derecha de $f(m)$ cuando $\{(c_i, m_i)\}$ son parámetros racionales de m. □

Está claro que la Proposición 1.3.12 nos indica que el funtor que asigna $M \mapsto \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M)$ definido sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ es un preradical exacto por la izquierda. Llamaremos a este funtor *el funtor racional* por la derecha y le denotamos por

$$\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(-) : \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}.$$

Definición 1.3.13. Se dice que un $\mathcal{B}$–módulo unitario por la derecha M, es *racional*, si $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) = M$. La sub-categoría plena de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ cuyos objetos son todos los $\mathcal{B}$–módulos racionales será denotada por $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$.

Recuerde de [46, p. 395] que un sub-categoría plena $\mathcal{B}$ de una categoría de Grothendieck $\mathcal{G}$ es *cerrada* si lo es bajo los sub-objetos, objetos cocientes y sumas directas. En particular cualquier sub-categoría cerrada de $\mathcal{G}$ es de Grothendieck. La sub-categoría $\mathcal{B}$ es llamada una *sub-categoría coreflexiva* de $\mathcal{G}$ si el funtor de inclusión $\mathcal{B} \to \mathcal{G}$ tiene un adjunto por la derecha [92, p. 213].

Teorema 1.3.14. *Sea $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -, - \rangle)$ un par racional por la derecha. Entonces la categoría* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ *es una sub-categoría de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ cerrada (en particular de Grothendieck) y coreflexiva.*

Demostración. Hemos observado de la Proposición 1.3.12 que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(-)$ es un preradical exacto por la izquierda sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Esto implica que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ es un sub-categoría cerrada de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. Además es fácil de averiguar que el funtor $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(-)$ es un adjunto por la derecha del funtor inclusión $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$. □

Si $\mathcal{T}' = (\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-,-])$ es un par racional por la izquierda, los parámetros racionales de un elemento m de un $\mathcal{B}'$–módulo unitario por la izquierda M es un conjunto $\{(m_i, c_i)\} \subseteq M \times \mathfrak{C}$ tal que $b'm = \sum_i [b', c_i] m_i$ para todo $b' \in \mathcal{B}'$. El funtor racional es análogamente definido. tenemos pues

Teorema (1.3.14'). *Sea $\mathcal{T}' = (\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-,-])$ un par racional por la izquierda. Entonces la categoría $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}'}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M})$ es una sub-categoría de ${}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M}$ cerrada (en particular de Grothendieck) y coreflexiva.*

Observación 1.3.15. Sea $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -,- \rangle)$ un par racional por la derecha y $\alpha : \mathfrak{C} \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, A) = \mathcal{B}^*$. Se pueden observar las siguientes propiedades.

(a) $\mathcal{B}$ es un A–anillo extensión de A vía $\varphi : A \to \mathcal{B}$ (recuerde que aquí la estructura de A–bimódulo de $\mathcal{B}$ es por restricción y no es necesariamente unitario). Entonces $\alpha(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}((\mathcal{B}^*\mathcal{B})_{\mathcal{B}})$ y $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{B}_{\mathcal{B}})$ es un $\mathcal{B}$-sub-bimódulo de $\mathcal{B}$. En efecto, sea $c \in \mathfrak{C}$ y $e \in \mathbf{Idemp}(\mathcal{B})$, tal que $ce = c$. Entonces, para cualquier $b \in \mathcal{B}$, se tiene

$$\begin{aligned} (\alpha(c)e)(b) &= \alpha(c)(eb) \\ &= \langle c, eb \rangle \\ &= \sum_{(c)} \langle c_{(1)} \langle c_{(2)}, e \rangle, b \rangle \\ &= \langle ce, b \rangle \\ &= \alpha(c)(b) \end{aligned}$$

luego $\alpha(c)e = \alpha(c)$, es decir que $\alpha(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{B}^*\mathcal{B}$. De otra parte, para cualquier $b, b' \in \mathcal{B}$ y $c \in \mathfrak{C}$, tenemos $(\alpha(c)b)(b') = \alpha(c)(bb') = \langle c, bb' \rangle = \alpha(\sum c_{(1)} \langle c_{(2)}, b \rangle)(b')$, luego $\alpha(c)b = \sum \alpha(c_{(1)}) \langle c_{(2)}, b \rangle$, por que α es A–lineal. Por lo tanto $\alpha(c)$ es racional por la derecha con parámetros $\{\alpha(c_{(1)}), c_{(2)}\}$, lo que implica la primera aserción. La segunda es una averiguación inmediata.

(b) Si A es una $\mathbb{K}$–álgebra y B es un A–anillo unitario, vía la extensión de anillos unitarios $\varphi : A \to \mathcal{B}$. Entonces $\alpha(\mathfrak{C}) = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{B}^*_{\mathcal{B}})$ y $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{B}_{\mathcal{B}})$ es un ideal bilátero de $\mathcal{B}$. Basta comprobar la inclusión $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{B}^*_{\mathcal{B}}) \subseteq \alpha(\mathfrak{C})$ ya que el resto es fácil de averiguar. Sea pues $f \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{B}^*_{\mathcal{B}})$ con parámetros $\{f_i, c_i\}$, entonces, para cualquier $b \in \mathcal{B}$, tenemos

$$f(1) = f(b1) = (fb)(1) = \sum_i (f_i \langle c_i, b \rangle)(1) = \sum_i f_i(1) \langle c_i, b \rangle = \sum_i \langle f_i(1) c_i, b \rangle,$$

esto implica que $f = \alpha(\sum_i f_i(1) c_i) \in \alpha(\mathfrak{C})$, luego $\alpha(\mathfrak{C}) = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{B}^*_{\mathcal{B}})$, según el item (a).

Proposición 1.3.16. *Sea $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -,- \rangle)$ un par racional por la derecha sobre A y M un $\mathcal{B}$–módulo racional por la derecha. Define*

$$\begin{aligned} \rho_M : M &\longrightarrow M \otimes_A \mathfrak{C} \\ m &\longmapsto \sum_i m_i \otimes_A c_i \end{aligned} \tag{1.26}$$

donde $\{(c_i, m_i)\}$ es un conjunto de parámetros racionales por la derecha de $m \in M$. La aplicación ρ_M define una $\mathfrak{C}$–coacción coasociativa sobre M. En particular M tiene una estructura de ${}^*\mathfrak{C}$–módulo por la izquierda. Además cualquier morfismo en la categoría $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ *es ${}^*\mathfrak{C}$–lineal por la izquierda.*

Demostración. La aplicación ρ_M está bien definida gracias a la inyectividad de α_M, y es A–lineal por la derecha, porque los parámetros racionales de ma, $m \in M$, $a \in A$, son $\{m_i a, c_i\}$, donde $\{m_i, c_i\}$ es el conjunto de parámetros de m. Vamos a comprobar ahora que ρ_M es coasociativa, para ello, consideramos la siguiente forma A–bilineal

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \times \mathcal{B} \otimes_A \mathcal{B} & \longrightarrow & A \\ (c \otimes_A c', b' \otimes_A b) & \longmapsto & \{c \otimes_A c', b' \otimes_A b\} = \langle c, \langle c', b' \rangle b \rangle = \langle c \langle c', b' \rangle, b \rangle \end{array}$$

La ecuación (1.24) se traduce ahora por

$$\{\Delta_{\mathfrak{C}}(c), b' \otimes_A b\} = \langle c, \mu_{\mathcal{B}}(b' \otimes_A b) \rangle$$

lo que implica que el morfismo $(\mu_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathfrak{C}}) : (\mathcal{B} \otimes_A \mathcal{B}, \mathfrak{C}) \to (\mathcal{B}, \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C})$, satisface las condiciones del Lema 1.3.8. Por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_A(\mu_{\mathcal{B}}, M) \circ \alpha_M = (M \otimes_A \Delta_{\mathfrak{C}}) \circ \alpha'_M, \tag{1.27}$$

donde $\alpha'_{\_}$ es la transformación natural asociada a la forma bilineal $\{-,-\}$. Como M es un $\mathcal{B}$–módulo unitario por la derecha, vamos a utilizar la notación del capítulo de apéndices sección **A**.1, es decir considerando la $\mathcal{B}$–acción como la aplicación A–lineal $\varrho_M : M \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M)$, enviando $m \mapsto [b \mapsto mb]$. Se tiene pues el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, "\rho_M"] \arrow[dr, equal] \arrow[ddd, "\rho_M"'] & & & M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[dl, "\alpha_M"] \arrow[ddd, "M \otimes_A \Delta"] \\
& M \arrow[r, "\varrho_M"] \arrow[d, "\varrho_M"'] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \arrow[d, "h(\mu, M)"] & \\
& \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \arrow[r, "\cong \circ \varrho_M"] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B} \otimes_A \mathcal{B}, M) & \\
M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[ur, "\alpha_M"] \arrow[rrr, "\rho_M \otimes_A M"] & & & M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[ul, "\alpha'_M"']
\end{tikzcd} \tag{1.28}$$

El rectángulo del fondo y los trapecios de arriba y de la izquierda, son todos conmutativos por definición. Usando la ecuación (1.27), se tiene la conmutatividad del trapecio de la derecha y por ultimo:

$$\begin{array}{rcl} \alpha'_M \circ \rho_M \otimes_A \mathfrak{C}(m \otimes_A c)(b' \otimes_A b) & = & \sum_i m_i \{c_i \otimes_A c, b' \otimes_A b\} \\ & = & \sum_i m_i \langle c_i \langle c, b' \rangle, b \rangle \\ & = & m(\langle c, b' \rangle b) \end{array}$$

de otra parte

$$\begin{aligned}(\cong \circ\varrho_M) \circ \alpha_M(m \otimes_A c)(b' \otimes_A b) &= \varrho_M\left(\alpha_M(m \otimes_A c)\right)(b')(b)\\ &= \varrho_M(m\langle c, b'\rangle)(b) = (m\langle c, b'\rangle)b\end{aligned}$$

lo que nos da la conmutatividad del trapecio de abajo. Por lo tanto la coasociatividad de la "coacción" ρ_M. La estructura de ${}^*\mathfrak{C}$–módulo por la izquierda viene dada como en la Observación 1.2.17, ecuación (1.14) i.e.

$$\begin{aligned}\nu_M : M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}^*\mathfrak{C}, M)\\ m &\longmapsto [\delta \mapsto \textstyle\sum_i m_i\delta(c_i) = \delta m]\end{aligned} \tag{1.29}$$

y que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, dotted, "\rho_M"] \arrow[d, dotted, "\nu_M"'] \arrow[rd, "\varrho_M"] & M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, hook, "\alpha_M"] \\ \mathrm{Hom}_A({}^*\mathfrak{C}, M) \arrow[r, "h(\beta,M)"'] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \end{tikzcd}$$

Notemos que esta acción no es necesariamente unitaria. Es fácil de averiguar que cualquier morfismo de $\mathcal{B}$–módulos racionales por la derecha es ${}^*\mathfrak{C}$–lineal por la izquierda, por la acción (1.29). □

La Proposición 1.3.16, nos indica que hay un funtor fiel

$$\mathcal{F} : \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \to {}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{M}.$$

Denotemos pues por $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ la subcategoría plena de todos los $\mathcal{B}$–módulo racionales por la derecha con una estructura de ${}^*\mathfrak{C}$–módulo por la izquierda unitaria, es decir respecto de la unidad ε de ${}^*\mathfrak{C}$. Está claro ahora que cualquier objeto en la categoría $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ admite un estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, con la coacción de la Proposición 1.3.16. Además se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & {}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{M} \\ \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{\mathcal{F}}"] & {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.17. *Sean M, M' dos objetos en la categoría $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ y $f : M \to M'$ un morfismo A–lineal por la derecha. Entonces f es un morfismo de $\mathcal{B}$–módulos por la derecha si y sólo si f es $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha. En particular, si N es cualquier A-submódulo por la derecha de M; entonces N es un $\mathcal{B}$-submódulo por la derecha de M si y sólo si N es un $\mathfrak{C}$-sub-comódulo por la derecha de M.*

Demostración. Vamos a usar la notación de la demostración de la Proposición 1.3.16. En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\varrho_M"] \arrow[dd, "\rho_M"'] & & & M' \arrow[dl, "\varrho_{M'}"'] \arrow[dd, "\rho_{M'}"] \\
& \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \arrow[r, "h(\mathcal{B}, f)"] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M') & \\
M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[ur, "\alpha_M"] \arrow[rrr, "f \otimes_A \mathfrak{C}"] & & & M' \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[ul, "\alpha_{M'}"']
\end{tikzcd}$$

está claro que el rectángulo es conmutativo si y sólo si el trapecio de arriba lo es; lo que implica la primera equivalencia deseada. El caso particular es ahora una consecuencia de esta última equivalencia. □

De la Proposición 1.3.17, se tiene pues el funtor

$$(-)^{\mathfrak{C}} : \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$$

y que completa el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \arrow[drr, "\omega^r"] & & \\
& \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \arrow[ul, dotted, "(-)^{\mathfrak{C}}"] \arrow[r, "\overline{\mathcal{F}}"'] \arrow[d, hook] & {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[d, hook] \\
& \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & {}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{M},
\end{tikzcd} \tag{1.30}$$

Proposición 1.3.18. *Si (M, ρ_M) es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. Entonces (M, ϱ_M) admite una estructura de $\mathcal{B}$–módulo racional por la derecha con la acción*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "\alpha_M"] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \\
M \arrow[u, "\rho_M"] \arrow[ur, dotted, "\varrho_M"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular $(M, \varrho_M) \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ y $(M)^{\mathfrak{C}} = (M, \rho_M)$.

Demostración. Antes de todo es importante observar, utilizando la Observación 1.2.17 ecuación (1.14), que la acción ϱ_M tal como es definida viene dada por la restricción del anti-morfismo de A–anillos $\beta : \mathcal{B} \to {}^*\mathfrak{C}$. La asociatividad de ϱ_M, viene de la coasociatividad de ρ_M, como en en la demostración de la Proposición 1.3.16 diagrama (1.28). La propiedad counitaria de ρ_M implica que (M, ϱ_M) es un objeto de $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$. La última aserción es inmediata. □

Utilizando las Proposiciones 1.3.17 y 1.3.18, se tiene el funtor

$$(-)_{\mathcal{B}} : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}).$$

que actúa como identidad sobre el A–módulos sub-yacente de cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha.

Teorema 1.3.19. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -, - \rangle)$ un par racional por la derecha sobre A. El funtor $(-)^{\mathfrak{C}} : \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ establece un isomorfismo de categorías. Además, $\mathfrak{C}_{\mathcal{B}}$ es un sub-generador de la categoría $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$, es decir $\sigma_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}}[\mathfrak{C}] = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ (véase [14] por esta notación).*

Demostración. De una parte la identificación $(-)^{\mathfrak{C}} \circ (-)_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}}$ viene dada por la Proposición 1.3.18. De otra parte la Proposición 1.3.17 y la definición de un $\mathcal{B}$–módulo racional por la derecha, implican la identidad $(-)_{\mathcal{B}} \circ (-)^{\mathfrak{C}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})}$. La última igualdad es fácil de averiguar. □

El Teorema 1.3.19 tiene su versión análoga por la izquierda. Si $\mathcal{T}' = (\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-, -])$ es un para racional por la izquierda, se puede entonces definir los funtores ${}^{\mathfrak{C}}(-) : \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}({}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}) \to {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ y ${}_{\mathcal{B}'}(-) : {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M})$, así se obtiene el siguiente teorema

Teorema (1.3.19'). *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathcal{T}' = (\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-, -])$ un par racional por la izquierda sobre A. El funtor ${}^{\mathfrak{C}}(-) : \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M}) \to {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ establece un isomorfismo de categorías. Además, ${}_{\mathcal{B}'}\mathfrak{C}$ es un sub-generador de la categoría $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M})$, es decir $\sigma_{{}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M}}[\mathfrak{C}] = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M})$.*

Uno de los resultados más útiles sobre comódulos proporcionado por el Teorema 1.3.19, esta citado en lo siguiente.

Proposición 1.3.20. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathcal{T} = (\mathcal{B}, \mathfrak{C}, \langle -, - \rangle)$ (resp. $\mathcal{T}' = (\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-, -])$) un par racional por la derecha (resp. por la izquierda) sobre A. Sea $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ (resp. $M \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$). Entonces M es finitamente generado como $\mathfrak{C}$–comódulo si y sólo si M es finitamente generado como A–módulo.*

Demostración. Está claro que si $M_{\mathfrak{C}}$ es finitamente como A–módulo, entonces lo es como comódulo. Recíprocamente, supongamos que $M_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo finitamente generado; según el Teorema 1.3.19, $M_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ es finitamente generado. Sin perder generalidad, podemos suponer que $M_{\mathcal{B}} = m(e\mathcal{B})$, para un cierto $m \in M$ con $\rho_M = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes_A m_{(1)}$ y un cierto $e \in \mathbf{Idemp}(\mathcal{B})$ tal que $me = m$. Para cualquier $b \in \mathcal{B}$, tenemos

$$mb = \sum_{(m)} m_{(0)} \langle m_{(1)}, b \rangle \in \sum_{(m)} m_{(0)} A$$

como $m = \sum_{(m)} m_{(0)} \varepsilon(m_{(1)})$, esto implica que $M = \sum_{(m)} m_{(0)} A$. □

En lo que sigue un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales A, se dice que es *noetheriano* por la derecha (resp. por la izquierda) si su categoría de A–módulos unitarios por la derecha (resp. por la izquierda $\mathcal{M}_A$ (${}_A\mathcal{M}$) es localmente noetheriana, véase [89].

La condición de cadenas sobre la categoría de módulos sobre el anillo de escalares de base A, induce condiciones locales de cadenas sobre la categoría de $\mathfrak{C}$–comódulos. Por la definiciones categóricas, enviamos a [89, p. 371].

Corolario 1.3.21. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathcal{T} = (\mathcal{B}, \mathfrak{C}, \langle -, - \rangle)$ un par racional por la derecha sobre A. Si el anillo de base A es noetheriano (resp. artiniano) por la derecha, entonces $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ es una categoría localmente noetheriana (resp. artiniana). Además, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y A es una $\mathbb{K}$–álgebra finito dimensional, entonces $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ es una categoría localmente finita.*

La versión análoga por la izquierda del corolario anterior es

Corolario (1.3.21'). *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathcal{T}' = (\mathcal{B}', \mathfrak{C}, [-, -])$ un para racional por la izquierda sobre A. Si el anillo de base A es noetheriano (resp. artiniano) por la izquierda, entonces $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}_{\mathrm{unit}}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M})$ es una categoría localmente noetheriana (resp. artiniana). Además, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y A es una $\mathbb{K}$–álgebra finito dimensional, entonces $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}({}_{\mathcal{B}'}\mathcal{M})$ es una categoría localmente finita.*

Observación 1.3.22. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Dado un par racional por la derecha $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{B}, \langle -, - \rangle)$. El Teorema 1.3.19, sirve de gran ayuda a la hora de estudiar la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Otra utilidad, que proporciona este teorema, es la siguiente. Sea $\mathcal{B}$ un A–anillo con unidades locales, definición de capítulo apéndices. Considere M un $\mathcal{B}$–módulo unitario. En general el A–sub-módulo sub-yacente de M no es necesariamente unitario. De allí uno intenta caracterizar los $\mathcal{B}$–módulos unitarios cuyos A–sub-módulos son también unitarios. Una respuesta parcial la proporciona el Teorema 1.3.19, que nos dice además que los objetos en cuestión forman entre ellos una categoría de Grothendieck.

Ahora vamos a pasar al estudio de bimódulos biracionales, es decir caracterizar, en caso de dos pares racionales uno por cada lado, los módulos del coanillo producto tensor lo que es equivalente, según la Proposición 1.3.1, a caracterizar los bicomódulos correspondientes a dichos pares.

Así, fijamos A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras. Sean $(P, Q, [-, -])$ un sistema racional por la izquierda sobre A y $(T, S, \langle -, - \rangle)$ un sistema racional por la derecha sobre B. Por definición se tiene las siguientes transformaciones naturales

$$\begin{array}{rlrl}
\beta_N : Q \otimes_A N \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(P, {}_A N) & \gamma_N : S \otimes_B N \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(T, {}_B N) \\
q \otimes_A n \longmapsto & [p \mapsto [p, q]n], & s \otimes_B n \longmapsto & [t \mapsto \langle t, s \rangle n], \\
\alpha_M : M \otimes_A P \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(Q, M_A) & \delta_M : M \otimes_B T \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(S, M_B) \\
m \otimes_A p \longmapsto & [q \mapsto m[p, q]], & m \otimes_B t \longmapsto & [s \mapsto m\langle t, s \rangle],
\end{array}$$

donde $\beta_{(-)}$ y $\delta_{(-)}$ son inyecciones naturales. Denotemos por $R := A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$ la $\mathbb{K}$–álgebra producto tensor y consideramos $Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T$ (también a $P^o \otimes_{\mathbb{K}} S$) como R–bimódulo con la siguiente R–biacción

$$(a^o \otimes_{\mathbb{K}} b)\,(q^o \otimes_{\mathbb{K}} t((a')^o \otimes_{\mathbb{K}} b')) = (a'qa)^o \otimes_{\mathbb{K}} btb' = ((a^o \otimes_{\mathbb{K}} b)q^o \otimes_{\mathbb{K}} t)\,((a')^o \otimes_{\mathbb{K}} b')$$

para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $q \in Q$ y $t \in T$.

Proposición 1.3.23. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras. Consideramos $(P, Q, [-,-])$ y $(T, S, \langle -,- \rangle)$, respectivamente, un sistema racional por la izquierda sobre A y un sistema racional por la derecha sobre B. Entonces $(Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T, P^o \otimes_{\mathbb{K}} S, \{-,-\})$ es un sistema racional por la derecha sobre la $\mathbb{K}$–álgebra producto tensor $R = A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$, donde $\{-,-\}$ es la siguiente forma R–bilineal*

$$\begin{aligned} \{-,-\} : (Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T) \times (P^o \otimes_{\mathbb{K}} S) &\longrightarrow R \\ (q^o \otimes_{\mathbb{K}} t, p^o \otimes_{\mathbb{K}} s) &\longmapsto [p,q]^o \otimes_{\mathbb{K}} \langle t, s \rangle. \end{aligned}$$

Demostración. Sea M un R–módulo por la derecha lo que equivale a un (A,B)–bimódulo. Existe pues una trasformación natural

$$\begin{tikzcd} Q \otimes_A M \otimes_B T \arrow[r, dashed, "\nabla_M"] \arrow[d, "\beta_M \otimes_B T"'] & \mathrm{Hom}_{A-B}(P \otimes_{\mathbb{K}} S, {}_AM_B) \\ \mathrm{Hom}_A(P, {}_AM_B) \otimes_B T \arrow[r, "\delta_{\mathrm{Hom}_A(P,M)}"] & \mathrm{Hom}_B(S_B, \mathrm{Hom}_A({}_AP, {}_AM_B)) \arrow[u, "d_1"'] \end{tikzcd}$$

donde d_1 es el isomorfismo natural de la adjunción canónica. Modulo los siguientes isomorfismos naturales (véase el capítulo de apéndices, sección **A**.3)

$$Q \otimes_A M \otimes_B T \cong M \otimes_R (Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T) \text{ y } \mathrm{Hom}_{A-B}(P \otimes_{\mathbb{K}} S, {}_AM_B) = \mathrm{Hom}_R(P^o \otimes_{\mathbb{K}} S, M_R)$$

la transformación $\nabla_{(-)}$ se traduce por la siguiente

$$\begin{aligned} \nabla_M : M \otimes_R (Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P^o \otimes_{\mathbb{K}} S, M_R) \\ m \otimes_R (q^o \otimes_{\mathbb{K}} t) &\longmapsto [(p^o \otimes_{\mathbb{K}} s) \mapsto m\,([p,q]^o \otimes_{\mathbb{K}} \langle t, s \rangle)] \end{aligned}$$

que es inyectiva por definición y por la Observación 1.3.6. De la misma manera se obtiene la otra transformación natural, que es

$$\begin{aligned} \Sigma_{{}_RN} : (P^o \otimes_{\mathbb{K}} S) \otimes_R N &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R((Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T), {}_RN) \\ (p^o \otimes_{\mathbb{K}} s) \otimes_R n &\longmapsto [(q^o \otimes_{\mathbb{K}} t) \mapsto ([p,q]^o \otimes_{\mathbb{K}} \langle t, s \rangle) n]\,. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.24. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras. Consideramos $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}, \mathfrak{C}, [-,-])$ y $\mathcal{T} = (\mathfrak{D}, \mathcal{B}, \langle -,- \rangle)$, respectivamente, un par racional por la izquierda sobre A y un par racional por la derecha sobre B. Entonces $\mathcal{T}' \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{T} := (\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}, \mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}, \{-,-\})$ es un par racional por la derecha sobre $R = A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$ con la siguiente forma R–bilineal*

$$\begin{aligned} \{-,-\} : \mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D} \times \mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B} &\longrightarrow A^o \otimes_{\mathbb{K}} B \\ (c^o \otimes_{\mathbb{K}} d, u^o \otimes_{\mathbb{K}} v) &\longmapsto [u,c]^o \otimes_{\mathbb{K}} \langle d, v \rangle \end{aligned}$$

Demostración. Según la Proposición 1.3.23 $(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}, \mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}, \{-,-\})$ es un sistema racional por la derecha. La Proposición 1.1.20 y la sección **A**.1 del capítulo de apéndices, implican, respectivamente, que $\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$ es un R–coanillo y $\mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$ es un R–anillo extensión de R y con unidades locales. Sean $\alpha : \mathcal{A} \to \mathfrak{C}^*$ y $\gamma : \mathcal{B} \to {}^*\mathfrak{D}$ los anti-morfismo de A–anillos extensiones de A y de B–anillos extensiones de B, correspondientes a $\mathcal{T}'$ y a $\mathcal{T}$. Está claro que $\alpha^o \otimes_{\mathbb{K}} \gamma : \mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B} \to (\mathfrak{C}^*)^o \otimes_{\mathbb{K}} {}^*\mathfrak{D}$ es un anti-morfismo de R–anillos extensiones de R. Componiendo este anti-morfismo con el siguiente morfismo de R–anillos unitarios

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathfrak{C}^*)^o \otimes_{\mathbb{K}} {}^*\mathfrak{D} &\longrightarrow {}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) = \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}, {}_R R) \\ \delta^o \otimes_{\mathbb{K}} \sigma &\longmapsto [c^o \otimes_{\mathbb{K}} d \mapsto (\delta(c))^o \otimes_{\mathbb{K}} \sigma(d)], \end{aligned} \tag{1.31}$$

se tiene pues el anti-morfismo $\Sigma : \mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B} \to {}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D})$ de R–anillos extensiones de R. Falta comprobar que ${}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D})$ es un $\mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$–módulo por la izquierda unitario, vía el anti-morfismo Σ. Sea pues $F \in {}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D})$, se sabe que existen $\mathfrak{e} \in \mathbf{Idemp}(\mathcal{A})$ y $\mathfrak{f} \in \mathbf{Idemp}(\mathcal{B})$ tales que

$$\varepsilon_{\mathfrak{C}} \alpha(\mathfrak{e}) = \varepsilon_{\mathfrak{C}} \text{ y } \gamma(\mathfrak{f}) \varepsilon_{\mathfrak{D}} = \varepsilon_{\mathfrak{D}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon_{\mathfrak{C}}^o \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon_{\mathfrak{D}})F &= F \\ &= \Phi(\alpha(\mathfrak{e})^o \otimes_{\mathbb{K}} \gamma(\mathfrak{f}))\Phi(\varepsilon_{\mathfrak{C}}^o \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon_{\mathfrak{D}})F \\ &= \Phi(\alpha(\mathfrak{e})^o \otimes_{\mathbb{K}} \gamma(\mathfrak{f})).\varepsilon_{\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}} F \\ &= \Phi(\alpha(\mathfrak{e})^o \otimes_{\mathbb{K}} \gamma(\mathfrak{f}))F \\ &= \Sigma(\mathfrak{e}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{f})F, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. □

Ejemplo 1.3.25. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ un A–coanillo y un B–coanillo. Supongamos que $(\mathfrak{C}^{*o}, \mathfrak{C}, [-,-])$ es un sistema racional por la izquierda sobre A y que $(\mathfrak{D}, {}^*\mathfrak{D}, \langle -,- \rangle)$ es un sistema racional por la derecha sobre B. Entonces, según el Ejemplo 1.3.11 y el Teorema 1.3.24, $(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}, (\mathfrak{C}^*)^o \otimes_{\mathbb{K}} {}^*\mathfrak{D}, \{-,-\})$ es un par racional por la derecha sobre el $\mathbb{K}$–álgebra tensorial $A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$.

Lema 1.3.26. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ como en el Teorema 1.3.24 y M un (A, B)–bimódulo con estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda $\lambda_M : M \to \mathfrak{C} \otimes_A M$ y una estructura de $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha $\rho_M : M \to M \otimes_B \mathfrak{D}$. Entonces M es un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo si y sólo si M es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo si y sólo si M es un $\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$–comódulo por la derecha.*

Demostración. Según los Teoremas 1.3.19 y 1.3.19', M es un $\mathcal{A}$–módulo racional por la izquierda y un $\mathcal{B}$–módulo racional por la derecha. Vamos a comprobar primero que λ_M es $\mathcal{B}$–lineal por la derecha si y sólo si M es un $(\mathcal{A}, B)$–bimódulo como sigue: para todo $m \in M$, escribimos $\lambda_M(m) = \sum_i c_i \otimes_A m_i$ para un conjunto de parámetros racionales por la izquierda $\{(c_i, m_i)\}$. Luego λ_M es B–lineal si y sólo si $\{(c_i, m_i b)\}$ es un conjunto de parámetros racionales por la izquierda de mb, para todo $b \in B$. Esta última condición es equivalente a que M sea un $(\mathcal{A}, B)$–bimódulo. Desde luego, ρ_M es A–lineal por la izquierda si y sólo si M es un $(A, \mathcal{B})$–bimódulo. Por lo tanto, para terminar la demostración, podemos suponer que M es un $(\mathcal{A}, B)$–bimódulo y un $(A, \mathcal{B})$–bimódulo. Bajo esta condición M es un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo si y sólo si

$$\sum c_i \otimes_A m_{ij} \otimes_B d_{ij} = \sum c_{ij} \otimes_A m_{ji} \otimes_B d_j,$$

donde $\{(m_{ij}, d_{ij})\}$ es un conjunto de parámetros racionales por la derecha de cada m_i, $\{(m_j, d_j)\}$ es un conjunto de parámetros racionales por la derecha de m, y $\{(c_{ji}, m_{ji})\}$ es un conjunto de parámetros racionales por la izquierda de cada m_j; recuerda de la proposición 1.3.16 que estos parámetros están determinados por $\lambda_M(m) = \sum c_i \otimes_A m_i$, $\rho_M(m) = \sum m_j \otimes_B d_j$ y $\lambda_M(m_j) = \sum c_{ji} \otimes_A m_{ji}$, $\rho_M(m_i) = m_{ij} \otimes_B d_{ij}$. Un cálculo inmediato nos da

$$\begin{array}{rcll} (u.m).v & = & \sum [u, c_i] m_{ij} \langle d_{ij}, v\rangle, & \text{y} \\ u.(m.v) & = & \sum [u, c_{ji}] m_{ji} \langle d_j, v\rangle, & \text{para cualquier } (u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}. \end{array}$$

Luego M es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo si y sólo si

$$\sum [u, c_i] m_{ij} \langle d_{ij}, v\rangle = \sum [u, c_{ij}] m_{ji} \langle d_j, v\rangle, \text{ para cualquier } (u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Según la Observación 1.3.6, la siguiente aplicación es inyectiva

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \otimes_A M \otimes_B \mathfrak{D} \arrow[r, hook, "\mathfrak{C}\otimes_A \delta_M"] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathrm{Hom}_B(\mathcal{B}, M) \arrow[r, hook, "\beta_{\mathrm{Hom}_B(\mathcal{B},M)}"] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_B(\mathcal{B}, M)) \\ c \otimes_A m \otimes_B d \arrow[r, mapsto] & c \otimes_A \delta_M(m \otimes_B d) \arrow[r, mapsto] & \left[\begin{array}{ll} u \longmapsto & : \mathcal{B}_B \longrightarrow \quad M \\ & \quad v \longmapsto \quad [u, c] m\langle d, v\rangle \end{array} \right] \end{tikzcd}$$

Por lo tanto M es un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo si y sólo si es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo. Ahora, supongamos que M es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo, lo que implica que M es un $\mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$–módulo por la derecha, usando la notación de arriba

$$\begin{aligned} m(u^o \otimes_{\mathbb{K}} v) &= \sum [u, c_{ij}] m_{ji} \langle d_j, v\rangle = \sum [u, c_i] m_{ij} \langle d_{ij}, v\rangle \\ &= \sum m_{ji}([u, c_{ji}]^o \otimes_{\mathbb{K}} \langle d_j, v\rangle) = \sum m_{ij}([u, c_i]^o \otimes_{\mathbb{K}} \langle d_{ij}, v\rangle) \\ &= \sum m_{ij}\{c_i^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{ij}, u^o \otimes_{\mathbb{K}} v\}, \end{aligned}$$

para todo $m \in M$, $u \in \mathcal{A}$, $v \in \mathcal{B}$; es decir $\{m_{ij}, c_i^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{ij}\}$ es un conjunto de parámetros para m. Luego M es un $(\mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B})$–módulo racional por la derecha. Como estos conjuntos de parámetros racionales vienen de las estructuras λ_M y ρ_M, el Teorema 1.3.24, implica que M es un objeto de la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}^o\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{B}})$, lo que es equivalente a M es un $(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D})$–comódulo por la derecha, según el Teorema 1.3.19. Recíprocamente, si ahora M es un $\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$–comódulo por la derecha, entonces, según el Teorema 1.3.19', λ_M y ρ_M proporcionan dos conjuntos distintos de parámetros racionales por la derecha para cada $m \in M$, respecto del par racional $\mathcal{T}' \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{T}$. En efecto uno de ellos es $\{(m_{ij}, c_i^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{ij})\}$, donde $\lambda_M(m) = \sum c_i \otimes_A m_i$, $\rho_M(m_i) = \sum m_{ij} \otimes_B d_{ij}$, el otro es $\{(m_{ji}, c_{ji} \otimes_{\mathbb{K}} d_j)\}$, donde $\rho_M(m) = \sum m_j \otimes_B d_j$, $\lambda_M(m_j) = \sum c_{ji} \otimes_A m_{ji}$. Por definición de un sistema racional, se tiene

$$\sum c_i \otimes_A m_{ij} \otimes_B d_{ij} = \sum c_{ij} \otimes_A m_{ji} \otimes_B d_j,$$

es decir $(\mathfrak{C} \otimes_A \rho_M) \circ \lambda_M(m) = (\lambda_M \otimes_B \mathfrak{D}) \circ \rho_M(m)$, para cualquier $m \in M$, lo que implica que M es un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo, lo que termina la demostración. $\square$

Teorema 1.3.27. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, un A–anillo extensión de A y un B–anillo extensión de B, los dos con unidades locales; sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Supongamos que $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}, \mathfrak{C}, [-,-])$ es un par racional por la izquierda sobre A y que $\mathcal{T} = (\mathfrak{D}, \mathcal{B}, \langle -,- \rangle)$ es un par racional por la derecha sobre B. Considere $\mathcal{T}' \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{T}$ el par racional por la derecha sobre $A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$ como en el Teorema 1.3.24 y $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}';\mathcal{T}}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ la sub categoría plena de ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ cuyos objetos son objetos en la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M})$ y objetos en la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$. Existen entonces isomorfismos de categorías*

$$ {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \cong \mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}';\mathcal{T}}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}) \cong \mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}^o\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}) \cong \mathcal{M}^{\mathfrak{C}^o\otimes_{\mathbb{K}}\mathfrak{D}}. $$

Demostración. El primer y el tercer isomorfismos son consecuencia del Lema 1.3.26, de su demostración y de los Teoremas 1.3.19, 1.3.24. Sea $M \in \mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}^o\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{B}})$, por definición M es un $\mathcal{A}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$–módulo unitario por la derecha y por restricción es desde luego un $R = A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$–módulo (unitario) por la derecha, así un (A, B)–bimódulo. Según la Proposición 1.3.16, M es un ${}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D})$–módulo unitario por la izquierda, utilizando las siguientes extensiones de anillos

$$ \mathcal{A}^o \xrightarrow{\alpha^o} (\mathfrak{C}^*)^o \xrightarrow{-\otimes_{\mathbb{K}}\varepsilon_{\mathfrak{D}}} (\mathfrak{C}^*)^o \otimes_{\mathbb{K}} {}^*\mathfrak{D} \xrightarrow{\Phi} {}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) $$
$$ \mathcal{B} \xrightarrow{\gamma} {}^*\mathfrak{D} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathfrak{C}}\otimes_{\mathbb{K}}-} (\mathfrak{C}^*)^o \otimes_{\mathbb{K}} {}^*\mathfrak{D} \xrightarrow{\Phi} {}^*(\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}) $$

donde Φ es el morfismo (1.31); se tiene pues que M es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo unitario (recuerde que $\mathfrak{C}^*\mathcal{A} = \mathfrak{C}^*$ y $\mathcal{B}^*\mathfrak{D} = {}^*\mathfrak{D}$). Estas acciones tienen la siguiente forma: sea $\{(m_{ij}, c_{ij}^o \otimes_{\mathbb{K}} d_{ij})\}$ un conjunto de parámetros racionales por la derecha de $m \in M$ respecto del par racional $\mathcal{T}' \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{T}$, entonces

$$ \begin{array}{rcll} mv & = & \sum \varepsilon_{\mathfrak{C}}(c_{ij}) m_{ij} \langle d_{ij}, v \rangle, & v \in \mathcal{B} \\ um & = & \sum [u, c_{ij}] m_{ij} \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d_{ij}), & u \in \mathcal{A} \\ m & = & \sum \varepsilon_{\mathfrak{C}}(c_{ij}) m_{ij} \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d_{ij}) & \end{array} $$

lo que implica que M es un objeto de la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$ y de la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M})$. Recíprocamente, sea M un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo tal que es un objeto en la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M})$ y un objeto en la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}})$. Según los Teoremas 1.3.19 y 1.3.19', M es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda y un $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha. Como M es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo, el Lema 1.3.26 implica que M es un $\mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{D}$–comódulo por la derecha y por lo tanto $M \in \mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}^o\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{B}})$, lo que establece el teorema. □

Corolario 1.3.28. *Sean $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}, \mathfrak{C}, [-,-]$ y $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{A}', \langle -,- \rangle)$, respectivamente, un par racional por la izquierda y un par racional por la derecha, los dos sobre una $\mathbb{K}$–álgebra A. Considere $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}',\mathcal{T}}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}'})$ la sub-categoría plena de ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}'}$ cuyos objetos son objetos en la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M})$ y objetos en la categoría $\mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}'})$. Existen entonces isomorfismos de categorías*

$$ {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \cong \mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}';\mathcal{T}}({}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}'}) \cong \mathrm{Rac}_{\mathrm{unit}}^{\mathcal{T}'\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{T}}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}^o\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{A}'}) \cong \mathcal{M}^{\mathfrak{C}^{env}}, $$

donde $\mathfrak{C}^{env} = \mathfrak{C}^o \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{C}$, es el coanillo envolvente de $\mathfrak{C}$.

Corolario 1.3.29. *Sea A un $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Supongamos que existen dos A–anillos extensiones de A y que tienen unidades locales, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, tales que $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}, \mathfrak{C}, [-,-])$ y $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{A}', \langle -,- \rangle)$ forman, respectivamente, un par racional por la izquierda y un par racional por la derecha los dos sobre A. Considere $\mathfrak{I}$ un A-sub-bimódulo de $\mathfrak{C}$.*

1. *$\mathfrak{I}$ es un sub-bicomódulo de $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{I}$ es un $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-sub-bimódulo de $\mathfrak{C}$.*

2. *Si $\mathfrak{I}$ es puro como A-submódulo por la izquierda y como A-submódulo por la derecha de $\mathfrak{C}$, entonces $\mathfrak{I}$ es un sub-coanillo de $\mathfrak{C}$ si y sólo si es un $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-sub-bimódulo de $\mathfrak{C}$.*

Supongamos por el momento que A es una $\mathbb{K}$–álgebra. Para un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M definimos $C(M)$ como la suma de las imágenes de todos los morfismos de comódulos de $M_{\mathfrak{C}}$ en $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$. En la presencia de dos pares racionales $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{A}', \langle -,- \rangle)$, por la derecha y $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}, \mathfrak{C}, [-,-])$, por la izquierda, es fácil de ver que $C(M)$ es un sub-bicomódulo de $\mathfrak{C}$: por definición es ahora un $\mathcal{A}'$–submódulo por la derecha del $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$–bimódulo $\mathfrak{C}$. Si $v \in \mathcal{A}$ y $c = f(m)$, para un cierto morfismo de comódulos por la derecha $f : M \to \mathfrak{C}$ y un cierto $m \in M$, entonces $vc = (\lambda_v \circ f)(m)$, donde $\lambda_v : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ es el morfismo de comódulos por la derecha inducido por la multiplicación por la izquierda por el elemento v. Por lo tanto $C(M)$ es un $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$–sub-bimódulo de $\mathfrak{C}$, y luego es un sub-bicomódulo de $\mathfrak{C}$, aplicando el Corolario 1.3.29; lo que llamaremos el *bicomódulo de coeficientes* de M.

Proposición 1.3.30. *Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Sea (M, ρ_M) un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha supongamos que existen dos pares racionales $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, \mathcal{A}', \langle -,- \rangle)$ y $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}, \mathfrak{C}, [-,-])$, respectivamente por la derecha y por la izquierda sobre A.*

(1) Si $\tau : \mathfrak{I} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ es un monomorfismo de $\mathfrak{C}$–bicomódulos, tal que $\rho_M(M) \subseteq (M \otimes_A \tau)(M \otimes_A \mathfrak{I})$, entonces $C(M) \subseteq \mathfrak{I}$.

(2) Si N es un subcomódulo de M, entonces $C(N) \subseteq C(M)$ y $C(M/N) \subseteq C(M)$.

(3) Si $N \cong M$ es un isomorfismo de comódulos, entonces $C(N) = C(M)$.

Demostración. Sea $c = f(m) \in C(M)$, donde $f : M \to \mathfrak{C}$ es un morfismo de comódulos por la derecha, escribimos $\rho_M(m) = \sum m_i \otimes_A c_i$, para unos ciertos $c_i \in \mathfrak{I}$ y $m_i \in M$. Puesto que f es colineal, tenemos

$$\Delta(c) = \Delta(f(m)) = (f \otimes_A \mathfrak{C})(\rho_M)(m) = \sum f(m_i) \otimes c_i,$$

luego, usando la propiedad counitaria, $c = \sum \varepsilon_{\mathfrak{C}}(f(m_i))c_i \in \mathfrak{I}$. Lo que demuestra la aserción (1). Las aserciones (2) y (3) son consecuencias triviales de la definición del bicomódulo de coeficientes. $\square$

En el resto de esta memoria adoptamos las siguientes notaciones. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Considere $(M, \rho_M) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$; supongamos que M es un (A', A)–bimódulo (A' es otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales) y que ρ_M es A'–lineal por la izquierda. Está claro que se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\lambda"'] & \mathrm{Hom}_A(M,M) \\ & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,M) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{1.32}$$

De otra parte si consideramos A' como A'–coanillo trivialmente, los (A', A)–bimódulos unitarios que son $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha con una coacción A'–lineal por la izquierda, forman la categoría de $(A', \mathfrak{C})$–bicomódulos la que denotemos por ${}^{A'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Mismos argumentos validos cambiando derecha por izquierda.

1.4. El producto cotensor de bicomódulos.

El nombre de producto cotensor apareció en vez primera en [39], [85]. Después ha sido utilizado en [97] para caracterizar equivalencias entre categorías de comódulos sobre coálgebras sobre cuerpos, y en [5] para el mismo problema pero por coálgebras sobre anillos conmutativos y finalmente para caracterizar los coanillos coseparables en [58]. Para definir el producto cotensor en coanillos vamos a seguir la versión moderna de [52] y [14]. Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ y $\mathfrak{C}''$, respectivamente, un A–coanillo, A'–coanillo y A''–coanillo, donde A, A' y A'' son $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Sean $M \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $N \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$. Consideramos $M \otimes_A N$ y $M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N$ como $(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$–bicomódulos de manera canónica i.e. con las coacciones

$$\begin{array}{lcl} \rho_{M\otimes_A N} & = & M \otimes_A \rho_N \\ \lambda_{M\otimes_A N} & = & \lambda_M \otimes_A N \\ \rho_{M\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N} & = & M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \rho_N \\ \lambda_{M\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N} & = & \lambda_M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N \end{array} \tag{1.33}$$

Si $(f, g) : (M, N) \to (M', N')$ es un morfismo en la categoría ${}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$, es fácil de averiguar usando las coacciones (1.33) que $f \otimes_A g : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ y $f \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A g : M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N \to M' \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N'$ son ahora morfismos $\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}''$–bi-colineales. De esta manera, se definen los siguientes funtores

$$- \otimes_A -, \; - \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A - : {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''} \to {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$$

Para cualquier pareja (M, N) en la categoría producto ${}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$, considere la siguiente aplicación $A' - A''$–bilineal

$$\mathfrak{eq}_{M,N} : M \otimes_A N \xrightarrow{\rho_M \otimes_A N - M \otimes_A \lambda_N} M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N \tag{1.34}$$

con las coacciones de (1.33), $\mathfrak{eq}_{M,N}$ es ahora $\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}''$–bi-colineal. Además

$$\mathfrak{eq}_{-,-} : - \otimes_A - \longrightarrow - \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A -$$

establece una transformación natural. Denotemos por $M\Box_{\mathfrak{C}}N$ el núcleo de (1.34) en ${}_{A'}\mathcal{M}_{A''}$, se tiene pues una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M\Box_{\mathfrak{C}}N \xrightarrow{\mathfrak{eq}^k_{M,N}} M\otimes_A N \xrightarrow{\mathfrak{eq}_{M,N}} M\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N \tag{1.35}$$

Dado $(f,g) : (M,N) \to (M',N')$ un morfismo en la categoría ${}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$, se tiene el siguiente diagrama con el rectángulo de la derecha conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\Box_{\mathfrak{C}}N \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] \arrow[d, dotted, "f\Box_{\mathfrak{C}}g"'] & M\otimes_A N \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,N}"] \arrow[d, "f\otimes_A g"] & M\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N \arrow[d, "f\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A g"] \\ 0 \arrow[r] & M'\Box_{\mathfrak{C}}N' \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M',N'}"] & M'\otimes_A N' \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M',N'}"] & M'\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N' \end{tikzcd}$$

luego existe una única aplicación $f\Box_{\mathfrak{C}}g : M\Box_{\mathfrak{C}}N \to M'\Box_{\mathfrak{C}}N'$ que convierte el diagrama total conmutativo. Esto implica que $-\Box_{\mathfrak{C}}-$ es un sub-objeto de $-\otimes_A-$ en la categoría de funtores $\mathrm{Funt}({}^{A'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{A''}, {}_{A'}\mathcal{M}_{A''})$. En particular $-\Box_A- = -\otimes_A-$, considerando A como un A–coanillo trivialmente.

Lema 1.4.1. *Sean $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ y $\mathfrak{C}''$, respectivamente, un A–coanillo, A'–coanillo y A''–coanillo.*

(1) Para cualquier $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}} : M\Box_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \to M\otimes_A\mathfrak{C}$ escinde por la izquierda en $\mathcal{M}_A$. Por lo tanto $M\Box_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ admite una estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha para la cual $M\Box_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \cong M$ como $\mathfrak{C}$–comódulos. En particular $-\Box_{\mathfrak{C}} \cong id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}}$.

(2) Sean $M \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $N \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$. Si $\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\mathfrak{C}'_{A'}$ y ${}_{A''}\mathfrak{C}''\otimes_{A''}\mathfrak{C}''$ preservan el igualador $\mathfrak{eq}_{M,N}$ ó el morfismo $\mathfrak{eq}^k_{M,N}$ escinde por la izquierda. Entonces $M\Box_{\mathfrak{C}}N$ es un $\mathfrak{C}'$–comódulo por la izquierda y un $\mathfrak{C}''$–comódulo por la derecha.

(3) Supongamos que para cada $M \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $N \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$, los módulos $\mathfrak{C}'_{A'}$, ${}_{A''}\mathfrak{C}''$ y la pareja de módulos $(\mathfrak{C}'_{A'}, {}_{A''}\mathfrak{C}'')$ preservan cada uno ellos el igualador $\mathfrak{eq}_{M,N}$. Entonces existe un funtor aditivo

$$-\Box_{\mathfrak{C}}- : {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''} \longrightarrow {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$$

En particular el bifuntor producto cotensor $-\Box_{\mathfrak{C}}-$ es definido si $\mathfrak{C}'_{A'}$ y ${}_{A''}\mathfrak{C}''$ son módulos planos.

Demostración. (1). Tenemos el siguiente diagrama en $\mathcal{M}_A$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M\Box_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}"] & M\otimes_A\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,\mathfrak{C}}"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C} \\ & & M \arrow[ul, dotted, "\rho'_M"] \arrow[u, "\rho_M"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\mathfrak{eq}_{M,\mathfrak{C}}\circ\rho_M = 0$, existe una única aplicación A–lineal $\rho'_M : M \to M\Box_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}\circ\rho'_M = \rho_M$. Usando la propiedad counitaria, se tiene la inclusión $\mathbf{Im}(\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}) \subseteq \mathbf{Im}(\rho_M)$. Por lo tanto $\mathbf{Im}(\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}) = \mathbf{Im}(\rho_M)$ y luego $\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}$ escinde por la izquierda. Esto implica que cualquier A–módulo ${}_AX$ preserva el igualador $\mathfrak{eq}_{M,\mathfrak{C}}$, en particular ${}_A\mathfrak{C}$. Resumiendo, se tiene usando la coasociatividad de Δ que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}"] \arrow[d, dotted, "\rho_{M\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}}"'] & M\otimes_A\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,\mathfrak{C}}"] \arrow[d, "M\otimes_A\Delta"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C} \arrow[d, "M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\Delta"] \\
0 \arrow[r] & (M\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})\otimes_A\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,\mathfrak{C}}\otimes_A\mathfrak{C}"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C} \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,\mathfrak{C}}\otimes_A\mathfrak{C}"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

donde $\rho_{M\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}}$ induce una $\mathfrak{C}$–coacción. Ahora está claro que el isomorfismo $M \cong \mathbf{Im}(\rho_M) \cong M\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ es de $\mathfrak{C}$–comódulos.

(2). Bajo la hipótesis ${}_{A''}\mathfrak{C}''\otimes_{A''}\mathfrak{C}''$ preserva el igualador $\mathfrak{eq}_{M,N}$, se puede comprobar que el módulo ${}_{A''}\mathfrak{C}''$ preserva el mismo igualador. Entonces bajo esta hipótesis o el morfismo $\mathfrak{eq}^k_{M,N}$ escinde por la izquierda, se tiene una única aplicación $A'-A''$–bilineal $\rho_{M\square_{\mathfrak{C}}N}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\square_{\mathfrak{C}}N \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] \arrow[d, dotted, "\rho_{M\square_{\mathfrak{C}}N}"'] & M\otimes_A N \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,N}"] \arrow[d, "M\otimes_A\rho_N"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N \arrow[d, "M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A\rho_N"] \\
0 \arrow[r] & (M\square_{\mathfrak{C}}N)\otimes_{A''}\mathfrak{C}'' \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,N}\otimes_{A''}\mathfrak{C}''"] & M\otimes_A N\otimes_{A''}\mathfrak{C}'' \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,N}\otimes_{A''}\mathfrak{C}''"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N\otimes_{A''}\mathfrak{C}''
\end{tikzcd}$$

la conmutatividad del rectángulo de la derecha es fácil de averiguar. De la misma manera se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\square_{\mathfrak{C}}N \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] \arrow[d, dotted, "\lambda_{M\square_{\mathfrak{C}}N}"'] & M\otimes_A N \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{M,N}"] \arrow[d, "\lambda_{M\otimes_A N}"] & M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N \arrow[d, "\lambda_{M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N}"] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{C}'\otimes_{A'}(M\square_{\mathfrak{C}}N) \arrow[r, "\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] & \mathfrak{C}'\otimes_{A'}M\otimes_A N \arrow[r, "\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\mathfrak{eq}_{M,N}"] & \mathfrak{C}'\otimes_{A'}M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N
\end{tikzcd}$$

Las coacciones $\rho_{M\square_{\mathfrak{C}}N}$ y $\lambda_{M\square_{\mathfrak{C}}N}$ inducen estructuras de $\mathfrak{C}''$–comódulo por la derecha y de $\mathfrak{C}'$–comódulo por la izquierda sobre $M\square_{\mathfrak{C}}N$.

(3). Usando las coacciones de (2), se tiene ahora un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & M\otimes_A N \arrow[rrr, "M\otimes_A\rho_N"] \arrow[dd, "\lambda_{M\otimes_A N}"] & & & M\otimes_A N\otimes_{A''}\mathfrak{C}'' \arrow[dd, "\lambda_{M\otimes_A N\otimes_{A''}\mathfrak{C}''}"] \\
M\square_{\mathfrak{C}}N \arrow[ur, "\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] \arrow[rrr, "\rho_{M\square_{\mathfrak{C}}N}"] \arrow[dd, "\lambda_{M\square_{\mathfrak{C}}N}"'] & & & (M\square_{\mathfrak{C}}N)\otimes_{A''}\mathfrak{C}'' \arrow[ur, "\mathfrak{eq}^k_{M,N}\otimes_{A''}\mathfrak{C}''"] \arrow[dd, "\lambda_{(M\square_{\mathfrak{C}}N)\otimes_{A''}\mathfrak{C}''}"] & \\
 & \mathfrak{C}'\otimes_{A'}M\otimes_A N \arrow[rrr, "\mathfrak{C}'\otimes_{A'}M\otimes_A\rho_N"] & & & \mathfrak{C}'\otimes_{A'}M\otimes_A N\otimes_{A''}\mathfrak{C}'' \\
\mathfrak{C}'\otimes_{A'}(M\square_{\mathfrak{C}}N) \arrow[ur, "\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] \arrow[rrr, "\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\rho_{(M\square_{\mathfrak{C}}N)}"] & & & \mathfrak{C}'\otimes_{A'}(M\square_{\mathfrak{C}}N)\otimes_{A''}\mathfrak{C}'' \arrow[ur, "\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}\otimes_{A''}\mathfrak{C}''"] &
\end{tikzcd}$$

cuyos rectángulos laterales, del techo y del suelo son conmutativos. Como $\mathfrak{C}'\otimes_{A'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}\otimes_{A''}\mathfrak{C}''$ es inyectivo, por hipótesis, se tiene la conmutatividad del rectángulo del frente y luego el final de la demostración. $\square$

La compatibilidad entre el producto tensor y el producto cotensor viene como sigue. Sea $M \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $N \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$ dos bicomódulos. Para cualquier A'–módulo unitario por la derecha X, consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \otimes_{A'} (M\square_{\mathfrak{C}}N) \arrow[r, "X\otimes_{A'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] \arrow[d, dotted, "\psi^r_{X,M,N}"] & X \otimes_{A'} (M \otimes_A N) \arrow[r, "X\otimes_{A'}\mathfrak{eq}_{M,N}"] \arrow[d, "\tau_{X,M,N}"', "\cong"] & X \otimes_{A'} (M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N) \arrow[d, "\tau_{X,M,\mathfrak{C}\otimes_A N}"', "\cong"] \\ 0 \arrow[r] & (X \otimes_{A'} M)\square_{\mathfrak{C}}N \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{X\otimes_{A'}M,N}"] & (X \otimes_{A'} M) \otimes_A N \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{X\otimes_{A'}M,N}"] & (X \otimes_{A'} M) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N \end{tikzcd} \tag{1.36}$$

donde ψ^r viene dada por la propiedad universal del núcleo de la segunda fila en $\mathcal{M}_{A''}$. Notemos que, para cualquier $X \in \mathcal{M}_{A'}$, $M \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, se tiene los siguientes funtores

$$(X \otimes_{A'} M)\square_{\mathfrak{C}}-,\ X \otimes_{A'} (M\square_{\mathfrak{C}}-) : {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}},$$

es fácil de comprobar que ψ^r induce una transformación natural $\psi^r_{X,M,-} : X\otimes_{A'}(M\square_{\mathfrak{C}}-) \to (X \otimes_{A'} M)\square_{\mathfrak{C}}-$. La aplicación ψ^r, implica también el siguiente lema

Lema 1.4.2. *El diagrama* (1.36)*, implica que $X_{A'}$ preserva el igualador $\mathfrak{eq}_{M,N}$ si y sólo si $\psi^r : X \otimes_{A'} (M\square_{\mathfrak{C}}N) \cong (X \otimes_{A'} M)\square_{\mathfrak{C}}N$. En particular, ψ^r es un isomorfismo si $X_{A'}$ es módulo plano.*

Análogamente, si consideramos $L \in {}^{\mathfrak{C}'''}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}'}$, se tiene para cualquier módulo ${}_AY$ un morfismo $\psi^l_{L,M,Y} : (L\square_{\mathfrak{C}'}M) \otimes_A Y \to L\square_{\mathfrak{C}'}(M \otimes_A Y)$ y como en el Lema 1.4.2, ψ^l es un isomorfismo si y sólo si ${}_AY$ preserva el igualador $\mathfrak{eq}_{L,M}$.

El problema de la asociatividad del producto cotensor, viene parcialmente resuelto por la siguiente proposición

Proposición 1.4.3. *Sean $L \in {}^{\mathfrak{C}'''}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}'}$, $M \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $N \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$. Supongamos que*

(H1) los objetos $\mathfrak{C}'_{A'}$, ${}_{A''}\mathfrak{C}''$, $(\mathfrak{C}'_{A'}, {}_{A''}\mathfrak{C}'')$, $L_{A'}$ y $(L \otimes_{A'} \mathfrak{C}')_{A'}$ preservan el igualador $\mathfrak{eq}_{M,N}$.

(H2) los objetos $\mathfrak{C}'''_{A'''}$, ${}_A\mathfrak{C}$, $(\mathfrak{C}'''_{A'''}, {}_A\mathfrak{C})$, ${}_AN$ y ${}_A(\mathfrak{C} \otimes_A N)$ preservan el igualador $\mathfrak{eq}_{L,M}$.

Entonces existe un isomorfismo de $(\mathfrak{C}''', \mathfrak{C}'')$–bicomódulos

$$L\square_{\mathfrak{C}'}(M\square_{\mathfrak{C}}N) \cong (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\square_{\mathfrak{C}}N.$$

Demostración. La hipótesis $(H1)$ implica la siguiente sucesión exacta de $(\mathfrak{C}''', \mathfrak{C}'')$–bicomódulos

$$0 \longrightarrow L\square_{\mathfrak{C}'}(M\square_{\mathfrak{C}}N) \xrightarrow{L\square_{\mathfrak{C}'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}} L\square_{\mathfrak{C}'}(M \otimes_A N) \xrightarrow{L\square_{\mathfrak{C}'}\mathfrak{eq}_{M,N}} L\square_{\mathfrak{C}'}(M \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N)$$

Mientras que la hipótesis $(H2)$ implica la siguiente sucesión exacta, también de $(\mathfrak{C}''', \mathfrak{C}'')$–bicomódulos

$$0 \longrightarrow (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\square_{\mathfrak{C}}N \xrightarrow{\mathfrak{eq}^k_{L\square_{\mathfrak{C}'}M,N}} (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\otimes_A N \xrightarrow{\mathfrak{eq}_{L\square_{\mathfrak{C}'}M,N}} (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N$$

Consideramos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\square_{\mathfrak{C}}N \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{L\square_{\mathfrak{C}'}M,N}"] \arrow[d, dotted, "\psi^l_1"] & (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\otimes_A N \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{L\square_{\mathfrak{C}'}M,N}"] \arrow[d, "\psi^l_{L,M,N}"] & (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N \arrow[d, "\psi^l_{L,M,\mathfrak{C}\otimes_A N}"] \\
0 \arrow[r] & L\square_{\mathfrak{C}'}(M\square_{\mathfrak{C}}N) \arrow[r, "L\square_{\mathfrak{C}'}\mathfrak{eq}^k_{M,N}"] & L\square_{\mathfrak{C}'}(M\otimes_A N) \arrow[r, "L\square_{\mathfrak{C}'}\mathfrak{eq}_{M,N}"] & L\square_{\mathfrak{C}'}(M\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N)
\end{tikzcd}$$

componiendo con la inyección $\mathfrak{eq}^k_{L,M\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N}$, obtenemos la conmutatividad de este diagrama. La aplicación ψ^l_1, viene dada por la propiedad universal del núcleo. Como $\psi^l_{L,M,\mathfrak{C}\otimes_A N}$ y $\psi^l_{L,M,N}$ son isomorfismos, según el Lema 1.4.2, se tiene el isomorfismo $L\square_{\mathfrak{C}'}(M\square_{\mathfrak{C}}N) \cong (L\square_{\mathfrak{C}'}M)\square_{\mathfrak{C}}N$ en ${}_{A'''}\mathcal{M}_{A''}$ que sigue siendo un isomorfismo en la categoría ${}^{\mathfrak{C}'''}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$. $\square$

Observación 1.4.4. (1.) Si $\mathfrak{C}$ es A–coanillo coseparable i.e. existe un morfismo de $\mathfrak{C}$–bicomódulos $\gamma : \mathfrak{C}\otimes_A\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ tal que $\gamma\circ\Delta = \mathfrak{C}$, véase [58] y [53]. Entonces, $M\square_{\mathfrak{C}}N$ es un $(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$–bicomódulo, para cualquier pareja de bicomódulos $(M, N) \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \times {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$. Además, $\mathfrak{eq}^k_{M,N}$ es un morfismo que escinde por la izquierda en la categoría ${}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$, [58, Proposition 1.2]. Así las hipótesis del Lema 1.4.1 y de la Proposición 1.4.3, son satisfechas por este tipo de coanillos.

(2.) Sea $\mathfrak{C}$ cualquier A–coanillo y M un $(\mathfrak{C}, B)$–bicomódulo, B otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Se puede comprobar sin dificultad que $-\square_{\mathfrak{C}}M : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_B$, es un funtor que preserva la suma directa, incluso el límite directo.

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo tal que ${}_A\mathfrak{C}$ es módulo plano. Para un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda M, el funtor cotensor $-\square_{\mathfrak{C}}M : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ no es en general exacto ni por la izquierda ni por la derecha. Pero se puede comprobar como en el caso de comódulos sobre coálgebras que

Lema 1.4.5. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo tal que ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano y M un $(\mathfrak{C}, B)$–bicomódulo. Entonces*

1. *El funtor $-\square_{\mathfrak{C}}M : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_B$ es relativamente exacto por la izquierda i.e. exacto por la izquierda respecto a sucesiones exactas en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y que son puras en $\mathcal{M}_A$.*

2. *Si ${}_AM$ es un módulo plano, entonces $-\square_{\mathfrak{C}}M$ es exacto por la izquierda.*

Definición 1.4.6. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con ${}_A\mathfrak{C}$ un módulo plano y M un $(\mathfrak{C}, B)$–bicomódulo. Se dice que M es un $\mathfrak{C}$–comódulo *coplano* si el funtor cotensor $-\square_{\mathfrak{C}}M : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_B$ es exacto.

1.5. El coproducto de coanillos y sus comódulos.

En esta sección vamos a ver ciertas aplicaciones del producto cotensor además de dar algunos ejemplos de comódulos coplanos.

Fijamos A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Considere $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un morfismo de A–coanillos. A cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M, el A–módulo subyacente admite claramente una estructura de $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha (M_ϕ, ρ_{M_ϕ}), vía la coacción

$$\rho_{M_\phi} : M \xrightarrow{\rho_M} M \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{M \otimes_A \phi} M \otimes_A \mathfrak{D},$$

y cualquier morfismo de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha $f : M \to M'$ induce un morfismo de $\mathfrak{D}$–comódulos $f_\phi : M_\phi \to M'_\phi$. Simétricamente, cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda admite una $\mathfrak{D}$–coacción por la izquierda. En particular $\mathfrak{C}$ es ahora un $\mathfrak{D}$–comódulo por la izquierda y por la derecha, lo que convierte a ϕ en un morfismo $\mathfrak{D}$–colineal por la izquierda y por la derecha. Aún más, usando la coasociatividad de $\Delta_{\mathfrak{C}}$, se tiene que $\mathfrak{C}$ con las estructuras arriba inducidas, es un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo y un $(\mathfrak{D}, \mathfrak{C})$–bicomódulo. De esta manera si (M, ρ_M) es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, es fácil de ver que $\mathfrak{eq}_{M_\phi, \mathfrak{C}} \circ \rho_M = 0$, luego se tiene que la siguiente composición de aplicaciones $\mathfrak{D}$–colineales

$$M \xrightarrow{\quad \rho_M \quad} M_\phi \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{C} \xrightarrow{\quad M_\phi \square_{\mathfrak{D}} \phi \quad} M_\phi \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{D} \cong M_\phi$$

es la identidad, esto quiere decir que M_ϕ es un sumando directo de $M_\phi \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{C}$ como $\mathfrak{D}$–comódulo. El morfismo de A–coanillos ϕ induce funtores entre categorías de comódulos. En efecto $(-)_\phi$ establece el funtor

$$(-)_\phi : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$$

conocido por el nombre del *funtor de inducción* (ó funtor de *corestricción* en [14, 22.11]). Usando la estructura de $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo sobre $\mathfrak{C}$, está claro que $M \square_{\mathfrak{C}} \mathfrak{C}$ es un $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha, para todo $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y además el funtor inducción es isomorfo al funtor $- \square_{\mathfrak{C}} \mathfrak{C} : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$. Usando el bicomódulo simétrico ${}_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$, podemos formar el A–módulo por la derecha $M \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{C}$, para cualquier $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha M. Según el Lema 1.4.1, $M \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{C}$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha si ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano. Esto nos conlleva pues a definir el *funtor ad-inducción* (u el funtor *coinducción* en [14, 22.11])

$$- \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{C} : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$$

El siguiente lema es un resultado particular de [52], véase también [14, 22.11].

Lema 1.5.1. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ un morfismo de A–coanillos. Si ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, entonces, par cualquier $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $N \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$,*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, N \square_{\mathfrak{D}} \mathfrak{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(M_\phi, N) \\ f & \longmapsto & (M \square_{\mathfrak{D}} \phi) \circ f \\ (g \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M & \longleftarrow & g \end{array}$$

es un isomorfismo natural es decir $(-)_\phi$ *es un funtor adjunto por la izquierda de* $-\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}$, *i.e.* $(-)_\phi \dashv -\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}$.

Lema 1.5.2. *Sean* A, A' *y* A'' $\mathbb{K}$*–anillos con unidades locales y* $\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *un morfismo de* A*–coanillos. Para cualquier* $X \in {}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *y* $Y \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$*, donde* $\mathfrak{C}'$ *y* $\mathfrak{C}''$ *son respectivamente, un* A'*–coanillo y un* A''*–coanillo tales que* $\mathfrak{C}'_{A'}$ *y* ${}_{A''}\mathfrak{C}''$ *son módulos planos, existe un morfismo (natural sobre las dos componentes) de* $(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$*–bicomódulos*

$$\varpi_{X,Y} : X\square_{\mathfrak{C}}Y \longrightarrow X_\phi\square_{\mathfrak{D}}Y_\phi$$

Si supongamos que $X \otimes_A \phi \otimes_A Y$ *es inyectivo, entonces* $\varpi_{X,Y}$ *es un isomorfismo natural de* $(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$*–bicomódulos. En particular si* ϕ *escinde por la izquierda en* ${}_A\mathcal{M}_A$*. Entonces* $\varpi_{-,-}$ *es un isomorfismo natural.*

Demostración. Por hipótesis y Lema 1.4.1, se tiene el siguiente diagrama en ${}^{\mathfrak{C}'}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}''}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X\square_{\mathfrak{C}}Y \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{X,Y}"] \arrow[d, dashed, "\varpi_{X,Y}"'] & X \otimes_A Y \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{X,Y}"] \arrow[d, equal] & X \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A Y \arrow[d, "X\otimes_A\phi\otimes_A Y"] \\
0 \arrow[r] & X_\phi\square_{\mathfrak{D}}Y_\phi \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{X_\phi,Y_\phi}"] & X \otimes_A Y \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{X_\phi,Y_\phi}"] & X \otimes_A \mathfrak{D} \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

cuyo rectángulo de la derecha es fácil de comprobar que es conmutativo y donde $\varpi_{X,Y}$ viene dada por la propiedad universal del núcleo y que convierte el total del diagrama conmutativo. Por lo tanto, si $X \otimes_A \phi \otimes_A Y$ es inyectivo $\varpi_{X,Y}$ será un isomorfismo. El caso particular es ahora inmediato. □

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}$ una familia A–coanillos; denotemos como usual por τ_i y π_i las inyecciones y las proyecciones canónicas. Supongamos que cada uno de los ${}_A\mathfrak{C}_i$ es un módulo plano. Sea sabe de la Proposición 1.1.10 que $\oplus_I\mathfrak{C}_i$ es un A–coanillo y que cada $\tau_i : \mathfrak{C}_i \to \mathfrak{D} = \oplus_I\mathfrak{C}_i$ es un morfismo de A–coanillos. Sea M un $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha, entonces cada producto tensor $M\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i$ es un $\mathfrak{C}_i$–comódulo por la derecha, recuerde del Lema 1.4.1; existe pues un objeto

$$(M\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i)_{i\in I} \text{ en la categoría producto } \prod_{i\in I}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}$$

Cada morfismo $\mathfrak{D}$–colineal por la derecha $f : M \to M'$, induce la familia de morfismos $\mathfrak{C}_i$–colineales por la derecha $f\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i$, $i \in I$. Esto establece el funtor

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} &\longrightarrow \textstyle\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i} \\ M &\longmapsto (M\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i)_{i\in I} \end{aligned} \tag{1.37}$$

Si consideramos ahora $(M_i)_I$ un objeto de la categoría producto $\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}$, entonces $\oplus_I(M_i)_{\tau_i}$ es un $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha. Para no complicar la notación, no vamos a disponer siempre de la notación del funtor de inducción $(-)_{\tau_i}$. Con esta nueva notación si $(f_i)_I$ es un morfismo en la categoría $\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}$, entonces $\oplus_I f_i$ es un morfismo $\mathfrak{D}$–colineal por la derecha. Se tiene pues el funtor

$$\begin{aligned} \urcorner : \textstyle\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i} &\longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \\ (M_i)_I &\longmapsto \oplus_I M_i \end{aligned} \tag{1.38}$$

Proposición 1.5.3. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de A–coanillos tales que cada módulo ${}_A\mathfrak{C}_i$ es plano. Los funtores $\digamma$ y $\urcorner$ de las ecuaciones* (1.37) *y* (1.38)*, establecen una equivalencia de categorías entre la categoría producto $\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}$ y la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\oplus_I \mathfrak{C}_i}$.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, donde $\mathfrak{D} = \oplus_I \mathfrak{C}_i$, $\digamma(M) = (M\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i)_I$, luego

$$\urcorner\digamma(M_{\mathfrak{D}}) = \oplus_I (M\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i) \cong M\square_{\mathfrak{D}} (\oplus_I \mathfrak{C}_i) \cong M_{\mathfrak{D}}$$

Por lo tanto $\urcorner\digamma \cong id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}}$ es un isomorfismo natural. Ahora si $(M_j)_{j\in I}$ es un objeto en la categoría producto $\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}$, $\urcorner((M_j)_I) = \oplus_I M_j$ como $\mathfrak{D}$–comódulo por inducción. Entonces

$$\digamma\urcorner((M_j)_I) = ((\oplus_I M_j)\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i)_{i\in I} \cong (\oplus_{j\in I}(M_j\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i))_{i\in I}$$

Sean $i \neq j$ en I y consideramos la composición

$$M_j \otimes_A \mathfrak{C}_i \xrightarrow{\mathfrak{eq}_{(M_j)_{\tau_j},\mathfrak{C}_i}} M_j \otimes_A \mathfrak{D} \otimes_A \mathfrak{C}_i \xrightarrow{\cong} \oplus_{k\in I}(M_j \otimes_A \mathfrak{C}_k \otimes_A \mathfrak{C}_i)$$

Está claro que la imagen de $M_j\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i$, por esta composición está dentro de la intersección $(M_j \otimes_A \mathfrak{C}_i \otimes_A \mathfrak{C}_i) \cap (M_j \otimes_A \mathfrak{C}_j \otimes_A \mathfrak{C}_i) = 0$ en $M_j \otimes_A \mathfrak{D} \otimes_A \mathfrak{C}_i$, recuerde que los morfismos canónicos τ_i escinde por la izquierda en la categoría ${}_A\mathcal{M}_A$. Por lo tanto $M_j\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i = 0$, para todo $i \neq j$ en I. Así

$$(\oplus_{j\in I} M_j)\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i \cong \oplus_i(M_j\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i) \cong M_i\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i, \text{ para cualquier } i \in I.$$

Usando el Lema 1.5.2, recuerda que τ_i es un morfismo de A–coanillos, se tiene

$$(M_i)_{\tau_i}\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i \cong M_i\square_{\mathfrak{C}_i}\mathfrak{C}_i \cong M_i$$

como $\mathfrak{C}_i$–comódulo por la derecha. Lo que implica que $\digamma\urcorner((M_i)_I) \cong (M_i)_I$ i.e. $\digamma\urcorner \cong id_{\prod_I \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}}$ un isomorfismo natural. □

Proposición 1.5.4. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\{\mathfrak{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de A–coanillos tal que cada uno de los ${}_A\mathfrak{C}_i$ es un módulo plano. Considere $\mathfrak{D} = \oplus_i \mathfrak{C}_i$ el A–coanillo suma directa junto con los morfismos canónicos de A–coanillos $\tau_i : \mathfrak{C}_i \to \mathfrak{D}$, como en la Proposición 1.1.10. Entonces, para cada $i \in I$, ${}_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i$ es un comódulo coplano.*

Demostración. Según la notación del apartado 1.5.3 los funtores $\digamma$ y $\urcorner$ en las ecuaciones (1.37) y (1.38), establecen una equivalencia de categorías. Entonces $\digamma$ es un funtor exacto, lo que implica que cada funtor $-\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i}$ es exacto. Como cada uno de los ${}_A\mathfrak{C}_i$ es plano el funtor del olvido $U_A^i : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}_i} \to \mathcal{M}_A$ es exacto, según le Proposición 1.2.12, para cualquier $i \in I$. Por lo tanto cada funtor $-\square_{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}_i : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \to \mathcal{M}_A$ es exacto. □

1.6. Funtores entre categorías de comódulos.

Nuestro objetivo en esta sección consiste en caracterizar ciertos funtores entre categorías de comódulos. Este problema ha sido inspirado del trabajo de C. E. Watts en [98], sobre los funtores aditivos. Aquí vamos adaptar la versión de [52], aunque usando $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, como anillos de escalares.
Todos los coanillos bajo consideración en esta sección deben de tener la categoría de comódulos por la derecha una categoría abeliana.

Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $\mathfrak{D}$ un B–coanillo. consideramos un funtor $\mathbb{K}$–lineal

$$F : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$$

Sea T otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Para cualquier $(M, \rho_M) \in {}^{T}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ (i.e. ρ_M es T–lineal por la izquierda), considere el morfismo de $\mathbb{K}$–anillos (que no conserva las unidades locales)

$$T \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, M) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(M), F(M)) \tag{1.39}$$

donde la primera flecha viene de la ecuación (1.32). Así el morfismo (1.39), induce una estructura de (T, B)–bimódulo sobre $F(M)$ con una $\mathfrak{D}$–coacción T–lineal por la izquierda. Denotaremos por $\varsigma_{F(M)}$ esta nueva T–acción, es decir

$$\begin{aligned} \varsigma_{F(M)} : T \otimes_T F(M) &\longrightarrow F(M) \\ t \otimes_T x &\longmapsto F(\lambda_t)(x) := tx \end{aligned}$$

observe que ${}_T F(M)$ no es por el momento un módulo unitario. Con esta acción se tienen pues dos funtores

$$- \otimes_T F(-),\ \ F(- \otimes_T -) : \mathcal{M}_T \times {}^{T}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}.$$

Fijamos, por el momento $M \in {}^{T}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Vamos a intentar definir una trasformación natural

$$\Upsilon_{-,M} : - \otimes_T F(M) \longrightarrow F(- \otimes_T M) \tag{1.40}$$

Sea $X \in \mathcal{M}_T$, supongamos que existe $e \in \mathbf{Idemp}(T)$ tal que $eT = X_T$, sea pues

$$\begin{tikzcd} eT \otimes_T F(M) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{eT,M}"] \arrow[dr, "\tau_{e,F(M)}"'] & & F(eT \otimes_T M) \\ & F(M) \arrow[ur, "F(\gamma_{e,M})"'] & \end{tikzcd} \tag{1.41}$$

donde $\gamma_{e,P} : P \to eT \otimes_T P$, vía $p \mapsto e \otimes_T p$ y $\tau_{e,P} : eT \otimes_T P \to P$, vía $et \otimes_T p \mapsto etp$, para cualquier T–módulo por la izquierda P, son las aplicaciones canónicas, en efecto transformaciones naturales, definidas en el capítulo de apéndices, véase la ecuación (**A**.3) de allí. Observe que en este caso $\tau_{e,F(M)}$ es $\mathfrak{D}$–colineal; mientras que $\gamma_{e,M}$ es $\mathfrak{C}$–colineal. Para comprobar que $\Upsilon_{-,M}$ es natural sobre los T–módulos de forma eT con e en $\mathbf{Idemp}(T)$, considere $f : eT \to e'T$, un morfismo en $\mathcal{M}_T$ y $\lambda_{f(e)} : M \to M$, vía $m \mapsto f(e)m$, para todo $m \in M$. Como $M \in {}^T\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, $\lambda_{f(e)}$ es $\mathfrak{C}$–colineal y luego $F(\lambda_{f(e)}) : F(M) \to F(M)$, vía $x \mapsto F(\lambda_{f(e)})(x) = f(e).x$ es $\mathfrak{D}$–colineal. Se tiene pues el siguiente diagram en $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$

$$\begin{tikzcd}
eT \otimes_T F(M) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{eT,M}"] \arrow[dr, "\tau_{e,F(M)}"'] \arrow[dd, "f\otimes_T F(M)"'] & & F(eT \otimes_T M) \arrow[dd, "F(f\otimes_T M)"] \\
& F(M) \arrow[ur, "F(\gamma_{e,M})"'] \arrow[dd, "F(\lambda_{f(e)})"] & \\
e'T \otimes_T F(M) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{e'T,M}"] \arrow[dr, "\tau_{e',F(M)}"'] & & F(e'T \otimes_T M) \\
& F(M) \arrow[ur, "F(\gamma_{e',M})"'] &
\end{tikzcd}$$

Utilizando las ecuaciones (**A**.4) del capítulo de apéndices, se tiene la conmutatividad de los dos paralelogramos, y luego la del rectángulo del fondo. Si suponemos ahora que F preserva coproductos y que $X = \oplus_{i\in I} e_i T$, donde $e_i \in \mathbf{Idemp}(T)$, para todo $i \in I$. Entonces, definimos $\Upsilon_{X,M}$ como el morfismo que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\oplus_I e_i T) \otimes_T F(M) \arrow[r, dashed, "\Upsilon_{X,M}"] & F\left((\oplus_I e_i T) \otimes_T M\right) \\
\oplus_I (e_i T \otimes_T F(M)) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\oplus_I \Upsilon_{e_i T,M}"] & \oplus_I (F(e_i T \otimes_T M)) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Siguiendo los pasos del Teorema de Mitchell [86, Theorem 4.5.2] ó [89, Theorem 3.6.5] (recuerde que $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ son supuestas abelianas), y usando representaciones libres de forma $\oplus_J(e_j T) \to \oplus_I(e_i T) \to X$, si F preserva coproductos, entonces existe una única transformación natural

$$\Upsilon_{X,M} : X \otimes_T F(M) \to F(X \otimes_T M)$$

cuya restricción a $\{eT\}_{e\in \mathbf{Idemp}(T)}$ coincide con la transformación (1.41).
Si ahora movemos la segunda componente, es decir si $h : M \to N$ es un morfismo en la

categoría ${}^{T}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $e \in \mathbf{Idemp}(T)$ entonces

$$\begin{tikzcd}
eT \otimes_T F(M) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{eT,M}"] \arrow[dr, "\tau_{e,F(M)}"'] \arrow[dd, "eT\otimes_T F(h)"'] & & F(eT \otimes_T M) \arrow[dd, "F(eT\otimes_T h)"] \\
& F(M) \arrow[ur, "F(\gamma_{e,M})"'] \arrow[dd, "F(\lambda_{f(e)})"', near start] & \\
eT \otimes_T F(N) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{eT,N}", near end] \arrow[dr, "\tau_{e,F(N)}"'] & & F(eT \otimes_T N) \\
& F(N) \arrow[ur, "F(\gamma_{e,N})"'] &
\end{tikzcd}$$

donde los paralelogramos son conmutativos porque $\tau_{e,-}$ y $\gamma_{e,-}$ son naturales. De allí la naturalidad de $\Upsilon_{eT,-}$. Si F preserva coproductos, se tiene también la naturalidad de $\Upsilon_{\oplus_I(e_iT),-}$, luego se utiliza una presentación libre $\oplus_I(e_iT) \to X$, para obtener la naturalidad sobre X_T. En conclusión tenemos

Lema 1.6.1. *Sean $F : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ un funtor $\mathbb{K}$–lineal y $M \in {}^{T}\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$.*

(a) $\Upsilon_{eT,M}$ es un isomorfismo de $\mathfrak{D}$–comódulos para cualquier $e \in \mathbf{Idemp}(T)$.

(b) Si F preserva coproductos, entonces $\Upsilon_{-,-}$ es una transformación natural y $\Upsilon_{X,-}$ es un isomorfismo natural para cualquier módulo proyectivo X_T.

(c) Si F preserva límites directos, entonces $F(M)$ es un T–módulo unitario por la izquierda i.e. $F(M) \in {}^{T}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ y $\Upsilon_{T,M}$ es en este caso un isomorfismo de $\mathfrak{D}$–comódulos. Además $\Upsilon_{X,-}$ es un isomorfismo natural para cualquier módulo unitario X_T límite directo de T–módulos unitarios proyectivos.

Demostración. (a). Consideramos $\Theta_{eT,M} : F(eT \otimes_T M) \to eT \otimes_T F(M)$ la composición $\Theta_{eT,M} = \gamma_{e,F(M)} \circ F(\tau_{e,M})$, que es $\mathfrak{D}$–colineal. De una parte tenemos

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{eT,M} \circ \Theta_{eT,M} &= F(\gamma_{e,M}) \circ \tau_{e,F(M)} \circ \gamma_{e,F(M)} \circ F(\tau_{e,M}) \\
&= F(\gamma_{e,M}) \circ F(\lambda_e) \circ F(\tau_{e,M}) \\
&= F(\gamma_{e,M} \circ \lambda_e \circ \tau_{e,M}) \\
&= F(eT \otimes_T M)
\end{aligned}$$

y de otra parte

$$\begin{aligned}
\Theta_{eT,M} \circ \Upsilon_{eT,M} &= \gamma_{e,F(M)} \circ F(\tau_{e,M}) \circ F(\gamma_{e,M}) \circ \tau_{e,F(M)} \\
&= \gamma_{e,F(M)} \circ F(\tau_{e,M} \circ \gamma_{e,M}) \circ \tau_{e,F(M)} \\
&= \gamma_{e,F(M)} \circ F(\lambda_e) \circ \tau_{e,F(M)} \\
&= eT \otimes_T F(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Upsilon_{eT,M}$ es un isomorfismo de $\mathfrak{D}$–comódulos por la derecha.
(b). Observe que en este caso, es fácil de comprobar, de la misma manera que para el caso de $\Upsilon_{-,M}$, que $\Theta_{-,M}$ puede ser extendida a una transformación natural sobre toda la categoría de módulos unitarios $\mathcal{M}_T$. Luego concluimos, usando (a).
(c). Vamos a comprobar solamente la primera aserción porque el resto es consecuencia de resultados anteriores o de esta misma aserción. Fijamos $e \in \mathbf{Idemp}(T)$, se sabe que $eF(M)$ es un B–submódulo unitario sumando directo de $F(M)_B$, como $\rho_{F(M)}$ es T–lineal por la izquierda, $eF(M)$ hereda un estructura de $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha. Por lo tanto $eT \otimes_T F(M) \cong eF(M)$, mediante $\tau_{e,F(M)}$, es un isomorfismo de $\mathfrak{D}$–comódulos por la derecha. Se tiene pues el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
eT \otimes_T F(M) \arrow[rr, "\Upsilon_{eT,M}"] \arrow[dd, "\cong"'] \arrow[dr, "\tau_{e,F(M)}"] & & F(eT \otimes_T M) \arrow[dd, "\cong"] \\
& F(M) \arrow[ur, "F(\gamma_{e,M})"] \arrow[dr] & \\
eF(M) \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, "\cong"] & & F(eM)
\end{tikzcd} \tag{1.42}$$

Lo que implica que $eF(M) \cong F(eM)$ en $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$. Recuerde ahora del capítulo de apéndices sección **A**.2 el orden $e \leq e' \Leftrightarrow e = ee' = e'e$ sobre $\mathbf{Idemp}(T)$, se sabe de allí que en cualquier T–módulo unitario por la izquierda X, la familia $\{eX\}_{e \in \mathbf{Idemp}(T)}$ forma un sistema dirigido de $\mathbb{K}$–submódulos con las inyecciones canónicas $\mu_{ee'} : eX \to e'X$, para $e \leq e'$ y que $X = \varinjlim(eX)$. Por lo tanto, aplicando esto a ${}_TF(M)$, se tiene

$$\varinjlim(eF(M)) \cong \varinjlim(F(eM)) \cong F(\varinjlim(eM)) \cong F(M)$$

en $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, donde el segundo isomorfismo es por hipótesis y el último porque ${}_TM$ es unitario. De esta manera

$$T \otimes_T F(M) \cong \Big(\varinjlim(eT)\Big) \otimes_T F(M) \cong \varinjlim(eT \otimes_T F(M)) \cong \varinjlim(eF(M)) \cong F(M)$$

se tiene entonces una aplicación inversa de $\varsigma_{F(M)}$ y luego $F(M)$ es un T–módulo unitario por la izquierda. □

Basándose sobre el Lema 1.6.1 y su demostración, se puede extender los resultados [52, lemmata 3.2, 3.3, proposition 3.4] al caso de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Por lo tanto podemos enunciar el siguiente teorema análogo de [52, Theorem 3.5] por el caso unitario.

Teorema 1.6.2. *Sean A, B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo, un B–coanillo. Considere $F : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ un funtor exacto y que preserva límites directos (e.g. F es una equivalencia de categorías). Si $\mathfrak{C}_A$ es límite directo de módulos unitarios proyectivos, entonces $F \cong -\square_{\mathfrak{C}} F(\mathfrak{C})$ un isomorfismo natural.*

Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ un morfismo de $A - B$–coanillos. Vamos a definir, análogamente a [52, Proposition 5.4], los funtores inducción y ad-inducción respecto al morfismo de $A - B$–coanillos (φ, ϕ). Para ello hacia falta traducir el material técnico del apartado [52, 5.1], al caso de anillos con unidades locales. Considere pues los siguientes funtores

$$B \otimes_B -, \; - \otimes_A B : {}_B\mathcal{M}_B \longrightarrow {}_B\mathcal{M}_B$$

Para cada X un B–bimódulo unitario, definimos el morfismo de B–bimódulos, $\sigma^r_X : X \otimes_A B \to B \otimes_B X$, vía $x \otimes_A b \mapsto e \otimes_B xb$, donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ tal que $\varphi(e)$ es una unidad del conjunto $\{x, b\}$. Dado un morfismo de B–bimódulos unitarios $f : X \to Y$, se puede comprobar sin dificultad que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes_A B \arrow[r, "\sigma^r_X"] \arrow[d, "f \otimes_A B"'] & B \otimes_B X \arrow[d, "B \otimes_B f"] \\ Y \otimes_A B \arrow[r, "\sigma^r_Y"] & B \otimes_B Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es decir que

$$\sigma^r_- : - \otimes_A B \longrightarrow B \otimes_B -$$

es un morfismo natural. De la misma manera, definimos la transformación natural

$$\sigma^l_- : B \otimes_A - \longrightarrow - \otimes_B B$$

De otra parte, sean X y Y dos B–bimódulos, se puede comprobar que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes_A Y \otimes_A B \arrow[r, "X \otimes_A \sigma^r_Y"] \arrow[d, "\omega_{X,Y} \otimes_A B"'] & X \otimes_A B \otimes_A Y \arrow[d, "\sigma^r_X \otimes_A Y"] \\ X \otimes_B Y \otimes_A B \arrow[r, "\sigma^r_{X \otimes_B Y}"] & B \otimes_B X \otimes_A Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $\omega_{X,Y} : X \otimes_A Y \to X \otimes_B Y$ es la aplicación obvia. Ahora, según [52, Proposition 5.2], estamos en condiciones de definir el funtor de inducción por la derecha

$$\begin{aligned} - \otimes_A B : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} &\longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \\ (X, \rho_X) &\longmapsto (X \otimes_A B, \rho_{X \otimes_A B}) \end{aligned}$$

donde $\rho_{X \otimes_A B} = (X \otimes_A \sigma^r_{\mathfrak{C}}) \circ (X \otimes_A \phi \otimes_A B) \circ (\rho_X \otimes_A B)$ y el funtor de inducción por la izquierda

$$\begin{aligned} B \otimes_A - : {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} &\longrightarrow {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} \\ (Y, \lambda_Y) &\longmapsto (B \otimes_A Y, \lambda_{B \otimes_A Y}) \end{aligned}$$

donde $\lambda_{B \otimes_A Y} = (\sigma^l_{\mathfrak{C}} \otimes_A Y) \circ (B \otimes_A \phi \otimes_A Y) \circ (B \otimes_A \lambda_Y)$. Observe que $B \otimes_A \mathfrak{C}$ es ahora un $(\mathfrak{D}, \mathfrak{C})$–bicomódulo. La siguiente proposición es la version no-unitaria del resultado [52, Proposition 5.4].

Proposición 1.6.3. *Sean A, B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ un morfismo de $A{-}B$–coanillos. Si ${}_A\mathfrak{C}$ preserva el igualador $\mathfrak{eq}_{Y, B\otimes_A \mathfrak{C}}$, para cualquier comódulo $Y_{\mathfrak{D}}$. Entonces el funtor ad-inducción*

$$-\Box_{\mathfrak{D}}(B \otimes_A \mathfrak{C}) : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$$

es un adjunto por la derecha del funtor inducción

$$- \otimes_A B : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$$

La siguiente proposición es una generalización del Lema 1.5.2.

Proposición 1.6.4. *Sean A, B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $(\varphi, \phi) : (A, \mathfrak{C}) \to (B, \mathfrak{D})$ un morfismo de $A - B$–coanillos.*

(1) Considere $(X, \rho_X) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $(Y, \lambda_Y) \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Entonces existe una aplicación canónica y $\mathbb{K}$–lineal

$$\varpi_{X,Y} : X\Box_{\mathfrak{C}}Y \longrightarrow (X \otimes_A B)\Box_{\mathfrak{D}}(B \otimes_A Y)$$

(2) Si $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ son, respectivamente un A'–coanillo y un A''–coanillo, tales que $\mathfrak{C}'_{A'}$ y ${}_{A''}\mathfrak{C}''$ son módulos planos. Entonces

$$\varpi_{-,-} : -\Box_{\mathfrak{C}}- \longrightarrow (- \otimes_A B)\Box_{\mathfrak{D}}(B \otimes_A -)$$

establece una transformación natural de $(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'')$–bicomódulos.

Demostración. (1). Definimos la siguiente aplicación $\mathbb{K}$–lineal

$$\begin{aligned} \chi_{X,Y} : X \otimes_A Y &\longrightarrow (X \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A Y) \\ x \otimes_A y &\longmapsto (x \otimes_A \varphi(e)) \otimes_B (\varphi(e) \otimes_A y) \end{aligned} \tag{1.43}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(A)$, es una unidad del conjunto $\{x, y\}$. Se tiene pues el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X\Box_{\mathfrak{C}}Y \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{X,Y}"] \arrow[dd, dashed, "\varpi_{X,Y}"'] & X \otimes_A Y \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{X,Y}"] \arrow[dd, "\chi_{X,Y}"] & X \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A Y \arrow[d, "X\otimes_A\phi\otimes_A Y"] \\
 & & X \otimes_A \mathfrak{D} \otimes_A Y \arrow[d, "\cong"'] \\
(X \otimes_A B)\Box_{\mathfrak{D}}(B \otimes_A Y) \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{X\otimes_A B, B\otimes_A Y}"] & (X \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A Y) \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{X\otimes_A B, B\otimes_A Y}"] & (X \otimes_A B) \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B (B \otimes_A Y)
\end{tikzcd}$$

cuyo rectángulo de la derecha es fácil de comprobar que es conmutativo y $\varpi_{X,Y}$ viene dada entonces por la propiedad universal del núcleo y que convierte el total del diagrama conmutativo.
(2). Viene del Lema 1.4.1 y del apartado (1). □

1.7. Cotriples sobre módulos y la noción de coanillo.

Los (co)-triples y sus generadores universales, sobre categorías aditivas, han sido detalladamente investigados por S. Eilenberg y J. C. Moore en [38]. La relación entre (co)-triples y funtores adjuntos, ha sido también observada por H. Kleisli en [69], donde se encuentra un generador de cualquier (co)-triple y su correspondiente categoría, conocida por la categoría de Kleisli, véase también [11]. En esta sección, vamos a dar una equivalencia de categorías entre la categoría de A–coanillos (A es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales) y la categoría de los cotriples exactos por la derecha y que preservan coproductos, definidos sobre $\mathcal{M}_A$. Los morfismos de esta última categoría, viene definidos en [11] (véase el capítulo de apéndices). Un tal resultado ha sido afirmado en [38, p. 398], para el caso de coálgebras sobre anillos conmutativos; pero sin demostración concreta.

Fijamos durante los siguientes pasos, A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y

$$F : \mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}_A$$

un funtor covariante exacto por la derecha y que preserva coproductos. Vamos a comprobar como en el caso unitario [98], que F es naturalmente isomorfo al funtor tensor. La estructura de A–bimódulo de $F(A)$, viene dada por la siguiente composición

$$A \xrightarrow{\ \lambda\ } \mathrm{Hom}_A(A_A, A_A) \xrightarrow{\ F\ } \mathrm{Hom}_A(F(A), F(A))$$

donde $\lambda_a : A \to A$, envia $a' \mapsto aa'$, para cualquier $a \in A$. Así también podemos definir una A–acción por la izquierda sobre $F^2(A) = FF(A)$. Se puede pues considerar el funtor $- \otimes_A F(A) : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$, observe que ${}_AF(A)$ no es necesariamente unitario. Se trata entonces de construir un isomorfismo natural $\Upsilon_- : F(-) \to - \otimes_A F(A)$. Para ello sea $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ y

$$\begin{tikzcd}
F(eA) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{eA}"] \arrow[dr, "F(\tau_e)"'] & & eA \otimes_A F(A) \\
& F(A) \arrow[ur, "\gamma_{e,F(A)}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\tau_e : eA \to A$ es la inyección canónica y $\gamma_{e,F(A)}$ es la transformación natural del capítulo de apéndices ecuación ($\mathbf{A}$.4). Si ahora escogemos $f : eA \to e'A$ un morfismo A–lineal, donde $e' \in \mathbf{Idemp}(A)$ es otro idempotente de A. Entonces

$$\begin{tikzcd}
F(eA) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{eA}"] \arrow[dr, "F(\tau_e)"'] \arrow[dd, "F(f)"'] & & eA \otimes_A F(A) \arrow[dd, "f \otimes_A F(A)"] \\
& F(A) \arrow[ur, "\gamma_{e,F(A)}"'] \arrow[dd, "F(\lambda_{f(e)})", near start] & \\
F(e'A) \arrow[rr, dashed, "\Upsilon_{e'A}"] \arrow[dr, "F(\tau_{e'})"'] & & e'A \otimes_A F(A) \\
& F(A) \arrow[ur, "\gamma_{e',F(A)}"'] &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama cuyos paralelogramos del pico es fácil de comprobar que son conmutativos, lo que implica la conmutatividad del rectángulo del fondo. Así Υ_{-} es natural sobre $\{eA\}_{e\in\mathbf{Idemp}(A)}$. De la misma manera, se puede considerar

$$\begin{tikzcd} eA\otimes_A F(A) \arrow[rr, dashed, "\Theta_{eA}"] \arrow[dr, "\tau_{e,F(A)}"'] & & F(eA) \\ & F(A) \arrow[ur, "F(\pi_e)"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\pi_e : A \to eA$ es la proyección canónica y $\tau_{e,F(A)}$ es la transformación natural del capítulo de apéndices ecuación ($\mathbf{A}$.4). Un cálculo rutinario comprueba que Θ_{eA} es efectivamente el morfismo inverso de Υ_{eA}, para cada $e \in \mathbf{Idemp}(A)$. Como F preserva coproductos, $\Upsilon_{\oplus_I e_i A}$ es también un isomorfismo para cualquier conjunto de idempotentes $\{e_i\}_{i\in I}$ de A. Usando las representaciones libres en $\mathcal{M}_A$ y el efecto de que F es exacto por la derecha junto con el Teorema de Mitchell [86, Theorem 4.5.2], [89, Theorem 3.6.5], deducimos que $F \cong -\otimes_A F(A)$ mediante una única extensión de Υ_{-}. Denotemos pues este isomorfismo natural por

$$\Upsilon_{-} : F(-) \longrightarrow -\otimes_A F(A) \tag{1.44}$$

Hemos visto que $eF(A) \cong F(eA)$, vía Υ_{eA}, para cualquier $e \in \mathbf{Idemp}(A)$. Ahora usando el isomorfismo natural $F \cong -\otimes_A F(A)$, se ve que F preserva límites directos. Entonces $\varinjlim(eF(A)) \cong F(\varinjlim(eA)) \cong F(A)$, lo que implica que ${}_AF(A)$ es unitario y luego $F(A)$ es un A–bimódulo unitario.

Lema 1.7.1. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y F_1, $F_2 : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ dos funtores exactos por la derecha y que preservan coproductos. Supongamos que existe $\chi : F_1 \to F_2$ una transformación natural. Entonces*

(1) El morfismo $\chi_A : F_1(A) \to F_2(A)$ es A–bilineal.

(2) Para cualquier módulo unitario X_A, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "\Upsilon_X^{F_1}"] \arrow[d, "\chi_X"'] & X\otimes_A F_1(A) \arrow[d, "X\otimes_A \chi_A"] \\ F_2(X) \arrow[r, "\Upsilon_X^{F_2}"] & X\otimes_A F_2(X) \end{tikzcd}$$

donde $\Upsilon_{-}^{F_i}$ es el isomorfismo natural (1.44) *asociado al funtor F_i, $i = 1, 2$.*

Demostración. (1). Para cualquier $a \in A$, se tiene $\chi_A \circ F_1(\lambda_a) = F_2(\lambda_a) \circ \chi_A$, porque χ es natural y λ_a A–lineal por la derecha. Luego χ es A–bilineal.
(2). Supongamos que X es de forma $X = eA$, para un cierto idempotente e de A. Denotemos

por $\Upsilon^i_- : F_i \to - \otimes_A F_i(A)$, $i = 1, 2$, el isomorfismo natural (1.44) asociado al funtor F_i, tenemos pues

$$\begin{aligned} \Upsilon^2_{eA} \circ \chi_{eA} &= \gamma_{e,F_2(A)} \circ F_2(\tau_e) \circ \chi_{eA} \\ &= \gamma_{e,F_2(A)} \circ \chi_A \circ F_1(\tau_e), \ \chi_- \text{ es natural} \\ &= (eA \otimes_A \chi_A) \circ \gamma_{e,F_1(A)} \circ F_1(\tau_e), \ \gamma_{e,-} \text{ es natural} \\ &= (eA \otimes_A \chi_A) \circ \Upsilon^1_{eA} \end{aligned}$$

lo que implica la conmutatividad del citado diagrama para $X = eA$. Para el resto de módulos unitarios, utilizaremos las representaciones libres $\oplus_I e_i A \to X$, donde $\{e_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de idempotentes de A. $\square$

Para cualquier consulta sobre las siguiente definiciones, enviamos al lector al capítulo de apéndices. De ahora en adelante consideramos (F, δ, ξ) un cotriple sobre $\mathcal{M}_A$ tal que el funtor $F : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ sea exacto por la derecha y que preserva coproductos. Nuestro objetivo en los siguientes pasos es montar sobre el A–bimódulo unitario $F(A)$, una estructura de A–coanillo. Considere pues la aplicaciones A–lineales por la derecha

$$\Delta : F(A) \xrightarrow{\delta_A} F^2(A) \xrightarrow{\Upsilon_{F(A)}} F(A) \otimes_A F(A)$$

$$\varepsilon : F(A) \xrightarrow{\xi_A} A$$

donde Υ_- es isomorfismo natural de (1.44). Primero vamos a comprobar que Δ y ε son A–lineales por la izquierda. Para cualquier $a \in A$ y en la notación de arriba $\lambda_a : A \to A$ designa la multiplicación por a por la izquierda. Como ξ es natural, se tiene $\xi_A \circ F(\lambda_a) = \lambda_a \circ \xi_A$, para cualquier $a \in A$. Lo que implica que ε es A–lineal por la izquierda. La A–linealidad de Δ viene del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "F(\lambda_a)"'] & F^2(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F(A)}"] \arrow[d, "F^2(\lambda_a)"'] & F(A) \otimes_A F(A) \arrow[d, "F(\lambda_a)\otimes_A F(A)"] \\ F(A) \arrow[r, "\delta_A"] & F^2(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F(A)}"] & F(A) \otimes_A F(A) \end{tikzcd}$$

donde se ve que δ_A es A–bilineal.

Denotemos por $\Upsilon^2_- : F^2 \to - \otimes_A F^2(A)$ el isomorfismo natural asociado el funtor F^2. La coasociatividad de Δ, viene dada por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "\delta_A"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F^2(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F(A)}"] \arrow[d, "F(\delta_A)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & F(A) \otimes_A F(A) \arrow[d, "\delta_A \otimes_A F(A)"] \\ F^2(A) \arrow[r, "\delta_{F(A)}"] \arrow[d, "\Upsilon_{F(A)}"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & F^3(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F^2(A)}"] \arrow[d, "\Upsilon^2_{F(A)}"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & F^2(A) \otimes_A F(A) \arrow[d, "\Upsilon_{F(A)\otimes_A F(A)}"] \\ F(A) \otimes_A F(A) \arrow[r, "F(A)\otimes_A \delta_A"] & F(A) \otimes_A F^2(A) \arrow[r, "F(A)\otimes_A \Upsilon_{F(A)}"] & F(A) \otimes_A F(A) \otimes_A F(A) \end{tikzcd}$$

recordar que δ_A es A–bilineal. El rectángulo (1) en este diagram es conmutativo porque (F, δ, ξ) es un cotriple. La naturalidad de Υ_- implica la conmutatividad del rectángulo (2). Aplicando el Lema 1.7.1, con la siguiente transformación natural $\chi = \delta : F \to F^2$, se tiene la conmutatividad del rectángulo (3). Para el rectángulo (4), se aplica el mismo Lema; pero esta vez con los datos $F_1 = F^2$, $F_2 = F(-) \otimes_A F(A)$ y $\chi = \Upsilon_{F(-)}$. Por lo tanto el total del diagrama es conmutativo y luego Δ es coasociativa. Falta de comprobar la propiedad counitaria. Para ello es fácil de ver que la naturalidad de Υ_-, y la propiedad counitaria del cotriple, implican que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[dr, equal] & F^2(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F(A)}"] \arrow[d, "F(\xi_A)"] & F(A) \otimes_A F(A) \arrow[d, "\xi_A \otimes_A F(A)"] \\ & F(A) \arrow[r, "\Upsilon_A"] & A \otimes_A F(A) \end{tikzcd}$$

es conmutativo y luego $(\varepsilon \otimes_A F(A)) \circ \Delta = F(A)$. La otra igualdad, viene del siguiente diagrama cuyo triángulo es conmutativo por la propiedad counitaria del cotriple y cuyo rectángulo es conmutativo por el Lema 1.7.1, escogiendo los datos $F_1 = F$, $F_2 = id_{\mathcal{M}_A}$ y $\chi = \xi$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[dr, equal] & F^2(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F(A)}"] \arrow[d, "\xi_{F(A)}"] & F(A) \otimes_A F(A) \arrow[d, "F(A) \otimes_A \xi_A"] \\ & F(A) \arrow[r, "\Upsilon^0_{F(A)}"] & A \otimes_A F(A) \end{tikzcd}$$

donde $\Upsilon^0 : id_{\mathcal{M}_A} \to - \otimes_A A$ es el isomorfismo natural asociado al funtor $id_{\mathcal{M}_A}$. En conclusión estamos en posición de enunciar

Proposición 1.7.2. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y (F, δ, ξ) un cotriple sobre $\mathcal{M}_A$ tal que $F : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ sea un funtor exacto por la derecha y preserva coproductos. Si $\Upsilon_- : F \to - \otimes_A F(A)$ es el isomorfismo natural asociado a F. Entonces $(F(A), \Upsilon_{F(A)} \circ \delta_A, \xi_A)$ es un A–coanillo.*

En consiguiente vamos a caracterizar el cogenerador universal del cotriple (F, δ, ξ) sobre $\mathcal{M}_A$. Según la Proposición 1.7.2, $F(A)$ es un A–coanillo, sea pues

$$U_A : \mathcal{M}^{F(A)} \rightleftarrows \mathcal{M}_A : - \otimes_A F(A)$$

la adjunción entre módulos y comódulos.

Proposición 1.7.3. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y (F, δ, ξ) un cotriple sobre $\mathcal{M}_A$ tal que $F : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ sea un funtor exacto por la derecha y preserva coproductos, con el cogenerador universal $\left(\mathcal{M}_A^F, S^F \dashv T^F\right)$ (véase el capítulo de apéndices). Entonces existe un isomorfismo de categorías*

$$\mathcal{M}_A^F \cong \mathcal{M}^{F(A)},$$

modulo el cual, se tiene los isomorfismos naturales

$$S^F \cong U_A, \;\; y \;\; - \otimes_A F(A) \cong T^F.$$

Demostración. Usando la notación de la sección **A**.4, el isomorfismo de categorías viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A^F &\longrightarrow \mathcal{M}^{F(A)} \\ (X, d^X) &\longmapsto \big(S^F(X) = X, \rho_X = \Upsilon_X \circ d^X\big) \\ \big(X, d^X = \Upsilon_X^{-1} \circ \rho_X\big) &\longleftarrow\!\shortmid (X, \rho_X) \end{aligned} \tag{1.45}$$

Primero comprobaremos que la flecha $\mathcal{M}_A^F \to \mathcal{M}^{F(A)}$ es un funtor bien definido. Sea pues (X, d^X) un objeto en la categoría $\mathcal{M}_A^F$, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d^X"] \arrow[d, "d^X"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F(X) \arrow[r, "\Upsilon_X"] \arrow[d, "\delta_X"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & X \otimes_A F(A) \arrow[d, "X \otimes_A \delta_A"] \\ F(X) \arrow[r, "F(d^X)"] \arrow[d, "\Upsilon_X"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & F^2(X) \arrow[r, "\Upsilon_X^2"] \arrow[d, "\Upsilon"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & X \otimes_A F^2(X) \arrow[d, "X \otimes_A \Upsilon_{F(A)}"] \\ X \otimes_A F(X) \arrow[r, "d^X \otimes_A F(A)"] & F(X) \otimes_A F(A) \arrow[r, "\Upsilon_X \otimes_A F(A)"] & X \otimes_A F(A) \otimes_A F(A) \end{tikzcd}$$

(1) es conmutativo por definición de los objetos de $\mathcal{M}_A^F$. El rectángulo (2) resulta conmutativo si aplicamos el Lema 1.7.1 con la transformación natural $\chi = \delta : F \to F^2$. La conmutatividad de (3) viene por la naturalidad de Υ_{-}. Por último (4) resulta conmutativo después de aplicar el Lema 1.7.1 con la transformación natural $\chi = \Upsilon_{F(-)} : F^2(-) \to F(-) \otimes_A F(A)$, aquí hay que observar que el isomorfismo natural asociado al funtor $F(-) \otimes_A F(A)$ es $\Upsilon_{-} \otimes_A F(A)$ i.e. $\Upsilon_{-}^{F(-)\otimes_A F(A)} = \Upsilon_{-} \otimes_A F(A)$. En conclusión el diagrama total es conmutativo lo que nos da la coasociatividad de esta nueva coacción. La propiedad counitaria viene del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d^X"] & F(X) \arrow[r, "\Upsilon_X"] \arrow[d, "\xi_X"] & X \otimes_A F(A) \arrow[d, "X \otimes_A \xi_A"] & \\ & X \arrow[r, "\Upsilon_X^0"] & X \otimes_A A \arrow[r, "(\Upsilon_X^0)^{-1}"] & X \end{tikzcd}$$

En resumen el citado funtor está bien definido sobre los objetos. Falta ver si lo es sobre los morfismos. Para ello sea $f : (X, d^X) \to (X', d^{X'})$ un morfismo en la categoría $\mathcal{M}_A^F$, entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d^X"] \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[r, "\Upsilon_X"] \arrow[d, "F(f)"] & X \otimes_A F(A) \arrow[d, "f \otimes_A F(A)"] \\ X' \arrow[r, "d^{X'}"] & F(X') \arrow[r, "\Upsilon_{X'}"] & X' \otimes_A F(A) \end{tikzcd}$$

que es un diagrama conmutativo y luego f es $F(A)$–colineal por la derecha. De la misma manera y usando los isomorfismos naturales $\big(\Upsilon_{-}^{-}\big)^{-1}$ y su versión correspondiente del Lema 1.7.1, comprobaremos que $(X, \rho_X) \to (X, d^X = \Upsilon_X^{-1} \circ \rho_X)$ es un funtor bien definido.

Está claro ahora que (1.45), establece un isomorfismo de categorías. El isomorfismo natural $S^F \cong U_A$ es evidente. Sea ahora $X \in \mathcal{M}_A$, se sabe que $T^F(X) = (F(X), d^{F(X)} = \delta_X)$, luego

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\Upsilon_{F(X)}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & F^2(X) \arrow[r, "\Upsilon_X"] \arrow[d, "\Upsilon_X^2"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & F(X) \otimes_A F(A) \arrow[d, "\Upsilon_{X \otimes_A F(A)}"] \\
X \otimes_A F(A) \arrow[r, "X \otimes_A \delta_A"] & X \otimes_A F^2(A) \arrow[r, "X \otimes_A \Upsilon_{F(A)}"] & X \otimes_A F(A) \otimes_A F(A)
\end{tikzcd}$$

donde (1) es conmutativo, por la aplicación del Lema 1.7.1 con $\chi = \delta : F \to F^2$. (2) lo es también aplicando el mismo Lema pero utilizando la transformación natural $\chi = \Upsilon_{F(-)} : F^2 \to F(-) \otimes_A F(A)$. Módulo el isomorfismo de categorías (1.45), Υ_{-} es ahora un isomorfismo natural de $F(A)$–comódulos por la derecha. Por lo tanto $T^F \cong - \otimes_A F(A)$, mediante este mismo isomorfismo natural. □

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Denotemos por $\mathcal{C}_A$ la categoría de cotriples sobre $\mathcal{M}_A$, cuyos funtores son exactos por la derecha y que preservan coproductos. El resultado principal de esta sección se resume en el siguiente teorema.

Teorema 1.7.4. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales junto con sus correspondientes categorías $A - \mathfrak{coring}$ y $\mathcal{C}_A$. Entonces existe una equivalencia de categorías*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_A &\longrightarrow A - \mathfrak{coring} \\
(F, \delta, \xi) &\longmapsto (F(A), \Upsilon_A \circ \delta_A, \xi_A) \\
[\Phi : F \to F'] &\longmapsto [\Phi_A : F(A) \to F'(A)]
\end{aligned}$$

cuyo funtor inverso es

$$\begin{aligned}
A - \mathfrak{coring} &\longrightarrow \mathcal{C}_A \\
(\mathfrak{C}, \Delta, \varepsilon) &\longmapsto (U_A \circ (- \otimes_A \mathfrak{C}), - \otimes_A \Delta, - \otimes_A \varepsilon) \\
[\phi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'] &\longmapsto [- \otimes_A \phi : - \otimes_A \mathfrak{C} \to - \otimes_A \mathfrak{C}']
\end{aligned}$$

Demostración. Vamos a comprobar solamente que dichos funtores son bien definidos; el resto es evidente. Sea $\Phi : (F, \delta, \xi) \to (F', \delta', \xi')$ un morfismo de cotriples sobre $\mathcal{M}_A$. El morfismo Φ_A es A–bilineal, según el Lema 1.7.1. La propiedad counitaria, $\xi_A \circ \Phi_A = \xi_A$, viene dada por definición de Φ. Denotemos por Υ'_{-} la transformación natural asociada a F'. Aplicando el Lema 1.7.1 con la trasformación natural $\Phi : F \to F'$ y usando la naturalidad de Υ_{-}, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & F'F'(A) \arrow[r, "\Upsilon_{F'(A)}"] & F'(A)\otimes_A F'(A) \\
 & & F'F(A) \arrow[u, "F'(\Phi_A)"] \arrow[r, "\Upsilon'_{F(A)}"] & F(A)\otimes_A F'(A) \arrow[u, "\Phi_A\otimes_A F'(A)"'] \\
FF(A) \arrow[urr, "\Phi_{F(A)}"] \arrow[r, "\Upsilon_{F(A)}"'] & F(A)\otimes_A F(A) \arrow[urr, "F(A)\otimes_A \Phi_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{F'(A)} \circ F'(\Phi_A) \circ \Phi_{F(A)} &= (\Phi_A \otimes_A F'(A)) \circ \Upsilon'_{F(A)} \circ \Phi_{F(A)} \\
&= (\Phi_A \otimes_A F'(A)) \circ (F(A) \otimes_A \Phi_A) \circ \Upsilon_{F(A)} \\
&= (\Phi_A \otimes_A \Phi_A) \circ \Upsilon_{F(A)}
\end{aligned}$$

lo que implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta_A"'] & F'(A) \arrow[d, "\delta'_A"] \\
F^2(A) \arrow[r, "F'(\Phi_A)\circ\Phi_{F(A)}=", "\Phi_{F'(A)}\circ F(\Phi_A)"'] \arrow[d, "\Upsilon_{F(A)}"'] & F'^2(A) \arrow[d, "\Upsilon'_{F'(A)}"] \\
F(A)\otimes_A F(A) \arrow[r, "\Phi_A\otimes_A\Phi_A"] & F'(A)\otimes_A F'(A)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y luego $\Phi_A : F(A) \to F'(A)$ es un morfismo de A–coanillos. Sea ahora $\phi : (\mathfrak{C}, \Delta, \varepsilon) \to (\mathfrak{C}', \Delta', \varepsilon')$ un morfismo de A–coanillos. Consideramos los cotriples correspondientes y definimos la transformación natural

$$\Phi_{-} : - \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{-\otimes_A \phi} - \otimes_A \mathfrak{C}'$$

Es evidente que

$$\begin{aligned}
\Phi_{X\otimes_A \mathfrak{C}'} \circ (\Phi_X \otimes_A \mathfrak{C}) &= X \otimes_A \phi \otimes_A \phi \\
&= (\Phi_X \otimes_A \mathfrak{C}') \circ \Phi_{X\otimes_A \mathfrak{C}}
\end{aligned}$$

para cualquier módulo X_A. Luego

$$\begin{tikzcd}
X\otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "X\otimes_A\phi"] \arrow[d, "X\otimes_A\Delta"'] & X\otimes_A \mathfrak{C}' \arrow[d, "X\otimes_A\Delta'"] \\
X\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "\Phi_{X\otimes_A\mathfrak{C}'}\circ(\Phi_X\otimes_A\mathfrak{C})=", "(\Phi_X\otimes_A\mathfrak{C}')\circ\Phi_{X\otimes_A\mathfrak{C}}"'] & X\otimes_A \mathfrak{C}'\otimes_A \mathfrak{C}'
\end{tikzcd}$$

lo que implica la coasociatividad de la transformación natural Φ_{-}. La propiedad counitaria de ϕ implica que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[dr, "X\otimes_A \varepsilon_{\mathfrak{C}}"'] & X \otimes_A \mathfrak{C}' \arrow[d, "X\otimes_A \varepsilon_{\mathfrak{C}'}"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y luego $\Phi_{-} : - \otimes_A \mathfrak{C} \to - \otimes_A \mathfrak{C}$ es un morfismo de cotriples. $\square$

Observación 1.7.5. Los funtores Frobenius entre categorías de módulos unitarios sobre anillos unitarios han sido investigados en [30]. Véase también, [87], [76], [27], por el historial de este tipo de funtores. Un *par de Frobenius*, consiste en una pareja de funtores (F, G), tales que G es adjunto por la derecha y por la izquierda de F. Un funtor F es un funtor de Frobenius, si existe G tal que (F, G) forman un par de Frobenius. Según [30, Theorem 2.1], los pares de Frobenius, vienen inducidos por bimódulos finitamente generados y proyectivos por la derecha y por la izquierda. Con esta caracterización, se puede comprobar que los cotriples asociados a un par de Frobenius, entre categorías de módulos, corresponden a coanillos de coendomorfismos de módulos quasi-finitos i.e. finitamente generados y proyectivos, considerados en el Ejemplo 2.1.5.

Capítulo 2

Reconstrucción, Coanillos de Comatrices y la Teoría del Descent.

Introducción

En este capítulo caracterizaremos primero los coanillos (sobre anillos con unidades locales) cuya categoría de comódulos (por la derecha) posee un generador finitamente generado y proyectivo. La estructura de esta clase de coanillos la proporcionan los coanillos de comatrices finitas. A cada bimódulo finitamente generado y proyectivo por un lado, se le asocia su coanillo de comatrices finitas. Si el bimódulo es un anillo extensión (de anillos con unidades locales) de otro anillo, entonces el coanillo correspondiente coincide con el coanillo canónico de Sweedler. Nuestros métodos se basan sobre la equivalencia de categorías entre comódulos y módulos sobre el anillo de endomorfismos de este generador (Teorema de Gabriel-Popescu). Lo que nos ha permitido ofrecer un Teorema del Descent generalizado para módulos, lo cual en caso de extensiones de anillos, implica el Descent clásico.

En segundo lugar caracterizaremos los coanillos sobre anillos unitarios y cuya categoría de comódulos posee un conjunto de generadores pequeños y proyectivos. Esta vez son los coanillos de comatrices infinitas, quien nos proporciona la estructura de esta clase de coanillos. A cada categoría aditiva pequeña y un funtor fiel entre esta y la sub-categoría de módulos finitamente generados y proyectivos (sobre anillo unitario), se le asocian su coanillo de comatrices infinitas. Si hay un sólo objeto, entonces el coanillo de comatrices correspondiente coincide con el coanillo de comatrices finitas (definido sobre anillo unitario). La caracterización de esta parte se basa sobre el Teorema de Freyd [44, p. 120] en combinación con el Teorema Gabriel [46, Proposition II2] (véase también [60]).

Aparentemente los coanillos de comatrices finitas son caso particular de los coanillos de comatrices infinitas. Esto es el caso cuando el anillo de escalares es un anillo unitario. Notemos que todavía no existe una definición concreta de comatrices infinitas con escalares en un anillo sin unidad (o con unidades locales). Así, en nuestro procedimiento, vamos a analizar aisladamente cada caso del otro.

2.1. Comódulos quasi-finitos y coanillo de coendomorfismos.

Los comódulos quasi-finitos y sus coálgebras de coendomorfismos en el caso de coálgebras sobre cuerpos pueden encontrarse en [97], el caso de coálgebras sobre anillos conmutativos lo describe [5]. Para coanillos sobre anillos unitarios, los comódulos quasi-finitos han sido redefinidos en [52], véase también [14]. Aquí nosotros vamos a adaptar la versión de [52, Section 4] al caso de coanillos sobre $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales.

Sean A, B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo.

Definición 2.1.1. Un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo N, se dice que es *quasi-finito* como $\mathfrak{D}$–comódulo por la derecha, si el funtor $- \otimes_A N : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ tiene un adjunto por la izquierda $h_{\mathfrak{D}}(N, -) : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \to \mathcal{M}_A$. Este último funtor es llamado el *funtor co-hom* asociado a N. A veces es conveniente decir que N es $(A, \mathfrak{D})$–quasi-finito para concretar el anillo de escalar del lado izquierdo.

El siguiente isomorfismo natural será el asociado a esta adjunción

$$\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_A(h_{\mathfrak{D}}(N, X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, Y \otimes_A N) \tag{2.1}$$

para cualquier $X \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, $Y \in \mathcal{M}_A$. Sea $\theta_- : id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}} \to h_{\mathfrak{D}}(N, -) \otimes_A N$ la unidad de la adjunción (2.1). Según las notaciones de la sección **A**.4 del capítulo de apéndices, sabemos que

$$\Phi_{X,Y}(f) = (f \otimes_A N)\theta_X, \text{ para cualquier } f : h_{\mathfrak{D}}(N, X) \to Y.$$

En lo siguiente vamos a dotar $h_{\mathfrak{D}}(N, X)$ de una $\mathfrak{C}$–coacción por la derecha, para cualquier comódulo $X_{\mathfrak{D}}$. Considere pues la composición de aplicaciones

$$X \xrightarrow{\theta_X} h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A N \xrightarrow{h_{\mathfrak{D}}(N,X) \otimes_A \lambda_N} h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N$$

luego existe un único morfismo A–lineal $\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)} : h_{\mathfrak{D}}(N, X) \to h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A \mathfrak{C}$ tal que

$$(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)} \otimes_A N) \circ \theta_X = (h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A \lambda_N) \circ \theta_X$$

Para comprobar la coasociatividad de $\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}$ basta, según la sección **A**.4 del capítulo de apéndices, comprobar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\theta_X"] & & \\
& h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A N \arrow[r, "\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)} \otimes_A N"] \arrow[d, "\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)} \otimes_A N"'] & h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N \arrow[d, "h_{\mathfrak{D}}(N,X) \otimes_A \Delta \otimes_A N"] \\
& h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N \arrow[r, "\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N"] & h_{\mathfrak{D}}(N, X) \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A N
\end{tikzcd}$$

Se tiene pues

$$\begin{aligned}
&(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A \Delta \otimes_A N)\circ(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A N)\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A \Delta \otimes_A N)\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A \lambda_N)\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A (\Delta \otimes_A N\circ\lambda_N))\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A \lambda_N \otimes_A \mathfrak{C})\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A \lambda_N)\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A \lambda_N)\circ(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A N)\circ\theta_X \\
&= (\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A \mathfrak{C}\otimes_A N)\circ(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A N)\circ\theta_X
\end{aligned}$$

la propiedad counitaria viene dada por

$$\begin{aligned}
(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A\varepsilon\otimes_A N)\circ(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A N)\circ\theta_X &= (h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A\varepsilon\otimes_A N)\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A\lambda_N)\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A(\varepsilon\otimes_A N\circ\lambda_N))\circ\theta_X = \theta_X
\end{aligned}$$

Sea ahora $f : X \to X'$ un morfismo $\mathfrak{D}$–colineal, entonces

$$\begin{aligned}
(h_{\mathfrak{D}}(N,f)\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N)\circ(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A N)\circ\theta_X &= (h_{\mathfrak{D}}(N,f)\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N)\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A\lambda_N)\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X')\otimes_A\lambda_N)\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,f)\otimes_A N)\circ\theta_X \\
&= (h_{\mathfrak{D}}(N,X')\otimes_A\lambda_N)\circ\theta_{X'}\circ f \\
&= (\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X')}\otimes_A N)\circ\theta_{X'}\circ f \\
&= (\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X')}\otimes_A N)\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,f)\otimes_A N)\circ\theta_X
\end{aligned}$$

lo que implica que el morfismo $h_{\mathfrak{D}}(N,f) : h_{\mathfrak{D}}(N,X) \to h_{\mathfrak{D}}(N,X')$ es $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha. Lo que establece el funtor

$$h_{\mathfrak{D}}(N,-) : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$$

Proposición 2.1.2. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Sea N un $(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$–bicomódulo. Supongamos que ${}_B\mathfrak{D}$ preserva el igualador $\mathfrak{eq}_{Y,N}$ para cualquier comódulo $Y_{\mathfrak{C}}$.*

(1) Si N es $(A,\mathfrak{D})$–quasi-finito, entonces el isomorfismo natural (2.1) *se restringe a un isomorfismo natural* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(h_{\mathfrak{D}}(N,X),Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(X, Y\square_{\mathfrak{C}}N)$. *Por lo tanto $h_{\mathfrak{D}}(N,-)$ es un adjunto por la izquierda de $-\square_{\mathfrak{C}}N$.*

(2) Recíprocamente, si $-\square_{\mathfrak{C}}N : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ tiene un adjunto por la izquierda, entonces N es $(A,\mathfrak{D})$–quasi-finito.

Demostración. (1). Basta comprobar que si $f : h_{\mathfrak{D}}(N,X) \to Y$ es un morfismo $\mathfrak{C}$–colineal, entonces la imagen de $(f\otimes_A N)\circ\theta_X$ está dentro de $Y\square_{\mathfrak{C}}N$. Para ello

$$\begin{aligned}
\mathfrak{eq}_{Y,N}\circ(f\otimes_A N)\circ\theta_X &= (f\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N)\circ(\rho_{h_{\mathfrak{D}}(N,X)}\otimes_A N)\circ\theta_X - (Y\otimes_A\lambda_N)\circ(f\otimes_A N)\circ\theta_X \\
&= (f\otimes_A\mathfrak{C}\otimes_A N)\circ(h_{\mathfrak{D}}(N,X)\otimes_A\lambda_N)\circ\theta_X - (Y\otimes_A\lambda_N)\circ(f\otimes_A N)\circ\theta_X \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2). Como $\mathfrak{C}\square_{\mathfrak{C}}N \subseteq \mathfrak{C}\otimes_A N$ escinde, el Lema 1.4.2, implica que $(-\otimes_A \mathfrak{C})\square_{\mathfrak{C}}N \cong -\otimes_A (\mathfrak{C}\square_{\mathfrak{C}}N) \cong -\otimes_A N$ isomorfismos naturales. Pero U_A es adjunto por la izquierda de $-\otimes_A \mathfrak{C}$ y por hipótesis $U_A \circ h_{\mathfrak{D}}(N,-)$ es adjunto de $-\otimes_A N$. $\square$

En lo que sigue vamos a definir el coanillo de coendomorfismos asociado a un $(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$–bicomódulo N que es $(A,\mathfrak{D})$–quasi-finito; así como el morfismo canónico de A–coanillos correspondiente. Sea N $(A,\mathfrak{D})$–quasi-finito, utilizando la aplicación (1.32) junto con la notación de esta misma sección, considere

$$A \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(N,N) \xrightarrow{h_{\mathfrak{D}}(N,-)} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(h_{\mathfrak{D}}(N,N),h_{\mathfrak{D}}(N,N))$$

lo que implica que $h_{\mathfrak{D}}(N,N)$ es un A–bimódulo. De la misma manera, componiendo esta vez con el funtor $-\otimes_A N$, se tiene una estructura de (A,B)–bimódulo sobre $h_{\mathfrak{D}}(N,N)\otimes_A N$. Observe que estas nuevas acciones por la izquierda no son por el momento unitarias.

Proposición 2.1.3. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo. Sea (N,ρ_N,λ_N) un $(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$–bicomódulo que es $(A,\mathfrak{D})$–quasi-finito. Denotemos por $h_{\mathfrak{D}}(N,N) := e_{\mathfrak{D}}(N)$ y por $\xi : h_{\mathfrak{D}}(N,-)\circ -\square_{\mathfrak{C}}N \to id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}}$ la counidad asociada a la adjunción de la Proposición 2.1.2(2). Entonces*

(1) $e_{\mathfrak{D}}(N)$ es un A–bimódulo unitario que admite una estructura de A–coanillo. En particular N se convierte en un $e_{\mathfrak{D}}(N)$–comódulo por la izquierda.

(2) La aplicación $\mathsf{can}_N : e_{\mathfrak{D}(N)} \to \mathfrak{C}$ definida por $\mathsf{can}_N = \xi_{\mathfrak{C}}\circ h_{\mathfrak{D}}(N,\lambda_N)$, es un morfismo de A–coanillos. Además la estructura inducida de comódulo por la izquierda de ${}_{\mathsf{can}_N}(N)$ coincide con la estructura inicial de ${}_{\mathfrak{C}}N$.

Demostración. Primero vamos a comprobar que $\theta_N : N \to e_{\mathfrak{D}}(N)\otimes_A N$ es A–bilineal. Sea $a\in A$ y $\lambda_a : N \to N$ la multiplicación por la izquierda por a. Como λ_a es $\mathfrak{D}$–colineal, usando la naturalidad de θ_-, se tiene $(h_{\mathfrak{D}}(N,\lambda_a)\otimes_A N)\circ\theta_N = \theta_N\circ\lambda_a$, lo que quiere decir que θ_N es A–lineal por la izquierda.
(1). Consideramos ahora la composición

$$N \xrightarrow{\iota_N} A\otimes_A N \xrightarrow{A\otimes_A\theta_N} A\otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N)\otimes_A N$$

donde ι_N es el isomorfismo canónico, vía $x\mapsto e\otimes_A x$ con $ex = x$ y $e\in \mathbf{Idemp}(A)$. Existe pues un único morfismo $\alpha_N : e_{\mathfrak{D}}(N) \to A\otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N)$ tal que $(\alpha_N\otimes_A N)\circ\theta_N = (A\otimes_A\theta_N)\circ\iota_N$. De otra parte considere la siguiente aplicación A–lineal por la derecha

$$\begin{aligned} \kappa_{e_{\mathfrak{D}}(N)} : A\otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) &\longrightarrow e_{\mathfrak{D}}(N) \\ a\otimes_A y &\longmapsto h_{\mathfrak{D}}(N,\lambda_a)(y) = ay \end{aligned}$$

Es fácil de comprobar que $(\kappa_{e_{\mathfrak{D}}(N)}\otimes_A N)\circ(A\otimes_A\theta_N)\circ\iota_N = \theta_N$. Por lo tanto $(\kappa_{e_{\mathfrak{D}}(N)}\otimes_A N)\circ(\alpha_N\otimes_A N)\circ\theta_N = \theta_N$, lo que implica que $\kappa_{e_{\mathfrak{D}}(N)}\circ\alpha_N = e_{\mathfrak{D}}(N)$, entonces α_N es inyectiva y $e_{\mathfrak{D}}(N)$ es un A–módulo unitario por la izquierda y luego un A–bimódulo unitario. La comultiplicación de $e_{\mathfrak{D}}(N)$, viene dada por la siguiente composición

$$N \xrightarrow{\theta_N} e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A N \xrightarrow{e_{\mathfrak{D}}(N)\otimes_A \theta_N} e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A N$$

existe pues un único morfismo A–lineal por la derecha

$$\Delta' : e_{\mathfrak{D}}(N) \longrightarrow e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N)$$

tal que $(\Delta' \otimes_A N) \circ \theta_N = (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N$. Ahora Δ' es A–lineal por la izquierda porque

$$(h_{\mathfrak{D}}(N, \lambda_a) \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A N) \circ (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N = (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ (h_{\mathfrak{D}}(N, \lambda_a) \otimes_A N) \circ \theta_N,$$

para cualquier $a \in A$. Vamos a comprobar que Δ' es coasociativa, por ello se tiene de una parte

$$\begin{aligned}
(e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \Delta' \otimes_A N) \circ (\Delta' \otimes_A N) \circ \theta_N &= (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \Delta' \otimes_A N) \circ (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N \\
&= (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A ((\Delta' \otimes_A N) \circ \theta_N)) \circ \theta_N \\
&= (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A ((e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N)) \circ \theta_N \\
&= (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N
\end{aligned}$$

de otra parte

$$\begin{aligned}
(\Delta' \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A N) \circ (\Delta' \otimes_A N) \circ \theta_N &= (\Delta' \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A N) \circ (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N \\
&= (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ (\Delta' \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N \\
&= (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N
\end{aligned}$$

lo que implica que $(\Delta' \otimes_A e_{\mathfrak{D}}(N)) \circ \Delta' = (e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A \Delta') \circ \Delta'$. La counidad viene dada por el isomorfismo $\iota_N : N \to A \otimes_A N$; es decir existe un único morfismo A–lineal por la derecha $\varepsilon' : e_{\mathfrak{D}}(N) \to A$, tal que $(\varepsilon' \otimes_A N) \circ \theta_N = \iota_N$. Sea $a \in A$ y $\widetilde{\lambda}_a : A \to A$ la multiplicación por a por la izquierda, entonces

$$\begin{aligned}
(\varepsilon' \otimes_A N) \circ (h_{\mathfrak{D}}(N, \lambda_a)) \circ \theta_N &= (\varepsilon' \otimes_A N) \circ \theta_N \circ \lambda_a, \ \theta_{-} \text{ es natural} \\
&= \iota_N \circ \lambda_a \\
&= (\widetilde{\lambda}_a \otimes_A N) \circ \iota_N \\
&= (\widetilde{\lambda}_a \otimes_A N) \circ (\varepsilon' \otimes_A N) \circ \theta_N
\end{aligned}$$

luego $\widetilde{\lambda}_a \circ \varepsilon' = \varepsilon' \circ h_{\mathfrak{D}}(N, \lambda_a)$, para cualquier $a \in A$; lo que significa que ε' es A–lineal por la izquierda. En la propiedad counitaria de Δ' con ε', utilizaremos el efecto de que $e_{\mathfrak{D}}(N)$ es unitario por la izquierda. Finalmente, la aplicación A–lineal por la izquierda $\theta_N : N \to e_{\mathfrak{D}}(N) \otimes_A N$ satisface, por definición,

$$\begin{aligned}
(\Delta' \otimes_A N) \circ \theta_N &= (e_{\mathfrak{D}} \otimes_A \theta_N) \circ \theta_N \\
(\varepsilon' \otimes_A N) \circ \theta_N &= \iota_N
\end{aligned}$$

lo que son las propiedades de una $e_{\mathfrak{D}}(N)$–coacción por la izquierda sobre ${}_AN$.
(2). El morfismo de A–coanillos $\mathsf{can}_N : e_{\mathfrak{D}}(N) \to \mathfrak{C}$, viene por la ecuación $(\mathsf{can}_N \otimes_A N) \circ \theta_N = \lambda_N$. Vamos a comprobar que can_N es A–lineal por la izquierda, para ello sea $a \in A$ y $\widehat{\lambda}_a : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ la multiplicación por a por la izquierda. Utilizando la A–linealidad de la coacción λ_N y de θ_N, se tiene

$$(\widehat{\lambda}_a \otimes_A N) \circ (\mathsf{can}_N \otimes_A N) \circ \theta_N = (\mathsf{can}_N \otimes_A N) \circ (h_{\mathfrak{D}}(N, \lambda_a) \otimes_A N) \circ \theta_N$$

y luego $\widehat{\lambda}_a \circ \mathsf{can}_N = \mathsf{can}_N \circ h_{\mathfrak{D}}(N, \lambda_a)$. Ahora la coasociatividad y la propiedad counitaria de λ_N, implican la compatibilidad de can_N con Δ' y ε'. Finalmente, $\lambda_{\mathsf{can}_N N} = (\mathsf{can}_N \otimes_A N) \circ \theta_N = \lambda_N$, lo que termina la demostración. □

Definición 2.1.4. El A–coanillo $e_{\mathfrak{D}}(N)$ asociado a un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo, $(A, \mathfrak{D})$–quasi-finito N y con la comultiplicación y la counidad de la Proposición 2.1.3, se le llama el *coanillo de coendomorfismos* de N.

Ejemplo 2.1.5. [52, 41]. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Considera $N \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}^B$, donde B es otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales considerado como B–coanillo trivialmente. Supongamos que ${}_AN$ es un módulo finitamente generado y proyectivo, entonces $- \otimes_A N : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ tiene un adjunto por la izquierda que es el funtor $- \otimes_B {}^*N : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A$, véase el capitulo de apéndices sección **A**.2. Entonces N es (A, B)–quasi-finito y según la Proposición 2.1.2(1), el funtor $- \otimes_B {}^*N : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es bien definido. De allí se obtiene la estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha sobre ${}^*N$; es fácil de ver que esta coacción coincide con aquella en la Observación 1.2.20(1). El A–coanillo de coendomorfismos de N, es entonces de la forma $e_B(N) = N \otimes_B {}^*N$ cuya comultiplicación es

$$\Delta : e_B(N) \to e_B(N) \otimes_A e_B(N), \quad (\varphi \otimes_B u \mapsto \sum_{i,j} \varphi \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B p_j p_j^*(u)$$
$$= \sum_i \varphi \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B u),$$

y la counidad es la aplicación de evaluación $\varepsilon : e_B(N) \to A$, vía $\varphi \otimes_B u \mapsto \varphi(u)$. Como en la Observación 1.2.20(1), Δ es independiente de la base dual escogida. El morfismo canónico, en este caso, es $\mathsf{can}_N : e_B(N) \to \mathfrak{C}$ enviando $\varphi \otimes_A u \mapsto (\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_N(u)$, véase [41, Examples 5.1, 5.3].

Observación 2.1.6. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales juntos con un (A, B)–bimódulo N. Supongamos que N es un bicomódulo (A, B)–quasi-finito (A y B son considerados como coanillos triviales). Entonces $- \otimes_A N : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ tiene un adjunto por la izquierda que es $- \otimes_B {}^*N : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A$. Por lo tanto $(- \otimes_B {}^*N) \circ (- \otimes_A N) : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_A$ es un cotriple que es claramente exacto por la derecha y preserva coproductos. Según la Proposición 1.7.3, $A \otimes_A N \otimes_B {}^*N \cong N \otimes_B {}^*N$ es un A–coanillo. Ahora es fácil de comprobar que esta nueva estructura y la estructura del Ejemplo 2.1.5 coinciden (compare con la Observación 1.7.5). Finalmente, observe que el morfismo de coanillos canónico del Ejemplo 2.1.5 coincide, en este caso, con la counidad i.e. $\mathsf{can}_N = \varepsilon : e_B(N) \to A$.

2.2. Coanillos de comatrices finitas.

En esta sección procederemos a la definición de coanillos de comatrices finitas, así como el morfismo canónico. Para más información reciente sobre los coanillos de comatrices finitas véase [20], [23], [13] y [25].

Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, considere ${}_B\Sigma_A$ un (B, A)–bimódulo unitario, luego $\Sigma^* = \mathrm{Hom}_A(\Sigma, A)$ canónicamente como (A, B)–bimódulo y finalmente $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ un A–bimódulo de manera natural. Notemos que ninguna de estas últimas acciones es unitaria. Supongamos que Σ_A es un módulo finitamente generado y proyectivo y consideremos $\{p_i, p_i^*\}$ una base dual finita. Recuerde que, en este caso, ${}_A\Sigma_B^*$ es un bimódulo unitario, véase el capítulo del apéndices sección **A**.2. Por lo tanto $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ es, por hipótesis, un A–bimódulo unitario.

Proposición 2.2.1. *El A–bimódulo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ es un A–coanillo con la comultiplicación*

$$\Delta : \Sigma^* \otimes_B \Sigma \longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \Sigma$$

definida por $\Delta(\varphi \otimes_B u) = \sum_i \varphi \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B u$, y la counidad

$$\varepsilon : \Sigma^* \otimes_B \Sigma \to A$$

viene dada por $\varepsilon(\varphi \otimes_B u) = \varphi(u)$. Además, existe un anti-isomorfismo de $\mathbb{K}$–álgebras ${}^*(\Sigma^* \otimes_B \Sigma) \cong \mathrm{End}({}_B\Sigma)$, donde el primero de ellos es el anillo dual por la izquierda de $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$.

Demostración. Para comprobar que $(\Sigma^* \otimes_B \Sigma, \Delta, \varepsilon)$ es un A–coanillos, existen distintas maneras de hacerlo. En esta demostración adaptamos la siguiente. Considere B, A como coanillos triviales y ${}_A\Sigma_B^*$ como bicomódulo (A, B)–quasi-finito. Según el Ejemplo 2.1.5 el coanillo de coendomorfismos asociado es $e_B\left({}_A\Sigma_B^*\right) = \Sigma^* \otimes_B {}^*(\Sigma^*)$. Al trasladar esta estructura al A–bimódulo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$, mediante el isomorfismo canónico $\Sigma \cong {}^*(\Sigma^*)$, encontraremos la estructura deseada. Finalmente, averiguamos el citado isomorfismo de anillos. A nivel de $\mathbb{K}$–módulos, este isomorfismo viene dado por la siguiente composición:

$${}^*(\Sigma^* \otimes_B \Sigma) = \mathrm{Hom}_A(\Sigma^* \otimes_B \Sigma, {}_AA) \cong \mathrm{Hom}_B(\Sigma, {}^*(\Sigma^*)) \cong \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \Sigma),$$

donde hemos utilizado el isomorfismo de la adjunción canónica y el isomorfismo natural $\Sigma \cong {}^*(\Sigma^*)$. Explícitamente esta composición es definida por $f \mapsto \hat{f}$, donde $\hat{f} : \Sigma \to \Sigma$ viene dado por

$$\hat{f}(u) = \sum_i p_i f(p_i^* \otimes_B u), \text{ para todo } f \in {}^*(\Sigma^* \otimes_B \Sigma). \tag{2.2}$$

Estamos ahora en la altura de comprobar que $\widehat{(-)}$ es un anti-morfismo de anillos. Primero, tenemos $\hat{\varepsilon}(u) = \sum_i p_i \varepsilon(p_i^* \otimes_B u) = \sum_i p_i p_i^*(u) = u$, para cualquier $u \in \Sigma$. Dados $f, g \in {}^*(\Sigma^* \otimes_B \Sigma)$, el producto convolución $f * g$ es definido por

$$(f * g)(\varphi \otimes_B u) = f \circ (\Sigma^* \otimes_B \Sigma \otimes_A g)\Delta(\varphi \otimes_B u) = \sum_i f(\varphi \otimes_B p_i g(p_i^* \otimes_B u)).$$

Por lo tanto,

$$\widehat{f * g}(u) = \sum_j p_j(f*g)(p_j^* \otimes_B u) = \sum_{i,j} p_j f(p_j^* \otimes_B p_i g(p_i^* \otimes_B u)) =$$
$$\hat{f}(\sum_i p_i g(p_i^* \otimes_B u)) = \hat{f}(\hat{g}(u)),$$

se tiene pues $\widehat{f * g} = \hat{f} \circ \hat{g}$. Sabiendo que el producto en $\mathrm{End}({}_B\Sigma)$ es el opuesto de la composición, hemos comprobado que nuestra aplicación ya es un anti-morfismo de anillos. □

Definición 2.2.2. Sean A, B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y Σ un (B, A)–bimódulo unitario tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. El A–coanillo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$, de la Proposición 2.2.1, se llama el *coanillo de comatrices finitas* asociado al bimódulo ${}_B\Sigma_A$. Ejemplos de este tipo de coanillos son los coanillos canónicos de Sweedler y los coanillos finitamente generados y proyectivos i.e. los coanillos duales definidos en el Ejemplo 1.1.4(b).

Observación 2.2.3. Sean A, B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y Γ un (A, B)–bimódulo unitario tal que ${}_A\Gamma$ es un módulo finitamente generado y proyectivo. Como antes podemos definir el A–coanillo de comatrices finitas $\Gamma \otimes_B {}^*\Gamma$, donde ${}^*\Gamma = \mathrm{Hom}_A(\Gamma, A)$. Pero si ponemos ${}_B\Sigma_A = {}^*\Gamma$, sabemos que Σ es un (B, A)–bimódulo unitario tal que Σ_A es un módulo finitamente generado y proyectivo; luego tenemos el A–coanillo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$. Sabemos que

$$\widehat{(-)} : \Gamma \longrightarrow \Sigma^*, \quad (\gamma \longmapsto [u \mapsto u(\gamma)])$$

es un isomorfismo de (A, B)–bimódulos, lo que implica que

$$\widehat{(-)} \otimes_B {}^*\Gamma : \Gamma \otimes_B {}^*\Gamma \longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \Sigma$$

es un isomorfismo de A–bimódulos. Un cálculo rutinario demuestra que este isomorfismo es en realidad un isomorfismo de A–coanillos. En conclusión la definición del coanillo de comatrices finitas usando bimódulos finitamente generados y proyectivos por la izquierda o por la derecha llevan, salvo isomorfismos de coanillos, al mismo coanillo.

Una propiedad revelante del A–coanillo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ es que Σ se convierte en un $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$–comódulo de manera canónica. Su coacción es definida por

$$\Sigma \xrightarrow{\rho_\Sigma} \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \Sigma, \qquad \left(u \longmapsto \textstyle\sum_i p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B u\right),$$

que es claramente B–lineal por la izquierda, en otras palabras, Σ es un $(B, (\Sigma^* \otimes_B \Sigma))$–bicomódulo. Este comódulo juega un papel relevante.

Proposición 2.2.4. *El coanillo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ está, como comódulo por la derecha, generado por Σ. Por lo tanto, cualquier $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$–comódulo por la derecha es isomorfo a un sub-comódulo de un cociente de $\Sigma^{(I)}$, para un conjunto de índices adecuado I. Además,*

$$\mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_B \Sigma}) = \{f \in \mathrm{End}(\Sigma_A) |\ f \otimes_B x = 1 \otimes_B f(x),\ \textit{para cualquier } x \in \Sigma\}$$

y, en particular, el morfismo canónico $B \to \mathrm{End}(\Sigma_A)$ se factoriza a través de $\mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_B \Sigma})$.

Demostración. Para la primera aserción, es suficiente comprobar que cada elemento generador $\varphi \otimes_B u \in \Sigma^* \otimes_B \Sigma$ pertenece a la imagen de un morfismo de $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$–comódulos por la derecha $f : \Sigma \to \Sigma^* \otimes_B \Sigma$. Esto viene escogiendo la aplicación definida por $f(u) = \varphi \otimes_B u$, que es fácil de comprobar que es colineal. Para la segunda aserción, sea $\rho_M : M \to M \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \Sigma$ un comódulo por la derecha. La misma estructura ρ_M es un morfismo de comódulos que escinde en A–módulos. Por lo tanto, M es isomorfo a un subcomódulo de $M \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \Sigma$, que es fácilmente comprobado ser un cociente de un coproducto de copias de Σ. La última aserción es un resultado de comprobaciones rutinarias. $\square$

Observación 2.2.5. Por supuesto Σ^* es un $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$–comódulo por la izquierda con una coacción B–lineal por la derecha

$$\Sigma^* \xrightarrow{\lambda_{\Sigma^*}} \Sigma^* \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^*, \qquad\qquad \left(\varphi \mapsto \sum_i \varphi \otimes_B p_i \otimes_A p_i^*\right).$$

Además, ${}_{\Sigma^* \otimes_B \Sigma}\Sigma^*$ satisface la versión izquierda de la Proposición 2.2.4 y el anillo dual de convolución por la derecha $(\Sigma^* \otimes_B \Sigma)^*$ es anti-isomorfo a $\mathrm{End}(\Sigma^*_B)$.

Ahora vamos a considerar cualquier A–coanillo $\mathfrak{C}$ y vamos a suponer que Σ es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha con la coacción $\rho_\Sigma : \Sigma \to \Sigma \otimes_A \mathfrak{C}$. Utilizaremos en todo lo que sigue la siguiente notación: $S = \mathrm{End}(\Sigma_A)$ y $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$. Entonces Σ es un (S, A)–bimódulo unitario y ρ_Σ es un morfismo de (T, A)–bimódulos, recuerde que T es un sub-anillo de S. De esta manera Σ es un $(T, \mathfrak{C})$–bicomódulo, luego Σ^* es un $(\mathfrak{C}, T)$–bicomódulo, donde la $\mathfrak{C}$–coacción por la izquierda viene dada por la Observación 1.2.20(1), mientras que la T–acción por la derecha viene canónicamente dada por la T–acción por la izquierda de Σ. Está claro que $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_A$ es un adjunto por la izquierda de $- \otimes_A \Sigma^* : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_T$. Por lo tanto, según la Definición 2.1.1, Σ^* es un $(\mathfrak{C}, T)$–bicomódulo (A, T)–quasi-finito (T es considerado como T–coanillo trivialmente). La siguiente proposición es ahora consecuencia de la Proposición 2.1.3(2) y el Ejemplo 2.1.5.

Proposición 2.2.6. *Sean A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Si $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo, entonces* $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ *definida por la composición*

$$\Sigma^* \otimes_T \Sigma \xrightarrow{\Sigma^* \otimes_T \rho_\Sigma} \Sigma^* \otimes_T \Sigma \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{\varepsilon \otimes_A \mathfrak{C}} A \otimes_A \mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}$$

es un morfismo de A–coanillos.

Los siguientes ejemplos indican el interesante papel del morfismo de coanillos can definido en la Proposición 2.2.6, en la investigación; ya que es una generalización de morfismo anteriormente considerados en la teoría de módulos de Hopf y las extensiones de Galois no-conmutativas.

Ejemplo 2.2.7. Supongamos que A es una $\mathbb{K}$–álgebra y que nuestro A–coanillo $\mathfrak{C}$ tiene un elemento grouplike g, lo que es equivalente, según [17, Lemma 5.1], a que A admite una estructura de comódulo por la derecha sobre $\mathfrak{C}$, notemos este comódulo por $[g]A$. En este caso $T = \mathrm{End}([g]A_{\mathfrak{C}})$ es nada más que el sub-anillo de coinvariantes [17, Proposition 2.2] de A (o invariante de g), i.e. $T = \{a \in A |\, ag = ga\}$. La aplicación $\mathsf{can} : A \otimes_T A \to \mathfrak{C}$, en este caso, está determinada por la condición $\mathsf{can}(1 \otimes_T 1) = g$, véase [96, Proposition 1.9]. Por lo tanto, el coanillo $\mathfrak{C}$ es Galois en el sentido de [17, Definition 5.3] si y sólo si can es un isomorfismo. Es conveniente apuntar aquí que el morfismo can generaliza la aplicación canónica original considerada en [91] y, por supuesto, la aplicación *can* definida en [15, Definition 2.1].

Ejemplo 2.2.8. Sea A es una $\mathbb{K}$–álgebra. Considere G un grupo finito del grupo de automorfismos de anillos de A y considere $R = G * A$ el anillo asociado del producto cruzado. El anillo A se injecta canónicamente en R y, por construcción, R_A es un módulo libre de base G y podemos pues considerar su correspondiente coanillo de comatrices $R^* \otimes_R R \cong R^*$. Vamos a comprobar que "la traza" $g : R \to A$ definida por $g(\sum_{\sigma \in G} \sigma a_\sigma) = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma$ (evidentemente A–lineal por la derecha) es un elemento grouplike de R^*. Coordinadamente con [68, Theorem 3], se necesita ver de una parte que g actúa como la identidad sobre A, lo que es claro, y de otra que $\mathbf{Ker}(g)$ es un ideal por la derecha de R. Vamos a comprobar esta última condición, sea pues $r = \sum_{\sigma \in G} \sigma r_\sigma \in \mathbf{Ker}(g)$, es decir $\sum_{\sigma \in G} r_\sigma = 0$ y considere γa, $\gamma \in G$, $a \in A$ una componente (homogénea) en R, entonces

$$\begin{aligned} g(r(\gamma a_\gamma)) &= g\left(\sum_{\sigma \in G} (\sigma\gamma)(\gamma(r_\sigma)a)\right) \\ &= \sum_{\sigma \in G} \gamma(r_\sigma)a \\ &= \gamma(\sum_{\sigma \in G} r_\sigma)a \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que implica que $g \in R^*$ es un elemento grouplike. Por lo tanto A es un R^*–comódulo por la derecha. El morfismo de A–coanillos $\mathsf{can} : A \otimes_T A \to R^*$ es determinado por $\mathsf{can}(1 \otimes_T 1) = g$, donde T es el sub-anillo de los elementos g–coinvariantes de A. Un cálculo fácil, demuestra que T es el sub-anillo de los G–invariantes de A. Ahora, la composición de morfismos de anillos

$$R \cong {}^*(R^*) \xrightarrow{{}^*can} {}^*(A \otimes_T A) \cong \mathrm{End}({}_T A)$$

es precisamente la aplicación δ definida en [67] (o j en [34]). Allí, la extensión se anillos $T \subseteq A$ es llamada G–Galois cuando δ es un isomorfismo y ${}_T A$ es finitamente generado y proyectivo. Por supuesto que δ es un isomorfismo si y sólo si can es un isomorfismo.

El morfismo de A–coanillos $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ induce el funtor

$$CAN : \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$$

que envía cada comódulo $\rho_M : M \to M \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma$ a un $\mathfrak{C}$–comódulo

$$M \xrightarrow{\rho_M} M \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma \xrightarrow{M \underset{A}{\otimes} \mathsf{can}} M \otimes_A \mathfrak{C}$$

Este es un ejemplo del funtor inducción.

Proposición 2.2.9. *Si $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo, entonces $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma})$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo de funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \arrow[rr, "CAN"] & & \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \\ & \mathcal{M}_T \arrow[ul, "- \underset{T}{\otimes} \Sigma"] \arrow[ur, "- \underset{T}{\otimes} \Sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Según la Proposición 2.2.4, $T \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma})$. Recíprocamente, sea $f \in \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma})$; el siguiente diagrama es claramente conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\rho_\Sigma"] \arrow[d, "f"'] & \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma \arrow[r, "\Sigma \underset{A}{\otimes} \mathsf{can}"] \arrow[d, "f \underset{A}{\otimes} \Sigma^* \otimes_T \Sigma"] & \Sigma \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "f \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}"] \\ \Sigma \arrow[r, "\rho_\Sigma"] & \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma \arrow[r, "\Sigma \underset{A}{\otimes} \mathsf{can}"] & \Sigma \otimes_A \mathfrak{C}. \end{tikzcd}$$

Ahora, es fácil comprobar que $(\Sigma \otimes_A \mathsf{can})\rho_\Sigma$ es justamente la coacción de $\Sigma_{\mathfrak{C}}$. Luego f es $\mathfrak{C}$–colineal por la derecha, es decir, $f \in T$. Observar que hemos ya comprobado que $CAN(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}) = \Sigma_{\mathfrak{C}}$. Esto implica que $CAN((X \otimes_T \Sigma)_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}) = (X \otimes_T \Sigma)_{\mathfrak{C}}$ para cualquier $X \in \mathcal{M}_T$. Lo que termina la demostración. □

2.3. Coanillos con generador f-generado y proyectivo.

En esta sección ofrecemos una descripción completa en términos de coanillos de comatrices de todos los coanillos, sobre anillos con unidades locales, cuya categoría de comódulos por la derecha posee un generador finitamente generado y proyectivo. El resultado previsto, generaliza los resultados [17, Theorem 5.6], [91, Theorem 1] y [31, Teorema]. Un tratamiento cercano respect del caso de anillo de base unitario y el coanillo tiene un elemento grouplike además de ser un módulo localmente proyectivo, se puede encontrar en [29, Proposition 1.1], [2, Theorems 2.2, 2.4] y [99, 3.8.(1)].

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo junto con Σ un $\mathfrak{C}$–comódulo; $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$ es su anillo de endomorfismos. La coacción de Σ es evidentemente T–lineal y luego existe un funtor $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Recuerde que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_T$ es un adjunto de $- \otimes_T \Sigma$. Sea $\chi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) \otimes_T \Sigma \to id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}}$ la counidad de esta adjunción.

Lema 2.3.1. *Sea Σ un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. La counidad $\chi_{\mathfrak{C}}$ en el objeto $\mathfrak{C}$ es un isomorfismo si y sólo si* can *es un isomorfismo de coanillos.*

Demostración. Utilizando el isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, \mathfrak{C}) \cong \Sigma^*$, se tiene que $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ puede verse como la composición

$$\Sigma^* \otimes_T \Sigma \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, \mathfrak{C}) \otimes_T \Sigma \xrightarrow{\chi_{\mathfrak{C}}} \mathfrak{C}.$$

□

Un objeto X de una categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$ se dice que es *finitamente generado* si y sólo si cualquier cadena de sub-objetos propios $\{X_i\}$ de X, su union $\bigcup X_i$ es también un sub-objeto propio de X (véase [88, Section 4.10]). Según [88, Section 4.11, Lemma 1], un objeto proyectivo $P \in \mathcal{A}$ es finitamente generado si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ preserva el coproducto.

Teorema 2.3.2. *Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ un comódulo por la derecha. Considere la extensión de anillos $T \subseteq S$, donde $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$ y $S = \mathrm{End}(\Sigma_A)$. Las siguientes aserciones son equivalentes*

(i) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano y $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$;*

(ii) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, Σ_A es un módulo finitamente generado y proyectivo,* can : *$\Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos, y $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}$ es una equivalencia de categorías;*

(iii) *Σ_A es módulo finitamente generado y proyectivo,* $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ *es un isomorfismo de A–coanillos y ${}_T\Sigma$ es un módulo fielmente plano.*

(iv) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, Σ_A es un módulo finitamente generado y proyectivo,* can : *$\Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos y ${}_TS$ es un módulo fielmente plano;*

(v) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano y $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia de categorías.*

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (v)$ Como ${}_A\mathfrak{C}$ es plano $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck (Proposición 1.2.12). Se sabe que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_T$ es un adjunto por la derecha de $- \otimes_T \Sigma$. Por lo tanto, según el Teorema de Gabriel-Popescu, $- \otimes_T \Sigma$ es una equivalencia si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -)$ es una equivalencia si y sólo si $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un generador finitamente generado y proyectivo.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Como ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, se deduce de la Proposición 1.2.12 que $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck y el funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ es exacto. Además, tiene un adjunto por la derecha $- \otimes_A \mathfrak{C}$. Esto implica que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. Recuerde que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_T$ es un adjunto por la derecha de $- \otimes_T \Sigma$ y como $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un generador finitamente generado y proyectivo, esta adjunción es ya una equivalencia

de categorías. En particular, la counidad $\chi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) \otimes_T \Sigma \to id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}}$ es un isomorfismo natural. Según el Lema 2.3.1, $CAN : \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es ahora una equivalencia de categorías. Según la Proposición 2.2.9, se tiene que $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}$ es una equivalencia de categorías.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. El funtor $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}$ es obviamente exacto y fiel. Como $\Sigma^* \otimes_T \Sigma \cong \mathfrak{C}$ es plano como A–módulo por la izquierda, se tiene de la Proposición 1.2.12, que el funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \to \mathcal{M}_A$ es fiel y exacto. Por lo tanto, el funtor $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_A$ es fiel y exacto, es decir que ${}_T\Sigma$ es fielmente plano.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Denotemos por $\Omega := \Sigma^* \otimes_T \Sigma$, que es plano como A–módulo por la izquierda porque ${}_T\Sigma$ es plano. El isomorfismo de A–coanillos $\mathsf{can} : \Omega \cong \mathfrak{C}$, implica que ${}_A\mathfrak{C}$ es plano. Considere sobre Σ^* la estructura de Ω–comódulo por la izquierda que viene dada por la Observación 2.2.5. Se sabe que Σ^* es en realidad un (Ω, T)–bicomódulo, donde T actúa canónicamente sobre Σ^*. El funtor $- \otimes_A \Sigma^* : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_T$ es un adjunto por la derecha de $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_A$. Según la Proposición 2.1.2, el funtor producto cotensor $-\square_\Omega \Sigma^* : \mathcal{M}^\Omega \to \mathcal{M}_T$ es un adjunto por la derecha de $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^\Omega$. Considere $\{p_i, p_i^*\}$ una base dual finita por la derecha de Σ, esta adjunción viene dada por las siguientes counidad y unidad

$$\begin{array}{llll} \xi_{Y_\Omega} : (Y \square_\Omega \Sigma^*) \otimes_T \Sigma \longrightarrow Y, & & \eta_{X_T} : X \longrightarrow (X \otimes_T \Sigma) \square_\Omega \Sigma^* \\ (y \otimes_A \varphi) \otimes_T u \longmapsto y\varphi(u) & & x \longmapsto \sum_i (x \otimes_A p_i) \otimes_A p_i^* \end{array}$$

En la notación de la sección 1.4, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & (Y\square_\Omega \Sigma^*) \otimes_T \Sigma \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{Y,\Sigma^*\otimes_T\Sigma}"] \arrow[dl, "\xi_Y"'] \arrow[d, "\psi^l_{Y,\Sigma^*,\Sigma}"] & (Y \otimes_A \Sigma^*) \otimes_T \Sigma \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{Y,\Sigma^*\otimes_T\Sigma}"] \arrow[d, "\cong"] & (Y \otimes_A \Omega \otimes_A \Sigma^*) \otimes_T \Sigma \arrow[d, "\cong"] \\ Y \arrow[r, "\rho'_Y"] & Y\square_\Omega(\Sigma^* \otimes_T \Sigma) \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{Y,\Omega}"] & Y \otimes_A (\Sigma^* \otimes_T \Sigma) \arrow[r, "\mathfrak{eq}_{Y,\Omega}"] & Y \otimes_A \Omega \otimes_A (\Sigma^* \otimes_T \Sigma) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

donde ρ'_- es el isomorfismo natural del Lema 1.4.1(1) que satisface $\mathfrak{eq}^k_{-,-} \circ \rho'_- = \rho_-$ y $\psi^l_{-,\Sigma^*,\Sigma}$ es la transformación natural de la versión por la izquierda del Lema 1.4.2. Como ${}_T\Sigma$ es plano, tenemos ahora que $\psi^l_{-,\Sigma^*,\Sigma}$ es isomorfismo natural y luego la conmutatividad del diagrama (2.3), implica que ξ_- es también un isomorfismo natural. Sea ahora $X \in \mathcal{M}_T$ y consideramos $Y := X \otimes_T \Sigma$ como Ω–comódulo por la derecha de manera canónica, es fácil comprobar que $\xi_Y \circ (\eta_X \otimes_T \Sigma) = Y$. De otra parte

$$\begin{aligned} \mathfrak{eq}^k_{Y,\Omega} \circ \psi^l_{Y,\Sigma^*,\Sigma} \circ (\eta_X \otimes_T \Sigma) \circ \xi_Y &= \rho_Y \circ \xi_Y \\ &= \mathfrak{eq}^k_{Y,\Omega} \circ \psi^l_{Y,\Sigma^*,\Sigma}, \end{aligned}$$

implica que

$$(\eta_X \otimes_T \Sigma) \circ \xi_{X \otimes_T \Sigma} = ((X \otimes_T \Sigma) \square_\Omega \Sigma^*) \otimes_T \Sigma.$$

Es decir que $\eta_{-} \otimes_T \Sigma$ es un isomorfismo natural, y como $- \otimes_T \Sigma$ es un funtor fiel, se tiene que η_{-} es también un isomorfismo natural. Luego $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\Omega}$ es una equivalencia de categorías cuyo inverso es $-\square_{\Omega}\Sigma^*$. Lo que implica, según la Proposición 2.2.9, que $-\otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia, porque $\mathsf{can} : \Omega \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$.
(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*. Primero, observe que el isomorfismo $\Sigma \otimes_A \Sigma^* \cong S$ implica que ${}_S\Sigma$ es fiel. Dando un monomorfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{M}_T$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes_T S) \otimes_S \Sigma \arrow[r, "(f \underset{T}{\otimes} S) \underset{S}{\otimes} \Sigma"] \arrow[d, "\simeq"] & (Y \otimes_T S) \otimes_S \Sigma \arrow[d, "\simeq"] \\
X \otimes_T \Sigma \arrow[r, "f \otimes_T \Sigma"] & Y \otimes_T \Sigma
\end{tikzcd}$$

Como ${}_T\Sigma$ es plano, deducimos que $(f \otimes_T S) \otimes_S \Sigma$ es un monomorfismo y luego $f \otimes_T S$ es un monomorfismo. Por lo tanto, ${}_TS$ es plano. Finalmente, si $X \in \mathcal{M}_T$ es tal que $X \otimes_T S = 0$, entonces $0 = (X \otimes_T S) \otimes_S \Sigma \cong X \otimes_T \Sigma$, lo que implica $X = 0$. Luego, ${}_TS$ es fielmente plano.
(iv) $\Rightarrow$ *(iii)*. Es suficiente comprobar que ${}_T\Sigma$ es fielmente plano. Considere una sucesión exacta corta en $\mathcal{M}_T$,

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Y'' \longrightarrow 0 ,$$

considere Z el núcleo del morfismo $f \otimes_T \Sigma$ en la categoría $\mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}$. Dado que el funtor del olvido $\mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \to \mathcal{M}_A$ es exacto, este núcleo coincide con el núcleo calculado en $\mathcal{M}_A$. Tenemos pues un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z \otimes_A \Sigma^* \arrow[r] & Y \otimes_T \Sigma \otimes_A \Sigma^* \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y' \otimes_T \Sigma \otimes_A \Sigma^* \arrow[d, "\simeq"] \\
 & 0 \arrow[r] & Y \otimes_T S \arrow[r] & Y' \otimes_T S.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $Z \otimes_A \Sigma^* = 0$, lo que implica que $Z \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma = 0$ y luego $Z = 0$, porque $Z \in \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}$. Por lo tanto, ${}_T\Sigma$ es plano. Ahora, para cualquier T–módulo por la derecha Y tal que $Y \otimes_T \Sigma = 0$, se tiene $Y \otimes_T \Sigma \otimes_A \Sigma^* \cong Y \otimes_T S = 0$, luego $Y = 0$. Es decir, ${}_T\Sigma$ es fielmente plano, lo que termina la demostración. $\square$

Observación 2.3.3. La condición de que ${}_A\mathfrak{C}$ sea plano no se puede quitar de las aserciones *(ii)* y *(vi)*. Contra-ejemplo viene en seguida. Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra $e \in A$ un idempotente, $f = 1 - e$. Supongamos que $fAe = 0$ y sea $I = eA$. Según el Ejemplo 1.2.11 I es un A–coanillo idempotente tal que $- \otimes_{eAe} I : \mathcal{M}_{eAe} \to \mathcal{M}^I$ es una equivalencia de categorías. Ahora es fácil comprobar que I es isomorfismo al coanillo de comatrices finitas $I^* \otimes_{eAe} I \cong I$, que $\mathrm{End}(I_I) = \mathrm{End}(I_A) \cong eAe$ y luego $T = S$. Mientras que ${}_AI$ nos es plano excepto si ${}_{eAe}I$ lo es.

Ejemplo 2.3.4. Supongamos que $A = \oplus_{g \in G} A_g$ es una $\mathbb{K}$–álgebra G–graduada (G es un grupo multiplicativo con elemento neutro e). Consideramos $\mathfrak{C}(G)$ el A–coanillo del Ejemplo 1.2.4(a). Ahora consideramos $[e]A$ el $\mathfrak{C}(G)$–comódulo por la derecha correspondiente al módulo A_A y al elemento grouplike e. El sub-anillo de coinvariantes en este caso es justamente el sub-anillo A_e. Por lo tanto $[e]A$ es un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}(G)}$ si y sólo si $- \otimes_{A_e} [e]A : \mathcal{M}_{A_e} \to gr - A \cong \mathcal{M}^{\mathfrak{C}(G)}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si A es fuertemente graduado (el Teorema de E. C. Dade [33], véase también [77, Theorem I.3.4]).

En lo que queda de esta sección vamos a colocar el Teorema 2.3.2 en el reciente desarrollo de los coanillos con elemento grouplike. En el contexto del mismo teorema, se tiene por el Lema 2.3.1 que si $- \otimes_T \Sigma$ es una equivalencia de $\mathcal{M}_T$ en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, entonces $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo. Lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.5. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha Σ tales que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. El coanillo $\mathfrak{C}$ se dice que es de *Galois* si $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo, donde $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$, también se ha dicho recientemente que Σ es un $\mathfrak{C}$–comódulo de Galois [14], [13]. Cuando A es una $\mathbb{K}$–álgebra y $\Sigma = A$, esta definición coincide con la de T. Brzeziński por los coanillos con elemento grouplike [17, Definition 5.3]. En vista del Teorema 2.3.2, una extensión de forma $T \to \mathrm{End}(\Sigma_A)$ puede ser llamada una *extensión de anillos* $\mathfrak{C}$*–Galois* siempre cuando Σ sea un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha tal que Σ_A sea finitamente generado y proyectivo, $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$ y $\mathfrak{C}$ es Galois. Las extensiones de anillos $\mathfrak{C}$–Galois en [17] ó en [29] son obtenidos cuando A sea una $\mathbb{K}$–álgebra y con $\Sigma = A$.

Del Teorema 2.3.2, se tiene pues

Corolario 2.3.6. *[17, Theorem 5.6] Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con elemento grouplike y T el sub-anillo de coinvariantes de A. Si $\mathfrak{C}$ es Galois y ${}_TA$ es fielmente plano, entonces $- \otimes_T A : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia de categorías. Recíprocamente, si $- \otimes_T A$ es una equivalencia de categorías, entonces $\mathfrak{C}$ es Galois. En este caso si ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, entonces ${}_TA$ es fielmente plano.*

Demostración. Pongamos $\Sigma = A$. El corolario viene de Ejemplo 2.2.7, Proposición 2.2.9, Lema 2.3.1 y , esencialmente, Teorema 2.3.2. □

Ejemplo 2.3.7. Sean $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–biálgebra y A un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra con la coacción $\rho_A : A \to A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$ (que es un morfismo de $\mathbb{K}$–álgebras). Siguiendo [91] y [81, 4.2], consideramos $\mathcal{M}(\mathcal{H})_A^{\mathcal{H}}$ la categoría de los módulos $(A, \mathcal{H})$–biálgebra por la derecha. Los objetos son $\mathbb{K}$–módulos M con una estructura de A–módulo por la derecha y una estructura de $\mathcal{H}$–comódulo por la derecha tal que la coacción es A–lineal por la derecha, es decir

$$\rho_M(ma) = \sum_{(m),(a)} m_{(0)} a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)} a_{(1)}, \qquad \forall m \in M,\, a \in A. \tag{2.4}$$

Los morfismos en $\mathcal{M}(\mathcal{H})_A^{\mathcal{H}}$ son A–lineales y $\mathcal{H}$–colineales. Se sabe de [15, Example 3.1] que la categoría $\mathcal{M}(\mathcal{H})_A^{\mathcal{H}}$ es isomorfa a la categoría de $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$–comódulos, donde $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$ es el A–coanillo asociado a la estructura entrelazante $(A, \mathcal{H})_\psi$, $\psi : \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}} A \to A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$, vía $h \otimes_{\mathbb{K}} a \mapsto \sum a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} ha_{(1)}$. Denotemos por $\mathfrak{C}$ este A–coanillo. Está claro que ρ_A satisface la ecuación (2.4), luego A admite un estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo. De otra parte $g = 1 \otimes_{\mathbb{K}} 1$ es claramente un elemento grouplike de $\mathfrak{C}$, y luego $[g]A$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo con la coacción $\rho_{[g]A} : A \to \mathfrak{C}$ vía $a \mapsto ga$. Recuerde que la estructura de A–módulo por la derecha de $\mathfrak{C}$ viene dada por la ecuación

$$\begin{aligned}(a' \otimes_{\mathbb{K}} h)a &= a'\psi(h \otimes_{\mathbb{K}} a) \\ &= \sum a'a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} ha_{(1)},\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\rho_{[g]A}(a) &= (1 \otimes_{\mathbb{K}} 1)a \\ &= \sum a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)} \\ &= \rho_A(a).\end{aligned}$$

Por lo tanto las dos coacciones coinciden y el morfismo canónico definido en [91], coincide también con el morfismo de la Proposición 2.2.6, que en este caso es definido por

$$\mathsf{can} : A \otimes_B A \to A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}, \qquad (a' \otimes_{\mathbb{K}} a \mapsto \sum a'a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}),$$

donde $B = A^{co\mathcal{H}} = \{a \in A \mid \rho_A(a) = a \otimes_{\mathbb{K}} 1\}$. Luego si can es biyectivo, entonces $B \hookrightarrow A$ es una extensión $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$–Galois en el sentido de la Definición 2.3.5. Si además $B \hookrightarrow A$ es una extensión fielmente plana (i.e. ${}_BA$ es fielmente plano), entonces esta extensión es $\mathcal{H}$–Galois en el sentido de P. Nuss [81, Definition 4.1].

El siguiente ejemplo analiza la situación en los módulos entrelazantes.

Ejemplo 2.3.8. Sea $(A, C)_\psi$ una estructura entrelazante (A aquí es una $\mathbb{K}$–álgebra) sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe un módulo entrelazado Σ tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. Se tiene la aplicación canónica $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to A \otimes C$, donde T es el anillo de endomorfismos de Σ como un módulo entrelazado. Si can es biyectivo, entonces podemos recuperar el morfismos entrelazante ψ; en efecto es fácil comprobar que ψ es la siguiente composición

$$\begin{array}{ccccccc} C \otimes_{\mathbb{K}} A & \longrightarrow & \Sigma^* \otimes_T \Sigma \otimes_{\mathbb{K}} A & \longrightarrow & \Sigma^* \otimes_T \Sigma & \longrightarrow & A \otimes_{\mathbb{K}} C \\ c \otimes_{\mathbb{K}} a & \longmapsto & \mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c) \otimes_{\mathbb{K}} a & \longmapsto & \mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c)a & \longmapsto & \mathsf{can}\,(\mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c)a) \\ & & & & & & = (1 \otimes_{\mathbb{K}} c)a = \psi(c \otimes_{\mathbb{K}} a) \end{array}$$

Recíprocamente, empezando por una coálgebra (C, Δ, ε) y un módulo por la derecha finitamente generado y proyectivo Σ sobre una $\mathbb{K}$–álgebra (A, μ, ν) con una base dual finita $\{p_i, p_i^*\}$. Considere $\rho_\Sigma : \Sigma \to \Sigma \otimes_{\mathbb{K}} C$ una C–coacción por la derecha sobre Σ y define

$$T = \{t \in \mathrm{End}(\Sigma_A) | \rho(tu) = t\rho(u) \text{ para cualquier } u \in \Sigma\}$$

es decir T es el anillo de endomorfismos de Σ que son A–lineales y C–colineales. Entonces define $\mathsf{can}(\varphi \otimes_T u) = \sum \varphi(u_{(0)}) \otimes_A u_{(1)}$, donde $\varphi \in \Sigma^*$, $u \in \Sigma$ y $\rho_\Sigma(u) = \sum u_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} u_{(1)}$. El morfismo can es claramente A–lineal por la izquierda.

Si este can es biyectivo (lo que puede ser una nueva definición general de una extensión C–Galois: $T \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$ en la teoría de coálgebras), entonces existe una única estructura entrelazante $(A, C)_\psi$ que convierte a Σ en un módulo entrelazante. En efecto, la unicidad viene de la primera aserción de arriba y para completar la demostración, define

$$\begin{array}{rcl} \psi : C \otimes_{\mathbb{K}} A \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma \otimes_{\mathbb{K}} A & \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma \longrightarrow & A \otimes_{\mathbb{K}} C \\ c \otimes_{\mathbb{K}} a \longmapsto \mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c) \otimes_{\mathbb{K}} a & \longmapsto \mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c)a \longmapsto & \mathsf{can}\,(\mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c)a) \end{array}$$

Según [17, Proposition 2.2] $(A, C)_\psi$ es una estructura entrelazante si y sólo si $(A \otimes_{\mathbb{K}} C, A \otimes_{\mathbb{K}} \Delta, A \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon)$ es un A–coanillo cuya A–acción por la derecha viene dada por $(a \otimes_{\mathbb{K}} c)a' = a\psi(c \otimes_{\mathbb{K}} a)$, $a, a' \in A$ y $c \in C$. Para comprobar que esta A–acción es bien definida, basta comprobar su asociatividad porque el resto de las condiciones es evidente. Ahora la asociatividad nos la propone el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[r, "\tau \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A"] \arrow[d, "C \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mu"'] & \Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[r, "\iota \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A"] \arrow[dd, "\Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mu"] & \Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[r, "\mathsf{can} \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A"] & A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} C \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[d, "A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \tau \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A"] \\
C \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[d, "\tau \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A"'] & & & A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[d, "A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \iota"] \\
\Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \arrow[r, "\iota"] & \Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \arrow[d, "\mathsf{can}"] & & A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \Sigma^* \underset{T}{\otimes} \Sigma \arrow[d, "A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \mathsf{can}"] \\
& A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} C & & A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} C \arrow[ll, "\mu \underset{\mathbb{K}}{\otimes} C"']
\end{tikzcd}$$

donde $\tau : C \to \Sigma^* \otimes_T \Sigma$ es definido por $c \mapsto \mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} c)$ y ι es la multiplicación por la derecha por escalares. Con esta nueva estructura de A–bimódulo el isomorfismo de A–bimódulo can induce sobre $A \otimes_{\mathbb{K}} C$ una estructura de A–coanillo con la counidad $\varepsilon' = \varepsilon_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \circ \mathsf{can}^{-1}$ y la comultiplicación la siguiente composición

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_{\mathbb{K}} C \arrow[r, "\mathsf{can}"] \arrow[ddrr, dashed, "\Delta'"'] & \Sigma^* \otimes_T \Sigma \arrow[r, "\Delta_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}"] & \Sigma^* \otimes_T \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma \arrow[d, "\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}"] \\
& & (A \otimes_{\mathbb{K}} C \otimes_A A \otimes_{\mathbb{K}} C \arrow[d, "\cong"] \\
& & A \otimes_{\mathbb{K}} C \otimes_{\mathbb{K}} C
\end{tikzcd}$$

Como $(A \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon) \circ \mathsf{can} = \varepsilon_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma}$, se tiene $A \otimes_{\mathbb{K}} \varepsilon = \varepsilon'$. De otra parte, denotemos por $\mathsf{can}^{-1}(a \otimes_{\mathbb{K}} c) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \otimes_A u_\alpha$, para ciertos $a \in A$, $c \in C$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta'(a \otimes_{\mathbb{K}} c) &= \cong \circ(\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}) \circ \Delta_{\Sigma^* \otimes_T \Sigma} \circ \mathsf{can}^{-1}(a \otimes_{\mathbb{K}} c) \\
&= \cong \circ(\mathsf{can} \otimes_A \mathsf{can}) \left(\sum_{i,\alpha} \varphi_\alpha \otimes_T p_i \otimes_A p_i^* \otimes_T u_\alpha \right) \\
&= \sum_{i,\alpha,(p_i),(u_\alpha)} \big((\varphi_\alpha(p_{i(0)}) \otimes_{\mathbb{K}} p_{i(1)}) p_i^*(u_{\alpha(0)}) \big) \otimes_{\mathbb{K}} u_{\alpha(1)} \\
&= \sum_{i,\alpha,(p_i),(u_\alpha)} \varphi_\alpha(p_{i(0)}) \mathsf{can} \left(\mathsf{can}^{-1}(1 \otimes_{\mathbb{K}} p_{i(1)}) p_i^*(u_{\alpha(0)}) \right) \otimes_{\mathbb{K}} u_{\alpha(1)} \\
&= \sum_{i,\alpha,(p_i),(u_\alpha)} \mathsf{can} \left(\mathsf{can}^{-1}(\varphi_\alpha(p_{i(0)}) \otimes_{\mathbb{K}} p_{i(1)}) p_i^*(u_{\alpha(0)}) \right) \otimes_{\mathbb{K}} u_{\alpha(1)} \\
&= \sum_{\alpha,(u_\alpha)} \mathsf{can} \left(\varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} u_{\alpha(0)} \right) \otimes_{\mathbb{K}} u_{\alpha(1)} \\
&= (\mathsf{can} \otimes_{\mathbb{K}} C) \circ \Sigma^* \otimes_T \rho_\Sigma (\sum_\alpha \varphi_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} u_\alpha) \\
&= (A \otimes_{\mathbb{K}} \Delta) \circ \mathsf{can}(\mathsf{can}^{-1}(a \otimes_{\mathbb{K}} c)) \\
&= A \otimes_{\mathbb{K}} \Delta(a \otimes_{\mathbb{K}} c)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizando la ecuación

$$(\mathsf{can} \otimes_{\mathbb{K}} C) \circ (\Sigma^* \otimes_T \rho_\Sigma) = (A \otimes_{\mathbb{K}} \Delta) \circ \mathsf{can}$$

Escogiendo $\Sigma = A$, se obtiene [21, Theorem 2.7].

La relación entre la Teoría del Descent No-conmutativa y los coanillos de Galois con elemento grouplike es muy conocida (véase [17] y [29]). Vamos a derivar de nuestro análisis sobre los coanillos de Galois sin elemento grouplike una teoría del Descent para extensiones de anillos de forma $B \to \mathrm{End}(\Sigma_A)$, donde Σ_A es finitamente generado y proyectivo. Por supuesto, que nuestras suficientes condiciones para obtener un teorema del Descent, vienen dadas sobre el bimódulo Σ. Otra vez el caso en que A es una $\mathbb{K}$–álgebra con $\Sigma = A$ coincide con la teoría clásica.

Lema 2.3.9. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Considere ${}_B\Sigma_A$ un (B, A)–bimódulo unitario tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo, y $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_B \Sigma})$. Entonces el morfismo canónico $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \Sigma^* \otimes_B \Sigma$ es un isomorfismo de A–coanillos.*

Demostración. Sea $B \to T$ el morfismo que viene de la Proposición 2.2.4. Denote por $\omega_{B,T} : \Sigma^* \otimes_B \Sigma \to \Sigma^* \otimes_T \Sigma$ la aplicación obvia: $\varphi \otimes_B x \mapsto \varphi \otimes_T x$. Vamos a comprobar que $\omega_{B,T}$ es inversa de can. Dadas $\varphi \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$, se tiene $\mathsf{can}(\omega_{B,T}(\varphi \otimes_B x)) = \sum_i \varphi(p_i) p_i^* \otimes_B x = \varphi \otimes_B x$, y $\omega_{B,T}(\mathsf{can}(\varphi \otimes_T x)) = \omega_{B,T}(\sum_i \varphi(p_i) p_i^* \otimes_B x) = \omega_{B,T}(\varphi \otimes_B x) = \varphi \otimes_T x$. Luego, can es un isomorfismo de A–coanillos (notemos que $\omega_{B,T}$ es obviamente un morfismo de coanillos). $\square$

Teorema 2.3.10 (Descent Generalizado para Módulos)**.** *Sean A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y B una $\mathbb{K}$–álgebra. Considere ${}_B\Sigma_A$ un (B,A)–bimódulo unitario tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo junto con los anillos $S = \mathrm{End}(\Sigma_A)$, $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^*\otimes_B\Sigma})$ y la extensión canónica $\lambda : B \to T$. Las siguientes aserciones son equivalentes.*

(i) ${}_A(\Sigma^* \otimes_B \Sigma)$ *es un módulo plano,* $\Sigma_{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}$ *es un generador finitamente generado y proyectivo de* $\mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}$*, y* $\lambda : B \to T$ *es un isomorfismo;*

(ii) ${}_A(\Sigma^* \otimes_B \Sigma)$ *es un módulo plano y* $- \otimes_B \Sigma : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}$ *es una equivalencia de categorías;*

(iii) ${}_B\Sigma$ *es un módulo fielmente plano;*

(iv) ${}_A(\Sigma^* \otimes_B \Sigma)$ *(o* ${}_B\Sigma$*) es un módulo plano y* ${}_BS$ *es fielmente plano.*

Demostración. Primero, recuerde que Lema 2.3.9 nos dice que el coanillo de comatrices $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ es de Galois.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Viene del Teorema 2.3.2.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ y (i). Si suponemos dicha equivalencia de categorías, entonces Σ es un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}$. Deducimos pues del Teorema 2.3.2 que $- \otimes_T \Sigma : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}$ es una equivalencia de categorías y ${}_T\Sigma$ es fielmente plano. Por lo tanto, en el diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_B \arrow[r, "-\underset{B}{\otimes}\Sigma"] & \mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_B\Sigma} \\
\mathcal{M}_T \arrow[u, "F"] \arrow[r, "-\underset{T}{\otimes}\Sigma"] & \mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_T\Sigma} \arrow[u, "CAN"']
\end{tikzcd},$$

donde $F : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_B$ es la restricción de escalares asociado a $\lambda : B \to T$, los otro tres funtores son equivalencias de categorías. Luego F el también es una equivalencia de categorías, ahora [6, Exercise 12.10(4), p.260], implica que λ es un isomorfismo, lo que prueba (i) y (iii).
$(iii) \Rightarrow (ii)$. Según la Proposición 2.2.4, tenemos

$$T = \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}) = \{f \in \mathrm{End}(\Sigma_A) |\ f \otimes_B x = 1 \otimes_B f(x),\ \text{para cualquier } x \in \Sigma\},$$

lo que implica que la aplicación canónica $B \otimes_B \Sigma \to T \otimes_B \Sigma$ es un isomorfismo. Por lo tanto, cuando ${}_B\Sigma$ es supuestamente plano, uno deduce que $\mathbf{Ker}(\lambda) \otimes_B \Sigma = \mathbf{coKer}(\lambda) \otimes_B \Sigma = 0$. Luego, si ${}_B\Sigma$ es fielmente plano, entonces λ es un isomorfismo de anillos, luego podamos aplicar el Lema 2.3.9 y el Teorema 2.3.2 para poder obtener que $- \otimes_B \Sigma : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}$ es una equivalencia de categorías.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Basta comprobar que ${}_BS$ es fielmente plano. Utilizando el isomorfismo de B–bimódulos $\Sigma \otimes_A \Sigma^* \cong S$, está claro que ${}_BS$ es un módulo plano. Sea ahora $X \in \mathcal{M}_B$ tal que $X \otimes_B S = 0$, entonces $0 = (X \otimes_B S) \otimes_S \Sigma \cong X \otimes_B \Sigma$, implica que $X = 0$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Sea $X \in \mathcal{M}_B$ tal que $X \otimes_B \Sigma = 0$, entonces $0 = X \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \cong X \otimes_B S$, implica que $X = 0$ y luego $- \otimes_B \Sigma$ es un funtor fiel. Si ${}_B\Sigma$ es plano no queda nada que demostrar. Si ${}_A(\Sigma^* \otimes_B \Sigma)$ es un módulo plano, entonces $U_A : \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_B \Sigma} \to \mathcal{M}_A$ es un funtor exacto y fiel, según la Proposición 1.2.12. Considere ahora

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{g} Y'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $\mathcal{M}_B$, considere también Z el núcleo de $f \otimes_B \Sigma$ en la categoría de comódulo $\mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_B \Sigma}$, recuerde que esta categoría es en realidad de Grothendieck y que Z coincide con el núcleo de $f \otimes_B \Sigma$ calculado en $\mathcal{M}_A$. Se tiene pues un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z \otimes_A \Sigma^* \arrow[r] & Y \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y' \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \arrow[d, "\simeq"] \\ & 0 \arrow[r] & Y \otimes_B S \arrow[r] & Y' \otimes_B S. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $Z \otimes_A \Sigma^* = 0$, luego $Z \otimes_A (\Sigma^* \otimes_B \Sigma) = 0$, lo que implica que $Z = 0$, porque Z es un $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$–comódulo. Finalmente, $- \otimes_B \Sigma : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_B \Sigma}$ es un funtor exacto por la izquierda, ahora componiendo con el funtor del olvido U_A, se tiene que ${}_B\Sigma$ es un módulo plano. □

M. Cipolla [31] a dado un teorema del Descent para extensiones de anillos unitarios no-conmutativos $B \to A$. Como ya se sabe T. Brzeziński apuntado [17], que la categoría de descent data [81], es precisamente la categoría $\mathcal{M}^{A \otimes_B A}$ de comódulos sobre $A \otimes_B A$, véase el apartado 1.2.5 del capítulo 1. Como consecuencia del Teorema 2.3.10, se obtiene el resultado principal de Cipolla [31, Teorema] (véase también [81, Theorem 3.8]).

Corolario 2.3.11 (Descent para Módulos)**.** *Sea $B \to A$ una extensión de $\mathbb{K}$–álgebras. Si ${}_BA$ es fielmente plano, entonces el funtor $- \otimes_B A : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{A \otimes_B A}$ establece una equivalencia de categorías. El recíproco es cierto si ${}_A(A \otimes_B A)$ es un módulo plano.*

Demostración. Ponte $\Sigma = A$ en el Teorema 2.3.10. □

El siguiente ejemplo relaciona el contexto de coanillos de comatrices sobre anillos con unidades locales, con los *anillos de matrices de Rees* utilizados en la teoría de anillos con unidades locales y que han sido estudiados por P. N. Ánh y L. Márki en [8], [7].

Ejemplo 2.3.12. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y $e \in \mathbf{Idemp}(A)$. Considere el A–módulo unitario $\Sigma = eA$ junto con $S = eAe$ su anillo de endomorfismos A–lineales. Se puede pues construir el A–coanillo de comatrices $\Sigma^* \otimes_S \Sigma = Ae \otimes_{eAe} eA$. Además, en este caso $T = S$. Por las definiciones que vienen en resto de este ejemplo, véase [8, Example 2] y [7]. Sea R un anillo con unidad y supongamos que A es el anillo de matrices de Rees sobre R, con la siguiente descomposición canónica $A \cong Ae \otimes_{eAe} eA$, $e^2 = e \in \mathbf{Idemp}(A)$, $R \cong eAe$. Si A es finitamente ortogonal respeto de e ([7, Definition 4.2]), entonces A es obviamente un anillo con unidades. Considere ${}_{eAe}\Sigma_A = eA$, entonces la comultiplicación del A–coanillo de comatrices $\Sigma^* \otimes_{eAe} \Sigma$ es transferida a $Ae \otimes_{eAe} eA$ mediante $\Delta : Ae \otimes_{eAe} eA \to Ae \otimes_{eAe} eA \otimes_A Ae \otimes_{eAe} eA$ enviando $(ae \otimes_{eAe} ea') \mapsto ae \otimes_{eAe} e \otimes_A e \otimes_{eAe} ea'$, $a, a' \in A$, mientras la counidad será $\varepsilon : Ae \otimes_{eAe} eA \to A$ enviando $ae \otimes_{eAe} ea' \mapsto aea'$ que es el isomorfismo de arriba citado i.e. $A \cong Ae \otimes_{eAe} eA$. Está claro que la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{Ae \otimes_{eAe} eA}$ es isomorfa a la categoría de módulos unitarios $\mathcal{M}_A$, vía el isomorfismo de la counidad. De otra parte Σ is a generator de $\mathcal{M}_A$, lo que implica, según el Teorema de Popescu-Gabriel [47], que ${}_{eAe}\Sigma$ es fielmente plano, luego $- \otimes_{eAe} \Sigma : \mathcal{M}_{eAe} \to \mathcal{M}^{Ae \otimes_{eAe} eA}$ es una equivalencia de categorías. Luego, eAe es Morita equivalente a A, y A es pues Morita equivalente a R.

2.4. Reconstrucción y coanillos de comatrices infinitas.

En esta sección vamos a escoger un anillo de escalares una $\mathbb{K}$–álgebra con unidad A. Nuestro objetivo es reconstruir cada A–coanillo a partir de un conjunto de generadores finitamente generados y proyectivos de la categoría de comódulos por la derecha. Un tal conjunto, cuando existe, puede ser considerado como una sub-categoría pequeña de la categoría de comódulos junto con un funtor fiel que olvida las coacciones (restricción del funtor del olvido). Desde este punto vista, a cada categoría aditiva pequeña $\mathcal{A}$ (véase [10], para categorías mucho más generales) y un funtor fiel $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$, donde $add(A_A)$ es la sub-categoría de A–módulos por la derecha finitamente generados y proyectivos, se le asocia un A–coanillo llamado coanillo de comatrices infinitas. Nuestra reconstrucción, consiste pues en comprobar que cada coanillo cuya categoría de comódulos posee un conjunto de generadores finitamente generados y proyectivos como módulos, es isomorfo al coanillo de comatrices infinitas asociado a este último conjunto.

Si $\mathcal{A}$ tiene un solo objeto B cuya imagen (por ω) coincide con A_A; estamos re-definiendo el A–coanillo de Sweedler $A \otimes_B A$. Pero si esta imagen es cualquier A–módulo finitamente generado y proyectivo Σ, estamos re-definiendo esta vez el A–coanillo de comatrices finitas $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ (A aquí es una $\mathbb{K}$–álgebra). Cabe notar que las construcciones abajo detalladas, tienen su fuente de inspiración en la reconstrucción de [64, Section 4] (véase [43]).

La definición de los coanillos de comatrices infinitas en el caso de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, puede plantearse de la misma manera, aunque hay que considerar categoría pequeñas con el anillo de endomorfismos de cada objeto, un anillo con unidades locales. Estas categorías han sido definidas por G. Abrams [1].

Fijamos durante esta sección A una $\mathbb{K}$–álgebra. Todos los A–módulos son unitarios. Denotemos por $add(A_A)$ la categoría de todos los A–módulos por la derecha finitamente generados y proyectivos. Sea $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$ un funtor, donde $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva pequeña. La imagen de un objeto $P \in \mathcal{A}$ por ω, será denotada por ${}^{\omega}P$, a veces por P sí mismo, cuando no hay confusión que se produzca. Para cualquier objeto $P \in \mathcal{A}$, denotaremos por $T_P = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$ su $\mathbb{K}$–álgebra de endomorfismos junto con su extensión la $\mathbb{K}$–álgebra $S = \mathrm{End}({}^{\omega}P_A)$, que envia t a $\omega(t)$. El módulo ${}^{\omega}P$ es ahora un (T_P, A)–bimódulo. Si P, Q son dos objetos de $\mathcal{A}$, entonces los elementos del (T_Q, T_P)–bimódulo $T_{PQ} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Q)$ actúan canónicamente sobre ${}^{\omega}P$. Esta acción puede ser interpretada como la aplicación $T_Q - A$–bilineal

$$\begin{array}{rcl} T_{PQ} \otimes_{T_P} {}^{\omega}P & \longrightarrow & {}^{\omega}P \\ t \otimes_{T_P} p & \longmapsto & tp := \omega(t)(p), \end{array}$$

que satisfacen la siguiente asociatividad

$$t'(tp) \;\;=\;\; (t' \circ t)p, \quad t' \in T_{LQ},\, t \in T_{PQ},\, p \in {}^{\omega}P.$$

Los A–módulos duales por la derecha ${}^{\omega}P^* = \mathrm{Hom}_A({}^{\omega}P, A)$, son entonces de manera natural (A, T_P)–bimódulos y los correspondientes pares duales, vienen dados por

$$\begin{array}{rcl} {}^{\omega}Q^* \otimes_{T_Q} T_{PQ} & \longrightarrow & {}^{\omega}P^* \\ \varphi \otimes_{T_Q} t & \longmapsto & \varphi t := \varphi \circ \omega(t) \end{array}$$

La compatibilidad entre estos pares, viene dada

$$\varphi(tp) \;\;=\;\; (\varphi \circ t)(p), \quad \varphi \in {}^{\omega}Q,\, t \in T_{PQ},\, p \in {}^{\omega}P. \tag{2.5}$$

De ahora en adelante vamos a denotar ${}^{\omega}P$ por P. Según la sección 2.2, cada objeto $P \in \mathcal{A}$, se le asocia su A–coanillo de comatrices $P^* \otimes_{T_P} P$. Escogemos $\{p_{\alpha_P}, p^*_{\alpha_P}\}$ una base dual finita por la derecha de P. Consideramos el coproducto de A–coanillos

$$\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{P \in \mathcal{A}} P^* \otimes_{T_P} P \tag{2.6}$$

Cualquier objeto $P \in \mathcal{A}$ es, por inducción, un $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$–comódulo por la derecha, cuya coacción es definida por $\rho_P : P \to P \otimes_A \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ definida por $\rho_P(p) = \sum_{\alpha_P} p \otimes_A p_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p^*_{\alpha_P}$. El asignar $P \mapsto (P, \rho_P)$, no define un funtor de la categoría $\mathcal{A}$ a la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\mathfrak{B}(\mathcal{A})}$, porque no esta en general bien definido sobre los morfismos. Para remediar eso habrá que factorizar $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ por un coideal. El siguiente lema nos va ser muy útil en la demostración de siguientes resultados.

Lema 2.4.1. *Sea $t \in T_{PQ}$. Entonces*

$$\sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A q^*_{\alpha_Q} t = \sum_{\alpha_P} t p_{\alpha_P} \otimes_A p^*_{\alpha_P} \in Q \otimes_A P^*.$$

Demostración. Recuerde el isomorfismo natural $\xi_{Q,P}$ de la ecuación (**A**.5) del capítulo de apéndices $\xi_{Q,P} : Q \otimes_A P^* \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)$ vía $q \otimes_A \varphi \mapsto [p \mapsto q\varphi(p)]$. Sea pues $p \in P$ un elemento arbitrario, usando la ecuación (2.5) y el criterio de la base dual, se tiene

$$\begin{aligned}
\xi_{Q,P}\left(\sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A q^*_{\alpha_Q} t\right)(p) &= \sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} q^*_{\alpha_Q} t(p) \\
&= \sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} q^*_{\alpha_Q}(tp) \\
&= tp \\
&= t\left(\sum_{\alpha_P} p_{\alpha_P} p^*_{\alpha_P}(p)\right) \\
&= \sum_{\alpha_P} tp_{\alpha_P} p^*_{\alpha_P}(p) \\
&= \xi_{Q,P}\left(\sum_{\alpha_P} tp_{\alpha_P} \otimes_A p^*_{\alpha_P}\right)(p)
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. □

Lema 2.4.2. *El $\mathbb{K}$–submódulo $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ generado por el conjunto*

$$\{\varphi \otimes_{T_Q} tp - \varphi t \otimes_{T_P} p : \ \varphi \in Q^*, p \in P, t \in T_{PQ}, P, Q \in \mathcal{A}\}$$

es un coideal de $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Demostración. Es fácil de ver que $\mathfrak{J}$ es un A–sub-bimódulo de $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Comprobamos que $\varepsilon(\mathfrak{J}) = 0$, en efecto

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varphi \otimes_{T_Q} tp - \varphi t \otimes_{T_P} p) &= \varphi(tp) - \varphi t(p) \\
&= \varphi t(p) - \varphi t(p) = 0
\end{aligned}$$

Ahora usando el Lema 2.4.1, se tiene

$$\begin{aligned}
&\Delta(\varphi \otimes_{T_Q} tp - \varphi t \otimes_{T_P} p) \\
&\quad = \sum_{\alpha_Q} \varphi \otimes_{T_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A q^*_{\alpha_Q} \otimes_{T_Q} tp - \sum_{\alpha_P} \varphi t \otimes_{T_P} p_{\alpha_P} \otimes_A p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p \\
&\quad = \sum_{\alpha_Q} \varphi \otimes_{T_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A q^*_{\alpha_Q} \otimes_{T_Q} tp - \sum_{\alpha_Q} \varphi \otimes_{T_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A q^*_{\alpha_Q} t \otimes_{T_P} p \\
&\quad + \sum_{\alpha_P} \varphi \otimes_{T_Q} tp_{\alpha_P} \otimes_A p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p - \sum_{\alpha_P} \varphi t \otimes_{T_P} p_{\alpha_P} \otimes_A p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p \\
&\qquad = \sum_{\alpha_Q} \varphi \otimes_{T_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A (q^*_{\alpha_Q} \otimes_{T_Q} tp - q^*_{\alpha_Q} t \otimes_{T_P} p) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\alpha_P} (\varphi \otimes_{T_Q} tp_{\alpha_P} - \varphi t \otimes_{T_P} p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p
\end{aligned}$$

Lo que comprueba que $\Delta(\mathfrak{J}) \in \mathbf{Ker}(\pi \otimes_A \pi)$, donde $\pi : \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{A})/\mathfrak{J}$ es el epimorfismo canónico. Por lo tanto, $\mathfrak{J}$ es un coideal. □

Como hemos comentado antes cada objeto $P \in \mathcal{A}$ admite una $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$–coacción, definida según la sección 2.2, por $\rho_P : P \to P \otimes_A \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ vía $p \mapsto \sum_{\alpha_P} p_\alpha \otimes_A (p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p)$, componiendo con el morfismo canónico de A–coanillos $\pi : \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{A})/\mathfrak{J} = \mathfrak{F}(\mathcal{A})$, se tiene una nueva coacción

$$\begin{array}{rcccl} \rho'_P : P & \longrightarrow & P \otimes_A P^* \otimes_{T_P} P & \longrightarrow & P \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \\ p & \longmapsto & \sum_{\alpha_P} p_{\alpha_P} \otimes_A \big((p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p)\big) & \longmapsto & \sum_{\alpha_P} p_{\alpha_P} \otimes_A \big((p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p) + \mathfrak{J}\big) \end{array} \tag{2.7}$$

Proposición 2.4.3. *Sea $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \oplus_{P \in \mathcal{A}} P^* \otimes_{T_P} P$ y define el A–coanillo cociente $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathfrak{B}(\mathcal{A})/\mathfrak{J}$, usando el Lema 2.4.2. Existe un funtor $\mathfrak{F}(\mathcal{A}, \omega) : \mathcal{A} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$ que asigna a cada $P \in \mathcal{A}$ la estructura de $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–comódulo por la derecha (P, ρ'_P) de la ecuación (2.7), y que hace el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, dotted, "\mathfrak{F}(\omega)"'] & add(A_A) \arrow[d] \\ \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} \arrow[r, "U_A"'] & \mathcal{M}_A \end{tikzcd}$$

conmutativo.

Demostración. Sean $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Q)$ y $p \in P$ elementos arbitrarios. Según el Lema 2.4.1, tenemos

$$\sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A (q^*_{\alpha_Q} t \otimes_{T_P} p) \quad = \quad \sum_{\alpha_P} t p_{\alpha_P} \otimes_A (p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p),$$

como componente homogénea del módulo $Q \otimes_A \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Aplicando ahora el morfismo $Q \otimes_A \pi$, se obtiene

$$\sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A \left(q^*_{\alpha_Q} t \otimes_{T_P} p + \mathfrak{J}\right) \quad = \quad \sum_{\alpha_P} t p_{\alpha_P} \otimes_A \left(p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p + \mathfrak{J}\right). \tag{2.8}$$

Utilizando la definición de $\mathfrak{J}$ (Lema 2.4.2) y la ecuación (2.8), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A \left(q^*_{\alpha_Q} \otimes_{T_Q} tp + \mathfrak{J}\right) \quad &= \quad \sum_{\alpha_Q} q_{\alpha_Q} \otimes_A \left(q^*_{\alpha_Q} t \otimes_{T_P} p + \mathfrak{J}\right) \\ &= \quad \sum_{\alpha_P} t p_{\alpha_P} \otimes_A \left(p^*_{\alpha_P} \otimes_{T_P} p + \mathfrak{J}\right) \end{aligned}$$

Lo que significa que

$$\rho'_Q(tp) \quad = \quad (t \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})) \circ \rho'_P(p), \qquad \forall p \in P,\ t \in T_{PQ}.$$

En conclusión $\mathfrak{F}(\omega)$ es bien definido. La conmutatividad del citado diagrama es evidente. □

Denotemos por $V_A : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ el funtor del olvido. Sea $W = V_A \circ U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$, utilizando la transformación natural (1.40) de la sección 1.6, está claro que $-\otimes_A W(\mathfrak{F}(\mathcal{A})) = W(- \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A}))$. Teniendo en cuenta esta identificación, vamos a relacionar la $\mathbb{K}$–álgebra dual por la izquierda ${}^*(\mathfrak{F}(\mathcal{A}))$ con la $\mathbb{K}$–álgebra de transformaciones naturales $\mathcal{N}at(W, W)$ (como en el caso de coálgebras).

Lema 2.4.4. *Si $\delta \in \mathcal{N}at(W, W)$, entonces $\delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$ es morfismo $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–colineal por la izquierda.*

Demostración. Primero, comprobaremos la A–linealidad por la izquierda. Sea pues $a \in A$ y considere $\lambda_a : \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{F}(\mathcal{A})$, enviando $c \mapsto ac$. Como la comultiplicación Δ de $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ es A–bilineal, λ_a es $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–colineal por la derecha; esto para cualquier $a \in A$. Por lo tanto, $\delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} \circ \lambda_a = \lambda_a \circ \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$, para cualquier $a \in A$, es decir que $\delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$ es A–lineal por la izquierda. Como $W : \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ preserva el límites directos, se tiene según el Lema 1.6.1, que $\delta_{X \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})} = X \otimes_A \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$ (recuerde que W es el funtor del olvido), para cualquier X_A. Como delta Δ es $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–colineal por la derecha, se tiene $\Delta \circ \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} = \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})} \circ \Delta$ y luego $\Delta \circ \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} = (\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \otimes_A \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}) \circ \Delta$, es decir que $\delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$ es $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–colineal por la izquierda. □

Considere $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ junto con el funtor del olvido $W : \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ y define $\omega_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ como la composición de ω y la restricción de V_A a la sub-categoría $add(A_A)$. El diagrama de la Proposición 2.4.3, se completa ahora en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\mathfrak{F}(\mathcal{A},\omega)"'] & add(A_A) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} \arrow[r, "U_A"'] & \mathcal{M}_A \arrow[r, "V_A"'] & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Proposición 2.4.5. *En la notación anterior, existe una extensión de $\mathbb{K}$–álgebras $\gamma : {}^*(\mathfrak{F}(\mathcal{A})) \to \mathcal{N}at(\omega_{\mathcal{A}}, \omega_{\mathcal{A}})$. Si suponemos que $\mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$ es abeliana y que tiene como conjunto de generadores proyectivos $\mathcal{A}$. Entonces γ es un isomorfismo.*

Demostración. Está claro que existe una extensión $\mathcal{N}at(W, W) \to \mathcal{N}at(\omega_{\mathcal{A}}, \omega_{\mathcal{A}})$, por que $W \circ \mathfrak{F}(\mathcal{A}, \omega) = \omega_{\mathcal{A}}$. Para la primera aserción, basta comprobar usando la Proposición 1.2.15, que $\mathcal{N}at(W, W) \cong \mathrm{End}({}_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}\mathfrak{F}(\mathcal{A}))$ como álgebras. Según el Lema 2.4.4, la siguiente aplicación

$$\begin{tikzcd}
(-)_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} : \mathcal{N}at(W, W) \arrow[r] & \mathrm{End}({}_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}\mathfrak{F}(\mathcal{A})) \\
\delta \arrow[r, mapsto] & \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de anillos unitarios. Vamos a definir un morfismo inverso de $(-)_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$. Consideramos $f \in \mathrm{End}({}_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}\mathfrak{F}(\mathcal{A}))$ y cualquier $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–comódulo por la derecha X. La siguiente composición

$$\mu(f)_X : W(X) \xrightarrow{\rho_X} X \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{X \otimes_A f} X \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{X \otimes_A \varepsilon} X \otimes_A A \cong W(X)$$

es morfismo natural. En efecto, considere una aplicación $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$–colineal por la derecha $g : X \to Y$, se tiene pues el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W(X) \arrow[r, "W(g)"] \arrow[d, "\rho_X"'] \arrow[ddd, bend right, "\mu(f)_X"'] & W(Y) \arrow[d, "\rho_Y"] \arrow[ddd, bend left, "\mu(f)_Y"] \\
X \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \arrow[r, "g\otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})"] \arrow[d, "X\otimes_A f"'] & Y \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \arrow[d, "Y\otimes_A f"] \\
X \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \arrow[r, "g\otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})"] \arrow[d, "X\otimes_A \varepsilon"'] & Y \otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \arrow[d, "Y\otimes_A \varepsilon"] \\
W(X) \arrow[r, "W(g)"] & W(Y)
\end{tikzcd}$$

que es claramente conmutativo, lo que implica que $\mu(f)_{-}$ es natural. De otra parte,

$$\begin{aligned}
\mu(f)_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})} &= (\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \otimes_A \varepsilon) \circ (\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \otimes_A f) \circ \Delta \\
&= (\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \otimes_A \varepsilon) \circ \Delta \circ f \\
&= f
\end{aligned}$$

esto para cualquier $f \in \mathrm{End}(_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}\mathfrak{F}(\mathcal{A}))$. Ahora, como en la demostración del Lema 2.4.4, para cualquier $\delta \in \mathcal{N}at(W, W)$ y $X \in \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$, se tiene $\delta_{X\otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})} = X \otimes_A \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(\delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})})_X &= (X \otimes_A \varepsilon) \circ (X \otimes_A \delta_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}) \circ \rho_X \\
&= (X \otimes_A \varepsilon) \circ \delta_{X\otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})} \circ \rho_X \\
&= (X \otimes_A \varepsilon) \circ \delta_{X\otimes_A \mathfrak{F}(\mathcal{A})} \circ W(\rho_X) \\
&= (X \otimes_A \varepsilon) \circ W(\rho_X) \circ \delta_X \\
&= \delta_X.
\end{aligned}$$

Finalmente, la compatibilidad de $\mu(-)$ con la suma y el producto son inmediatos. En conclusión $\mathrm{End}(_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}\mathfrak{F}(\mathcal{A})) \cong \mathcal{N}at(W, W)$ como anillos unitarios, vía $\mu(-)$ y $(-)_{\mathfrak{F}(\mathcal{A})}$. La segunda aserción, es una consecuencia del Teorema de Mitchell [89, Theorem 3.6.5], usando la composición $W \circ \mathfrak{F}(\mathcal{A}, \omega) = \omega_{\mathcal{A}}$. □

Ahora vamos a dar una descripción alternativa del A–coanillo $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una sub-categoría de una categoría aditiva $\mathcal{C}$, y que existe el coproducto $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P$ en la categoría $\mathcal{C}$. Supongamos además que el funtor $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$ es una restricción de un funtor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{M}_A$ que conmuta con el coproducto $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P$. La existencia de la categoría $\mathcal{C}$ y el funtor U, es garantizada por la siguiente construcción. La clase de objetos de $\mathcal{C}$ es constituida por la clase de objetos de $\mathcal{A}$ y un nuevo objeto, denotado Σ. Par construir la clase de flechas en $\mathcal{C}$, basta completar la familia de conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$, añadiendo los siguientes: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \Sigma) = \oplus_{X\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X)$ (coproducto de grupos abelianos, recuerde que $\mathcal{A}$ es pequeña), $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Sigma, Q) = \Pi_{X\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Q)$ y finalmente $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma, \Sigma) =$

$\Pi_{X\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\Sigma)$ (producto de grupos abelianos, existe también porque $\mathcal{A}$ es pequeña); para cualquier $P,Q\in\mathcal{A}$. Las aplicaciones de la composición restantes son

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\Sigma)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,Q) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q),\\ ((\oplus_{X\in\mathcal{A}}t_{PX}),\,(t_{YQ})_{Y\in\mathcal{A}}) &\longmapsto \textstyle\sum_{X\in\mathcal{A}} t_{XQ}t_{PX} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,P)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\Sigma) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,\Sigma),\\ ((t_{YP})_{Y\in\mathcal{A}},\,\oplus_{X\in\mathcal{A}}t_{PX}) &\longmapsto (\oplus_{X\in\mathcal{A}}(t_{PX}t_{YP}))_{Y\in\mathcal{A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,P)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,Q),\\ ((t_{YP})_{Y\in\mathcal{A}},\,t_{PQ}) &\longrightarrow (t_{PQ}t_{YP})_{Y\in\mathcal{A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\Sigma) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\Sigma),\\ (t_{PQ},\,\oplus_{X\in\mathcal{A}}t_{QX}) &\longrightarrow \oplus_{X\in\mathcal{A}}(t_{QX}t_{PQ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\Sigma)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,\Sigma) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\Sigma),\\ (\oplus_{X\in\mathcal{A}}t_{PX},\,(g_Y)_{Y\in\mathcal{A}}) &\longmapsto \textstyle\sum_{X\in\mathcal{A}}(g_X\circ t_{PX}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,\Sigma)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,Q) &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,Q),\\ ((g_Y)_{Y\in\mathcal{A}},\,(t_{XQ})_{X\in\mathcal{A}}) &\longmapsto (t_{XQ}\circ g_Q)_{X\in\mathcal{A}} \end{aligned}$$

(las que quedan se deducen trivialmente de estas). La definición de U sobre los objetos, viene dada por

$$\begin{aligned} U:\mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{M}_A\\ P &\longrightarrow {}^{\omega}P, \quad \forall P\in\mathcal{A},\\ \Sigma &\longrightarrow \oplus_{X\in\mathcal{A}}{}^{\omega}X \end{aligned}$$

y sobre las flechas

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q) &\xrightarrow{U} \mathrm{Hom}_A({}^{\omega}P,{}^{\omega}Q), & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,Q) &\xrightarrow{U} \mathrm{Hom}_A(\oplus_{X\in\mathcal{A}}{}^{\omega}X,Q)\\ t &\longmapsto \omega(t) & (f_X)_{X\in\mathcal{A}} &\longmapsto \oplus_{X\in\mathcal{A}}\omega(f_X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\Sigma) &\xrightarrow{U} \mathrm{Hom}_A({}^{\omega}P,\oplus_{X\in\mathcal{A}}{}^{\omega}X), & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma,\Sigma) &\xrightarrow{U} \mathrm{Hom}_A(\oplus_{X\in\mathcal{A}}{}^{\omega}X,\oplus_{Y\in\mathcal{A}}{}^{\omega}Y)\\ \oplus_{X\in\mathcal{A}}f_X &\longmapsto \textstyle\sum_{X\in\mathcal{A}}\omega(f_X) & (f_X)_{X\in\mathcal{A}} &\longmapsto \oplus_{X\in\mathcal{A}}U(f_X) \end{aligned}$$

Está claro ahora que el funtor $U:\mathcal{C}\to\mathcal{M}_A$ es bien definido y conmuta con el coproducto $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P$ que es en realidad el nuevo objeto Σ. En efecto Σ es el coproducto de $\{P\}_{P\in\mathcal{A}}$ en la categoría $\mathcal{C}$ con las siguientes inyecciones y proyecciones canónica: Para cada P, $\iota'_P:P\to\Sigma$ es la imagen de morfismo identidad de P en la suma directa $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,\Sigma)=\oplus_{X\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,X)$ y $\pi'_P:\Sigma\to P$ es el morfismo $\pi'_P=(f_X)_{X\in\mathcal{A}}$ tal que $f_X=0$, para cualquier $X\neq P$ y $f_P=P$ la identidad de P. Finalmente, ω es claramente una restricción de U a la sub-categoría $\mathcal{A}$.

Consideramos el anillo de endomorfismos $T = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\Sigma)$. Se tiene pues una estructura de (T, A)–bimódulo sobre $U(\Sigma)$, que induce una estructura de (A, T)–bimódulo sobre $U(\Sigma)^* = \mathrm{Hom}_A(U(\Sigma), A)$. Vamos a utilizar la notación Σ por $U(\Sigma)$. Para cada objeto $P \in \mathcal{A}$, sea $\pi_P : \Sigma \to P$ (resp. $\iota_P : P \to \Sigma$) la proyección canónica (resp. la inyección canónica), es decir $\iota_P = U(\iota'_P)$ y $\pi_P = U(\pi'_P)$, donde ι'_P y π'_P han sido arriba definidas.

Proposición 2.4.6. *Existe un morfismo sobreyectivo de A–bimódulos*

$$\Gamma : \oplus_{P\in\mathcal{A}} P^* \otimes_{T_P} P \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma$$

cuya restricción Γ_P *a cada* $P^* \otimes_{T_P} P$ *viene dada por* $\Gamma_P(\varphi \otimes_{T_P} p) = \varphi\pi_P \otimes_T \iota_P(p)$. *El núcleo de* Γ *es el coideal* $\mathfrak{J}$ *y por tanto,* $\Sigma^* \otimes_T \Sigma$ *puede ser dotado de una estructura de A–coanillo con la cual* Γ *es un morfismo de A–coanillos. Este morfismo* Γ *induce pues un isomorfismo de A–coanillos* $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \cong \Sigma^* \otimes_T \Sigma$.

Demostración. Vamos a averiguar primero que Γ_P está bien definida. Para todo $\varphi \in P^*$, $p \in P$ y $t \in T_P$, tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_P(\varphi t \otimes_{T_P} p) &= (\varphi t)\pi_P \otimes_T \iota_P(p) \\
&= \varphi\pi_P\iota_P t\pi_P \otimes_T \iota_P(p) \\
&= \varphi\pi_P \otimes_T \iota_P t\pi_P\iota_P(p) \\
&= \varphi\pi_P \otimes_T \iota_P t(p) \\
&= \Gamma_P(\varphi \otimes_{T_P} tp)
\end{aligned}$$

Para comprobar que Γ es sobreyectiva, observe que si $\varphi \otimes_T u \in \Sigma^* \otimes_T \Sigma$, entonces existe un conjunto finito $\mathcal{F}$ de objetos de $\mathcal{A}$ tal que $u = (\sum_{P\in\mathcal{F}} \iota_P\pi_P)(u)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi \otimes_T u &= \sum_{P\in\mathcal{F}} \varphi \otimes_T \iota_P\pi_P(u) \\
&= \sum_{P\in\mathcal{F}} \varphi\iota_P\pi_P \otimes_T \iota_P\pi_P(u) \\
&= \Gamma(\sum_{P\in\mathcal{F}} \varphi\iota_P \otimes_{T_P} \pi_P(u))
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora comprobemos que $\mathfrak{J} \subseteq \mathbf{Ker}(\Gamma)$. Dado un generador $\varphi \otimes_{T_Q} tp - \varphi t \otimes_{T_P} p$ en $\mathfrak{J}$, donde $\varphi \in Q^*$, $p \in P$, $t \in T_{PQ}$, y $P, Q \in \mathcal{A}$, aplicando Γ, se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi \otimes_{T_Q} tp - \varphi t \otimes_{T_P} p) &= \varphi\pi_Q \otimes_T \iota_Q(tp) - \varphi t\pi_P \otimes_T \iota_P(p) \\
&= \varphi\pi_Q \otimes_T \iota_Q(tp) - \varphi\pi_Q\iota_Q t\pi_P \otimes_T \iota_P(p) \\
&= \varphi\pi_Q \otimes_T \iota_Q(tp) - \varphi\pi_Q \otimes_T \iota_Q t\pi_P\iota_P(p) \\
&= \varphi\pi_Q \otimes_T \iota_Q(tp) - \varphi\pi_Q \otimes_T \iota_Q(tp) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, hay que averiguar la inclusión recíproca. Se sabe que cada elemento de $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P^*\otimes_{T_P} P$ es una suma finita $x=\sum_{a=1}^{n}\sum_{P\in\mathcal{A}}\varphi_{a,P}\otimes_{T_P} p_{a,P}$, para un cierto $\varphi_{a,P}\in P^*$ y $P_{a,P}\in P$ con casi todos los $p_{a,P}=0$. Este elemento pertenece a $\mathbf{Ker}(\Gamma)$ si y sólo si $\sum_{a,P}\varphi_{a,P}\pi_P\otimes_{T_P}\iota_P(p_{a,P})=0$. Como los elementos $\iota_P(p)$ generan Σ, existen según [92, Proposition I.8.8], un conjunto finito $\{\nu_k\}_{k\in I}\subseteq\Sigma^*$ y un conjunto $\{g_{a,P,k}\}\subseteq T$, tales que

1. $g_{a,P,k}=0$ para casi todo (a,P,k),
2. $\sum_{a,P} g_{a,P,k}\iota_P(p_{a,P})=0$, para todo $k\in I$,
3. $\varphi_{a,P}\pi_P=\sum_k \nu_k g_{a,P,k}$, para todo $a=1,\cdots,n$ y $P\in\mathcal{A}$.

Se deduce directamente de la tercera condición que

$$\begin{aligned}\varphi_{a,P} &= \varphi_{a,P}\pi_P\iota_P\\ &= \sum_k \nu_k g_{a,P,k}\iota_P\end{aligned}\tag{2.11}$$

Como cada P es un A–módulo finitamente generado y proyectivo, se tiene que $g_{a,P,k}\iota_P : P\to\Sigma$ se factoriza a través de una suma directa finita $\oplus_{Q\in\mathcal{F}}Q$. Dado que los $g_{a,P,k}\neq 0$ son en número finito, podemos pues suponer que el conjunto finito $\mathcal{F}$ es independiente de a y de P. Por lo tanto

$$\begin{aligned}g_{a,P,k}\iota_P &= \left(\sum_{Q\in\mathcal{F}}\iota_Q\pi_Q\right)g_{a,P,k}\iota_P\\ &= \sum_{Q\in\mathcal{F}}\iota_Q\pi_Q g_{a,P,k}\iota_P\end{aligned}\tag{2.12}$$

En vista de la ecuación (2.11), se tiene

$$\varphi_{a,P} = \sum_{k,Q}\nu_{k,Q}t_{Q,a,P,k}\tag{2.13}$$

donde $\nu_{k,Q}=\nu_Q\iota_Q\in Q^*$ y $t_{Q,a,P,k}=\pi_Q g_{a,P,,k}\iota_P\in T_{PQ}$. De otra parte, la segunda condición arriba implica que para cada Q,k

$$\begin{aligned}\sum_{a,P}t_{Q,a,P,k}p_{a,P} &= \sum_{a,P}\pi_Q g_{a,P,k}\iota_P(p_{a,P})\\ &= \pi_Q\left(\sum_{a,P}g_{a,P,k}\iota_P(p_{a,P})\right)=0\end{aligned}\tag{2.14}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\sum_{a,P} \varphi_{a,P} \otimes_{T_P} p_{a,P} &= \sum_{a,P} \left(\sum_{k,Q} \nu_{k,Q} t_{Q,a,P,k} \right) \otimes_{T_P} p_{a,P} \\
&= \sum_{a,P,k,Q} \nu_{k,Q} t_{Q,a,P,k} \otimes_{T_P} p_{a,P} - \sum_{k,Q} \nu_{k,Q} \otimes_{T_Q} \left(\sum_{a,P} t_{Q,a,P,k} p_{a,P} \right) \\
&= \sum_{a,k} \left(\sum_{P,Q} \nu_{k,Q} t_{Q,a,P,k} \otimes_{T_P} p_{a,P} - \sum_{P,Q} \nu_{k,Q} \otimes_{T_Q} t_{Q,a,P,k} p_{a,P} \right)
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad viene de la ecuación (2.13), mientras que la segunda, viene de (2.14). Vamos a definir la estructura de A–coanillo sobre $\Sigma^* \otimes_T \Sigma$ inducida por Γ, con ello habremos acabado la demostración, porque la última aserción será evidente. Según la ecuación (2.10), existe una aplicación

$$\begin{aligned}
\Delta' : \Sigma^* \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma \\
(\varphi, u) &\longmapsto \textstyle\sum_{P \in \mathcal{F}, \alpha_P} \varphi \otimes_T \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T u)
\end{aligned}$$

donde $\varphi \in \Sigma^*$ y $u = \sum_{P \in \mathcal{F}} \iota_P \pi_P(u) \in \Sigma$. Sea $t \in T$, entonces

$$\Delta'(\varphi t, u) = \sum_{P \in \mathcal{F}, \alpha_P} \varphi(t \iota_P) \pi_P \otimes_T \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T u$$

como $t\iota_P : P \to \Sigma$ se factoriza a través de una suma finita $\oplus_{X \in \mathcal{F}'_P} X$, podemos considerar $\mathcal{F}'$ la union de todos los $\mathcal{F}'_P$, $P \in \mathcal{F}$, así tenemos $t\iota_P = (\sum_{X \in \mathcal{F}'} \iota_X \pi_X)(t\iota_P)$, para cualquier $P \in \mathcal{F}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Delta'(\varphi t, u) &= \sum_{P \in \mathcal{F}, \alpha_P, X \in \mathcal{F}'} \varphi \iota_X \pi_X t \iota_P \pi_P \otimes_T \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T u \\
&= \sum_{P \in \mathcal{F}, \alpha_P, X \in \mathcal{F}'} \varphi \otimes_T \iota_X \pi_X t \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T u
\end{aligned}$$

aplicando el Lema 2.4.1 junto con las aplicaciones

$$\begin{aligned}
X \otimes_A P^* &\longrightarrow \Sigma \otimes_A \Sigma^* \\
x \otimes_A \varphi &\longmapsto \iota_X(x) \otimes_A \varphi \pi_P
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta'(\varphi t, u) &= \sum_{P \in \mathcal{F}, \alpha_P, X \in \mathcal{F}'} \varphi \otimes_T \iota_X \pi_X t \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T u \\
&= \sum_{X \in \mathcal{F}', \alpha_X} \varphi \otimes_T \iota_X(x_{\alpha_X}) \otimes_A x^*_{\alpha_X} \pi_X \otimes_T \left(\sum_{P \in \mathcal{F}} t \iota_P \pi_P(u) \right) \\
&= \sum_{X \in \mathcal{F}', \alpha_X} \varphi \otimes_T \iota_X(x_{\alpha_X}) \otimes_A x^*_{\alpha_X} \pi_X \otimes_T tu \\
&= \Delta'(\varphi, tu)
\end{aligned}$$

porque tu tiene el soporte en $\mathcal{F}$. Luego Δ' se extiende a la aplicación

$$\begin{aligned} \Delta : \Sigma^* \otimes_T \Sigma &\longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_T \Sigma \\ \varphi \otimes_T u &\longmapsto \textstyle\sum_{P \in \mathcal{F}, \alpha_P} \varphi \otimes_T \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T u \end{aligned} \tag{2.15}$$

que es la comultiplicación deseada. La counidad es simplemente la evaluación $\varepsilon : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to A$, vía $\varphi \otimes_T u \mapsto \varphi(u)$. $\square$

Definición 2.4.7. El A–coanillo $\Sigma^* \otimes_T \Sigma$, se llama el *coanillo de comatrices infinitas* asociado a la categoría $\mathcal{A}$ y el funtor $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$. Su comultiplicación Δ viene dada explícitamente como sigue: una vez elegida una base dual finita $\{p_{\alpha_P}, p^*_{\alpha_P}\}$, para cada $P \in \mathcal{A}$, se tiene, de la ecuación (2.15)

$$\Delta(\varphi \otimes_T u) \;=\; \sum_{P \in \mathcal{F}} \sum_{\alpha_P} \varphi \iota_P \pi_P \otimes_T \iota_P(p_{\alpha_P}) \otimes_A p^*_{\alpha_P} \pi_P \otimes_T \iota_P \pi_P(u) \tag{2.16}$$

para $\varphi \otimes_T u \in \Sigma^* \otimes_T \Sigma$, donde $\mathcal{F}$ es un conjunto finito de objetos de $\mathcal{A}$ tal que $u = \sum_{P \in \mathcal{F}} \iota_P \pi_P(u)$. La counidad ε de $\Sigma^* \otimes_T \Sigma$ es simplemente la evaluación $\varphi \otimes_T u \mapsto \varphi(u)$.

Observación 2.4.8. Si ${}_B P_A$ es bimódulo, con P_A finitamente generado y proyectivo i.e. $P \in add(A_A)$, entonces el coanillo de comatrices $P^* \otimes_B P$ de la definición 2.2.2, es simplemente el coanillo de comatrices infinitas asociado al funtor canónico de la categoría aditiva B a $add(A_A)$ qui designa al único objeto B el objeto P.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es un sub-categoría pequeña de la categoría de comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ sobre un A–coanillo $\mathfrak{C}$, y el funtor $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$ es la restricción del funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$, es decir escogiendo $\mathcal{C} = \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Sea $\Sigma = \oplus_{P \in \mathcal{A}} P$ y $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$. Consideramos pues la adjunción canónica $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) \dashv - \otimes_T \Sigma$, entre las categorías $\mathcal{M}_T$ y $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. La counidad de esta adjunción evaluada en $\mathfrak{C}$ es el morfismo de A–bimódulos

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, \mathfrak{C}) \otimes_T \Sigma \longrightarrow \mathfrak{C} \qquad (f \otimes_T u \longmapsto f(u)), \tag{2.17}$$

que, en conjugación con el isomorfismo canónico $\Sigma^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, \mathfrak{C})$, se tiene el morfismo de A–bimódulos

$$\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, \mathfrak{C}) \otimes_T \Sigma \longrightarrow \mathfrak{C} \tag{2.18}$$

Lema 2.4.9. *El morfismo* $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$, *explícitamente definido por* $\mathsf{can}(\varphi \otimes_T u) = (\varphi \otimes_A \mathfrak{C})\rho_\Sigma(u)$, *es un morfismo de* A*–coanillos.*

Demostración. Según la Proposición 2.4.6, existe un morfismo de A–coanillos sobreyectivo $\Gamma : \oplus_{P \in \mathcal{A}} P^* \otimes_{T_P} P \to \Sigma^* \otimes_T \Sigma$. Claramente, es suficiente de comprobar que $\mathsf{can} \circ \Gamma$ es un morfismo de A–coanillos. Su restricción can_P al coanillo $P^* \otimes_{T_P} P$ es un morfismo de A–coanillos para cualquier P, donde $\mathsf{can}_P : P^* \otimes_{T_P} P \to \mathfrak{C}$ es exactamente el morfismo de la Proposición 2.2.6. $\square$

Estamos ahora preparados para enunciar el teorema de reconstrucción para coanillos, aplicando el Teorema de Gabriel-Popescu.

Teorema 2.4.10 (Reconstrucción)**.** *Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, supongamos que la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es abeliana, y que existe un conjunto de generadores $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha, tales que P_A es finitamente generado y proyectivo, para cualquier $P \in \mathcal{A}$. Si $\Sigma = \oplus_{P\in\mathcal{A}} P$ y $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$, entonces $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos.*

Demostración. Si $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es abeliana, entonces es una categoría de Grothendieck, según la demostración de la Proposición 1.2.12. Claramente, Σ es un generador de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. El Teorema de Gabriel-Popescu [47], implica que al morfismo canónico (2.17), es ahora un isomorfismo. Por lo tanto can es un isomorfismo de A–coanillos. □

Observación 2.4.11. Los comódulos de Galois (véase la Definición 2.3.5) juegan un papel esencial en la caracterización de coanillos con un generador finitamente generado y proyectivo Teorema 2.3.2. El Teorema 2.4.10 sugiere dar sentido al considerar *comódulo de Galois*, sin condiciones de finitud; el importante aquí es que la estructura de coanillo de $\Sigma^* \otimes_T \Sigma$ anticipa la suposición de que can sea un isomorfismo. Otra posibilidad es de llamar a $\mathcal{A}$ un *subcategoría de Galois* de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, siempre cuando el morfismo $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ sea un isomorfismo de A–coanillos.

Corolario 2.4.12. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo semi-simple artiniano A. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de $\mathfrak{C}$–comódulos generadores finitamente generados. Si $\Sigma = \oplus_{P\in\mathcal{A}} P$ y $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$, entonces $\mathsf{can} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos.*

Demostración. Como ${}_A\mathfrak{C}$ es obviamente plano, se tiene que $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es abeliana. Además, cada comódulo finitamente generado, es finitamente generado como A–módulo por la derecha. Por lo tanto, nuestro coanillo satisface las hipótesis del Teorema 2.4.10. □

Corolario 2.4.13. *Supongamos que $\mathbb{K}$ es un cuerpo. Considere C una $\mathbb{K}$–coálgebra junto con Σ el coproducto de un conjunto de generadores finito-dimensional en la categoría de C–comódulos por la derecha y $T = \mathrm{End}(\Sigma_C)$. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathsf{can} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Sigma, \mathbb{K}) \otimes_T \Sigma &\longrightarrow C \\ \varphi \otimes_T u &\longmapsto (\varphi \otimes_{\mathbb{K}} C) \circ \rho_\Sigma(u) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–coálgebras.

Corolario 2.4.14. *Considere B una $\mathbb{K}$–álgebra y Σ es el coproducto del conjunto de representativos de todos los B–módulos finito-dimensional. Denote por B° la $\mathbb{K}$–coálgebra dual finito de B (esta constituida de aquellos $\varphi \in B^*$ tal que $\mathbf{Ker}(\varphi)$ contiene un ideal I tal que B/I es de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$). Entonces*

$$\begin{aligned} \mathsf{can} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Sigma, \mathbb{K}) \otimes_T \Sigma &\longrightarrow B^{\circ} \\ \varphi \otimes_T u &\longmapsto (\varphi \otimes_{\mathbb{K}} B^{\circ}) \circ \rho_\Sigma(u), \end{aligned}$$

donde $T = \mathrm{End}({}_B\Sigma)$, es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–coálgebra.

2.5. Coanillos con generadores proyectivos y pequeños.

En esta sección vamos a caracterizar los coanillos (con anillo de escalares una $\mathbb{K}$–álgebra) cuyas categorías de comódulos por la derecha poseen un conjunto de generadores proyectivos y pequeños. Vuelvo a repetir que el caso de un solo generados estudiado en la sección 2.6 no es un caso particular del resultado abajo desarrollado, porque las condiciones del anillo de base son distintas.
Además de esta caracterización, ofreceremos un Teorema del Descent fielmente plano sobre extensiones de anillos con suficiente idempotentes ortogonales. Finalmente, aplicamos los resultados obtenidos al caso de coanillo con un conjunto de elementos grouplike y en particular a la categoría de módulos graduados.

Fijamos A una $\mathbb{K}$–álgebra con unidad. Todos los A–módulos son unitarios. Regresamos al funtor $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$. Supongamos que $\mathcal{A}$ se mete en una categoría aditiva $\mathcal{C}$ y que existe el coproducto $\Sigma = \oplus_{P\in\mathcal{A}}P$ en la categoría $\mathcal{C}$. Supongamos además que el funtor ω es una restricción de un funtor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{M}_A$ que conmuta con el coproducto $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P$. Recuerde de la sección anterior que tal categoría y tal funtor, siempre pueden ser construidos. Denotemos por $T = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\Sigma)$ y por $R = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}T_{PQ}$, donde $T_{PQ} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Q)$.

Lema 2.5.1. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$, Σ, T y R como antes.*

(1) R admite una estructura de anillo con unidades locales, precisamente con suficientes idempotentes ortogonales: $\{1_P : P \in \mathcal{A}\}$, donde 1_P es el elemento de R imagen de la unidad de $T_P = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$ en la suma directa R.

(2) Σ es un (R,A)–bimódulo unitario, mientras que $\Sigma^\dagger = \oplus_{P\in\mathcal{A}}P^*$ se convierte en (A,R)–bimódulo unitario. Estas R–acciones vienen dada como sigue. Para $r \in R$ con soporte $\{P_1,\cdots,P_k\}\times\{Q_1,\cdots,Q_l\}$ (i.e. $r = \sum_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq l} r_{P_iQ_j}$), $p \in P$ y $\varphi \in Q^*$

$$r\iota_P(p) = \begin{cases} \iota_{Q_1}(r_{PQ_1}p) + \cdots + \iota_{Q_l}(r_{PQ_l}p), & si\ P \in \{P_1,\cdots,P_k\} \\ 0, & si\ P \notin \{P_1,\cdots,P_k\} \end{cases}$$

y

$$\iota_{Q^*}(\varphi)r = \begin{cases} \iota_{P_1^*}(\varphi\circ r_{P_1Q}) + \cdots + \iota_{P_k^*}(\varphi\circ r_{P_kQ}), & si\ Q \in \{Q_1,\cdots,Q_l\} \\ 0, & si\ Q \notin \{Q_1,\cdots,Q_l\} \end{cases}$$

Demostración. (1). Según [46, p. 346] R es un anillo cuyo producto es definido por: Si $t \in T_{PQ} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Q)$ y $s \in T_{LK} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,K)$, entonces

$$st = \begin{cases} s\circ t, & \text{si } Q = L \\ 0, & \text{si } Q \neq L. \end{cases} \tag{2.19}$$

ahora está claro que los 1_P, $P \in \mathcal{A}$, forman un conjunto de idempotentes ortogonales.
(2). Es inmediata usando el producto (2.19). □

Considere el A–bimódulo $\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$, resultante del Lema 2.5.1.

Lema 2.5.2. *Existe un diagrama conmutativo de morfismos sobreyectivos de A–bimódulos:*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{P\in\mathcal{A}} P^* \otimes_{T_P} P \arrow[r, "\Gamma_1"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \arrow[dl, "\Gamma_2"] \\ \Sigma^* \otimes_T \Sigma & \end{tikzcd} \tag{2.20}$$

Demostración. Para cada $P \in \mathcal{A}$, sean $\iota_{P^*} : P^* \to \Sigma^\dagger$ y $\iota_p : P \to \Sigma$, las inyecciones canónicas. Por $\pi_{P^*} : \Sigma^\dagger \to P^*$ y $\pi_P : \Sigma \to P$, denotemos las proyecciones canónicas. Fijamos $P \in \mathcal{A}$, la aplicación

$$\gamma_P : P^* \otimes_{T_P} P \longrightarrow \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \qquad (\varphi \otimes_{T_P} p \mapsto \iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R \iota_P(p))$$

es bien definida. En efecto, sea $t_P \in T_P$ y $r \in R$ con el soporte $P \times P$ y la componente homogénea $r_{PP} = t_P$. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma_P(\varphi t_P \otimes_{T_P} p) &= \iota_{P^*}(\varphi t_P) \otimes_R \iota_P(p) \\ &= \iota_{P^*}(\varphi) r \otimes_R \iota_P(p) \\ &= \iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R r\iota_P(p) \\ &= \iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R \iota_P(t_P p) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las R–acciones del Lema 2.5.1(2). Está claro ahora que γ_P es un morfismo de A–bimódulos. La familia $\{\gamma_P : P \in \mathcal{A}\}$, determina pues de manera única un morfismo de A–bimódulos Γ_1. En vista de cada elemento de $\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$ es suma finita de elementos de forma $\iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R \iota_Q(q)$, para ciertos $\varphi \in P^*$, $q \in Q$ y que si $Q \neq P$, entonces $\iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R \iota_Q(q) = \iota_{P^*}(\varphi)\iota_P\pi_P \otimes_R \iota_Q(q) = 0$; se tiene que Γ_1 es sobreyectivo. Ahora considere la aplicación

$$\Gamma_2 : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma \qquad (\iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R \iota_Q(q) \mapsto \varphi\pi_P \otimes_T \iota_Q(q),\ \varphi \in P^*, q \in Q)$$

Para ver que Γ_2 es bien definida, considere $t \in T_{MN} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$, y calcula

$$\begin{aligned} (\varphi\pi_P\iota_N t\pi_M) \otimes_T \iota_Q(q) &= (\varphi\pi_P\iota_N t\pi_M) \otimes_T \iota_Q\pi_Q\iota_Q(q) \\ &= (\varphi\pi_P\iota_N t\pi_M\iota_Q\pi_Q) \otimes_T \iota_Q(q) \\ &= \begin{cases} \varphi\pi_P \otimes_T \iota_P t(q) & \text{si } P = N = M = Q \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente en el caso $P = Q = M = N$, se tiene

$$\varphi t\pi_P \otimes_T \iota_P(q) = \varphi\pi_P\iota_P t\pi_P \otimes_T \iota_P(q) = \varphi\pi_P \otimes_T \iota_P t\pi_P\iota_P(q) = \varphi\pi_P \otimes_T \iota_P t(q)$$

El diagrama (2.20) es claramente conmutativo. Según la Proposición 2.4.3, Γ es sobreyectivo y luego Γ_2 lo es también. $\square$

Recuerde del Lema 2.4.2 que el $\mathbb{K}$–submódulo $\mathfrak{J}$ de $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P^*\otimes_{T_P}P$ generado por el conjunto $\{\varphi\otimes_{T_Q}tP-\varphi t\otimes_{T_P}p\,:\,\varphi\in Q^*, p\in P, t\in T_{PQ}, P,Q\in\mathcal{A}\}$, es un coideal. El coanillo cociente es denotado $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$.

Proposición 2.5.3. *El núcleo de Γ_1 es el coideal $\mathfrak{J}$ y, así, $\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma$ puede ser dotado de un estructura de A–coanillo tal que Γ_1 es un morfismo de A–coanillos. De esta manera, el diagrama conmutativo* (2.20) *induce pues un diagrama de isomorfismos de A–coanillos*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & \Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma \arrow[dl, "\cong"] \\ \Sigma^*\otimes_T\Sigma & \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $\mathfrak{J}$ es ya el núcleo de Γ, por la Proposición 2.4.6, y Γ_1 es sobreyectivo, es suficiente de comprobar que $\mathfrak{J}\subseteq\mathbf{Ker}(\Gamma_1)$. Pero eso es inmediato. $\square$

Proposición 2.5.4. *Cada $P\in\mathcal{A}$ es un $\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma$–comódulo por la derecha con la estructura*

$$\varrho_P : P\longrightarrow P\otimes_A\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma \qquad \left(p\mapsto\sum_{\alpha_P}p_{\alpha_P}\otimes_A\iota_{P^*}(p^*_{\alpha_P})\otimes_R\iota_P(p)\right),$$

y $(\Sigma,\rho_\Sigma=\oplus_P\varrho_P)$ es un $(R,\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma)$–bicomódulo (i.e. ρ_Σ es R–lineal por la izquierda). Considere $S=\oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Q)$ como $\mathbb{K}$–anillo con suficientes idempotentes ortogonales. Entonces

$\mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(P,Q)=\{f\in\mathrm{Hom}_A(P,Q)|\ f\otimes_R\iota_P(p)=1_Q\otimes_R\iota_Q(f(p))$ *para cualquier* $p\in P\}$

Por lo tanto, la extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales $R\to S$ factoriza a través de $\oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(P,Q)$.

Demostración. Las citadas $\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma$–coacciones son bien definidas. Vamos a comprobar que la coacción $\rho_\Sigma=\oplus_{P\in\mathcal{A}}\varrho_P$ es R lineal por la izquierda. Para ello, considere $p\in P$ y $r=\sum_{i,j}r_{P_iQ_j}\in R$ tal que $P\in\{P_i\}_i$. Por definición (véase el Lema 2.5.1(2)), tenemos

$$\begin{aligned}\rho_\Sigma(r\iota_P(p)) &= \sum_{j,\alpha_{Q_j}}\iota_{Q_j}(q_{\alpha_{Q_j}})\otimes_A\iota_{Q_j^*}(q^*_{\alpha_{Q_j}})\otimes_R\iota_{Q_j}(r_{PQ_j}p)\\ &= \sum_{j,\alpha_{Q_j}}\iota_{Q_j}(q_{\alpha_{Q_j}})\otimes_A\iota_{P^*}(q^*_{\alpha_{Q_j}}\circ r_{PQ_j})\otimes_R\iota_P(p)\end{aligned}$$

Componemos ahora las aplicaciones $\iota_{Q_j}\otimes_A\iota_{P^*}$ con las ecuaciones del Lema 2.4.1, se llega a

$$\begin{aligned}\rho_\Sigma(r\iota_P(p)) &= \sum_j\sum_{\alpha_P}\iota_{Q_j}(r_{PQ_j}p_{\alpha_P})\otimes_A\iota_{P^*}(p^*_{\alpha_P})\otimes_R\iota_P(p)\\ &= \sum_{\alpha_P}\left(\sum_j\iota_{Q_j}(r_{PQ_j}p_{\alpha_P})\right)\otimes_A\iota_{P^*}(p_{\alpha_P})\otimes_R\iota_P(p)\\ &= \sum_{\alpha_P}r\iota_P(p_{\alpha_P})\otimes_A\iota_{P^*}(p_{\alpha_P})\otimes_R\iota_P(p)\end{aligned}$$

lo que implica que ρ_Σ es R–lineal.

Un morfismo A–lineal por la derecha $f : P \to Q$ pertenece a $\mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}(P, Q)$ si y sólo si

$$\sum_{\alpha_P} p_{\alpha_P} \otimes_A \iota_{Q^*}(p^*_{\alpha_P}) \otimes_R \iota_Q(f(p)) = \sum_{\alpha_P} f(p_{\alpha_P}) \otimes_A \iota_{P^*}(p^*_{\alpha_P}) \otimes_R \iota_P(p) \tag{2.21}$$

para cualquier $p \in P$. Ahora se sabe que

$$Q \otimes_A \Sigma^\dagger = Q \otimes_A (\oplus_{P \in \mathcal{A}} P^*) \cong \oplus_{P \in \mathcal{A}} Q \otimes_A P^* \cong \oplus_{P \in \mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P, Q)$$

donde el último es considerado como un ideal por la derecha de S. Por lo tanto, $Q \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$ se identifica con un $\mathbb{K}$–submódulo de $S \otimes_R \Sigma$, para cualquier $Q \in \mathcal{A}$. Con esta identificación la ecuación (2.21) es equivalente a $f \otimes_R \iota_P(p) = 1_Q \otimes_R \iota_Q(f(p))$, para cualquier $p \in P$. $\square$

Vamos a regresar al caso de un A–coanillo $\mathfrak{C}$, es decir $\mathcal{C} = \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $\mathcal{A}$ es una sub-categoría pequeña cuyos objetos son $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha que son finitamente generados y proyectivos sobre A. De esta manera el funtor $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$ es la restricción del funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$. El diagrama de la Proposición 2.5.3, puede ser completado al diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "\mathsf{can}"] \\ \Sigma^* \otimes_T \Sigma \arrow[r, "\mathsf{can}"'] & \mathfrak{C} \end{tikzcd} \tag{2.22}$$

donde el can horizontal es definido en (2.18) y el vertical es la composición que convierte el diagrama conmutativo. Cuando Σ es un generador de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ los dos son isomorfismos, y así los cuatro son isomorfismos de A–coanillos, según el Teorema 2.4.10.

El funtor $- \otimes_R T : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_T$ tiene un adjunto por la derecha $.R : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_R$ que envia cada X_T a $XR = \{\sum x_i r_i | \text{suma finita}, x_i \in X, r \in R\}$, véase el capítulo de apéndices sección **A**.2. Considere el diagrama de funtores

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_A \arrow[r, shift left, "-\otimes_A \mathfrak{C}"] & \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \arrow[l, shift left, "U_A"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma,-)"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{F}"] & \mathcal{M}_T \arrow[l, shift left, "-\otimes_T \Sigma"] \arrow[d, shift left, ".R"] \\ & & \mathcal{M}_R \arrow[ul, shift left, "-\otimes_R \Sigma"] \arrow[u, shift left, "-\otimes_R T"] \end{tikzcd} \tag{2.23}$$

donde $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -)R$ y $- \otimes_R \Sigma \cong - \otimes_R T \otimes_T \Sigma$. Luego $- \otimes_R \Sigma$ es un adjunto por la izquierda de $\mathcal{F}$

Lema 2.5.5. *Existen isomorfismos naturales*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, - \otimes_A \mathfrak{C})R \cong - \otimes_A \Sigma^\dagger \ \ y \ \mathcal{F} \cong \bigoplus_{P \in \mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, -).$$

Demostración. El isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -\otimes_A \mathfrak{C}) \cong \mathrm{Hom}_A(\Sigma, -)$ compuesto con el funtor $.R$, inducen el isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -\otimes_A \mathfrak{C})R \cong \mathrm{Hom}_A(\Sigma, -)R$. Se necesita un isomorfismo natural de $-\otimes_A \Sigma^\dagger$ en $\mathrm{Hom}_A(\Sigma, -)R$. Considere un módulo X_A, entonces la siguiente composición de isomorfismos naturales

$$X \otimes_A (\oplus_{P\in\mathcal{A}} P^*) \cong \oplus_{P\in\mathcal{A}} (X \otimes_A P^*) \cong \oplus_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P, X),$$

implica que $-\otimes_A \Sigma^\dagger \cong \oplus_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P, -)$. Ahora el isomorfismo natural $\oplus_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P, -) \cong \mathrm{Hom}_A(\Sigma, -)R$ lo proporcionan las transformaciones naturales

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P, X) & \xrightarrow{\zeta_X} & \mathrm{Hom}_A(\Sigma, X)R \\ f_P & \longmapsto & (f_P \circ \pi_P)1_P \\ \oplus_{P\in Sop(e)} ((fe)\circ \iota_P) & \longleftarrow\!\shortmid & fe \end{array}$$

donde $e \in \mathbf{Idemp}(R)$ y $Sop(e)$ su soporte. Está claro que si $X \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, entonces

$$\zeta_{U_A(X)} (\oplus_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, X)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, X)R.$$

Lo que implica que ζ_{-} induce un isomorfismo natural $\oplus_{P\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -)R = \mathcal{F}$. □

Cada A–módulo P^*, $P \in \mathcal{A}$, es considerado como $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda, utilizando para ello la Observación 1.2.20. Esto induce de manera canónica una estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda sobre $\Sigma^\dagger = \oplus_{P\in\mathcal{A}} P^*$. En realidad esta coacción es R–lineal por la derecha. En efecto, $\lambda_{\Sigma^\dagger}$ es definida por

$$\lambda_{\Sigma^\dagger}(\iota_{Q^*}(\varphi)) = \sum_{\alpha_Q} \big((\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_Q(q_{\alpha_Q})\big) \otimes_A \iota_{Q^*}(q^*_{\alpha_Q}), \qquad \varphi \in Q^*$$

Considere $r \in R = \oplus_{P,P'\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, P')$ con soporte $\{P_1, \cdots, P_k\} \times \{Q_1, \cdots, Q_l\}$ tal que $Q \in \{Q_1, \cdots, Q_l\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_{\Sigma^\dagger}(\iota_{Q^*}(\varphi) r) &= \sum_i \lambda_{\Sigma^\dagger}(\iota_{P_i^*}(\varphi \circ r_{P_i Q})) \\ &= \sum_{i,\alpha_{P_i}} \big(((\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (r_{P_i Q} \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_{P_i}) \otimes_A \Sigma^\dagger\big) \Big(p_{\alpha_{P_i}} \otimes_A \iota_{P_i^*}(p^*_{\alpha_{P_i}})\Big) \\ &= \sum_{i,\alpha_{P_i}} \big(((\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_Q \circ r_{P_i Q}) \otimes_A \Sigma^\dagger\big) \Big(p_{\alpha_{P_i}} \otimes_A \iota_{P_i^*}(p^*_{\alpha_{P_i}})\Big) \\ &= \sum_{i,\alpha_{P_i}} \big(((\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_Q) \otimes_A \Sigma^\dagger\big) \Big(r_{P_i Q} p_{\alpha_{P_i}} \otimes_A \iota_{P_i^*}(p_{\alpha^*_{P_i}})\Big) \\ &= \sum_{i,\alpha_Q} \big(((\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_Q) \otimes_A \Sigma^\dagger\big) \Big(q_{\alpha_Q} \otimes_A \iota_{Q^*}(q^*_{\alpha_Q} \circ r_{P_i Q})\Big) \\ &= \sum_{\alpha_Q} \big(((\varphi \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_Q) \otimes_A \Sigma^\dagger\big) \Big(q_{\alpha_Q} \otimes_A \iota_{Q^*}(q^*_{\alpha_Q}) r\Big) \\ &= \lambda_{\Sigma^\dagger}(\iota_{Q^*}(\varphi)) r, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Lema 2.4.1. Lo que implica que $\lambda_{\Sigma^\dagger}$ es R–lineal por la derecha y, así, $\Sigma^\dagger$ es un $(\mathfrak{C}, R)$–bicomódulo, lo que va ser utilizado en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.6. *El funtor* $-\otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_A$ *es adjunto por la izquierda del funtor* $-\otimes_A \Sigma^\dagger : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_R$*, y esta adjunción induce otra sobre* $\mathfrak{C}$*–comódulos por la derecha, es decir que, el funtor* $-\otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *es adjunto por la izquierda del funtor* $-\square_{\mathfrak{C}}\Sigma^\dagger : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_R$*. En particular,* $\mathcal{F} \cong -\square_{\mathfrak{C}}\Sigma^\dagger$*.*

Demostración. La primera adjunción viene del Lema 2.5.5 y el diagrama (2.23). Para la segunda, consideramos R como R–coanillo trivialmente. Según la Proposición 2.1.2, el $(\mathfrak{C}, R)$–bicomódulo $\Sigma^\dagger$ es (A, R)–quasi-finito y luego $-\otimes_R \Sigma$ es adjunto por la izquierda de $-\square_{\mathfrak{C}}\Sigma^\dagger$, en realidad lo que se tiene es que $-\otimes_R \Sigma$ es isomorfo al funtor co-hom $h_R(\Sigma^\dagger, -)$. □

El morfismo de A–coanillos $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ da un funtor

$$\mathsf{CAN} : \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}.$$

Proposición 2.5.7. *Sea* $\mathcal{A}$ *un conjunto de* $\mathfrak{C}$*–comódulos por la derecha tal que cada comódulo en* $\mathcal{A}$ *es finitamente generado y proyectivo como* A*–módulo por la derecha. Si* $R = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, Q)$*, entonces* $R = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(P, Q)$*. Además, se tiene un diagrama conmutativo de funtores*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma} \arrow[rr, "\mathsf{CAN}"] & & \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \\
& \mathcal{M}_R \arrow[ul, "-\otimes_R\Sigma"] \arrow[ur, "-\otimes_R\Sigma"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.24}$$

Demostración. Se tiene del Lema 2.4.9 y la ecuación (2.22), que la estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo $\rho_P : P \to P \otimes_A \mathfrak{C}$ factoriza por

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\rho_P"] \arrow[dr, "\varrho"'] & & P \otimes_A \mathfrak{C} \\
& P \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \arrow[ur, "P\otimes_A\mathsf{can}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la $\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$–coacción ϱ_P es definida en la Proposición 2.5.4. Esto implica, de una parte, que $\mathsf{CAN}(\Sigma_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}) = \Sigma_{\mathfrak{C}}$, y de otra parte, que $\mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(P, Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, Q)$, para cualquier $P, Q \in \mathcal{A}$. La inclusión $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(P, Q)$, viene de la Proposición 2.5.4. Finalmente, $\mathsf{CAN}(Y \otimes_R \Sigma_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}) = Y \otimes_R \Sigma_{\mathfrak{C}}$, para cualquier $Y \in \mathcal{M}_R$, luego la conmutatividad de (2.24). □

Un conjunto de objetos $\mathcal{A}$ de una categoría de Grothendieck $\mathcal{C}$ se dice que es *un conjunto de generadores proyectivos pequeños* si cada objeto de $\mathcal{A}$ es pequeño y $\oplus_{P\in\mathcal{A}}P$ es un generador proyectivo de $\mathcal{C}$. Antes de enunciar nuestro teorema que caracteriza los coanillos con categoría de comódulos posee un conjunto de generadores proyectivos pequeños, necesitamos recordar el siguiente resultado que ha sido observado por M. Harada [60] y debido a P. Freyd [44, p. 120] y P. Gabriel [46, Proposition II.2].

Teorema 2.5.8 (Gabriel-Freyd-Harada). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de Grothendieck con un conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ de objetos. Consideramos $\mathcal{A}$ la sub-categoría plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos son $\overline{\mathcal{A}}$ y $R = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Q)$ el anillo inducido por $\mathcal{A}$; existe pues un diagram de funtores*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, dashed, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_1"'] & & \mathcal{M}_R \\
& \mathrm{Funt}(\mathcal{A}^o, \mathcal{A}b), \arrow[ur, "\mathcal{F}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{F}_1(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$, $X \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{F}_2(F) = \oplus_{P\in\mathcal{A}}F(P)$, $F \in \mathrm{Funt}(\mathcal{A}^o, \mathcal{A}b)$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ i.e. $\mathcal{F}(X) = \oplus_{P\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,X)$. Además $\mathcal{F}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si $\overline{\mathcal{A}}$ es un conjunto de generadores proyectivos pequeños.

El siguiente teorema generaliza [91, Theorem 3.7], [17, Theorem 5.6] y [41, Theorem 3.2].

Teorema 2.5.9. *Sean A una $\mathbb{K}$–álgebra, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $\mathcal{A}$ un conjunto de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha. Considere $\Sigma = \oplus_{P\in\mathcal{A}}P$, $\Sigma^\dagger = \oplus_{P\in\mathcal{A}}P^*$ y la extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales*

$$R = \bigoplus_{P,Q\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P,Q) \subseteq S = \bigoplus_{P,Q\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P,Q).$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano y $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores pequeños proyectivos de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$;*

(ii) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, cada comódulo en $\mathcal{A}$ es finitamente generado y proyectivo como A–módulo por la derecha,* $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ *es un isomorfismo, y $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}$ es una equivalencia de categorías;*

(iii) *cada comódulo en $\mathcal{A}$ es finitamente generado y proyectivo como A–módulo por la derecha,* $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ *es un isomorfismo, y ${}_R\Sigma$ es un módulo fielmente plano;*

(iv) *cada comódulo en $\mathcal{A}$ es finitamente generado y proyectivo como A–módulo por la derecha,* $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ *es un isomorfismo, y ${}_RS$ es un módulo fielmente plano;*

(v) *${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano y $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia de categorías.*

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (v)$. Como ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, la Proposición 1.2.12 implica que $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck. Según la Proposición 2.5.6 $- \otimes_R \Sigma$ es adjunto por la izquierda de $\mathcal{F} : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_R$. Según, esta vez, el Lema 2.5.5, podemos aplicar el Teorema 2.5.8, para obtener que $\mathcal{F}$ es un equivalencia de categorías si y sólo si $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores pequeños proyectivos de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Por lo tanto, $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ el mismo es una equivalencia de categorías si y sólo si $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores pequeños

proyectivos.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Como ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck y el funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ es exacto, Proposición 1.2.12. Además, tiene un adjunto exacto por la derecha $- \otimes_A \mathfrak{C}$. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores pequeños proyectivos, entonces cada comódulo en $\mathcal{A}$ es finitamente generado y proyectivo como A–módulo por la derecha. Según [88, Section 4.11, Lemma 1], cada $P \in \mathcal{A}$ es finitamente generado y proyectivo. De otra parte el Teorema 2.4.10 y el diagrama (2.22), implican que $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos y luego $\mathsf{CAN} : \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma} \to \mathfrak{C}$ es ya una equivalencia de categoría. Según la Proposición 2.5.7 y la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (v)$, se tiene pues que $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}$ es también una equivalencia de categorías.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. El funtor $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}$ es obviamente exacto y fiel. Como $\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \cong \mathfrak{C}$ es un A–módulo plano por la izquierda, se tiene según la Proposición 1.2.12, que el funtor del olvido $\mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma} \to \mathcal{M}_A$ es exacto y fiel. Por lo tanto el funtor $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_A$ es exacto y fiel, es decir que ${}_R\Sigma$ es fielmente plano.
$(iii) \Rightarrow (v)$. Como can es un isomorfismo de A–coanillos, ${}_A\mathfrak{C}$ es plano. Según la Proposición 2.5.7, podemos aplicar la Proposición 2.5.6 al coanillo de comatrices infinitas $\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$ para obtener que el funtor producto cotensor $-\square_{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}\Sigma^\dagger : \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma} \to \mathcal{M}_R$ es adjunto por la derecha del funtor $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}$. La counidad y la unidad de esta adjunción viene dadas por

$$\begin{array}{llll} \xi_Y : (Y \square_{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma} \Sigma^\dagger) \otimes_R \Sigma \longrightarrow Y, & & \eta_X : X \longrightarrow (X \otimes_R \Sigma)\square_{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}\Sigma^\dagger \\ (y \otimes_A \iota_{Q^*}(\varphi)) \otimes_R u \longmapsto y\varphi(\pi_Q(u)) & & x1_Q \longrightarrow \sum_{\alpha_Q}(x1_Q \otimes_R \iota_Q(q_{\alpha_Q})) \otimes_A \iota_{Q^*}(q^*_{\alpha_Q}) \end{array}$$

Considere $(Y, \rho_Y) \in \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}$, tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & (Y\square_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}\Sigma^\dagger)\otimes_R\Sigma \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{Y,\Sigma^\dagger}\otimes_R\Sigma"] \arrow[dl, "\xi_Y"'] \arrow[d, "\psi^l_{Y,\Sigma^\dagger,\Sigma}"] & (Y\otimes_A\Sigma^\dagger)\otimes_R\Sigma \arrow[d, "\cong"] \\ Y \arrow[r, "\rho'_Y"] & Y\square_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma) \arrow[r, "\mathfrak{eq}^k_{Y,\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}"] & Y\otimes_A(\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma) \end{tikzcd}$$

donde $\mathfrak{eq}^k_{Y,\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma} \circ \rho'_Y = \rho_Y$, ρ'_- es el isomorfismo natural del Lema 1.4.1(1) y $\psi^l_{Y,\Sigma^\dagger,\Sigma}$ es la versión simétrica de la aplicación del Lema 1.4.2. Como ${}_R\Sigma$ es plano, se tiene de la versión izquierda del Lema 1.4.2, que $\psi^l_{-,\Sigma^\dagger,\Sigma}$ es un isomorfismo natural, lo que implica que ξ_- es ahora un isomorfismo natural. Consideramos $X \in \mathcal{M}_R$, entonces el inverso de $\eta_X \otimes_R \Sigma$ es obtenido usando el isomorfismo $(X \otimes_R \Sigma)\square_{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}\Sigma^\dagger) \otimes_R \Sigma \cong (X \otimes_R \Sigma)\square_{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}(\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma) \cong X \otimes_R \Sigma$. Como $- \otimes_R \Sigma$ es un funtor fiel, se tiene que η_X es un isomorfismo y luego $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma}$ es una equivalencia de categorías. Se tiene pues de la Proposición 2.5.7, que $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia de categorías, dado que $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo.
La demostración de la equivalencia $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ en el Teorema 2.3.2, sirve aquí, teniendo en cuenta el isomorfismo de R–bimódulos unitarios $S \cong \Sigma \otimes_A \Sigma^\dagger$. □

Una consecuencia del Teorema 2.5.9, es un teorema del Descent Fielmente Plano para el funtor $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$, donde el caso de extensiones de anillos unitarios noconmutativos $B \subseteq A$ se recupera cuando $\mathcal{A}$ tiene un sólo objeto cuya imagen por ω es A. Entonces, sea $\omega : \mathcal{A} \to add(A_A)$ un funtor fiel, donde $\mathcal{A}$ es una categoría pequeña. Considere los $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales (en este caso con suficientes idempotentes ortogonales) $R = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Q)$ y $\overline{R} = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}}\mathrm{Hom}_{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}(P,Q)$ junto con la extensión de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales $\lambda : R \to \overline{R}$, definida en la Proposición 2.5.4 y donde $\Sigma = \oplus_{P\in\mathcal{A}}P$. Recuerde del Lema 2.5.1(2) y de la Proposición 2.5.4 que Σ es un $(R, \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma)$–bicomódulo.

Lema 2.5.10. *El morfismo de A–coanillos* $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_{\overline{R}} \Sigma \to \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Es fácil de ver que $\mathsf{can}(\iota_{P^*}(\varphi) \otimes_{\overline{R}} \iota_P(p)) = \iota_{P^*}(\varphi) \otimes_R \iota_P(p)$, para cualquier $\varphi \in P^*$, $p \in P$, $P \in \mathcal{A}$. Entonces, can es un inverso de la aplicación obvia inducida por la extensión de $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales definida en el capítulo de apéndices sección **A**.2. □

Teorema 2.5.11 (Descent Fielmente Plano)**.** *Con las notaciones anteriores y*

$$S = \bigoplus_{P,Q\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_A(P,Q),$$

las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) ${}_A(\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma)$ *es un módulo plano,* $\mathcal{A}$ *es un conjunto de generadores proyectivos pequeños de* $\mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}$ *y* $\lambda : R \to \overline{R}$ *es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales;*

(ii) ${}_A(\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma)$ *es un módulo plano y* $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}$ *es una equivalencia de categorías;*

(iii) ${}_R\Sigma$ *es un módulo fielmente plano;*

(iv) ${}_A(\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma)$ *es un módulo plano (ó* ${}_R\Sigma$ *es plano) y* ${}_RS$ *es un módulo fielmente plano.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Es una consecuencia del Lema 2.5.10 y el Teorema 2.5.9.
$(ii) \Rightarrow (i)$ y (iii). Si ${}_A(\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma)$ es plano y $- \otimes_R \Sigma : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}$ es una equivalencia, entonces ${}_R\Sigma$ es fielmente plano y el funtor $- \otimes_R \Sigma$ preserva los generadores proyectivos de $\mathcal{M}_R$ a $\mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}$. Por lo tanto, $\Sigma \cong R \otimes_R \Sigma$ es un generador proyectivo de $\mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}$, dado que R es un generador proyectivo de $\mathcal{M}_R$ [46], véase el capítulo de apéndices. Esto significa que $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores pequeños proyectivos. Según la Proposición 2.5.9, $- \otimes_{\overline{R}} \Sigma : \mathcal{M}_{\overline{R}} \to \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma}$ es una equivalencia de categorías. Falta comprobar que λ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Para ello consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_R & \xrightarrow{-\otimes_R\Sigma} & \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_R\Sigma} \\ {\scriptstyle F}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{CAN}} \\ \mathcal{M}_{\overline{R}} & \xrightarrow{-\otimes_{\overline{R}}\Sigma} & \mathcal{M}^{\Sigma^\dagger\otimes_{\overline{R}}\Sigma} \end{array}$$

donde F es el funtor restricción de escalares asociado a λ. Como los tres funtores de la derecha son equivalencias de categorías, F lo es también. Ahora concluimos usando el resultado sobre los morfismos de $\mathbb{K}$–anillo citado en el capítulo de apéndices sección **A**.2.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. De la Proposición 2.5.4, se tiene que $\lambda \otimes_R \Sigma : R \otimes_R \Sigma \to \overline{R} \otimes_R \Sigma$ es un isomorfismo, luego λ es un isomorfismo, dado que ${}_R\Sigma$ es fielmente plano. La implicación resulta del Lema 2.5.10 y el Teorema 2.5.9.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$. La demostración de equivalencia entre (iii) y (iv) en el Teorema 2.5.9 funciona aquí. □

En lo que queda de esta sección vamos a dedicarlo a la aplicación de los resultados anteriores al caso de un A–coanillo $\mathfrak{C}$ con un conjunto de elementos grouplike G. Así daremos como ejemplo de esta situación, el coanillo $\mathfrak{C}(G)$ asociado a un anillo A graduado por un grupo G, véase el Ejemplo 1.1.18.

Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo que tiene la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ abeliana. Supongamos que G es un conjunto de elementos grouplike de $\mathfrak{C}$. Para cada $g \in G$, denotaremos por $[g]A$ el $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha A_A, con la coacción $a \mapsto 1 \otimes_A ga$. La notación $A[g]$ se conserva al $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda ${}_AA$ asociado a g. Para $g, h \in G$, el $\mathbb{K}$–módulo $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}([g]A, [h]A)$ es identificado, vía la aplicación $f \mapsto f(1)$, con $A_{g,h} = \{b \in A |\, hb = bg\}$. Con esta identificación, esta claro que $A_{g,g}$ es un sub-anillo unitario de A, y que $A_{g,h}$ se convierte en un $(A_{h,h}, A_{g,g})$–bimódulo unitario. Considere el $\mathbb{K}$–anillo $S = M^f_{G\times G}$ consistente en todas las $G \times G$–matrices con coeficientes en A y con un número finito de entradas no-nulas. La unidad $1 \in A$ en la posición (g, g) y cero en todas otras partes, da una matriz idempotente $1_{g,g} \in S$; el conjunto de todos los idempotentes $\{1_{g,g}\}_{g\in G}$ forma un conjunto completo de idempotentes ortogonales de S. Por lo tanto S es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. La suma directa externa $R = \oplus_{g,h\in G} A_{g,h}$ es considerado como un $\mathbb{K}$–sub-anillo con unidades locales de S, que contiene por supuesto todos los $1_{g,g}$, $g \in G$.

De otra parte, para cada $g \in G$, consideramos el A–coanillo canónico de Sweedler $A \otimes_{A_{g,g}} A$ (en este caso el A–coanillo de comatrices finitas asociado al comódulo $[g]A$). Sea $\mathfrak{J}$ el $\mathbb{K}$–submódulo del coproducto $\oplus_{g\in G} A \otimes_{A_{g,g}} A$ generado por todos los elementos de la forma $a \otimes_{A_{h,h}} ta' - at \otimes_{A_{g,g}} a'$, donde $g, h \in G$, $a, a' \in A$ y $t \in A_{g,h}$. Se sabe del Lema 2.4.2 que $\mathfrak{J}$ es un coideal del A–coanillo $\oplus_{g\in G} A \otimes_{A_{g,g}} A$, el A–coanillo cociente es

$$\mathfrak{F}(G) = \frac{\oplus_{g\in G} A \otimes_{A_{g,g}} A}{\mathfrak{J}} = \frac{\oplus_{g\in G} A \otimes_{A_{g,g}} A}{\langle a \otimes_{A_{h,h}} ta' - at \otimes_{A_{g,g}} a';\ a, a' \in A, t \in A_{g,h}, g, h \in G\rangle}$$

Además la aplicación $\mathsf{can} : \mathfrak{F}(G) \to \mathfrak{C}$ enviando $a \otimes_{A_{g,g}} a' + \mathfrak{J} \mapsto aga'$ es un morfismo de A–coanillos. Obviamente, generaliza el morfismo de [17], dado por el caso singular $G = g$. El comódulo $\Sigma = \oplus_{g\in G}[g]A$ no es finitamente generado, excepto si G es finito. El caso $G = \{g\}$ ha sido estudiado en [17]. Por supuesto que existen en general situaciones donde el can es biyectivo y Σ no es finitamente generado. Según el Teorema 2.4.10, tenemos

Teorema 2.5.12. *Si $\oplus_{g\in G}[g]A$ es un generador de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, entonces $\mathsf{can} : \mathfrak{F}(G) \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos.*

Ejemplos relevantes de un coanillo de Galois con suficientes elementos grouplike es el siguiente

Ejemplo 2.5.13. Sea A un anillo G–graduado por un cierto grupo G. Dotaremos $\mathfrak{C}(G)$ por la estructura de A–coanillo del Ejemplo 1.1.18. Según el Ejemplo 1.2.4(2), la categoría de $\mathfrak{C}(G)$–comódulos por la derecha es isomorfa a la categoría $\mathrm{gr}-A$ de A–módulos por la derecha G–graduados. Está claro que G es un conjunto de elementos grouplike, y $\{[g^{-1}]A : g \in G\}$ es el conjunto de todos los shifts del A–módulo graduado por la derecha A_A. En efecto, según el isomorfismo de categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}(G)} \cong \mathrm{gr}-A$ (Ejemplo 1.2.4(2)), para cualquier $g \in G$, $[g^{-1}]A = \oplus_{h\in G}([g^{-1}]A)_h$, donde $([g^{-1}]A)_h = \{a \in A|\, \rho_{[g^{-1}]A}(a) = g^{-1}a = ah\}$ (recuerde del Ejemplo 1.1.18 que la A–acción por la derecha de $\mathfrak{C}(G)$, viene dada por $g'a_g = a_g(g'g)$, para $a_g \in A_g$, $g, g' \in G$). Está claro ahora que $([g^{-1}]A)_h = A_{gh}$ y, así, $[g^{-1}]A = \oplus_{h\in G}A_{gh}$. Se sabe que es un conjunto de generadores pequeños proyectivos de la categoría $\mathrm{gr}-A$. Según el Teorema 2.5.12, el morfismo canónico can es un isomorfismo. En general para cualquier sub-grupo H de G tales que $\oplus_{h\in H}[h]A$ es un generador (proyectivo) para $\mathrm{gr}-A$, el morfismo canónico $\mathsf{can} : \mathfrak{F}(H) \to \mathfrak{C}(G)$ es un isomorfismo de A–coanillos.

Teorema 2.5.14. *Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra, $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con un conjunto de elementos grouplike G. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) ${}_A\mathfrak{C}$ *es un módulo plano,* $\mathsf{can} : \mathfrak{F}(G) \to \mathfrak{C}$ *es un isomorfismo y* ${}_RS$ *es un módulo fielmente plano;*

(ii) ${}_A\mathfrak{C}$ *es un módulo plano,* $\mathsf{can} : \mathfrak{F}(G) \to \mathfrak{C}$ *es un isomorfismo de A–coanillo y* $-\otimes_R (\oplus_{g\in G}[g]A) : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{F}(G)}$ *es una equivalencia de categorías;*

(iii) ${}_A\mathfrak{C}$ *es un módulo plano y* $\oplus_{g\in G}[g]A$ *es un generador proyectivo de* $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$*;*

(iv) ${}_A\mathfrak{C}$ *es un módulo plano y* $-\otimes_R (\oplus_{g\in G}[g]A) : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *es una equivalencia de categorías.*

La descripción alternativa de $\mathfrak{F}(G)$, viene después de considerar $\Sigma^\dagger = \oplus_{g\in G}A[g]$ y $\Sigma = \oplus_{g\in G}[g]A$, como A–módulo libre de base $\{g|\, g \in G\}$. En este caso la comultiplicación del A–coanillo de comatrices infinitas $\Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$, viene dada por

$$\Delta(\sum_{g\in G} a_g[g] \otimes_R \sum_{h\in G}[h]a'_h) = \sum_{g\in G} a_g[g] \otimes_R [g]1 \otimes_A 1[g] \otimes_R [g]a'_g$$

y la counidad

$$\varepsilon(\sum_{g\in G} a_g[g] \otimes_R \sum_{h\in G}[h]a'_h) = \sum_{g\in G} a_g a'_g.$$

Ejemplo 2.5.15. Continuamos con el Ejemplo 2.5.13, se tiene que la categoría $\mathrm{gr}-A$ es siempre equivalente a la categoría de los módulos unitarios por la derecha sobre el anillo R. Más general, dado un sub-grupo H de G, el Teorema 2.5.14, nos da varias condiciones que caracterizan cuando la categoría $\mathrm{gr}-A$ es equivalente, de manera canónica, a la categoría de R–módulos unitarios por la derecha, donde R es el anillo $\oplus_{(g,h)\in H^2}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(G)}([g]A,[h]A) = \oplus_{(g,h)\in H^2} A_{h^{-1}g}$, que puede ser identificado con el anillo de $H \times H$–matrices con un número finito de entradas no-nulas y con coeficientes de (g,h)–entrada los elementos homogéneos de A de grado $h^{-1}g$, donde $g, h \in G$.

2.6. Coanillos de comatrices de un coanillo.

En esta sección ofrecemos otra clase de ejemplos de coanillos que construimos a partir de un coanillo y un bimódulo finitamente generado y proyectivo por la derecha. Cuando el bimódulo es una $\mathbb{K}$–álgebra extensión de otra, recuperaremos el coanillo extensión de escalares definido en la Observación 1.1.13. Si escogemos como coanillo, en el proceso de construcción, un coanillo trivial, entonces el coanillo resultante coincide con el coanillo de comatrices finitas definido en la Definición 2.2.2. Estudiaremos las condiciones suficientes para una equivalencia de categorías entre la categoría de comódulos sobre el coanillo inicial y la de comódulos sobre el nuevo coanillo. Analizaremos también qué propiedades de bimódulo y de coanillo puedan reflejarse sobre este nuevo coanillo.

Fijamos A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales y $(\mathfrak{D}, \Delta_{\mathfrak{D}}, \varepsilon_{\mathfrak{D}})$ un B–coanillo. Sea Σ un (B,A)–bimódulo unitario tal que Σ_A es un módulo finitamente generado y proyectivo; considere $\{p_i, p_i^*\}$ como una base dual finita. Así el dual por la derecha Σ^* es, de manera canónica, un (A,B)–bimódulo unitario. La siguiente propiedad será utilizada frecuentemente

Lema 2.6.1. *Sea Σ un (B,A)–bimódulo tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo con una base dual $\{p_i, p_i^*\}_i$. Entonces*

$$\sum_i bp_i \otimes_A p_i^* = \sum_i p_i \otimes_A p_i^* b, \qquad \forall b \in B.$$

Demostración. Según el isomorfismo natural de la ecuación ($\mathbf{A}$.5) del capítulo apéndices, se tiene un isomorfismo $\Sigma \otimes_A \Sigma^* \cong \mathrm{End}(\Sigma_A)$, donde el elemento $\sum_i p_i \otimes_A p_i^*$ se identifica con la unidad de $\mathrm{End}(\Sigma_A)$. Por lo tanto, la imagen de cualquier elemento $b \in B$ en $\Sigma \otimes_A \Sigma^*$ conmuta con $\sum_i p_i \otimes_A p_i^*$. □

Consideramos el A–bimódulo unitario $\Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma$ junto con las siguientes aplicaciones $\mathbb{K}$–lineales

$$\begin{aligned} \Delta : \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma &\longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \\ \varphi \otimes_B d \otimes_B u &\longmapsto \textstyle\sum_{(d),\, i} \varphi \otimes_B d_{(1)} \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B d_{(2)} \otimes_B u \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $\Delta_{\mathfrak{D}}(d) = \sum_{(d)} d_{(1)} \otimes_B d_{(2)}$, y

$$\begin{aligned} \varepsilon : \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma &\longrightarrow A \\ \varphi \otimes_B d \otimes_B u &\longmapsto \varphi(\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d)u) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Proposición 2.6.2. *Si $\mathfrak{C} = \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma$, entonces la terna $(\mathfrak{C}, \Delta, \varepsilon)$ es un A–coanillo, donde Δ y ε son definidas, respectivamente, por* (2.25) *y* (2.26). *Además, existe un morfismo de A–coanillos*

$$\widetilde{\varepsilon} : \mathfrak{C} \longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \Sigma \qquad (\varphi \otimes_B d \otimes_B u \mapsto \varphi\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d) \otimes_B u)$$

donde este último es el A–coanillo de comatrices finitas asociado al bimódulo ${}_B\Sigma_A$.

Demostración. Por construcción Δ y ε son A–bilineales. La propiedades counitaria es fácil de averiguar. Para comprobar la propiedad coasociativa de Δ utilizaremos la siguiente transformación natural sobre B–bimódulos

$$\sigma_{-,-} : - \otimes_B - \longrightarrow - \otimes_B S \otimes_B -,$$

donde $S = \mathrm{End}(\Sigma_A) \cong \Sigma \otimes_A \Sigma^*$. Vamos a comprobar la última aserción. Sean $\varphi \in \Sigma^*$, $d \in \mathfrak{D}$ y $u \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}\widetilde{\varepsilon}(\varphi \otimes_B d \otimes_B u) &= \varepsilon_{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}(\varphi\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d) \otimes_B u) \\ &= \varphi(\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d)u) \\ &= \varepsilon(\varphi \otimes_B d \otimes_B u). \end{aligned}$$

la compatibilidad de $\widetilde{\varepsilon}$ con la comultiplicación, viene después de las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma^*\otimes_B\Sigma}\widetilde{\varepsilon}(\varphi \otimes_B d \otimes_B u) &= \sum_i \varphi\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d) \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B u \\ &= \sum_{(d),\, i} \varphi\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d_{(1)}) \otimes_B p_i \otimes_A p_i^*\varepsilon_{\mathfrak{D}}(d_{(2)}) \otimes_B u \\ &= (\widetilde{\varepsilon} \otimes_A \widetilde{\varepsilon})(\sum_{(d),\, i} \varphi \otimes_B d_{(1)} \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B d_{(2)} \otimes_B u) \\ &= (\widetilde{\varepsilon} \otimes_A \widetilde{\varepsilon})\Delta(\varphi \otimes_B d \otimes_B u). \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Lema 2.6.1. Lo que termina la demostración. □

Como en el caso de coanillos de comatrices finitas, la comultiplicación Δ definida en la ecuación (2.25), es independiente de la base dual escogida para Σ_A. Daremos pues la siguiente definición.

Definición 2.6.3. El A–coanillo $(\Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma, \Delta, \varepsilon)$ de la Proposición 2.6.2, se le llama el *coanillo de comatrices finitas del coanillo* $\mathfrak{D}$. Por el momento si $\mathfrak{D} = B$ es el B–coanillo trivial, entonces $\Sigma^* \otimes_B \Sigma \cong \Sigma^* \otimes_B B \otimes_B \Sigma$ (mediante $\widetilde{\varepsilon}$). Si suponemos que $B \to A$ es una extensión de $\mathbb{K}$–álgebras y $\Sigma = {}_BA_A$, se recupera pues la definición del anillo de extensión de escales definido en la Observación 1.1.13 (véase también [14]). Para más ejemplos, véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.4. *El coanillo de comatrices $CM_n(\mathfrak{C})$.* Supongamos que $A = B$ es una $\mathbb{K}$–álgebra y $\Sigma = A^{(2)}$ en la Proposición 2.6.2. Denotemos pues el A–coanillo de comatrices de $\mathfrak{D}$ por $CM_2(\mathfrak{D}) := A^{(2)} \otimes_A \mathfrak{D} \otimes_A A^{(2)}$ y consideramos cada elemento de $CM_2(\mathfrak{D})$ como matriz cuadrada con coeficientes en $\mathfrak{D}$, utilizando por eso el isomorfismo de A–bimódulos citado en las ecuaciones (1.3) y (1.4). La A–biacción sobre $CM_2(\mathfrak{D})$ es definida ahora por

$$a \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ d^{21} & d^{22} \end{pmatrix} a' \quad = \quad \begin{pmatrix} ad^{11}a' & ad^{12}a' \\ ad^{21}a' & ad^{22}a' \end{pmatrix},$$

$a, a' \in A$ y $d^{ij} \in \mathfrak{D}$. La comultiplicación y la counidad vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\Delta \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ d^{21} & d^{22} \end{pmatrix} \quad = \quad & \begin{pmatrix} d^{11}_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} d^{11}_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d^{11}_{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^{11}_{(2)} & 0 \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} d^{12}_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} 0 & d^{21}_{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d^{12}_{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{11}_{(2)} \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^{21}_{(1)} & 0 \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} d^{21}_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{21}_{(1)} \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^{21}_{(2)} & 0 \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^{22}_{(1)} & 0 \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} 0 & d^{22}_{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{22}_{(1)} \end{pmatrix} \otimes_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{22}_{(2)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ d^{21} & d^{22} \end{pmatrix} \quad = \quad \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d^{11}) + \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d^{22}).$$

Observe que este coanillo es diferente al coanillo construido en el Ejemplo 1.1.14, basta ver que tienne distintos anillo de base. Si seguimos los mismos pasos, como antes, podemos construir el A–coanillo $CM_n(\mathfrak{D})$, para $n \geq 2$.

Observación 2.6.5. En las condiciones de la Proposición 2.6.2; supongamos que A es una $\mathbb{K}$–álgebra y que $\mathfrak{D}$ posee un elemento grouplike invariante g, i.e. $g \in \mathfrak{D}^B$, $\Delta_{\mathfrak{D}}(g) = g \otimes_B g$ y $\varepsilon_{\mathfrak{D}}(g) = 1$. Entonces, el siguiente morfismo A–bilineal

$$\begin{aligned}
\phi : \Sigma^* \otimes_B \Sigma & \longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \\
\varphi \otimes_B u & \longmapsto \varphi \otimes_B g \otimes_B u
\end{aligned}$$

es un morfismo de A–coanillos que escinde por la izquierda en la categoría $A - \mathfrak{coring}$. En efecto $\widetilde{\varepsilon} \circ \phi = \Sigma^* \otimes_B \Sigma$, donde $\widetilde{\varepsilon}$ ha sido definido en la Proposición 2.6.2.

En este contexto, la construcción de los coanillos de comatrices, es también un hecho funtorial, es decir existe un funtor $\mathbb{K}$–lineal

$$\begin{aligned}
M_\Sigma : B - \mathfrak{coring} & \longrightarrow A - \mathfrak{coring} \\
\mathfrak{D} & \longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \\
\phi & \longrightarrow \Sigma^* \otimes_B \phi \otimes_B \Sigma
\end{aligned} \tag{2.27}$$

El bimódulo ${}_B\Sigma_A$ no admite en general una $\mathfrak{D}$–coacción por la izquierda. Pero sí establece un funtor entre la categoría de $\mathfrak{D}$–comódulos por la derecha y la categoría de $M_\Sigma(\mathfrak{D})$–comódulos por la derecha. En efecto, sea $(X, \rho_X) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ y considere la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_{X\otimes_B\Sigma} : X \otimes_B \Sigma &\longrightarrow X \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \\ x \otimes_B u &\longmapsto \textstyle\sum_{(x),\, i} x_{(0)} \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B x_{(1)} \otimes_B u, \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde $\rho_X(x) = \sum_{(x)} x_{(0)} \otimes_B x_{(1)}$, $x \in X$ y $u \in \Sigma$. La aplicación $\rho_{X\otimes_B\Sigma}$ está bien definida y es claramente A–lineal por la derecha.

Lema 2.6.6. *En la notación anterior, la asignación $X \to X\otimes_B\Sigma$, para cualquier $(X, \rho_X) \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, establece un funtor*

$$- \otimes_B \Sigma : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})},$$

vía la coacción (2.28)*. En particular si $B \in \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, se tiene $\Sigma \in \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})}$. Además si (X, λ_X, ρ_X) es un $\mathfrak{D}$–bicomódulo, entonces $(X \otimes_B \Sigma, \lambda_X \otimes_B \Sigma, \rho_{X\otimes_B\Sigma})$ es un $(\mathfrak{D}, M_\Sigma(\mathfrak{D}))$–bicomódulo y esto hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \arrow[r, "-\otimes_B\Sigma"] \arrow[d, "U^l"'] & {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})} \arrow[d, "V^l"] \\ \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \arrow[r, "-\otimes_B\Sigma"'] & \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})} \end{tikzcd}$$

donde U^l y V^l son los funtores que olvidan la $\mathfrak{D}$–coacción por la izquierda.

Demostración. Sean $x \in X$, $u \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned} (X \otimes_B \Sigma \otimes_A \varepsilon) \circ \rho_{X\otimes_B\Sigma}(x \otimes_B u) &= \sum_{(x),\, i} x_{(0)} \otimes_B p_i p_i^*(\varepsilon_{\mathfrak{D}}(x_{(1)})u) \\ &= \sum_{(x)} x_{(0)} \otimes_B \varepsilon_{\mathfrak{D}}(x_{(1)})u \\ &= x \otimes_B u \end{aligned}$$

de allí la propiedad counitaria de $\rho_{X\otimes_B\Sigma}$. La propiedad coasociativa, es el resultado de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} (X \otimes_B \Sigma \otimes_A \Delta) \circ \rho_{X\otimes_B\Sigma}(x \otimes_B u) &= \sum_{(x),\, i,\, j} x_{(0)} \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B x_{(1)} \otimes_B p_j \otimes_A p_j^* \otimes_B x_{(2)} \otimes_B u \\ &= \sum_{(x),\, j,\, i} x_{(0)} \otimes_B p_j \otimes_A p_j^* \otimes_B x_{(1)} \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B x_{(2)} \otimes_B u \\ &= (\rho_{X\otimes_B\Sigma} \otimes_A M_\Sigma(\mathfrak{D})) \circ \rho_{X\otimes_B\Sigma}(x \otimes_B u) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la coasociatividad de ρ_X. Finalmente si $f : (X, \rho_X) \to (X', \rho_{X'})$ es un morfismo $\mathfrak{D}$–colineal por la derecha, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{X'\otimes_B\Sigma} \circ (f(x) \otimes_B u) &= \sum_{(x),\, i,} f(x_{(0)}) \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B x_{(1)} \otimes_B u \\
&= f \otimes_B \Sigma \otimes_A M_\Sigma(\mathfrak{D})\Big(\sum_{(x),\, i,} x_{(0)} \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B x_{(1)} \otimes_B u\Big) \\
&= (f \otimes_B \Sigma \otimes_A M_\Sigma(\mathfrak{D})) \circ \rho_{X\otimes_B\Sigma}(x \otimes_B u).
\end{aligned}$$

Lo que implica que $f \otimes_B \Sigma : (X \otimes_B \Sigma, \rho_{X\otimes_B\Sigma}) \to (X' \otimes_B \Sigma, \rho_{X'\otimes_B\Sigma})$ es un morfismo $M_\Sigma(\mathfrak{D})$–colineal por la derecha. El caso particular es una simple deducción de la anterior afirmación. La demostración de la última aserción es un calculo rutinario. □

Proposición 2.6.7. *Sean A, B y R tres $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales junto con dos bimódulos ${}_B\Sigma_A$ y ${}_RW_B$, tales que Σ_A y W_B son finitamente generados y proyectivos. Considere $V = W \otimes_B \Sigma$ como (R, A)–bimódulo, entonces existe un isomorfismo de A–coanillos*

$$\begin{array}{ccc}
M_\Sigma(W^* \otimes_R W) & \longrightarrow & V^* \otimes_R V \\
\varphi \otimes_B \psi \otimes_R w \otimes_B u & \longmapsto & \overline{(\varphi \otimes_B \psi)} \otimes_R w \otimes_B u,
\end{array}$$

donde $\overline{(-)} : \Sigma^* \otimes_B W^* \to V^*$, es el isomorfismo $A - R$–bilineal definido por $w \otimes_B u \mapsto \overline{(\varphi \otimes_B \psi)}(w \otimes_B u) = \varphi(\psi(w)u)$.

Demostración. Inmediata. □

Observación 2.6.8. La Proposición 2.6.7 nos indica que el funtor $M_\Sigma(-)$ conserva los coanillos de comatrices finitas. De otra parte, si suponemos que los anillos des escalares son $\mathbb{K}$–álgebras, entonces la Proposición 2.6.7 representa un ejemplo de un "comatrix coring context"definido en [20, Section 2]. Así observamos también que la definición de un coanillo de comatrices finitas, usando el criterio de la base dual (ó el coanillo de coendomorfismos), sirve con la misma eficacia en el caso de anillo de base con unidades locales; pero la otra definición usando "contextos, [20, Definition 2.1]"no es tan clara en este caso.

Teorema 2.6.9. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, $\mathfrak{D}$ un B–coanillo y ${}_B\Sigma_A$ un (B, A)–bimódulo tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. Consideramos el A–coanillo de comatrices $(M_\Sigma(\mathfrak{D}), \Delta, \varepsilon)$ de la Proposición 2.6.2. Supongamos que la categoría de comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ tiene un generador finitamente generado y proyectivo y que ${}_B\Sigma$ es un módulo fielmente plano. Entonces el funtor*

$$- \otimes_B \Sigma : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})},$$

definido en el Lema 2.6.6, establece una equivalencia de categorías. En particular, si $A = B$ es una $\mathbb{K}$–álgebra y $\Sigma = A^{(n)}$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una equivalencia de categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \sim \mathcal{M}^{CM_n(\mathfrak{D})}$, donde $CM_n(\mathfrak{D}) = M_{A^{(n)}}(\mathfrak{D})$ (véase el Ejemplo 2.6.4).

Demostración. Según el Teorema 2.3.2 el coanillo $\mathfrak{D}$ es isomorfismo a un B–coanillo de comatrices finitas $W^* \otimes_T W$ asociado a un $\mathfrak{D}$–comódulo W tales que $T = \mathrm{End}(W_{\mathfrak{D}})$, ${}_TW$ es un módulo fielmente plano y $- \otimes_T W : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ es una equivalencia de categorías. Entonces $M_\Sigma(\mathfrak{D}) \cong M_\Sigma(W^* \otimes_T W)$; ahora según la Proposición 2.6.7, $M_\Sigma(W^* \otimes_T W) \cong V^* \otimes_T V$ (mediante can_V), donde $V = W \otimes_B \Sigma$, y como ${}_TV$ es fielmente plano el Teorema 2.3.10 implica que $- \otimes_T V : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})}$ es una equivalencia de categorías. Por lo tanto, se tiene un diagrama conmutativo de equivalencia de categorías

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \arrow[r, "-\otimes_B \Sigma"] & \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})} \\ \mathcal{M}_T, \arrow[u, "-\otimes_T W"] \arrow[ur, "-\otimes_T V"'] & \end{tikzcd}$$

lo que implica que $- \otimes_B \Sigma$ es una equivalencia de categorías. □

Observación 2.6.10. En el Teorema 2.6.9 no podemos suponer que la categoría de $\mathfrak{D}$–comódulos posee un conjunto de generadores proyectivos pequeños, porque el anillo de escalares en el anunciado es un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y en este caso "no hay" un resultado que caracteriza $\mathfrak{D}$. Así necesitamos dar la version del Teorema 2.6.9 usando $\mathbb{K}$–álgebras como anillos de escalares.

En lo que queda de esta sección A y B son $\mathbb{K}$–álgebras con 1 y todos los $A(B)$–módulos son unitarios.

Teorema 2.6.11. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras, $\mathfrak{D}$ un B–coanillo y ${}_B\Sigma_A$ un (B, A)–bimódulo tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo. Consideramos el A–coanillo de comatrices $(M_\Sigma(\mathfrak{D}), \Delta, \varepsilon)$ de la Proposición 2.6.2. Supongamos que la categoría de comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ tiene un conjunto $\mathcal{A}$ de generadores proyectivos pequeños. Si ${}_B\Sigma$ es un módulo fielmente plano, entonces el funtor*

$$- \otimes_B \Sigma : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})},$$

definido en el Lema 2.6.6, establece una equivalencia de categorías.

Demostración. Según el Teorema 2.5.9, $\mathfrak{D}$ es isomorfo al B–coanillo de comatrices infinitas $W^\dagger \otimes_R W$, donde $W = \oplus_{P\in\mathcal{A}} P$, $W^\dagger = \oplus_{P\in\mathcal{A}} P^*$ y $R = \oplus_{P,Q\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(P, Q)$ tal que $- \otimes_R W : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ es una equivalencia de categorías y ${}_RW$ es un módulo fielmente plano. Aplicando el funtor $M_\Sigma(-)$, se tiene un isomorfismo de A–coanillos $M_\Sigma(\mathfrak{D}) \cong M_\Sigma(W^\dagger \otimes_R W)$. Consideramos $V = \oplus_{P\in\mathcal{A}}(P \otimes_B \Sigma)$ y $V^\dagger = \oplus_{P\in\mathcal{A}}(P \otimes_B \Sigma)^*$, respectivamente, como $M_\Sigma(\mathfrak{D})$–comódulo por la derecha y como $M_\Sigma(\mathfrak{D})$–comódulo por la izquierda. Denotemos por ι_- la inyección canónica de cualquier componente homogénea en su correspondiente suma directa. Ahora es fácil de averiguar, usando la Proposición 2.6.7, que

$$\begin{array}{ccc} M_\Sigma(W^\dagger \otimes_R W) & \longrightarrow & V^\dagger \otimes_R V \\ \varphi \otimes_B \iota_{Q^*}(\sigma) \otimes_R \iota_P(p) \otimes_B u & \longmapsto & \iota_{(Q\otimes_B\Sigma)^*}\left(\overline{(\varphi \otimes_B \sigma)}\right) \otimes_R \iota_{P\otimes_B\Sigma}(p \otimes_B u), \end{array} \tag{2.29}$$

donde $\overline{(-)} : \Sigma^* \otimes_B Q^* \to (Q \otimes_B \Sigma)^*$ ha sido definido en la Proposición 2.6.7; es un isomorfismo de A–coanillos. De otra parte sabemos que ${}_R V \cong {}_R W \otimes_B \Sigma$ es un módulo fielmente plano, lo que implica según el Teorema 2.5.11, que $- \otimes_R V : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{V^\dagger \otimes_R V}$ es una equivalencia de categorías. Componiendo con el isomorfismo de categorías $\mathcal{M}^{V^\dagger \otimes_R V} \cong \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})}$ (inducido por el isomorfismo de coanillos (2.29)), se tiene la equivalencia de categorías $(- \otimes_B \Sigma) \circ (- \otimes_R W) : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})}$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \arrow[r, "- \otimes_B \Sigma"] & \mathcal{M}^{M_\Sigma(\mathfrak{D})} \\
\mathcal{M}_R \arrow[u, "- \otimes_R W"] \arrow[ur, "- \otimes_R V"] \arrow[r, "- \otimes_R V"'] & \mathcal{M}^{V^\dagger \otimes_R V} \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

lo que implica el resultado. $\square$

En lo que queda de esta sección vamos a dedicarlo al estudio de las propiedades del bimódulo Σ y del coanillo $\mathfrak{D}$ que se reflejan sobre el coanillo de comatrices $M_\Sigma(\mathfrak{D})$. Considere Σ un (B, A)–bimódulo junto con $\mathfrak{D}$ un B–coanillo, $\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma)$ es considerado de manera natural como (B, A)–bimódulo. De esta manera $\mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$ se convierte en A–bimódulo (notemos que todas esta acciones son por hipótesis unitarias). Una vez retenida esta notación, se tiene

Lema 2.6.12. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras, $\mathfrak{D}$ un B–coanillo y ${}_B\Sigma_A$ un bimódulo.*

(1) El A–bimódulo $\mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$ es una $\mathbb{K}$–álgebra con el producto

$$fg : \Sigma \to \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma), \quad (fg)(u)(d) = \sum_{(d)} g(f(u)(d_{(2)}))(d_{(1)}), \tag{2.30}$$

y la unidad $\widehat{\varepsilon} : \Sigma \to \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma)$ es definida por $\widehat{\varepsilon}(u)(d) = \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d)u$, para todo $u \in \Sigma$, $d \in \mathfrak{D}$ y $f, g \in \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$.

(2) Las aplicaciones

$$\lambda : A \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma)), \qquad \lambda' : \mathrm{End}({}_B\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$$
$$a \longmapsto [u \mapsto [d \mapsto \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d)ua]] \qquad\qquad f \longmapsto [u \mapsto [d \mapsto \varepsilon_{\mathfrak{D}}(d)f(u)]]$$

establecen morfismos de $\mathbb{K}$–álgebras con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma)) \\
\mathrm{End}({}_B\Sigma) \arrow[ur, "\lambda'"'] &
\end{tikzcd}$$

(3) Supongamos que Σ_A es finitamente generado y proyectivo y consideramos el A–coanillo de comatrices $M_\Sigma(\mathfrak{D})$. Entonces el anillo dual ${}^*M_\Sigma(\mathfrak{D})$ es anti-isomorfismo al anillo $\mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$ (este último con el producto (2.30)).

Demostración. (1) y (2) son cálculos inmediatos.
(3) El isomorfismo a nivel de $\mathbb{K}$–módulos viene dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma, {}_AA) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma)) \\ \delta & \longmapsto & [u \mapsto [d \mapsto \sum_i p_i \delta(p_i^* \otimes_B d \otimes_B u)]], \end{array}$$

donde $\{p_i, p_i^*\}_i$ es una base dual finita de Σ_A. La aplicación inversa designa a cada $f \in \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$ el morfismo A–lineal por la izquierda $\varphi \otimes_B d \otimes_B u \mapsto \varphi(f(u)(d))$, $\varphi \in \Sigma^*$, $d \in \mathfrak{D}$ y $u \in \Sigma$. Es fácil ahora de averiguar que este isomorfismo es compatible con el producto (2.30) y el producto convolución de ${}^*M_\Sigma(\mathfrak{D})$. □

Considere Σ un (B, A)–bimódulo. Siguiendo a Sugano [93], Σ se llama un *bimódulo separable* o B se dice Σ–separable sobre A, si la aplicación de evaluación

$$\Sigma \otimes_A {}^*\Sigma \longrightarrow B, \qquad u \otimes_A \varphi \longmapsto \varphi(u)$$

es un epimorfismo que escinde en la categoría de (B, B)–bimódulos. Siguiendo esta vez a [6] y [65], un bimódulo ${}_B\Sigma_A$ se dice *Frobenius* si ${}_B\Sigma$ y Σ_A son módulos finitamente generados y proyectivos y $\Sigma^* \cong {}^*\Sigma$ isomorfismo de (A, B)–bimódulos.

En términos categóricos, ${}_B\Sigma_A$ es separable si y sólo si el funtor $\mathrm{Hom}_B(\Sigma, -)$ es separable en el sentido de [80] (véase [90, Theorem 1.2]). También, si ${}_B\Sigma_A$ es separable, entonces según [66, Theorem 3.1(1)], la extensión $B \to S = \mathrm{End}(\Sigma_A)$ escinde en (B, B)–bimódulos. La implicación recíproca es cierta si Σ_A es finitamente generado y proyectivo. Ahora ${}_B\Sigma_A$ es Frobenius implica que el funtor de restricción de escalares por la derecha asociado a la extensión $B \to S$ tiene el mismo adjunto por la derecha y por la izquierda [87] i.e. un funtor Frobenius en el lenguaje de [27], [30]. Un A–coanillo $\mathfrak{C}$ es *Frobenius*, si el funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ es Frobenius. Para más caracterizaciones de coanillos Frobenius enviamos a [17], [19]. Finalmente $\mathfrak{C}$ se dice que es *cosplit*, si existe un morfismo de A–bimódulos $\widetilde{\varepsilon} : A \to \mathfrak{C}$ tal que $\varepsilon_{\mathfrak{C}} \circ \widetilde{\varepsilon} = A$, véase [14].

Ahora estamos preparados para el siguiente resultado

Proposición 2.6.13. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras juntos con $\mathfrak{D}$ un B–coanillo y ${}_B\Sigma_A$ un bimódulo tal que Σ_A es finitamente generado proyectivo. Consideramos pues el A–coanillo $M_\Sigma(\mathfrak{D})$ con la estructura de la Proposición 2.6.2.*

(1) Si ${}_B\Sigma_A$ es un bimódulo separable y $\mathfrak{D}$ es un B–coanillo coseparable. Entonces $M_\Sigma(\mathfrak{D})$ es un A–coanillo coseparable.

(2) Si ${}_A\Sigma^*_B$ es un bimódulo separable y $\mathfrak{D}$ es un B–coanillo cosplit. Entonces $M_\Sigma(\mathfrak{D})$ es un A–coanillo cosplit. Recíprocamente, si $M_\Sigma(\mathfrak{D})$ es un coanillo cosplit, entonces ${}_A\Sigma^*_B$ es un bimódulo separable.

(3) Si ${}_B\Sigma_A$ es un bimódulo Frobenius y $\mathfrak{D}$ es un B–coanillo Frobenius. Entonces $M_\Sigma(\mathfrak{D})$ es un A–coanillo Frobenius.

Demostración. (1) y (2) son inmediatas.
(3) Sea $\theta : \Sigma^* \to {}^*\Sigma$ el isomorfismo de (A, B)–bimódulos que define el bimódulo Frobenius ${}_B\Sigma_A$. De otra parte, como $\mathfrak{D}$ es Frobenius, existe un isomorfismo $\sigma : \mathfrak{D} \cong T$ de (B, T)–bimódulos, donde T es el anillo opuesto del anillo dual ${}^*\mathfrak{D}$, $\sigma : \mathfrak{D} \cong {}^*\mathfrak{D}$ es ahora B–bilineal. Además, ${}_B\mathfrak{D}$ es finitamente generado y proyectivo, según [24, Corollary 5.6]. Existe pues un isomorfismo de (A, B)–bimódulo: $\beta = ({}^*\Sigma \otimes_B \sigma \otimes_B \Sigma) \circ (\theta \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma)$. Por lo tanto, se tiene el siguiente isomorfismo

$$\zeta : \Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\beta} {}^*\Sigma \otimes_B {}^*\mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\cong} {}^*(\Sigma \otimes_B \mathfrak{D}) \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D} \otimes_B \Sigma, \Sigma)$$

donde en el segundo y el último isomorfismos hemos utilizado que ${}_B\Sigma$, ${}_B\mathfrak{D}$ son finitamente generado y proyectivos. Denotemos por R el anillo opuesto del dual anillo ${}^*(M_\Sigma(\mathfrak{D}))$. Para comprobar la aserción, basta comprobar según [17, Theorem 4.1], que $M_\Sigma(\mathfrak{D}) \cong R$ como (A, R)–bimódulo, porque $M_\Sigma(\mathfrak{D})$ es claramente un A–módulo por la izquierda finitamente generado y proyectivo. El Lema 2.6.12, implica que R es isomorfismo al anillo $\mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$. Por lo tanto la siguiente composición

$$\Sigma^* \otimes_B \mathfrak{D} \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\zeta} \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D} \otimes_B \Sigma, \Sigma) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_B(\Sigma, \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{D}, \Sigma))$$

nos proporciona dicho isomorfismo. □

Observación 2.6.14.

1. El anillo del Lema 2.6.12(1) es canónicamente isomorfismo al anillo opuesto de $\mathrm{End}({}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{D} \otimes_B \Sigma))$, donde $(\mathfrak{D} \otimes_B \Sigma, \Delta_{\mathfrak{D}} \otimes_B \Sigma)$ es un $\mathfrak{D}$–comódulo por la izquierda.

2. Si $\mathfrak{D} = B$ en la Proposición 2.6.13, se tiene entonces [20, Theorem 3.5(1), Theorem 3.2(1), Theorem 3.7(1)].

Capítulo 3

El Teorema de Estructura de Coanillos Cosemisimples.

Introducción

Sabemos que los módulos (por la izquierda o por la derecha) y los comódulos (por la izquierda o por la derecha) sobre anillos semisimples artinianos y sobre coálgebras cosemisimples, son objetos semisimples en sus correspondientes categorías. En otras palabras estas categorías son categorías de Grothendieck semisimples (véase [92], [60, p. 347]). Inspirados por este efecto, un coanillo "cosemisimple" por la derecha (respectivamente por la izquierda) es un coanillo cuya categoría de comódulos por la derecha (respectivamente por la izquierda) es una categoría de Grothendieck semisimple. El primer problema que plantean estas definiciones es la equivalencia entre la izquierda y la derecha, es decir ¿tendríamos, como en el caso clásico, que un coanillo es cosemisimple por la izquierda si y sólo si lo es por la derecha?

En este capítulo desarrollaremos una teoría básica de coanillos cosemisimples, dando primero un respuesta afirmativa a la pregunta de antes, y luego un teorema de estructura de todos los coanillos cosemisimples en forma de sumas directas de coanillos de comatrices finitas de forma $\Sigma^* \otimes_D \Sigma$, donde $D \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$, es una $\mathbb{K}$–sub-álgebras de división.

Durante todo este capítulo, fijamos A una $\mathbb{K}$–álgebra con 1. Todos los A–módulos son unitarios.

3.1. Coanillos cosemisimples.

Estudiaremos el tipo de coanillo sencillo desde el punto de vista categórico, en efecto, aquellos coanillos con categoría de comódulos semisimple. Vamos a dar una generalización del teorema conocido para coálgebras y anillos. En particular, se tiene una (única) descomposición de cualquier coanillo cosemisimple en términos de componentes simples. La estructura de estas componentes simples, que en el caso de anillos y de coálgebras sobre cuerpos se describen en términos de matrices aquí en términos de comatrices, está ofrecida en la última sección de este capítulo.

Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con la categoría de comódulos por la derecha (resp. por la izquierda) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ (resp. ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$) una categoría abeliana. Un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha (resp. por la izquierda) M se dice que es *simple* si M no tiene ningún cociente que no sea trivial; M se dice que es *semisimple* si es suma directa de comódulos simples. El siguiente teorema responde afirmativamente a la pregunta citada en la introducción de este capítulo.

Teorema 3.1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha es semisimple y $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría abeliana;*

(ii) *cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda es semisimple y ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ es una categoría abeliana;*

(iii) *$\mathfrak{C}$ es semisimple como $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha y ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano;*

(iv) *$\mathfrak{C}$ es semisimple como $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda $\mathfrak{C}_A$ es un módulo plano.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (iii)$ Necesitamos comprobar que ${}_A\mathfrak{C}$ es plano. De acuerdo con la Proposición 1.2.12, es suficiente comprobar que el funtor del olvido $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ es exacto (por la izquierda). Pero esto es cierto, porque cualquier monomorfismo en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ escinde, sabiendo que todos los objetos son semisimples.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Según la Proposición 1.2.12, $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck. Como $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$ es un sub-generador de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, según el Lema 1.2.14, y un comódulo semisimple, tenemos que cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha es semisimple.
$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ es simétrica a $(i) \Leftrightarrow (iii)$.
$(i), (iii) \Rightarrow (iv)$ Tenemos ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano y $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ posee un conjunto de generados proyectivos pequeños Λ que es el conjunto de representantes de los comódulos simples. Aplicando el Teorema 2.5.9 y el diagrama (2.22) al conjunto de objetos $\{S\}_{S\in\Lambda}$ y teniendo en cuenta que el coideal del Lema 2.4.2 es cero, se tiene un isomorfismo de A–coanillos $\oplus_{S\in\Lambda}\mathsf{can}_S : \oplus_{S\in\Lambda}S^* \otimes_{D_S} S \to \mathfrak{C}$, donde $D_S = \mathrm{End}(S_{\mathfrak{C}})$, para cada $S \in \Lambda$ es un anillo de división. Lo que implica que $\mathfrak{C}_A$ es un módulo plano. Aplicando la versión por la izquierda del Teorema 2.3.10 a cada uno de los coanillos de comatrices $S^* \otimes_{D_S} S$, $S \in \Lambda$, se tiene una equivalencia de categorías entre ${}^{S^*\otimes_{D_S}S}\mathcal{M}$ y ${}_{D_S}\mathcal{M}$. Aplicando esta vez la Proposición 1.5.3 a la suma directa de coanillos $\oplus_{S\in\Lambda}S^* \otimes_{D_S} S$, tenemos una equivalencia de categorías entre ${}^{\oplus_{S\in\Lambda}S^*\otimes_{D_S}S}\mathcal{M}$ y la categoría producto $\Pi_{S\in\Lambda}{}_{D_S}\mathcal{M}$. Por lo tanto, existe una equivalencia de categorías entre ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ y la categoría producto $\Pi_{S\in\Lambda D_S}\mathcal{M}$. Como cada uno de los anillos D_S, $S \in \Lambda$ es un anillo de división, [92, Proposition V.6.7], implica que cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda es semisimple, en particular ${}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ es semisimple.
$(ii), (iv) \Rightarrow (iii)$ es una demostración simétrica a $(i), (iii) \Rightarrow (iv)$. □

Definición 3.1.2. Un A–coanillo que satisface las condiciones equivalentes en el Teorema 3.1.1 se le llama un *coanillo cosemisimple*. Por ejemplo si A es una $\mathbb{K}$–álgebra de división, considerada como A–coanillo trivialmente, entonces cualquier suma directa de copias de A admite una estructura de A–coanillo cosemisimple.

Consideramos $\mathfrak{C}$ un A–coanillo cosemisimple, según el Teorema 3.1.1, las categorías de comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y de comódulos por la izquierda ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$, admiten un conjunto de generadores finitamente generados y proyectivos. Entonces, aplicando el Teorema 2.4.10 (o su versión por la izquierda), $\mathfrak{C}$ puede ser reconstruido como A–coanillo a partir de este conjunto de generadores. Esta observación será nuestra idea de base para ofrecer un teorema de estructura en la siguiente sección. Pero ahora vamos a concentrarnos en estudiar una sub-clase de coanillos cosemisimples, precisamente los coanillos que posean un sólo tipo de comódulo simple.

Definición 3.1.3. Un coanillo se dice que es *simple* si no contiene sub-bicomódulos no-triviales. Notemos que si $\mathfrak{C}$ es un coanillo cosemisimple, entonces según el Corolario 1.3.29, es simple si y sólo si no contiene sub-coanillos no-triviales.

Definición 3.1.4. Supongamos que la categoría de comódulos sobre un A–coanillo $\mathfrak{C}$ es de Grothendieck (véase la Proposición 1.2.12). El coanillo $\mathfrak{C}$ se dice que es *semiartiniano* si es un objeto semiartiniano en la categoría de comódulos ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$, es decir que cada comódulo no-nulo cociente de ${}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ contiene un sub-comódulo simple distinto de cero.

Teorema 3.1.5. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo tal que los módulos ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ sean proyectivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo simple semiartiniano por la izquierda;*

(ii) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo simple y contiene un $\mathfrak{C}$–subcomódulo simple por la izquierda;*

(iii) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo cosemisimple con un único tipo de $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la izquierda;*

(iv) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo simple semiartiniano por la derecha;*

(v) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo simple y contiene un $\mathfrak{C}$–subcomódulo simple por la derecha;*

(vi) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo cosemisimple con un único tipo de $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la derecha.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ es obvia.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea S un subcomódulo simple por la izquierda de $\mathfrak{C}$. Se sabe que S es un $\mathfrak{C}^*$–submódulo simple por la derecha de $\mathfrak{C}$, usando el par racional canónico. Ahora, ${}^*\mathfrak{C}S$ es un $({}^*\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^*)$–bi-submódulo no-nulo de $\mathfrak{C}$, que es según el Corolario 1.3.29, es un sub-bicomódulo no-nulo, luego, ${}^*\mathfrak{C}S = \mathfrak{C}$. También, $\mathfrak{C}$ es la suma de imágenes de morfismos del $\mathfrak{C}^*$–módulo simple por la derecha S. Ahora aplicamos el Teorema 1.3.19' par completar la implicación.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Obviamente, cada coanillo cosemisimple es semiartiniano por la izquierda. Sea $\mathfrak{I}$ un sub-bicomódulo no-nulo de $\mathfrak{C}$. En particular, $\mathfrak{I}$ es un $\mathfrak{C}$–subcomódulo por la izquierda de $\mathfrak{C}$, luego contiene un subcomódulo simple S. Según las aserciones 1 y 2 de la Proposición 1.3.30, tenemos $C(S) \subseteq C(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}$. Como $\mathfrak{C}$ es isomorfo a un suma directa de copias de S, aplicamos la parte 3 de la Proposición 1.3.30 para obtener $C(S) = \mathfrak{C}$. Luego, $\mathfrak{I} = \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}$ es simple.

$(ii) \Rightarrow (v)$ Hemos comprobado antes que si $\mathfrak{C}$ es simple y contiene un comódulo simple por la izquierda, entonces $\mathfrak{C}$ es cosemisimple. Es decir que contiene un $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la derecha.
Finalmente, $(iv), (v), (vi)$ se demuestran equivalentes de manera análoga a la demostración de equivalencia entre $(i), (ii), (iii)$; lo que permite deducir también que (v) implica (ii). $\square$

Observación 3.1.6. Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo simple semiartiniano. Por el Teorema 3.1.5, tenemos ${}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \cong S^{(\Xi)}$, donde S es un $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la izquierda y Ξ un conjunto de indices. En contraste con el caso de coálgebras o de anillos (i.e., cuando $\mathfrak{C}$ es una coálgebra sobre cuerpo o $\mathfrak{C} = A$), el conjunto Ξ no tiene por qué ser finito. Considere el A–coanillo I del Ejemplo 1.2.11 con R una $\mathbb{K}$–álgebra y un anillo simple artiniano, P el coproducto de Ξ copias de el único R–módulo simple por la izquierda (Ξ cualquier conjunto infinito) y S el anillo de endomorfismos del R–módulo por la izquierda de P. Entonces I es un coanillo simple semiartiniano isomorfo a una suma directa infinita de copias de un I–comódulo simple por la izquierda (que es esencialmente el único R–módulo simple por la izquierda). Este sencillo Ejemplo demuestra también que el anillo de base A no necesariamente ha de ser semisimple ni artiniano para que haya un A–coanillo cosemisimple.

Terminamos esta sección comprobando que cualquier coanillo cosemisimple puede ser completamente descrito en términos de coanillos simples semiartinianos (o coanillos simples cosemisimples).

Teorema 3.1.7. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo.*

(i) Si $\mathfrak{C}$ es cosemisimple con Λ un conjunto de representantes de $\mathfrak{C}$–comódulo simples por la derecha y $D_S = \mathrm{End}(S_{\mathfrak{C}})$, $S \in \Lambda$, los anillos de división correspondientes. Entonces, el A–coanillo de comatrices finitas $S^* \otimes_{D_S} S$ asociado a cualquier comódulo $S \in \Lambda$, es un coanillo simple cosemisimple. Además

$$\bigoplus_{S\in\Lambda} \mathsf{can}_S : \bigoplus_{S\in\Lambda} S^* \otimes_{D_S} S \longrightarrow \mathfrak{C},$$

es un isomorfismo de A–coanillos.

(ii) $\mathfrak{C}$ es cosemisimple si y sólo si se descompone como $\mathfrak{C} = \oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{C}_\alpha$, donde $\mathfrak{C}_\alpha$ es un A–subcoanillo simple cosemisimple para todo $\alpha \in \Lambda$. En este caso, la descomposición es única salvo isomorfismos.

Demostración. (i) Como cada comódulo $S \in \Lambda$, es finitamente generado y proyectivo como A–módulo; la aserción es una consecuencia de los Teoremas 2.3.10 y 3.1.5. El isomorfismo de coanillos, es consecuencia de los Teorema 2.5.9 y 3.1.1 (véase la demostración del Teorema 3.1.1).
(ii) Aquí la implicación directa es justamente el item (i). La implicación recíproca es fácil deducirla del siguiente efecto: Si consideramos la citada descomposición $\mathfrak{C} = \oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{C}_\alpha$, entonces los $\mathfrak{C}$–sub-comódulos por la derecha de $\mathfrak{C}$ son de forma $\oplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, donde M_α es un $\mathfrak{C}_\alpha$–sub-comódulo de $\mathfrak{C}_\alpha$ para cualquier α, véase la Proposición 1.5.3. La unicidad viene después de observar que los $\mathfrak{C}_\alpha$ son nada más que las componentes iso-típicas de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$. $\square$

3.2. Estructura de coanillos cosemisimples.

Desde el punto de vista de la teoría de coanillos, el ejemplo más fundamental de coanillo simple cosemisimple es el coanillo canónico de Sweedler $D \otimes_E D$ asociado a una extensión $E \subseteq D$ de anillos de división (Teorema 3.1.7(i)). Esta sección contiene la descripción completa, en términos de A–módulos finitamente generados y proyectivos y sub-anillos de división de sus anillos de endomorfismos, de todos los A–coanillos cosemisimples para un anillo unitario A fijo. Vamos a utilizar las notaciones del capítulo 2.

Proposición 3.2.1. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo simple cosemisimple y $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ un $\mathfrak{C}$–comódulo no-nulo finitamente generado y proyectivo. Sea $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$ el anillo simple artiniano de endomorfismos de $\Sigma_{\mathfrak{C}}$. Entonces Σ_A es finitamente generado y proyectivo y $\mathsf{can}_{\Sigma} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos. Recíprocamente, cualquier A–coanillo de comatrices finitas $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$, donde B es un anillo simple artiniano, se convierte en un A–coanillo simple cosemisimple, y el número de simples en la descomposición completa de $\Sigma_{\Sigma^* \otimes_B \Sigma}$ coincide con el número de simples en la descomposición completa de B_B.*

Demostración. La primera aserción es una consecuencia del Teorema 2.3.2 porque $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. La segunda es una consecuencia del Teorema 2.3.10. □

Recordar que si $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo con elemento grouplike g, $[g]A$ (resp. $A[g]$) denota el $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha (resp. por la izquierda) sub-yacente de A_A (resp. ${}_AA$) cuya coacción es definida por $\rho_{[g]A} : [g]A \to \mathfrak{C}$, vía $1 \to g$. El anillo de endomorfismos de $[g]A$ (i.e. sub-anillo de coinvariantes de A), es denotado por $A_{g,g}$. El siguiente corolario es una aplicación directa de la Proposición 3.2.1.

Corolario 3.2.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $g \in \mathfrak{C}$ un elemento grouplike. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es un coanillo simple cosemisimple. Entonces $A_{g,g}$ es un anillo simple artiniano y el morfismo canónico $\mathsf{can}_{[g]A} : A \otimes_{A_{g,g}} A \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos. Además, A es un $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la derecha (o por la izquierda) si y sólo si $A_{g,g}$ es un anillo de división. Recíprocamente, cualquier A–coanillo de Sweedler $A \otimes_B A$, con B un anillo simple artiniano, es un A–coanillo simple cosemisimple y $A_{1\otimes_B 1, 1\otimes_B 1} = B$.*

Ahora como consecuencia del Teorema 2.3.2 y el Corolario 3.2.2, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes por un A–coanillo $\mathfrak{C}$ con elemento grouplike g.*

(i) *$\mathfrak{C}$ es un A–coanillo simple cosemisimple;*

(ii) *$\mathfrak{C} \cong A \otimes_B A$ para un cierto sub-anillo simple artiniano B de A;*

(iii) *$\mathfrak{C}$ es Galois y $A_{g,g}$ es un anillo simple artiniano;*

(iv) $\mathfrak{C}_A$ *es un módulo plano,* A *es un generador proyectivo de* ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$*, y* $A_{g,g}$ *es un anillo simple artiniano;*

(v) ${}_A\mathfrak{C}$ *es un módulo plano,* A *es un generador proyectivo de* $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$*, y* $A_{g,g}$ *es un anillo simple artiniano.*

Ejemplo 3.2.4. Supongamos que $\mathbb{K}$ es un cuerpo conmutativo y sea $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Considere la categoría $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}}$ de módulos de Hopf por la derecha; un objeto M de esta categoría es un $\mathcal{H}$–módulo por la derecha y un $\mathcal{H}$–comódulo por la derecha cuya coacción ρ_M satisface

$$\rho_M(m.h) = \sum m_{(0)}h_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)}h_{(2)},$$

y los morfismos en esta categoría son $\mathcal{H}$–lineales por la derecha y $\mathcal{H}$–colineales por derecha. El Teorema fundamental ([91, Theorem 3.5]) nos dice que el funtor $(-)_{\mathcal{H}} : {}_{\mathbb{K}}\mathcal{M} \to \mathcal{M}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}}$ enviando $V \mapsto V_{\mathcal{H}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$ es una equivalencia de categorías con el funtor inverso $(-)^{co\mathcal{H}} : \mathcal{M}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}} \to {}_{\mathbb{K}}\mathcal{M}$ enviando $M \mapsto M^{co\mathcal{H}} = \{m \in M |\ \rho_M(m) = m \otimes_{\mathbb{K}} 1\}$. Recuerde que $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$ es un $\mathcal{H}$–coanillo correspondiente a la estructura entrelazante $(\mathcal{H}, \mathcal{H})_\psi$, donde $\psi : \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{H}$ vía $h \otimes_{\mathbb{K}} g \mapsto \sum g_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} hg_{(1)}$ (véase el Ejemplo 1.1.16[17]) y que la categoría $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{H}}$ es isomorfa a la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\mathfrak{H}}$. Según el Teorema 3.1.5, se tiene que $\mathfrak{H}$ es un $\mathcal{H}$–coanillo simple cosemisimple. De otra parte, es fácil comprobar que el $\mathfrak{H}$–comódulo por la derecha $\mathcal{H}_{\mathfrak{H}}$ es simple. Por lo tanto, el Corolario 3.2.3 implica que $\mathfrak{H}$ es isomorfo al coanillo canónico de Sweedler asociado al extensión $\mathbb{K} \to \mathcal{H}$ y que $\mathbb{K} \cong \mathrm{End}(\mathcal{H}_{\mathfrak{H}}) = \mathcal{H}^{co\mathcal{H}}$.

Ejemplo 3.2.5. Supongamos que A es una $\mathbb{K}$–álgebra G–graduada $A = \oplus_{g\in G}A_g$, por un grupo G cuyo elemento neutro es e. Consideramos $\mathfrak{C}(G)$ el A–coanillo del Ejemplo 1.2.4(a). Supongamos además que el sub-anillo A_e es simple artiniano y que A es fuertemente graduado. Entonces, según el Ejemplo 2.3.4, $\mathfrak{C}(G)$ es un A–coanillo simple cosemisimple, lo que implica también que A es anillo graduado simple semisimple, véase [77].

Ejemplo 3.2.6. Consideramos D un anillo unitario de división y V cualquier D–espacio vectorial por la izquierda con base $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. El anillo de endomorfismos $\mathrm{End}({}_DV)$ es pues isomorfo al anillo de $\Gamma\times\Gamma$–matrices de columnas-finitas sobre D, denotado por $\mathbb{CFM}_\Gamma(D)$; es decir las matrices cuadradas indexadas por el conjunto $\Gamma\times\Gamma$ cuyas columnas tienen un número finito de entrada no nulas. Se sabe que

$$\mathrm{Soc}({}_{\mathbb{CFM}_\Gamma(D)}\mathbb{CFM}_\Gamma(D)) = \mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D)_{\mathbb{CFM}_\Gamma(D)})$$

es un ideal bilátero idempotente, le denotemos por $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$. Además, $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$ es puro por la derecha y por la izquierda en $\mathbb{CFM}_\Gamma(D)$. Por lo tanto, $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$ es un $\mathbb{CFM}_\Gamma(D)$–coanillo. De otra parte se sabe que $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$ es semisimple homogéneo como $\mathbb{CFM}_\Gamma(D)$–módulo por la derecha y por la izquierda [6, Exercice 10.8]; como es un ideal bilátero idempotente, $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$ es semisimple homogéneo como $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$–comódulo por la derecha y por la izquierda. Lugo $\mathrm{Soc}(\mathbb{CFM}_\Gamma(D))$ es un $\mathbb{CFM}_\Gamma(D)$–coanillo simple cosemisimple.

El siguiente es nuestro teorema de estructura para los coanillos simples cosemisimples.

Teorema 3.2.7. *Un A–coanillo $\mathfrak{C}$ es simple cosemisimple si y sólo si existe un A–módulo por la derecha finitamente generado y proyectivo Σ y un sub-anillo de división $D \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$ tal que $\mathfrak{C} \cong \Sigma^* \otimes_D \Sigma$ como A–coanillos. Además, si Ξ es otro A–módulo por la derecha finitamente generado y proyectivo y $E \subseteq \mathrm{End}(\Xi_A)$ es un sub-anillo de división, entonces $\mathfrak{C} \cong \Xi^* \otimes_E \Xi$ como A–coanillo si y sólo si existe un isomorfismo de A–módulos por la derecha $g : \Sigma \to \Xi$ tal que $gDg^{-1} = E$.*

Demostración. Como consecuencia de la Proposición 3.2.1, un A–coanillo simple cosemisimple, salvo isomorfismos, es un A–coanillo de comatrices $\Sigma^* \otimes_D \Sigma$ para un cierto Σ_A finitamente generado y proyectivo y $D \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$ un sub-anillo de división. Ahora, supongamos un isomorfismo de A–coanillos $f : \Sigma^* \otimes_D \Sigma \to \Xi^* \otimes_E \Xi$ como ha sido citado, y sea $(-)_f : \mathcal{M}^{\Sigma^* \otimes_D \Sigma} \to \mathcal{M}^{\Xi^* \otimes_E \Xi}$ el funtor de inducción asociado, véase la definición en la sección 1.5 ([52, 5.2]), que supuestamente es un isomorfismo de categorías. Por la Proposición 3.2.1, Σ es un $\Sigma^* \otimes_D \Sigma$–comódulo simple por la derecha, lo que implica que Σ_f es un $\Xi^* \otimes_E \Xi$–comódulo simple por la derecha también. Como Ξ es, salvo isomorfismos, el único comódulo simple sobre $\Xi^* \otimes_E \Xi$, existe pues un isomorfismo de comódulos $g : \Sigma_f \to \Xi$ que, al nivel de A–módulos por la derecha, da un isomorfismo $g : \Sigma_A \to \Xi_A$. Claramente, $\mathrm{End}((\Sigma_f)_{\Xi^* \otimes_E \Xi}) = \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_D \Sigma})$. Según el Teorema 2.3.10, $D = \mathrm{End}(\Sigma_{\Sigma^* \otimes_D \Sigma})$ y $E = \mathrm{End}(\Xi_{\Xi^* \otimes_E \Xi})$. Luego, si $d \in D$, entonces gdg^{-1} es un endomorfismo de comódulo Ξ, es decir, $gdg^{-1} \in E$. Se tiene pues que $gDg^{-1} \subseteq E$. La otra inclusión se obtiene también fácilmente. Recíprocamente, supongamos que $g : \Sigma \to \Xi$ es un isomorfismo de A–módulos por la derecha tal que $gDg^{-1} = E$, considere la siguiente aplicación A–bilineal

$$\psi : \Sigma^* \times \Sigma \to \Xi^* \otimes_E \Xi, \qquad ((\varphi, u) \mapsto \varphi g^{-1} \otimes_E g(u)).$$

Sea $d \in D$ y $e = gdg^{-1} \in E$, luego $\psi(\varphi d, u) = (\varphi d g^{-1}) \otimes_E g(u) = \varphi g^{-1} e \otimes_E g(u) = \varphi g^{-1} \otimes_E eg(u) = \varphi g^{-1} \otimes_E g(du) = \psi(\varphi, du)$. Entonces ψ se extiende a una aplicación A–bilineal $\psi : \Sigma^* \otimes_D \Sigma \to \Xi^* \otimes_E \Xi$. Considerando cualquier base dual finita por la derecha $\{u_i^*, u_i\}$ de Σ_A, es fácil de comprobar que $\{u_i^* \circ g^{-1}, g(u_i)\}$ es una base dual por la derecha de Ξ_A. Además, $\psi(u_i^* \otimes_D u_j) = (u_i^* \circ g^{-1}) \otimes_E g(u_j)$, para cualquier i, j, luego ψ es un isomorfismo de A–bimódulos. Un cálculo directo, usando esta base, demuestra que ψ es un morfismo de A–coanillos. □

Recuerde del Teorema 3.1.7 que cualquier A–coanillo $\mathfrak{C}$ es cosemisimple si y sólo si se descompone de manera única como suma directa $\mathfrak{C} = \oplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{C}_\lambda$, donde cada uno de los $\mathfrak{C}_\lambda$ es un A–coanillo simple cosemisimple.

Teorema 3.2.8 (Estructura de coanillos cosemisimples)**.** *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *$\mathfrak{C}$ es un A–coanillo cosemisimple;*

(ii) *Existe una familia Λ de A–módulos por la derecha finitamente generados y proyectivos, y sub-anillos de división $D_\Sigma \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$, para cualquier $\Sigma \in \Lambda$, tales que $\mathfrak{C} \cong \oplus_{\Sigma \in \Lambda} (\Sigma^* \otimes_{D_\Sigma} \Sigma)$ como A–coanillos.*

Además, si $\mathfrak{C}$ satisface una de estas condiciones equivalentes, entonces la familia Λ es el conjunto de representantes de todos $\mathfrak{C}$–comódulos simples por la derecha, y la descomposición es única en el siguiente sentido: dada cualquier otra familia Λ' que satisface (ii); entonces existe una biyección $\phi : \Lambda \to \Lambda'$ y isomorfismo de A–módulos por la derecha $g_\Sigma : \Sigma_A \to \phi(\Sigma_A)$ para cada $\Sigma \in \Lambda$ tal que $D_{\phi(\Sigma)} = g_\Sigma(D_\Sigma)g_\Sigma^{-1}$.

Demostración. La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ viene del Teorema 3.1.7 y el Teorema 3.2.7. Vamos a comprobar la unicidad de la citada descomposición. Sean Λ, Λ' como en (ii) con los isomorfismos de A–coanillos asociados

$$\mathsf{can} : \bigoplus_{\Sigma \in \Lambda} (\Sigma^* \otimes_{D_\Sigma} \Sigma) \longrightarrow \mathfrak{C}, \qquad \mathsf{can}' : \bigoplus_{\Sigma' \in \Lambda'} \left(\Sigma'^* \otimes_{D_{\Sigma'}} \Sigma'\right) \longrightarrow \mathfrak{C}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{C} = \oplus_{\Sigma\in\Lambda}\mathfrak{C}_\Sigma = \oplus_{\Sigma'\in\Lambda'}\mathfrak{C}_{\Sigma'}$, donde $\mathfrak{C}_\Sigma = \mathsf{can}(\Sigma^* \otimes_{D_\Sigma} \Sigma)$, $\mathfrak{C}_{\Sigma'} = \mathsf{can}(\Sigma'^* \otimes_{D_{\Sigma'}} \Sigma')$ son A–coanillos simples cosemisimples para cualquier $\Sigma \in \Lambda$ y $\Sigma' \in \Lambda'$. La unicidad de la descomposición en el Teorema 3.1.7, implica ahora que existe una biyección $\phi : \Lambda \to \Lambda'$ tal que $\mathfrak{C}_\Sigma = \mathfrak{C}_{\phi(\Sigma)}$ para cualquier $\Sigma \in \Lambda$. Es decir, $\Sigma^* \otimes_{D_\Sigma} \Sigma \cong \phi(\Sigma)^* \otimes_{D_{\phi(\Sigma)}} \phi(\Sigma)$, como A–coanillos, para cualquier $\Sigma \in \Lambda$. Esto implica, en vista del Teorema 3.2.7, que existe un isomorfismo A–lineal $g_\Sigma : \Sigma \to \phi(\Sigma)$ tal que $D_{\phi(\Sigma)} = g_\Sigma(D_\Sigma)g_\Sigma^{-1}$. $\square$

Corolario 3.2.9. *Supongamos que $\mathbb{K}$ es un cuerpo. Sea C un $\mathbb{K}$–coálgebra, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) C es una $\mathbb{K}$–coálgebra simple cosemisimple;

(ii) Existe un $\mathbb{K}$–espacio vectorial finito-dimensional Σ y una $\mathbb{K}$–sub-álgebra de división D de álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\Sigma)$ tal que $C \cong \Sigma^* \otimes_D \Sigma$ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–coálgebras.

En particular cualquier $\mathbb{K}$–coálgebra simple cosemisimple es el dual de una $\mathbb{K}$–álgebra simple finito-dimensional.

Demostración. La equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ es una consecuencia directa del Teorema 3.2.7. Sea C una $\mathbb{K}$–coálgebra simple cosemisimple y S el único, salvo isomorfismos, C–comódulo simple por la derecha y $D = \mathrm{End}(S_C)$ la $\mathbb{K}$–álgebra de división de endomorfismos de S_C. Está claro que D es una $\mathbb{K}$–álgebra finito-dimensional y luego S es un D–espacio vectorial por la izquierda finito-dimensional. El isomorfismo canónico $C \cong S^* \otimes_D S$, implica que $C^* \cong \mathrm{End}({}_DS)$ es una $\mathbb{K}$–álgebra simple finito-dimensional. $\square$

Capítulo 4

Dualidad de Morita para Coanillos sobre anillos QF.

Introducción

Está claro que las características y las propiedades de una categoría de comódulos sobre una coálgebra sobre un cuerpo, no se conservan para el caso de una categoría de comódulos sobre un coanillo con cualquier anillo de escalares. Si consideramos coanillos sobre anillos Quasi-Frobenius (unitarios), entonces las categorías de comódulos recuperan algunas propiedades básicas de la categoría de comódulos sobre coálgebras. En este capítulo intentaremos extender los resultados de J. Gómez-Torrecillas y C. Năstăsescu que tratan la dualidad de Morita entre las categorías de comódulos sobre coálgebras y su vínculo con las coálgebras semiperfectas [54, 55], al caso de coanillos sobre anillos Quasi-Frobenius. En comparación con el caso de coálgebras sobre un anillo conmutativo Quasi-Frobenius esta extensión no se realiza de manera trivial. Uno de los mayores obstáculos es la extensión del funtor dual por la derecha (resp. por la izquierda) desde la sub-categoría plena de módulos por la derecha (resp. por la izquierda) finitamente generados a la categoría de comódulos por la izquierda (resp. por la derecha). En nuestros métodos algunas ideas vienen de [71, 54, 55, 14] y [84] y también del importante papel que juegan las sub-categorías linealmente compactas en la dualidad de Colby-Fuller como ha sido demostrado por Gómez Pardo y Guil en [49, 50, 57]. A diferencia de [55], aquí trataremos la dualidad de Colby-Fuller para dos coanillos sobre distintos anillos de base.

Durante todo este capítulo, fijamos A una $\mathbb{K}$–álgebra con 1*. Todos los A–módulos son unitarios.*

4.1. El funtor dual.

Antes de comentar nuestro objetivo de esta sección, es conveniente recordar algunas notaciones. Por hipótesis todos los módulos son unitarios. A cualquier A–módulo por la derecha M, nos referimos a $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A_A)$ como su A–módulo *dual* por la izquierda, donde la A–acción por la izquierda, viene dada, como usual, por $(af)(m) = af(m)$, para cualquier $a \in A, m \in M, f \in M^*$. Este conlleva al conocido funtor contravariante $(-)^* : \mathcal{M}_A \to {}_A\mathcal{M}$ que actúa sobre un morfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{M}_A$ por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, para cualquier $\alpha \in M^*$. Por supuesto que existe un funtor contravariante análogo ${}^*(-) : {}_A\mathcal{M} \to \mathcal{M}_A$. Nuestro primer objetivo es extender este funtor dual a los comódulos; para ello se necesitan algunas notaciones sobre los pares racionales canónicos, véase la sección 1.3, la parte de módulos racionales en el capítulo 1.

Si $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo tal que ${}_A\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{C}_A$) es un módulo localmente proyectivo, véase el Ejemplo 1.3.7, denotaremos como usual por $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C})$ (resp. $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C})$) el funtor racional asociado al par racional canónico por la derecha (resp. por la izquierda). Trabajaremos con un anillo de base A que es una $\mathbb{K}$–álgebra, entonces el diagrama de la ecuación (1.16), se convierta en el siguiente diagrama (no-conmutativo) que resume la situación de la Proposición 1.2.18 y de la observación 1.2.19, donde la flechas de puntos tienen sentido bajo la condición localmente proyectivo (véase el Ejemplo 1.3.7(b)) en el lado adecuado:

$$\begin{tikzcd}
 & & & {}_A\mathcal{M} \arrow[dl, shift left, "-\otimes_{A^{\circ}}\mathfrak{C}^*"] \arrow[dd, shift left, "\mathfrak{C}\otimes_A -"] \\
\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \arrow[rr, "(-)^*"] \arrow[dr, "\omega^l"] \arrow[dd, shift left, "U_A"] & & \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*} \arrow[ur, shift left, "U^r"] \arrow[dr, dotted, "\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}"] & \\
 & {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[ul, dotted, "\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}"] \arrow[dl, shift left, "U^l"] & & {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \arrow[ll, "{}^*(-)"] \arrow[ul, shift left, "\omega^r"] \arrow[uu, shift left, "{}_AU"] \\
\mathcal{M}_A \arrow[uu, shift left, "-\otimes_A\mathfrak{C}"] \arrow[ur, shift left, "{}^*\mathfrak{C}\otimes_{A^{\circ}}-"] & & &
\end{tikzcd}$$

Las flechas de doble sentido representan adjunciones canónica: $-\otimes_A \mathfrak{C}$ es adjunto por la izquierda de U_A, véase el apartado 1.2.8, la adjunción entre ${}^*\mathfrak{C} \otimes_{A^{\circ}} -$ y U^l es asociada a la extensión de anillos unitarios $A^{\circ} \to {}^*\mathfrak{C}$, y el funtor fiel $\omega^l : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \cong \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}) \to {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ es, como usual, adjunto por la izquierda del preradical $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}} : {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Usando esta adjunciones uno puede comprobar fácilmente lo siguiente.

Lema 4.1.1. *Supongamos que ${}_A\mathfrak{C}$ sea localmente proyectivo, y considere M un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. Entonces*

a) $M_{\mathfrak{C}}$ es finitamente generado (en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$) si y sólo si M_A es finitamente generado si y sólo si ${}_{^*\mathfrak{C}}M$ es finitamente generado.

b) Si $M_{\mathfrak{C}}$ es finitamente presentado (en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$), entonces M_A es finitamente presentado.

Demostración. Para la demostración de (a), se utiliza que un objeto X en un categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$ es finitamente generado si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ preserva uniones directas.

Si, además, $\mathcal{A}$ es localmente finitamente generada, entonces X es finitamente presentado si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ preserva límites directos [92, Chapter V, Prop. 3.4]. Como los ${}^*\mathfrak{C}$–módulos cíclicos racionales por la izquierda, forman un conjunto de generadores de la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, es fácil deducir (b). □

Hay una transformación natural $\Phi : id_{\mathcal{M}_A} \to {}^*(-) \circ (-)^*$ definida, para cualquier A–módulo por la derecha M, por la evaluación

$$\Phi_M : M \to {}^*(M^*),\ m \mapsto [x \mapsto x(m)]$$

Análogamente, hay una transformación natural $\Phi' : id_{{}_A\mathcal{M}} \to (-)^* \circ {}^*(-)$ para A–módulos por la izquierda. Supongamos que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son localmente proyectivos. Para cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M, sea $j : \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*) \to M^*$ la inclusión y define $\sigma_M : M \to {}^*(\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*))$ como ${}^*j \circ \Phi_M$. Se define, de manera similar, $\sigma'_N : N \to (\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*N))^*$, para cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda N.

Proposición 4.1.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo tal que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos localmente proyectivos. Sea M (resp. N) un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha (resp. por la izquierda).*

a) Si M_A (resp. ${}_AN$) es finitamente presentado, entonces el dual M^* (resp. ${}^*N$) es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda (resp. por la derecha) y Φ_M es ${}^*\mathfrak{C}$–lineal por la izquierda (resp. Φ'_N es $\mathfrak{C}^*$–lineal por la derecha).

b) Supongamos que A es noetheriano por la derecha y por la izquierda, entonces σ_M es ${}^*\mathfrak{C}$–lineal por la izquierda y σ'_N es $\mathfrak{C}^*$–lineal por la derecha.

c) Supongamos que A es auto-inyectivo por la izquierda y por la derecha, entonces Φ_M (resp. Φ'_N) es un ${}^*\mathfrak{C}$–isomorfismo (resp. un $\mathfrak{C}^*$–isomorfismo) natural, para cualquier $M_{\mathfrak{C}}$ (resp. ${}_{\mathfrak{C}}N$) tal que M_A (resp. ${}_AN$) es finitamente presentado.

d) Si A es noetheriano por la izquierda y por la derecha, entonces se tiene un par de funtores

$$(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \leftrightarrows {}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M} : {}^*(-),$$

donde $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ (resp. ${}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$) denotan la categoría de todos los $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha (resp. por la izquierda) finitamente generados. Además, se tiene trasformaciones naturales $\Phi : id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f} \to {}^*(-) \circ (-)^*$ y $\Phi' : id_{{}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}} \to (-)^* \circ {}^*(-)$.

Demostración. (a) Si M_A es finitamente presentado, como $\mathfrak{C}_A$ es plano, entonces se tiene el isomorfismo natural

$$\begin{array}{rcl} \eta_M : \mathfrak{C} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_A, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M_A, \mathfrak{C}) \\ c \otimes_A x & \longmapsto & [m \mapsto cx(m)]. \end{array}$$

Fije $x \in M^*$, y considere un $\sigma \in \mathfrak{C}^*$ arbitrario, entonces $(x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M \in \mathrm{Hom}_A(M_A, \mathfrak{C})$. Por lo tanto, existe un conjunto finito $\{(c_i, x_i)\}$ de $\mathfrak{C} \times M^*$ tal que $\eta_M(\sum_i c_i \otimes_A x_i)(m) =$

$(x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M(m) = \sum_i c_i x_i(m)$, para cualquier $m \in M$. Luego, $x.\sigma = \sigma \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M = \sum_i \sigma \circ (c_i \otimes_A x_i)$, así $x.\sigma(m) = \sum_i \sigma(c_i) x_i(m)$, para todo $m \in M$; es decir $x.\sigma = \sum_i \sigma(c_i).x_i$. Lo que implica que $\{(c_i, x_i)\}$ es un conjunto de parámetros racionales por x. Según el Teorema 1.3.19, $M^* \in \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(\mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*}) \cong {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Ahora, sea $m \in M$, $\delta \in {}^*\mathfrak{C}$, y $x \in M^*$ con el conjunto de parámetros racionales $\{(c_i, x_i)\}$. Según la Proposición 1.2.18(b)

$$\begin{aligned}
(\delta\Phi_M(m))(x) &= \sum_i \delta(c_i \Phi_M(m)(x_i)) \quad (\lambda_{M^*}(x) = \sum_i c_i \otimes_A x_i) \\
&= \sum_i \delta(c_i x_i(m)) \\
&= \delta \circ (x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M(m) \quad ((x \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \rho_M(m) = \sum_i c_i x_i(m)) \\
&= x \circ (M \otimes_A \delta) \circ \rho_M(m) \quad (\delta \text{ es } A - \text{lineal por la izquierda}) \\
&= x(\delta m) \\
&= \Phi_M(\delta m)(x),
\end{aligned}$$

lo que implica que Φ_M es ${}^*\mathfrak{C}$–lineal. La $\mathfrak{C}^*$–linealidad por la derecha de Φ'_N se obtiene de la misma manera.
(b) Por hipótesis, cada elemento $m \in M$ es contenido en un $\mathfrak{C}$–subcomódulo L de M tal que L_A es finitamente presentado. Según el apartado (a), $\Phi_L : L \to {}^*(L^*)$ es un morfismo ${}^*\mathfrak{C}$–lineal por la izquierda. Se tiene pues la ${}^*\mathfrak{C}$–linealidad por la izquierda de σ_M, usando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\Phi_L"] \arrow[d, "i"'] & {}^*(L^*) \arrow[d, "{}^*\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(i^*)"] \\
M \arrow[r, "\sigma_M"] & {}^*(\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*)),
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión. De manera similar demostraremos que σ'_N es $\mathfrak{C}^*$–lineal por la derecha.
(c) Es consecuencia de (a) y (b) en conjugación con [92, p. 47].
(d) Sea $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ entonces, según el Lema 4.1.1, M_A es finitamente generado y, como A es noetheriano, M_A es finitamente presentado. Según (b), M^* un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda que es finitamente presentado como A–módulo por la izquierda, porque A es noetheriano. Por lo tanto, $M^* \in {}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$, y hemos definido, con la ayuda de la Proposición 1.2.18, el funtor $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \to {}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$. El funtor ${}^*(-)$ se obtiene de manera similar. □

Observación 4.1.3. Recuerde de la Observación 1.2.20(2), que si $M_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo tal que M_A es finitamente presentado y $\mathfrak{C}_A$ es plano, entonces la composición $M^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, \mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{Hom}_A(M, \mathfrak{C}) \cong \mathfrak{C} \otimes_A M^*$ induce una estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda sobre M^* como en el caso de coálgebras [35], [14]. Esta estructura coincide con la que viene dada en la Proposición 4.1.2.(b).

4.2. Coanillos sobre anillos Quasi-Frobenius.

En esta sección analizaremos el comportamiento de los coanillos y sus comódulos considerando un anillo de base Quasi-Frobenius. Ofreceremos las propiedades básicas; las que utilizaremos más en adelante.

Vamos a adoptar las siguientes notaciones. Designaremos por $\mathcal{A}_f$ la subcategoría plena de una categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$ cuyos objetos son los finitamente generados. Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor entre dos categorías de Grothendieck, entonces la notación $F_f : \mathcal{A}_f \to \mathcal{B}_f$ se refiere al funtor restricción, siempre y cuando F preserva objetos finitamente generados. Algunas variaciones en esta notación (como $\mathcal{A}^f, {}^f\mathcal{A}, {}_f\mathcal{A}$) serán requerida por razones estéticas. Así, la categoría de todos los módulos por la derecha finitamente generados sobre A es $\mathcal{M}_A^f$, mientras la categoría de A–módulos por la izquierda finitamente generados es ${}_A^f\mathcal{M}$. Recuerde que un anillo A es *Quasi-Frobenius* (o QF, por simplificar) si el funtor $(-)^* : \mathcal{M}_A^f \leftrightarrows {}_A^f\mathcal{M} : {}^*(-)$ establece una equivalencia de categorías contravariante. Los anillos Quasi-Frobenius han sido caracterizados de varias maneras, por ejemplo, son aquellos anillos artinianos auto-inyectivos. En particular, cualquier módulo plano sobre un anillo QF es un módulo proyectivo. Consideramos M un comódulo sobre un coanillo, escribimos $E(M)$ para denotar su cobertura inyectiva y $\mathrm{Soc}(M)$ para su zócalo. Notemos que $E(M)$ existe siempre y cuando la categoría de comódulos es una categoría de Grothendieck.

Recuerde de [46, page 356] que una categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$ se dice que es *localmente finita* si $\mathcal{A}$ tiene un conjunto de generadores constituido de objetos de longitud finita.

Proposición 4.2.1. *Sea A un anillo QF, y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo tal que ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo proyectivo. Entonces*

a) $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo inyectivo y cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha se inyecta en un coproducto copias de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$.

b) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría localmente finita, en particular $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}} = \oplus_{\omega\in\Omega} E(S_\omega)^{(n_\omega)}$, donde $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es el conjunto de todos los representantes de $\mathfrak{C}$–comódulos simples por la derecha, y los n_ω son números cardinales.

Demostración. (a) El anillo de base A es auto-inyectivo por la derecha y todos los módulos por la derecha se inyectan en módulos libres (según la caracterización de Faith-Walker de anillos QF). Estas propiedades traspasan a $\mathfrak{C}$ porque el funtor exacto $- \otimes_A \mathfrak{C} : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ preserva sumas directas y tiene un adjunto exacto por la izquierda.
(b) Es consecuencia de (a) y del Lema 4.1.1. □

La siguiente consecuencia de la Proposición 4.1.2 es crucial para el desarrollo de la teoría.

Teorema 4.2.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tal que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Se tiene pues una equivalencia de categorías contravariante*

$$(-)^* : \mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}_f^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} : {}^*(-)$$

La siguiente proposición ilustra el uso del Teorema 4.2.2 en conjugación con la propiedad de la categoría de comódulos localmente finita dada en la Proposición 4.2.1.

Proposición 4.2.3. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tal que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Considere $M \in \mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ un comódulo finitamente generado. Entonces*

a) Si $M_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo inyectivo, entonces $M^*_{\mathfrak{C}^*}$ es un módulo proyectivo.

b) $M_{\mathfrak{C}}$ es proyectivo si y sólo si ${}_{\mathfrak{C}}M^*$ es inyectivo.

c) $M_{\mathfrak{C}}$ es inyectivo si y sólo si ${}_{\mathfrak{C}}M^*$ es proyectivo.

d) $M_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo proyectivo si y sólo si ${}_{^*\mathfrak{C}}M$ es un módulo proyectivo.

Demostración. (a) Utilizaremos el argumento de la demostración de [35, Proposition 4]. Si M es un $\mathfrak{C}$–comódulo inyectivo por la derecha entonces, según la Proposición 4.2.1, existe un monomorfismo de comódulos por la derecha que escinde $M \hookrightarrow \mathfrak{C}^{(n)}$, para un cierto indice finito n. Aplicando el funtor $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*}$ dado en la Proposición 1.2.18, se obtiene un epimorfismo de $\mathfrak{C}^*$–módulos por la derecha que escinde también $\mathfrak{C}^{*(n)} \twoheadrightarrow M^*$, lo que implica que M^* es un $\mathfrak{C}^*$–módulo proyectivo.
(b) Si $M_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo proyectivo, entonces, según el Teorema 4.2.2, M^* es L–inyectivo para cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda finitamente generado L. Luego, según [6, Proposition 16.13.(2)], M^* es $(\oplus L_i)$–inyectivo para cualquier familia $\{L_i\}_i$ de $\mathfrak{C}$–comódulos por la izquierda finitamente generados. Por lo tanto, según [6, 16.13.(1)] y la Proposición 4.2.1.(b), M^* es un $\mathfrak{C}$–comódulo inyectivo por la izquierda. Recíprocamente, supongamos que M^* es un comódulo inyectivo. Según la versión para un comódulo por la izquierda del apartado (a), se tiene que $M \cong {}^*(M^*)$ es un ${}^*\mathfrak{C}$–módulo proyectivo por la izquierda, y, según el isomorfismo de categorías $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, M es ahora un $\mathfrak{C}$–comódulo proyectivo por la derecha.
(c) Ponte $N = {}_{\mathfrak{C}}M^*$, y aplica la versión para comódulos por la izquierda de la parte (b) para obtener que ${}_{\mathfrak{C}}N$ es proyectivo si y sólo si ${}^*N_{\mathfrak{C}}$ es inyectivo. Finalmente, aplica la dualidad citada en el Teorema 4.2.2.
(d) La demostración de (b) funciona aquí para comprobar que si $M_{\mathfrak{C}}$ es proyectivo entonces ${}_{^*\mathfrak{C}}M$ es proyectivo. □

4.3. Coanillos semiperfectos sobre anillos QF.

Introducimos la noción de un coanillo semiperfecto (por la derecha), desde el punto de vista de categorías de Grothendieck, nos inspiramos de la definición de [59, 60, 61]. Especialmente, consideraremos coanillos semiperfectos como generalización de coálgebras semiperfectas sobre un cuerpo. La mayoría de los resultados de coálgebras semiperfectas pueden ser extendidos al caso de coanillos, siempre y cuando, el anillo de escalares sea QF. Siendo así, hay que notar que las demostraciones de coálgebras sobre cuerpos se traspasan directamente al caso de coálgebras sobre un anillo conmutativo QF, pero quisiéramos hacer notar que no es el caso de coanillos sobre anillos QF. Al menos, el acercamiento ofrecido en [14, Chapter 1] y [84] para las coálgebras sobre anillos conmutativo QF, nos ayudará a rebasar algunas dificultades técnicas en esta sección. En el proximo capítulo, regresaremos con más detalles a los coanillos semiperfectos sobre cualquier anillo. Finalmente, notemos que algunos resultados de esta sección han sido comprobados también en [26].

Un coanillo se dice que es *semiperfecto por la derecha* si su categoría de comódulos es una categoría de Grothendieck, y cada comódulo por la derecha finitamente generado posee una cobertura proyectiva. La clase de coanillos trivialmente semiperfecta por la derecha y por la izquierda es la clase de coanillos cosemisimples, desarrollados en el capítulo 4 y originalmente en [42], [41], [53].

Una *cobertura proyectiva* de un objeto X en una categoría Grothendieck $\mathcal{A}$ es un epimorfismo $p : P \to X$ en $\mathcal{A}$ tal que P es un objeto proyectivo y $\mathbf{Ker}(p)$ es un sub-objeto superfluo ("superfluous or small") de P (véase, e.g. [92, Chapter V, page 120]).

Proposición 4.3.1. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tales que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha finitamente generado M tiene una cobertura proyectiva en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ si y sólo si ${}_AE({}_{\mathfrak{C}}M^*)$ es finitamente generado.*

Demostración. Supongamos que $P \twoheadrightarrow M$ es una cobertura proyectiva de M en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. Según la Proposición 4.2.3.(d), $P \twoheadrightarrow M$ es una cobertura proyectiva de M en ${}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$, ya que el retículo de los sub-objetos de ${}_{^*\mathfrak{C}}P$ y de $P_{\mathfrak{C}}$ son iguales. Entonces P es un ${}^*\mathfrak{C}$–módulo por la izquierda finitamente generado y, según el Lema 4.1.1, es finitamente generado como A–módulo por la derecha. Según el Teorema 4.2.2 y la Proposición 4.2.3.(b), se tiene que la aplicación dual $M^* \hookrightarrow P^*$ da la cobertura inyectiva de M^* en ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Luego, se puede escribir $E(M^*) = P^*$, que es finitamente generado como A–módulo por la izquierda. Recíprocamente, si ${}_AE(M^*)$ es finitamente generado, entonces, según el Teorema 4.2.2 y la Proposición 4.2.3.(d), la aplicación dual ${}^*(E(M^*)) \twoheadrightarrow {}^*(M^*) \cong M$ es un cobertura proyectiva. $\square$

El siguiente teorema ha sido primero demostrado para coálgebras por Lin en [71].

Teorema 4.3.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tales que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *Cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la derecha tiene cobertura proyectiva;*

(ii) *cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha finitamente generado tiene cobertura proyectiva (i.e. $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha);*

(iii) *${}_AE(N)$ es finitamente generado para cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda finitamente generado N;*

(iv) *${}_AE(S)$ es finitamente generado para cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la izquierda S.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (iv)$ Sea S un $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la izquierda. Según el Teorema 4.2.2 sabemos que ${}^*S$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la derecha. Las hipótesis, nos indican que ${}^*S$ tiene una cobertura proyectiva lo que implica, según la Proposición 4.3.1, que ${}_AE(({}^*S)^*)$ es finitamente generado. Luego, ${}_AE(S)$ es finitamente generado, porque $S \cong ({}^*S)^*$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$ Según la Proposición 4.2.1, $E(N) = E(\mathrm{Soc}(N))$ y, como N es finitamente generado, $\mathrm{Soc}(N) = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$, por unos ciertos comódulos simples por la izquierda $S_1, \ldots, S_r$. Por lo tanto, $E(N) = E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_r)$ y, en particular, es finitamente generado como A–módulo por la izquierda.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Si M es $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, entonces M^* es un $\mathfrak{C}$–comódulo finitamente generado por la izquierda que, por hipótesis, tiene una cobertura inyectiva finitamente generada como A–módulo. Según la Proposición 4.3.1, M posee un cobertura proyectiva.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Esta implicación es obvia. □

En el siguiente paso vamos a caracterizar los coanillos semiperfectos (sobre un anillo QF) en términos de densidad. La noción de densidad la que vamos a utilizar es análoga a la usual considerada en coálgebras sobre cuerpos. Sea M un A–módulo por la derecha sobre un anillo QF A, y considere el par

$$\langle -, - \rangle : M \times M^* \to A \qquad (\langle m, \varphi \rangle = \varphi(m)).$$

Para cualquier A–submódulo por la derecha U de M, define $U^\perp = \{\varphi \in M^* : \langle U, \varphi \rangle = 0\}$, que es un A–submódulo por la izquierda de M^*. En efecto, la aplicación $(M/U)^* \to U^\perp$ que envía $\alpha \in (M/U)^*$ a $\alpha \circ \pi$, donde $\pi : M \to M/U$ es la proyección canónica, es un isomorfismo de A–módulos por la izquierda. Una definición análoga de $V^\perp$ existe para los A–submódulos por la izquierda V de M^*. Tal submódulo V de M^* se dice que es *denso* si $V^\perp = 0$. El efecto de que A_A sea inyectivo cogenerador en $\mathcal{M}_A$ garantiza que V es denso en M^* si y sólo si $V^{\perp\perp} = M^*$.

La versión para coálgebras del siguiente Lema 4.3.3 es [71, Lemma 7]. La primera aserción de la Proposición 4.3.4 ha sido comprobada para coálgebras en [101, 6.1], mientras la segunda aparece en [84, Lemma 1.8].

Lema 4.3.3. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo sobre un anillo QF tal que $\mathfrak{C}_A$ es un módulo proyectivo. Sea $f : M \hookrightarrow N$ un monomorfismo de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha. Si $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(N^*)$ es denso en N^*, entonces $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*)$ es denso en M^*.*

Demostración. Esto es una consecuencia del efecto de que $f^*(\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(N^*)) \subseteq \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*)$. □

Proposición 4.3.4. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tales que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Entonces*

(a) $\mathrm{Soc}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}) = \mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C})$ *es esencial en $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$, y el radical de Jacobson de $\mathfrak{C}^*$ es*

$$\mathrm{Jac}(\mathfrak{C}^*) = (\mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C}))^\perp$$

(b) Si S es un comódulo simple por la derecha, entonces $E(S)^*$ es un $\mathfrak{C}^*$–módulo cíclico local por la derecha con $S^\perp$ el único $\mathfrak{C}^*$–submódulo maximal por la derecha.

Demostración. (a) El zócalo $\mathrm{Soc}(\mathfrak{C}_\mathfrak{C}) = \mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C})$ es esencial en $\mathfrak{C}_\mathfrak{C}$ viene de la Proposición 4.2.1. Según la Proposición 4.2.1.(a), ${}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ es inyectivo en $\mathcal{M}^\mathfrak{C}$. Esto implica que el radical de Jacobson de $\mathrm{End}(\mathfrak{C}_\mathfrak{C})$ consiste en los morfismos $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ con un núcleo esencial, que, en el presente caso, es equivalente a $f(\mathrm{Soc}(\mathfrak{C}_\mathfrak{C})) = 0$. El isomorfismo de anillos $\mathfrak{C}^* \cong \mathrm{End}(\mathfrak{C}_\mathfrak{C})^{\mathrm{o}}$ nos da la descripción deseada de $\mathrm{Jac}(\mathfrak{C}^*)$.
(b) Considere $S_\mathfrak{C}$ un comódulo simple, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & E(S) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & E(S)/S \arrow[d, hook] \\ \mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C}) \arrow[r, hook] & \mathfrak{C} \arrow[r, two heads] & \mathfrak{C}/\mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C}) \end{tikzcd}\ .$$

Dualizando se tiene

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C}))^\perp \cong (\mathfrak{C}/\mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C}))^* \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{C}^* \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Soc}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathfrak{C})^* \arrow[d, two heads] \\ S^\perp \cong (E(S)/S)^* \arrow[r, hook] & E(S)^* \arrow[r, two heads] & S^*, \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en $\mathcal{M}_{\mathfrak{C}^*}$. Claramente, $E(S)^*$ es cíclico, y la exactitud del diagrama atrae fácilmente $S^\perp = E(S)^*\mathrm{Jac}(\mathfrak{C}^*)$. Por lo tanto, $S^\perp$ es superfluo en $E(S)^*$, de allí $S^\perp \subseteq \mathrm{Jac}(E(S)^*)$ (el radical de $E(S)^*_{\mathfrak{C}^*}$). Según el Teorema 4.2.2, S^* es simple lo que implica, en vista de la segunda fila exacta de nuestro diagrama, que $S^\perp$ es un $\mathfrak{C}^*$–submódulo maximal por la derecha de $E(S)^*$, de allí $\mathrm{Jac}(E(S)^*) = S^\perp$. □

Estamos preparados para demostrar el resultado principal de esta sección. Tal resultado generaliza, en conjugación con el Teorema 4.4.2 de la siguiente sección, el resultado de Lin [71, Theorem 10].

Teorema 4.3.5. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tal que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) El coanillo $\mathfrak{C}$ es semiperfecto por la derecha;

(ii) $\mathrm{Rac}^l_\mathfrak{C}({}_{^*\mathfrak{C}}{}^*\mathfrak{C})$ es denso en ${}^*\mathfrak{C}$;

(iii) $\mathrm{Rac}^l_\mathfrak{C}({}^*E(S))$ es denso en ${}^*E(S)$ para cada $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la izquierda S.

Demostración. $(i) \Rightarrow (iii)$ Si S es un $\mathfrak{C}$–comódulo simple por la izquierda, entonces, según el Teorema 4.3.2, $E(S)$ es un A–módulo finitamente generado por la izquierda. Según la Proposición 4.1.2, ${}^*E(S)$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. Luego, $\mathrm{Rac}^l_\mathfrak{C}({}^*E(S)) = {}^*E(S)$ y obviamente $\mathrm{Rac}^l_\mathfrak{C}({}^*E(S))$ es denso en ${}^*E(S)$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Según la Proposición 4.2.1, ${}_\mathfrak{C}\mathfrak{C} = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$ para un conjunto adecuado S_i de

$\mathfrak{C}$–comódulos simples por la izquierda. Claramente, $\bigoplus_{i \in I} {}^*E(S_i)$ es denso en $\prod_{i \in I} {}^*E(S_i) = {}^*\mathfrak{C}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*E(S_i))$ es denso en ${}^*\mathfrak{C}$, y así es $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}_{{}^*\mathfrak{C}}{}^*\mathfrak{C})$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es consecuencia del Lema 4.3.3 (la versión simétrica de), dado que cualquier comódulo por la izquierda de forma $E(S)$ para un simple S se injecta en $\mathfrak{C}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea S un $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda, y considere su cobertura inyectiva $E(S) \in {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$. Según la versión para comódulos por la izquierda de la Proposición 4.3.4.(b), ${}^*E(S)$ es un ${}^*\mathfrak{C}$–módulo cíclico local por la izquierda con un submódulo maximal $S^{\perp}$. Como $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*E(S))$ es denso en ${}^*E(S)$, se tiene que $S^{\perp} \subsetneq S^{\perp} + \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*E(S))$; luego $S^{\perp} + \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*E(S)) = {}^*E(S)$, dado que $S^{\perp}$ es maximal. Finalmente, $S^{\perp}$ es superfluo en ${}^*E(S)$, de allí $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*E(S)) = {}^*E(S)$. Por lo tanto, ${}^*E(S)$ es ${}^*\mathfrak{C}$–módulo racional y finitamente generado. Según el Teorema 4.2.2, $E(S) \cong ({}^*E(S))^*$ es finitamente generado. □

4.4. Dualidad para coanillos semiperfectos sobre anillos QF.

Esta sección contiene la extensión de la teoría de dualidad desarrollada en [54, 55] para coálgebras semiperfectas sobre cuerpos al caso de coanillos semiperfectos con anillos de base QF. Es decir, que vamos a trabajar, en esta sección, con coanillos sobre anillos QF.

La *dualidad* es una equivalencia contravariante entre dos categorías. El Teorema 4.2.2 indica que el funtor dual por la derecha $(-)^*$ y el funtor dual por la izquierda ${}^*(-)$ establecen un dualidad entre las categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ y ${}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$. Esta noción de dualidad es bastante restrictiva incluso desde el punto de vista de teoría de módulos, donde el concepto de la dualidad de Morita se ha demostrado fundamental. En lo que sigue, vamos a recordar una generalización de la dualidad de Morita a categorías de Grothendieck realizado por R. R. Colby y K. R. Fuller [32]. Considere funtores contravariantes entre dos categorías de Grothendieck

$$H : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{A}' : H',$$

junto con transformaciones naturales $\tau : id_{\mathcal{A}} \to H' \circ H$ y $\tau' : id_{\mathcal{A}'} \to H \circ H'$, que satisfacen las condiciones $H(\tau_X) \circ \tau'_{H(X)} = H(X)$ y $H'(\tau'_{X'}) \circ \tau_{H'(X')} = H'(X')$ para $X \in \mathcal{A}$ y $X' \in \mathcal{A}'$. Esta situación de le llama *par adjunto por la derecha*. Además, cada par de trasformaciones naturales τ, τ' que satisfacen estas condiciones determinan un isomorfismo natural

$$\begin{array}{rcl} \eta_{X,X'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, H'(X')) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(X', H(X)) \,. \\ \alpha & \longmapsto & H(\alpha) \circ \tau'_{X'} \\ H'(\beta) \circ \tau_X & \longleftarrow\!\shortmid & \beta \end{array}$$

Recíprocamente, dando cualquier isomorfismo natural

$$\eta_{X,X'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, H'(X')) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(X', H(X)),$$

entonces $\tau_X = \eta^{-1}_{X,H(X)}(H(X))$ y $\tau'_{X'} = \eta_{H'(X'),X'}(H'(X'))$ satisfacen las condiciones de antes. Llamaremos a un objeto X de $\mathcal{A}$ (resp. X' de $\mathcal{A}'$) *reflexivo* en caso τ_X (resp. $\tau'_{X'}$)

sea un isomorfismo. Si denotamos por $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}'_0$ las sub-categorías plenas de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{A}'$ de todos los objetos reflexivos, entonces H y H' forman una dualidad entre ellas. Usando la terminología de [49] diríamos que el par adjunto por la derecha de funtores es un dualidad de *Colby-Fuller* entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ si y sólo si los funtores H y H' son exactos y $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}'_0$ son cerradas bajo sub-objetos, objetos cocientes, y sumas directas finitas (i.e. que son *finitamente cerradas*) y contienen un conjunto de generadores de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ (i.e. que son *generadoras*).

Ahora, regresaremos a las categorías de comódulos. Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tal que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. La dualidad ofrecida por el Teorema 4.2.2 es una dualidad de Morita entre $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ en el sentido de [9], dado que las sub-categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ y ${}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$ son generadoras. De acuerdo con [50, Theorem 2.1], los funtores $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \rightleftarrows {}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M} : {}^*(-)$ puedan ser extendidos a un par adjunto por la derecha de funtores contravariantes $D : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \rightleftarrows {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} : D'$ de manera única. Para nuestro propósito vamos a necesitar la siguiente descripción de esta extensión. Para cualquier $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ se tiene, por la Proposición 4.1.2, una aplicación ${}^*\mathfrak{C}$–lineal por la izquierda $\sigma_M : M \to {}^*(\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*))$. Como M es racional, deducimos que la imagen de σ_M está incluida en $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*(\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(M^*)))$, entonces se obtiene una transformación natural

$$\sigma : id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}} \to \mathrm{Rat}^l_{\mathfrak{C}} \circ {}^*(-) \circ \mathrm{Rat}^r_{\mathfrak{C}} \circ (-)^*.$$

Análogamente, se obtiene una trasformación natural

$$\sigma' : id_{{}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}} \to \mathrm{Rat}^r_{\mathfrak{C}} \circ (-)^* \circ \mathrm{Rat}^l_{\mathfrak{C}} \circ {}^*(-).$$

Los funtores

$$\mathrm{Rat}^r_{\mathfrak{C}} \circ (-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \rightleftarrows {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} : \mathrm{Rat}^l_{\mathfrak{C}} \circ {}^*(-) \tag{4.1}$$

y las transformaciones naturales σ y σ', antes mencionado, ofrecen el par adjunto por la derecha extendiendo la dualidad $(-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \rightleftarrows {}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M} : {}^*(-)$.

En [55], los autores caracterizan coálgebras semiperfectas por la derecha por la propiedad de compacidad lineal de la sub-categoría plena de comódulos por la derecha finito-dimensionales. Vamos a extender esta caracterización al caso de coanillos sobre anillos QF. Recuerde, de [48], que un objeto X de categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$, se le llama *linealmente compacto* cuando para cada sistema inverso de epimorfismos $\{p_i : X \twoheadrightarrow X_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{A}$, el morfismo inducido $\varprojlim p_i : X \to \varprojlim X_i$ es también un epimorfismo. Una sub-categoría plena $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ se dice que es *linealmente compacta* si para cualquier sistema inverso $\{S_i \to A_i\}$ de epimorfismos, con $S_i \in \mathcal{S}$, el límite proyectivo $\varprojlim S_i \to \varprojlim A_i$ es un epimorfismo. Notemos que si $\mathcal{S}$ es linealmente compacta, entonces cada uno de sus objetos es también linealmente compacto; pero el contrario es falso (véase [49, Example 4]).

Lema 4.4.1. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tal que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es semiperfecto por la derecha, y sea $P \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ un objeto proyectivo. Entonces ${}_{^*\mathfrak{C}}P$ es un módulo proyectivo.*

Demostración. Según la propiedad localmente finita para $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha, existe un epimorfismo de comódulos por la derecha

$$\underset{i\in I}{\oplus} M_i \twoheadrightarrow P$$

ó, equivalentemente, de ${}^*\mathfrak{C}$–módulos por la izquierda, donde $\{M_i |\, i \in I\}$ es una familia de ${}^*\mathfrak{C}$–módulos por la izquierda finitamente generados. Ahora considere el siguiente epimorfismo

$$\underset{i\in I}{\oplus} P_i \twoheadrightarrow P, \tag{4.2}$$

donde cada $P_i \to M_i$ es una cobertura proyectiva de M_i, y P_i es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha finitamente generado. Como $P_{\mathfrak{C}}$ es proyectivo, (4.2) escinde entonces $\oplus_{i\in I} P_i = P \oplus P'$, para un cierto $P'_{\mathfrak{C}}$. Según la Proposición 4.2.3, cada P_i un ${}^*\mathfrak{C}$–módulo proyectivo por la izquierda, luego ${}_{^*\mathfrak{C}}P$ es un módulo proyectivo. □

El siguiente resultado extiende la caracterización de coálgebras semiperfectas sobre cuerpos o sobre un anillo conmutativo QF [71, Theorem 10], [54, Theorem 3.3], [55, Theorem 1.5], [101, 6.3] al caso de coanillos sobre anillos QF. La categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ se dice que *tiene suficientes proyectivos* si tiene un generador proyectivo.

Teorema 4.4.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un coanillo sobre un anillo QF A tales que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *$\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha;*

(ii) *la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ tiene suficientes proyectivos;*

(iii) *$\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ es un sub-categoría linealmente compacta de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$;*

(iv) *el funtor $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}} \circ {}^*(-) : {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ es exacto;*

(v) *$\sigma'_M : M \to (\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*M))^*$ es un monomorphism para cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda M;*

(vi) *$\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*M)$ es denso en ${}^*M$ para cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M;*

(vii) *el funtor $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}} : {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M} \to {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ es exacto.*

Por lo tanto, si $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha, entonces $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M})$ es una sub-categoría localizante de ${}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$.

Demostración. *(i)* ⇒ *(ii)* Como $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es localmente finita, entonces el coproducto del conjunto completo de las coberturas proyectivas de los (representantes de) $\mathfrak{C}$–comódulos simples por la derecha es un generador proyectivo.
(ii) ⇒ *(iii)* Sea U un generador proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, y $T = \mathrm{End}(U_{\mathfrak{C}})$ su anillo de endomorfismos. El funtor fielmente pleno y exacto $F = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(U, -) : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_T$ tiene un adjunto por la izquierda $G = - \otimes_T U : \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, sea $\eta : id_{\mathcal{M}_T} \to FG$ su unidad y $\nu : GF \to id_{\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}}$ su

counidad. Comprobemos primero que F preserva los objetos linealmente compactos. Dando un comódulo linealmente compacto M y un sistema inverso de epimorfismos $\{F(M) \to N_i\}$ en $\mathcal{M}_T$, se tiene un sistema inverso de epimorfismos $\{GF(M) \to G(N_i)\}$ en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, y un nuevo sistema inverso de epimorfismos de módulos $\{FGF(M) \to FG(N_i)\}$. Por lo tanto, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FGF(M) \arrow[r] & FG(N_i) \\ F(M) \arrow[u, "\eta_{F(M)}"] \arrow[r] & N_i, \arrow[u, "\eta_{N_i}"'] \end{tikzcd}$$

que nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FGF(M) \arrow[r] & \varprojlim FG(N_i) \cong F(\varprojlim G(N_i)) \\ F(M) \arrow[u, "\eta_{F(M)}"] \arrow[r] & \varprojlim N_i \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Ahora, ν_M nos da un isomorfismo $GF(M) \cong M$ y $\eta_{F(M)} = F(\nu_M^{-1})$ es también un isomorfismo. Por lo tanto, la flecha vertical de la izquierda en (4.3) es un isomorfismo y la flecha de abajo es un epimorfismo (porque $GF(M) \cong M$ es linealmente compacto y F es exacto). Se tiene pues que $F(M) \to \varprojlim N_i$ es un epimorfismo y entonces $F(M)$ es linealmente compacto. Sea $\mathcal{C}$ la imagen bajo el funtor F de la sub-categoría plena de $\mathcal{M}_T$ consistente de módulos linealmente compactos. Según [62, Theorem 7.1] (véase también [49, Lemma 6]), $\mathcal{C}$ es una subcategoría linealmente compacta de $\mathcal{M}_T$. Ahora, dado un sistema inverso de epimorfismos $\{M_i \to L_i\}$ con $M_i \in \mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ se tiene un sistema inverso de epimorfismos de módulos $\{F(M_i) \to F(L_i)\}$. Según [50, Proposition 3.1] y Teorema 4.2.2, los M_i son linealmente compactos y luego los $F(M_i)$ son objetos de $\mathcal{C}$. Se tiene pues que $F(\varprojlim M_i) \cong \varprojlim F(M_i) \to \varprojlim F(L_i) \cong F(\varprojlim L_i)$ es un epimorfismo. Como F es fiel, se deduce que $\varprojlim M_i \to \varprojlim L_i$ es un epimorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ es una sub-categoría linealmente compacta de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$.
(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* La demostración de [55, Theorem 1.5] realizada para coálgebras funciona en el contexto de coanillos sobre anillos QF.
(iv) $\Rightarrow$ *(v)* Cualquier $m \in M$ es contenido en un $\mathfrak{C}$–subcomódulo N de M tal que ${}_AN$ es finitamente presentado. Se tiene pues el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi'_N"] \arrow[d, "i"] & ({}^*N)^* \arrow[d, "(\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*i))^*"] \\ M \arrow[r, "\sigma'_M"] & (\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*M))^*, \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

donde i es la inclusión. La inyectividad de σ'_M es fácilmente deducida de este diagrama, sabiendo que $(\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*i))^*$ y Φ'_N son monomorfismos.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Es cierto porque $\mathbf{Ker}(\sigma'_M) = \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}^*M)^{\perp}$.
$(vi) \Rightarrow (i)$ Se aplica el Teorema 4.3.5.
$(i) \Rightarrow (vii)$ Viene del Lema 4.4.1, sabiendo que $\omega^l : \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}) \to {}_{^*\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ es adjunto por la izquierda de $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}$.
$(vii) \Rightarrow (iv)$ Está clara, dado que ${}^*(-)$ es un funtor exacto. □

Observación 4.4.3. Ejemplos de coanillos semiperfectos pueden ser construidos como sigue: Sea V_A un módulo finitamente generado y proyectivo y sea $T \subseteq \mathrm{End}(V_A)$ un sub-anillo semiperfecto tal que ${}_TV$ es fielmente plano. Considere el A–coanillo de comatrices finitas $V^* \otimes_T V$. Según el Teorema 2.3.10, la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{V^* \otimes_T V}$ es equivalente a $\mathcal{M}_T$ y luego $V^* \otimes_T V$ es un A–coanillo semiperfecto por la derecha con un conjunto de representantes de comódulos simples por la derecha finito (aquí ninguna suposición esta puesta sobre el anillo de base A). En efecto, si A es un anillo QF, cualquier A–coanillo $\mathfrak{C}$ semiperfecto por la derecha y que posee un conjunto finito de representantes de comódulos simples por la derecha tal que ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo proyectivo, es un A–coanillo de comatrices de la forma arriba descrita. Para ver esto, considere un conjunto finito $S_1, \ldots, S_n$ de representantes de todos los $\mathfrak{C}$–comódulos simples por la derecha. Entonces, un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es $V = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, donde P_i es la cobertura proyectiva de S_i. Sea $T = \mathrm{End}(V_{\mathfrak{C}})$, que es un sub-anillo semiperfecto del anillo de endomorfismos $\mathrm{End}(V_A)$. Según el Teorema 2.3.2, V_A es finitamente generado y proyectivo, y ${}_TV$ es fielmente plano. Además, existe un isomorfismo canónico de A–coanillos $\mathsf{can} : V^* \otimes_T V \cong \mathfrak{C}$ y la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es equivalente a $\mathcal{M}_T$.

Ahora estamos preparados para dar la caracterización de los coanillos semiperfectos por la derecha y por la izquierda, en términos de dualidad; resultado que generaliza el obtenido para coálgebras en [54, Theorem 3.5].

Teorema 4.4.4. *Sea A un anillo QF y $\mathfrak{C}$ un A–coanillo con ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ módulos proyectivos. Entonces $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la izquierda y por la derecha si y sólo si los funtores* $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}} \circ (-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} : \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}} \circ {}^*(-)$ *establecen una dualidad de Colby-Fuller.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es semiperfecto por la izquierda y por la derecha, entonces las sub-categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ y ${}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$ son linealmente compactas. Según el Teorema 4.2.2 y [49, Theorem 3], se tiene un dualidad de Colby-Fuller. Recíprocamente, aplicando [49, Theorem 3] se tiene que las sub-categorías de objetos linealmente compactos $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ y ${}^{\mathfrak{C}}_f\mathcal{M}$, son realmente sub-categorías linealmente compactas, después de aplicar el Teorema 4.4.2. □

Vamos ahora a desarrollar la teoría de la dualidad de Morita para coanillos que extiende la realizada en [55] para el caso de coálgebras. Vamos a trabajar con dos anillo de base A y B. Vamos a utilizar la misma notación para los duales de módulos sean sobre A o sobre B. Cual de ellos esta actuando, en cada tiempo, será explicado por el contexto.

Teorema 4.4.5. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, un A–coanillo y un B–coanillo, A y B son dos anillos QF, tales que ${}_A\mathfrak{C}$, ${}_B\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_A$ y $\mathfrak{D}_B$ son módulos proyectivos. Supongamos que existe una dualidad de Colby-Fuller* $H : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : H'$. *Entonces* *(a) $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ son coanillos semiperfectos por la izquierda y por la derecha.*

(b) Existe un dualidad de Colby-Fuller entre ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$.

Demostración. (a) Según [55, Lemma 1.4] $\mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ y ${}_f^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$ son, respectivamente, sub-categoría reflexiva de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y de ${}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$; luego [49, Lemma 2, Theorem 3] implica que $\mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ y ${}_f^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$ son sub-categorías linealmente compacta. Por lo tanto, según el Teorema 4.4.2, $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha y $\mathfrak{D}$ es un coanillo semiperfecto por la izquierda. Comprobaremos que $\mathfrak{D}$ es semiperfecto por la derecha; para ello considere un $\mathfrak{D}$-comódulo simple por la izquierda arbitrario ${}_{\mathfrak{D}}S$. Entonces $H'(S) \in \mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ es simple, luego $H'(S)^* \in {}_f^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ es también simple. Como $\mathfrak{C}$ es semiperfecto por la derecha, ${}_AE(H'(S)^*)$ es finitamente generado. Usando la Proposición 4.2.3, ${}^*E(H'(S)^*)_{\mathfrak{C}}$ es ahora un comódulo finitamente generado y proyectivo, y ${}^*E(H'(S)^*) \twoheadrightarrow {}^*(H'(S)^*) \cong H'(S)$. Si aplicamos el funtor H a esta última sucesión, se tiene pues que

$$S \cong HH'(S) \hookrightarrow H({}^*E(H'(S)^*)). \tag{4.5}$$

Según [57, Proposición 3.3.10] o [55, Lemma 1.10], $H({}^*E(H'(S)^*))$ es un $\mathfrak{D}$–comódulo finitamente generado e inyectivo por la izquierda. Entonces ${}_AE(S)$ es un módulo finitamente generado, según (4.5). Esto implica que, según el Teorema 4.3.2, que $\mathfrak{D}$ es semiperfecto por la derecha. Análogamente, $\mathfrak{C}$ es demostrado ser un coanillo semiperfecto por la izquierda.
(b) Se tiene del item (a) y del Teorema 4.4.4, que las siguientes son dualidades de Colby-Fuller

$$F = \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}} \circ (-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} : \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}} \circ {}^*(-) = F',$$
$$G = \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{D}} \circ (-)^* : \mathcal{M}^{\mathfrak{D}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : \mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{D}} \circ {}^*(-) = G'.$$

Entonces, según [55, Lemma 1.4],

$$L = G'_f \circ H_f \circ F'_f : {}_f^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{M}_f^{\mathfrak{D}} : L' = F_f \circ H'_f \circ G_f$$

es una dualidad, donde $(-)_f$ denota el funtor restricción del funtor $(-)$ a la sub-categoría de comódulos finitamente generados. Como ${}_f^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_f^{\mathfrak{D}}$ son, respectivamente, sub-categorías finitamente cerradas y generadoras, linealmente compactas de ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$; la aserción (b) se deduce de [49, Theorem 5]. □

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ como en el Teorema 4.4.5. Si $L : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ es un equivalencia de categorías, entonces $L_f : \mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_f^{\mathfrak{D}}$ es también un equivalencia de categorías. Además, el asignar $L \mapsto L_f$ define una correspondencia biyectiva (salvo isomorfismos naturales) entre equivalencias $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \sim \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ y equivalencias $\mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}} \sim \mathcal{M}_f^{\mathfrak{D}}$, véase [55, Proposition 1.1]. De otra parte, si $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha y $\mathfrak{D}$ lo es por la izquierda, entonces el asignar

$$H : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : H' \longmapsto H_f : \mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}_f^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : H'_f$$

es también una correspondencia biyectiva (salvo isomorfismos naturales) entre dualidades de Colby-Fuller y dualidades, porque cada dualidad entre $\mathcal{M}_f^{\mathfrak{C}}$ y ${}_f^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$ se extiende de forma única a una dualidad de Colby-Fuller, véase [50, Theorem 2.1].

Teorema 4.4.6. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, respectivamente, coanillos sobre anillos Quasi-Frobenius A y B tales que ${}_A\mathfrak{C}$, ${}_B\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_A$, y $\mathfrak{D}_B$ son módulos proyectivos. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha y que $\mathfrak{D}$ es un coanillo semiperfecto por la izquierda. Existe pues una correspondencia biyectiva (salvo isomorfismos naturales) entre equivalencias $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \sim \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ y dualidades de Colby-Fuller $H : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : H'$.*

Demostración. Sea $L : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ una equivalencia de categorías, y sea $L_f : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}_f$ la equivalencia inducida. Entonces $(-)^* \circ L_f : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \to {}^{\mathfrak{D}}_f\mathcal{M}$ es una dualidad, que puede ser extendida de manera única, según [49, Theorem 5] o [50, Theorem 2.1], a una dualidad de Colby-Fuller entre $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y ${}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$, dado que $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f$ y ${}^{\mathfrak{D}}_f\mathcal{M}$ son sub-categorías linealmente compactas, según el Teorema 4.4.2. Recíprocamente, dada una dualidad de Colby-Fuller $H : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : H'$, entonces ${}^*(-) \circ H_f : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}_f \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}_f$ es una equivalencia de categorías que se extiende de manera única a una equivalencia de categorías entre $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ y $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$. □

En general si $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son dos coanillos cualesquiera, entonces no sabemos, hasta este momento, si una equivalencia de categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \sim \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ implica una equivalencia ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \sim {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$. Hasta donde sabemos, esto es un problema que está legos de ser trivial. Nuestro próximo resultado representa una respuesta positiva a un caso restrictivamente particular.

Teorema 4.4.7. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ coanillos, respectivamente, sobre anillos Quasi-Frobenius A y B, tales que ${}_A\mathfrak{C}$, ${}_B\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_A$, y $\mathfrak{D}_B$ son módulos proyectivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) hay una dualidad de Colby-Fuller $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$;

(ii) hay una equivalencia $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \sim \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha, y $\mathfrak{D}$ es semiperfecto por la izquierda;

(iii) hay una equivalencia ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \sim {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$, $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la izquierda y $\mathfrak{D}$ es semiperfecto por la derecha;

(iv) hay una dualidad Colby-Fuller ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$.

Demostración. Viene fácilmente de los Teoremas 4.4.5 y 4.4.6. □

Vamos a terminar este capítulo con la caracterización de una dualidad de Colby-Fuller entre comódulos por la existencia de un comódulo quasi–finito cogenerador inyectivo; tal caracterización para coálgebras sobre un solo cuerpo fijo ha sido comprobada en [55, Corollary 1.8]. Para cualquier duda sobre los comódulos quasi-finitos y sus coanillos de coendomorfismos enviamos a la sección 2.1 del capítulo 1.

Teorema 4.4.8. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ coanillos, respectivamente, sobre anillos Quasi-Frobenius A y B, tales que ${}_A\mathfrak{C}$, ${}_B\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}_A$, y $\mathfrak{D}_B$ son módulos proyectivos. Si $H : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \leftrightarrows {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M} : H'$ es una dualidad de Colby-Fuller, entonces existe un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo P tal que P es $(A, \mathfrak{D})$–quasi-finito cogenerador inyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ con el isomorfismo de A–coanillos $e_{\mathfrak{D}}(P) \cong \mathfrak{C}$, y un isomorfismo natural*

$$H(M) \cong \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{D}}\left((M \Box_{\mathfrak{C}} P)^*\right)$$

para cualquier $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M.

Demostración. Según el Teorema 4.4.6, considere $F : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^{\mathfrak{D}}$ la equivalencia de categorías correspondiente a la dualidad de Colby–Fuller $H : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to {}^{\mathfrak{D}}\mathcal{M}$. Dando $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, escribimos $M = \varinjlim M_i$, donde los M_i son $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha finitamente generados. Entonces

$$\begin{aligned} H(M) &= \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{D}}\left(\varprojlim (F_f(M_i))^*\right) \\ &\cong \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{D}}\left((\varinjlim F_f(M_i))^*\right) \\ &\cong \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{D}}\left((F(M))^*\right). \end{aligned}$$

Según el Teorema 1.6.2 en el caso unitario (i.e. [52, Theorem 3.5]) existe un $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$–bicomódulo $P = F(\mathfrak{C})$ tal que $F \cong -\square_{\mathfrak{C}} F(\mathfrak{C})$. Usando la Proposición 2.1.2 en el caso unitario (i.e. [52, Proposition 4.2.(2)]), deducimos que P es un comódulo $(A, \mathfrak{D})$–quasi-finito por la derecha que es claramente un cogenerador inyectivo. Ahora, $e_{\mathfrak{D}}(P) = F(\mathfrak{C})\square_{\mathfrak{D}} G(\mathfrak{D}) \cong GF(\mathfrak{C}) \cong \mathfrak{C}$, donde G es el inverso del funtor F; que es un isomorfismo de A–coanillos, según la Proposición 2.1.3(2). □

Capítulo 5

Coanillos Semiperfectos y Coanillos con el Funtor Racional Exacto.

Introducción

En este capítulo caracterizaremos los coanillos que forman parte de un par racional por la derecha cuyo funtor racional es un radical exacto. Según nuestros conocimientos este problema es nuevo incluso para coálgebras sobre anillos conmutativos.

Nuestro principal objetivo, en el futuro, es responder a la siguiente pregunta. Se sabe del Teorema 4.4.2, que si $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo y A un anillo QF tal que ${}_A\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_A$ son módulo proyectivos, entonces $\mathfrak{C}$ es semiperfecto por la derecha si y sólo si el funtor $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}$ es exacto. La pregunta es ¿Que clase de coanillos (sobre cualquier anillo), satisface esta misma equivalencia?. Aquí daremos las informaciones básicas sobre los coanillos semiperfectos (por la derecha) sobre cualquier anillo (unitario) de escalares, y también sobre el funtor racional. Estos datos servirán para responder a la pregunta de antes.

Durante todo este capítulo, fijamos A una $\mathbb{K}$–álgebra con 1. Todos los A–módulos son unitarios.

5.1. Coanillos locales y coanillos semiperfectos.

Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, recuerde del capítulo 4 que $\mathfrak{C}$ es un coanillo *semiperfecto por la derecha* si su categoría de comódulos por la derecha $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck y cualquier objeto finitamente generado posee una cobertura proyectiva. En lo que sigue todos los coanillos bajo consideración, son planos como módulos por la izquierda, con lo que sus categorías de comódulos por la derecha son de Grothendieck. Siguiendo a [59], [73] un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha P se dice que es *semiperfecto* si $P_{\mathfrak{C}}$ es un comódulo proyectivo y cada comódulo cociente de P tiene una cobertura proyectiva. Un coanillo semiperfecto por la derecha cuya categoría de comódulos por la derecha tiene, salvo isomorfismos, un único objeto semiperfecto completamente indescomponible, se le llama un *coanillo local por* *la derecha.* Si $\mathfrak{C}$ es un coanillo local cuya categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ posee un conjunto de generadores finitamente generados. Entonces el único (salvo isomorfismos) semiperfecto completamente indescomponible es un generador finitamente generado y proyectivo de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$. En este camino, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo, y $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha con $T = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, y $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ es un generador semiperfecto completamente indescomponible de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$;

(ii) ${}_A\mathfrak{C}$ es plano, $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ tiene un conjunto de generadores finitamente generados, $\mathfrak{C}$ es un coanillo local por la derecha con $\Sigma_{\mathfrak{C}}$ el único (salvo isomorfismos) comódulo semiperfecto completamente indescomponible;

(iii) Σ_A es un módulo finitamente generado y proyectivo, $\mathsf{can}_{\Sigma} : \Sigma^* \otimes_T \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillos, ${}_T\Sigma$ es un módulo fielmente plano, y T es un anillo local.

En particular, si ${}_A\mathfrak{C}$ es localmente proyectivo y $\mathfrak{C}$ es un A–coanillo local por la derecha, entonces $\mathfrak{C} \cong \Sigma^* \otimes_T \Sigma$, para un cierto bimódulo ${}_T\Sigma_A$ tales que ${}_T\Sigma$ es fielmente plano y T un anillo local.

Demostración. Es consecuencia del Teorema 2.3.2 en conjugación con [59, Proposition 1]. □

Recuerde [6, Proposition 15.15], que un anillo (unitario) local es un anillo de división módulo su radical de Jacobson. El siguiente resultado, consecuencia directa de los Teoremas 5.1.1 y 2.3.2, ofrece un parecido contexto para coanillos de comatrices finitas locales por la derecha. Pero antes vamos a realizar la siguiente observación

Observación 5.1.2. *Coanillos de comatrices sin counidad*. En esta observación presentaremos un sencillo ejemplo de un coanillo (de comatrices también) pero que no posee la counidad. Sea A una $\mathbb{K}$–álgebra junto con un epimorfismo $\pi : B \to T$ de $\mathbb{K}$–álgebras y ${}_B\Sigma_A$ un bimódulo tal que Σ_A es finitamente generado y proyectivo con una base dual finita $\{p_i, p_i^*\}$. Considere el A–bimódulo $\Sigma^* \otimes_B T \otimes_B \Sigma$ junto con la siguiente aplicación A–bilineal

$$\begin{aligned} \Delta : \Sigma^* \otimes_B T \otimes_B \Sigma &\longrightarrow \Sigma^* \otimes_B T \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B T \otimes_B \Sigma \\ \varphi \otimes_B \pi(b) \otimes_B u &\longmapsto \textstyle\sum_i \varphi \otimes_B \pi(b) \otimes_B p_i \otimes_A p_i^* \otimes_B \pi(1) \otimes_B u, \end{aligned}$$

donde $\varphi \in \Sigma^*$, $u \in \Sigma$ y $b \in B$. Es fácil de comprobar que Δ es una comultiplicación coasociativa, es decir que $(\Sigma^* \otimes_B T \otimes_B \Sigma, \Delta)$ es un A–coanillo sin counidad. Además, el morfismo de A–bimódulos

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma^* \otimes_B \Sigma &\longrightarrow \Sigma^* \otimes_B T \otimes_B \Sigma \\ \varphi \otimes_B u &\longmapsto \varphi \otimes_B \pi(1) \otimes_B u, \end{aligned}$$

es un morfismo de A–coanillo sin counidad; es decir $\Delta \circ \Phi = (\Phi \otimes_A \Phi) \circ \Delta_{\Sigma^* \otimes_B \Sigma}$.

Corolario 5.1.3. *Sea Σ_A un A–módulo finitamente generado y proyectivo, $T \subseteq S = \mathrm{End}(\Sigma_A)$ un sub-anillo local tal que ${}_T\Sigma$ es un módulo fielmente plano. Denotemos por $\mathrm{Jac}(T) = J$ el radical de Jacobson de T:*

(i) $\Sigma/J\Sigma$ es un $(\Sigma^* \otimes_T \Sigma)$–comódulo simple por la derecha cuyo anillo de endomorfismos es isomorfismo a T/J, i.e. $\mathrm{End}((\Sigma/J\Sigma)_{\Sigma^*\otimes_T\Sigma}) \cong T/J$.

(ii) Si suponemos que A es una $\mathbb{K}$–álgebra semisimple artiniana. Entonces,

$$\mathsf{can}_{\Sigma/J\Sigma} : (\Sigma/J\Sigma)^* \otimes_{(T/J)} (\Sigma/J\Sigma) \hookrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma$$

es una inclusión de A–coanillo, donde el primero es un A–coanillo simple cosemisimple.

(iii) Existe una sucesión exacta corta de $\Sigma^* \otimes_T \Sigma$–bicomódulos

$$0 \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T J\Sigma \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T \Sigma \longrightarrow \Sigma^* \otimes_T (T/J) \otimes_T \Sigma \longrightarrow 0,$$

donde el conúcleo es un morfismo de A–coanillo sin counidad (véase la Observación 5.1.2).

(iv) ${}_TS$ es un módulo fielmente plano y $S \otimes_T S$ es un S–coanillo local por la derecha.

Una manera de construir coanillos semiperfectos, usando el Teorema 5.1.1, la proporciona la siguiente proposición.

Proposición 5.1.4. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos A–coanillos locales por la derecha tales que cada uno de los módulos ${}_A\mathfrak{C}$, ${}_A\mathfrak{D}$ es localmente proyectivo. Entonces $\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{D}$ es un A–coanillo semiperfecto por la derecha.*

Demostración. Según el Teorema 5.1.1, bastaría comprobar la aserción para la suma directa de dos coanillos locales por la derecha que son de forma de comatrices finitas. Es decir, sin perder generalidad, podemos suponer que $\mathfrak{C} \cong V^* \otimes_R V$ y que $\mathfrak{D} \cong W^* \otimes_T W$, para unos ciertos bimódulos ${}_RV_A$ y ${}_TW_A$ tales que V_A, W_A son módulos finitamente generados y proyectivos, R y T son dos sub-anillo locales, respectivamente, de $\mathrm{End}(V_A)$ y de $\mathrm{End}(W_A)$, y ${}_RV$, ${}_TW$ son módulos fielmente planos. Considere ahora $B = R \times T$ como anillo de manera canónica, por hipótesis B es un anillo semiperfecto. Ponte $\Sigma = V \oplus W$ como A–módulo por la derecha finitamente generado y proyectivo. Está claro que las estructuras de R–módulo y T–módulo por la izquierda, respectivamente, de V y de W, inducen, de manera natural, una B–acción por la izquierda sobre Σ. La suma directa Σ es actualmente un (B, A)–bimódulo con $B \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$ un sub-anillo semiperfecto. Falta comprobar que ${}_B\Sigma$ es un módulo fielmente plano. Para ello denotemos por e, f los idempotentes ortogonales centrales y completos de B (i.e. la unidad de R y la de T). Considere la siguiente composición de funtores

$$\begin{array}{rl} F : \mathcal{M}_B \longrightarrow \mathcal{M}_R \times \mathcal{M}_T & \longrightarrow \mathcal{M}_A \\ X \longrightarrow (Xe, Xf) & \longrightarrow (Xe \otimes_R V) \oplus (Xf \otimes_T W) \end{array}$$

está claro, por hipótesis, que este funtor F es fiel y exacto. Ahora, existe un isomorfismo natural $- \otimes_B \Sigma \cong F$, lo que implica que ${}_B\Sigma$ es fielmente plano. Finalmente, usando este mismo isomorfismo natural y el isomorfismo canónico $\Sigma^* \cong V^* \oplus W^*$, se tiene un isomorfismo de A–coanillo

$$\Sigma^* \otimes_B \Sigma \cong (V^* \otimes_R V) \oplus (W^* \otimes_T W).$$

Concluimos pues usando el Teorema 2.3.2. □

Ahora vamos a caracterizar los coanillo semiperfectos.

Teorema 5.1.5. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo y $\mathcal{A}$ es un conjunto de $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha. Sean $\Sigma = \bigoplus_{P \in \mathcal{A}} P$, $\Sigma^\dagger = \bigoplus_{P \in \mathcal{A}} P^*$, y $R = \bigoplus_{P,Q \in \mathcal{A}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P, Q)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, $\mathcal{A}$ es un conjunto de generadores semiperfectos completamente indescomponibles de $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$;

(ii) ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano, $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ tiene un conjunto de generadores finitamente generados, $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha con $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los comódulos semiperfecto completamente indescomponible;

(iii) cada comódulo en $\mathcal{A}$ es un A–módulo finitamente generado y proyectivo, $\mathsf{can} : \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma \to \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A–coanillo, ${}_R\Sigma$ es fielmente plano, y R es un anillo semiperfecto en el sentido de M. Harada [60, Theorem 2] con la descomposición por la derecha $R_R = \oplus_{P \in \mathcal{A}} 1_P R$.

En particular si ${}_A\mathfrak{C}$ es localmente proyectivo y $\mathfrak{C}$ es un coanillo semiperfecto por la derecha, entonces $\mathfrak{C} \cong \Sigma^\dagger \otimes_R \Sigma$ como A–coanillos, donde $\mathcal{A}$, Σ, y R son como en la condición (iii).

5.2. El funtor racional y módulos inyectivos.

Sean A y B dos $\mathbb{K}$–álgebras. Si $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, [-,-])$ es un par racional por la derecha sobre A (véase la sección 1.3 del capítulo 1) tal que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ es un radical exacto, entonces vamos a comprobar en esta sección que la parte racional del módulo regular B_B admite una estructura de B–coanillo idempotente, sobre el cual los comódulos por la derecha se identifican con los $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha. Vamos a dar un a caracterización de la exactitud de este funtor así mismo un criterio sobre los módulos inyectivos. Nuestras demostraciones son independientes de cualquier argumento Topológico (se refiere a la Topología lineal).

Vamos a recordar algunas ideas de [46] sobre la localización en categorías de Grothendieck. Una sub-categoría plena $\mathcal{C}$ de una categoría de Grothendieck $\mathcal{A}$ se dice que es *localizable* $\mathcal{C}$ si es cerrada bajo extensiones, sumas directas, sub-objetos, y objetos cocientes. Los objetos de $\mathcal{C}$ son llamados *objetos $\mathcal{C}$–torsión*. Para una sub-categoría localizable $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ se puede definir la categoría cociente $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. Hay funtores $\mathbf{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ y $\mathbf{S} : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ tal que $\mathbf{T}$

es un funtor exacto y $\mathbf{S}$ es adjunto por la derecha a $\mathbf{T}$. Por lo tanto, $\mathbf{S}$ es exacto por la izquierda. Si $\psi : id_{\mathcal{A}} \to \mathbf{S} \circ \mathbf{T}$ es la unidad de la adjunción, entonces $\psi_C : C \to (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(C)$ tiene el núcleo y co-núcleo objetos $\mathcal{C}$–torsión para cualquier objeto C de $\mathcal{A}$. Además, la counidad $\phi : \mathbf{T} \circ \mathbf{S} \to id_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}$ de la adjunción es un isomorfismo natural. Cuando la sub-categoría localizable $\mathcal{C}$ es cerrada bajo el producto directo, se dice que $\mathcal{C}$ es una clase TTF, véase [92, Chap. VI]. El siguiente lema es claro

Lema 5.2.1. *Sea $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, [-,-])$ un par racional por la derecha. Supongamos que el funtor $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_B$ es exacto, entonces $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$ es una sub-categoría localizable. Además, si M es un objeto proyectivo en $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, entonces M es también un B–módulo proyectivo.*

Denotemos por $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ la clase libre-torsión de B–módulos por la derecha respeto de la sub-categoría localizable $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$. Es decir

$$\mathcal{F}^{\mathcal{T}} = \{M \in \mathcal{M}_B | \ \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) = 0\}.$$

Proposición 5.2.2. *Sea $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, [-,-])$ un par racional por la derecha. Supongamos que el funtor $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_B$ es exacto. La clase $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ satisface las siguientes propiedades*

(i) *$\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es una sub-categoría localizable de $\mathcal{M}_B$.*

(ii) *$\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es una clase TTF estable bajo coberturas inyectivas.*

(iii) *La categoría cociente $\mathcal{M}_B/\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es isomorfa a $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$, y luego a $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$.*

(iv) *Si denotemos por $\mathfrak{a} = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(B_B)$, entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal bilátero idempotente de R tal que ${}_B(B/\mathfrak{a})$ es un módulo plano.*

Demostración. Análoga a la demostración de [54, Theorem 2.3]. (i) Como $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ es exacto, $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es cerrada bajo objetos cocientes, y el resto de las condiciones son inmediatos.
(ii) Está afirmación es clara.
(iii) Sea $\mathbf{T} : \mathcal{M}_B \leftrightarrows \mathcal{M}_B/\mathcal{F}^{\mathcal{T}} : \mathbf{S}$ la adjunción asociada a la sub-categoría localizable $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ con, la unidad y la counidad, respectivamente, ψ_{-} y ϕ_{-}. Se tiene pues el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_B \arrow[r, shift left, "\mathbf{T}"] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}"] & \mathcal{M}_B/\mathcal{F}^{\mathcal{T}} \arrow[l, shift left, "\mathbf{S}"] \arrow[dl, shift left, "G=\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}\circ\mathbf{S}"] \\
\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B), \arrow[u, shift left, "i^{\mathcal{T}}"] \arrow[ur, shift left, "F=\mathbf{T}\circ i^{\mathcal{T}}"] &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas de doble sentido representan adjunciones canónicas. Sea $M \in \mathcal{M}_B$ está claro que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) \cong G(\mathbf{T}(M))$ vía el morfismo $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\psi_M)$, luego $id_{\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)} \cong G \circ F$. De otra parte, si $M \in \mathcal{M}_B/\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$, entonces $F \circ G(M) = \mathbf{T}(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathbf{S}(M)))$. Como $\mathbf{S}(M)/\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathbf{S}(M)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}$, $\mathbf{T}(\mathbf{S}(M)/\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathbf{S}(M))) = 0$. Ahora, $M \cong \mathbf{T}(\mathbf{S}(M))$, según el isomorfismo de la counidad; y $M \cong \mathbf{T}(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathbf{S}(M))) = F(G(M))$, según la exactitud de

T; luego $F \circ G \cong id_{\mathcal{M}_B/\mathcal{F}^{\mathcal{T}}}$. Por lo tanto F establece un isomorfismo de categorías con inverso G.
(*iv*) Recuerde que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B) = \{M \in \mathcal{M}_B | \ \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) = M\}$, entonces $(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B), \mathcal{F}^{\mathcal{T}})$ es una teoría de torsión hereditaria (véase [92, Chap.VI, §3]) por $\mathcal{M}_B$. Según [92, Chap.VI, Theorem 5.1], consideramos $\mathfrak{F} = \{I_B \leq B | \ B/I \in \mathcal{F}^{\mathcal{T}}\}$ la correspondiente Topología de Gabriel por la derecha, notemos que $\mathfrak{a}$ es minimal en $\mathfrak{F}$. Se sabe que la clase de módulos $\mathfrak{F}$–torsión, que es exactamente $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$, es cerrada bajo el producto directo; entonces según [92, Chap.VI, Proposition 6.12], $\mathfrak{F}$ tiene una base constituida de un ideal bilátero idempotente, en efecto, $\mathfrak{a} = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(R_R)$. Además, $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es isomorfa a $\mathcal{M}_{B/\mathfrak{a}}$. Sea $\pi : B \to B/\mathfrak{a}$ el epimorfismo canónico; el funtor $- \otimes_B (B/\mathfrak{a}) : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_{B/\mathfrak{a}}$ es adjunto por la izquierda del funtor restricción de escalares $\pi_* : \mathcal{M}_{B/\mathfrak{a}} \to \mathcal{M}_B$. Salvo isomorfismos $\mathcal{F}^{\mathcal{T}} \cong \mathcal{M}_{B/\mathfrak{a}}$, π_* no es más que el funtor inclusión $j : \mathcal{F}^{\mathcal{T}} \to \mathcal{M}_B$. Como $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es estable bajo coberturas inyectivas, el funtor $- \otimes_B (B/\mathfrak{a})$ tiene que ser exacto, es decir que ${}_R(R/\mathfrak{a})$ es plano. □

Teorema 5.2.3. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathfrak{a}$ como en la Proposición 5.2.2. Supongamos que* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ *es un funtor exacto. Entonces hay un isomorfismo de categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \cong \mathcal{M}^{\mathfrak{a}}$ enviando $M \mapsto M\mathfrak{a}$, donde $\mathfrak{a}$ es dotado de su estructura canónica de B–coanillo idempotente. En particular $\mathfrak{a}_{\mathfrak{C}}$ es un generador de la categoría de comódulos $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$.*

Demostración. De la Proposición 5.2.2, se sabe que $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, y $B/\mathfrak{a}$ es un B–módulo plano por la izquierda. Por lo tanto, $\mathfrak{a}$ es un B–coanillo, según [92, Proposition XI 3.13] y el Ejemplo 1.1.2. Ahora sea $M \in \mathcal{M}_B$ tal que $M.\mathfrak{a} = M$, es decir, un $\mathfrak{a}$–comódulo por la derecha, entonces M es un módulo racional por la derecha, porque $M.\mathfrak{a}$ lo es. Recíprocamente, sea $M \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$ y $B^{(I)} \to M \to 0$ una presentación libre. La exactitud del funtor $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$, implica la sucesión $\mathfrak{a}^{(I)} \to M = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) \to 0$, luego $M.\mathfrak{a} = M$, y después $M \in \mathcal{M}^{\mathfrak{a}}$. La aserción particular viene del Teorema 1.3.19. □

Observación 5.2.4. El isomorfismo de categorías del Teorema 5.2.3 ha sido, distintamente comprobado en [12, Proposition 2.7] para coálgebras semiperfectas por la izquierda y por la derecha sobre un cuerpo y los pares racionales canónicos, usando los argumentos de que $\mathfrak{a}$ es un anillo con unidades locales (aquí suficientes idempotentes ortogonales).

Obviamente, el funtor $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ conmuta con la suma directa. Si además, es exacto, entonces según un resultado clásico de Gabriel (véase [46, Proposition 1bis,p.404]), $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ tiene un adjunto por la derecha. El siguiente corolario nos da una descripción explicita de tal funtor adjunto.

Corolario 5.2.5. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathfrak{a}$ como en la Proposición 5.2.2. Supongamos que* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ *es un funtor exacto. Entonces el funtor $F = \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}_B, -) \circ i^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \cong \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B) \to \mathcal{M}_B$ es adjunto por la derecha del funtor racional* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$*. En particular, si $M_{\mathfrak{C}}$ es inyectivo, entonces $F(M)$ es también inyectivo.*

Demostración. Está claro, según el Teorema 5.2.3, que $M \otimes_B \mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha para cualquier B–módulo por la derecha M. Según el Teorema 5.2.2(iv) y [92, Proposition XI 3.13], se sabe que ${}_B\mathfrak{a}$ es un sub-módulo puro de ${}_BB$. Se tiene pues, usando el

Teorema 1.3.19, que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B) \cong M \otimes_B \mathfrak{a}$ como B–módulos por la derecha, para cualquier B–módulo por la derecha M. Este último isomorfismo induce ahora el siguiente isomorfismo natural

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B), M') &= \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B), i^{\mathcal{T}}(M')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(M \otimes_B \mathfrak{a}, i^{\mathcal{T}}(M')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(M_B, F(M')),\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la adjunción Hom–tensor. La aserción particular resulta inmediata de la primera, dado que las citadas categorías son abelianas. $\square$

Corolario 5.2.6. *Sean $\mathcal{T}$ y $\mathfrak{a}$ como en la Proposición 5.2.2. Supongamos que* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ *es un funtor exacto.*

(a) Para cada $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha M, la aplicación B–lineal

$$\begin{aligned}\gamma_M : M &\longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}_B, M) \\ m &\longmapsto [x \mapsto \gamma_M(m)(x) = m.x]\end{aligned}$$

es un monomorfismo, donde M es considerado como B–módulo racional por la derecha.

(b) Supongamos que ${}_AB$ es plano, y considere M un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha tal que γ_M es un isomorfismo. Si $M_{\mathfrak{C}}$ es inyectivo, entonces M_A es un módulo inyectivo.

Demostración. (a) Es fácil de ver, que γ_{-} es una aplicación B–lineal. Entonces sin perder generalidad, demostraremos la aserción solamente por los B–módulos racionales cíclicos por la derecha. Es decir, podemos suponer que $M_B = mB$ para un cierto $m \in M$ no nulo. Ahora, según el Teorema 5.2.3, se tiene que $M = m\mathfrak{a}$. Entonces, sea $ma \in M$ tal que $max = 0$, para todo $x \in \mathfrak{a}$. Recuerde que ${}_B\mathfrak{a}$ es un sub-módulo puro de ${}_BB$, entonces existe un elemento $c \in \mathfrak{a}$ tal que $a = ac$, para nuestro $a \in \mathfrak{a}$. De allí, $ma = mac = 0$, es decir que γ_M es un monomorfismo.
(b) Utilizaremos el caso particular del Corolario 5.2.5, para obtener que $\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}, M)_B \cong M_B$ es un B–módulo inyectivo por la derecha. Luego M_A es inyectivo, dado que ${}_AB$ es plano. $\square$

El siguiente Teorema es nuestra principal caracterización de la exactitud del funtor racional, donde las condiciones equivalentes en el contexto particular de [14, 20.8] son implícitamente contenidas (véase también la siguiente observación). Nuestra demostración es puramente de comódulos, esencialmente no utilizaremos ningún argumento de la Topología lineal; tales argumentos aparecen imprescindibles en esta última referencia.

Teorema 5.2.7. *Sean $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, \langle -, - \rangle)$ y $\mathfrak{a}$ como en la Proposición 5.2.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) El funtor $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_B$ *es exacto;*

(ii) $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$ *es cerrada bajo extensiones y $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ es cerrada bajo objetos cocientes;*

(iii) $\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$ *es una sub-categoría localizable de* $\mathcal{M}_B$ *y* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B) \cong \mathcal{M}_B/\mathcal{F}^{\mathcal{T}}$*;*

(iv) $F = \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}_B, -) \circ i^{\mathcal{T}}$ *es adjunto por la derecha de* $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$*;*

(v) $\mathfrak{a}$ *es un* B*–coanillo,* $\mathcal{M}^{\mathfrak{a}} \cong \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$ *isomorfismo de categorías;*

(vi) ${}_B\mathfrak{a}$ *es un sub-módulo puro de* ${}_BB$*,* $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{C}.\mathfrak{a} = \mathfrak{C}$*.*

Demostración. Las implicaciones (ii), (iii), (iv), $\Rightarrow$ (i) son inmediatas. Las implicaciones recíprocas, viene dadas por la Proposición 5.2.2 ó el Corolario 5.2.5. $(i) \Rightarrow (v)$ es consecuencia de los Teorema 1.3.19 y 5.2.3. $(v) \Rightarrow (i)$ Está claro del Ejemplo 1.1.2(b), que en este caso $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M) = M\mathfrak{a}$, para cualquier $M \in \mathcal{M}_B$. Ahora, sea $f : M \to N$ un epimorfismo B–lineal por la derecha, y $na \in N\mathfrak{a}$ con $f(m) = na$, para un cierto $m \in M$. De otra parte, existe $a' \in \mathfrak{a}$ tal que $a = aa'$, luego $f(m)a' = f(ma') = (na)a' = na$. Por lo tanto, la restricción de la aplicación f, a la parte racional, es también epimorfismo. Luego, $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ es exacto por la derecha. La implicación $(v) \Rightarrow (vi)$ es evidente. Vamos a comprobar la implicación recíproca. Por hipótesis, se tiene $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{C} \otimes_B \mathfrak{a}$ como B–módulos por la derecha, y $\mathfrak{a}$ es un B–coanillo idempotente. Entonces escogiendo cualquier B–módulo racional por la derecha X con su canónica estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, se tiene un isomorfismo B–lineal por la derecha $X \cong X\square_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C} \otimes_R \mathfrak{a})$ (recuerde que la comultiplicación es B–lineal). Utilizando la versión de la izquierda de [52, Lemma 2.2] (véase el Lema 1.4.2), se tiene

$$X \cong X\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \cong X\square_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C} \otimes_B \mathfrak{a}) \cong (X\square_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}) \otimes_B \mathfrak{a} \cong X \otimes_B \mathfrak{a}$$

es decir que X es en realidad un $\mathfrak{a}$–comódulo por la derecha. La identificación recíproca es evidente. Por lo tanto, existe un isomorfismo de categorías $\mathcal{M}^{\mathfrak{a}} \cong \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$. $\square$

Observación 5.2.8. Usando varias caracterizaciones triviales de coanillos idempotentes y su categoría de comódulos, las equivalentes afirmaciones del Teorema 5.2.7 son evidentemente equivalentes también a las siguientes

(vii) ${}_B\mathfrak{a}$ es un sub-módulo puro de ${}_BB$ y $M.\mathfrak{a} = M$, para cualquier $M \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$;

$(viii)$ ${}_B\mathfrak{a}$ es un sub-módulo puro de ${}_BB$ y la aplicación canónica $M \otimes_B \mathfrak{a} \to M$ es un isomorfismo, para cualquier $M \in \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$;

(ix) ${}_B(B/\mathfrak{a})$ es un módulo plano, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, y $\mathfrak{a}_B$ es un generador en $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(\mathcal{M}_B)$.

Capítulo 6

Aplicaciones y Ejemplos.

Introducción

En este pequeño capítulo, presentaremos ejemplos y algunas aplicaciones de resultados citados en los capítulos 4 y 5. En la primera sección comprobaremos que los coanillo cosemisimples tienen el funtor racional (por la derecha y por la izquierda) exacto. En el caso simple cosemisimple la parte racional del anillo dual resulta ser el ideal zócalo de un anillo de matrices cuadradas de columnas-finitas. La segunda sección revela las condiciones suficientes para calcular la parte racional de cualquier módulo sobre el anillo dual de un coanillo asociado una estructura entrelazante. Esto se aplica sobre la categoría de módulos de Doi-Koppinen en la tercera sección, donde hemos generalizado la mayoría de los resultados de [37].

Durante todo este capítulo, fijamos A una $\mathbb{K}$–álgebra con 1. Todos los A–módulos son unitarios.

6.1. Coanillos cosemisimple y el funtor racional.

Considere $\mathfrak{C}$ un A–coanillo cosemisimple. Se sabe del Teorema 3.1.1, que ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ son módulos proyectivos, luego existen módulos y funtores racionales. Denotemos por $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}$ y $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}$ los funtores asociados, respectivamente, a los pares racionales canónicos $(\mathfrak{C}, \mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}), \langle -,- \rangle)$ y $(\mathrm{End}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}), \mathfrak{C}, [-,-])$ (aquí el producto de $\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})$ es el opuesto de la composición). La siguiente proposición ha sido comprobada distintamente por S. Caenepeel y M. Ivanov [26].

Proposición 6.1.1. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo cosemisimple. Entonces $\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}$ y $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}$ son funtores exactos.*

Demostración. Basta comprobar la exactitud de $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}$. Sea $S_{\mathfrak{C}}$ un comódulo simple; según el Teorema 3.1.1 y el Lema 4.1.1, S_A es un módulo finitamente generado y proyectivo. Luego su dual por la derecha S^* admite una estructura de $\mathfrak{C}$–comódulo por la izquierda.

Además es fácil de averiguar que ${}_{\mathfrak{C}}S^*$ es también un comódulo simple. Se sabe que existe un epimorfismo que escinde ${}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C} \twoheadrightarrow S^*$, luego ${}^*(S^*)_{\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})} \cong S_{\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})}$ es un módulo proyectivo (recuerde que ${}^*\mathfrak{C} \cong \mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})^o$). Por lo tanto el funtor del olvido $u^r : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})}$ preserva objetos proyectivos y como $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}$ es un adjunto por la derecha de u^r y $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría abeliana, $\mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}$ debe de ser exacto. □

La siguiente proposición revela el ideal bilátero $\mathfrak{a} = \mathrm{Rac}^r_{\mathfrak{C}}(\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})_{\mathrm{End}({}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C})})$ para $\mathfrak{C}$ un A–coanillo simple cosemisimple.

Proposición 6.1.2. *Sea $\mathfrak{C}$ un A–coanillo simple cosemisimple y $S_{\mathfrak{C}}$ un representante de comódulos simples por la derecha. Denotemos por $R = \mathrm{End}({}_DS)$, donde $D = \mathrm{End}(S_{\mathfrak{C}})$ y consideramos el par racional canónico $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, R, \langle -, - \rangle)$, utilizando para ello el Teorema 3.2.7 y la Proposición 2.2.1. Entonces existe un isomorfismo de R–coanillos idempotentes*

$$\mathrm{Soc}(R_R) = \mathrm{Soc}({}_RR) \cong \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(R_R)$$

Demostración. Como ${}_DS$ es un módulo semisimple homogéneo, [6, Exercice 10.8] implica que el $\mathbb{K}$–módulo

$$\mathfrak{A} = \{r \in R|\ {}_D\mathbf{Im}(r) \text{ es un submódulo finitamente generado de } {}_DS\}$$

es el único ideal bilátero más chico y no-nulo de R que es exactamente el zócalo por la izquierda y por la derecha de R i.e. $\mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}(R_R) = \mathfrak{A}$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(R_R)$. De otra parte, según los Teoremas 1.3.19 y 3.1.1, el ideal bilátero $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(R_R)$ es semisimple como R–módulo por la derecha. Luego $\mathfrak{A} = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(R_R)$ como R–bimódulos. Finalmente, utilizando el isomorfismo de anillo $({}^*\mathfrak{C})^o \cong R$ y la estructura de R–coanillo sobre $\mathfrak{A}$ (Ejemplo 3.2.6), se tiene el isomorfismo deseado. □

6.2. Estructuras entrelazantes con funtor racional.

Consideramos $((A, \mu, \nu), (C, \Delta_C, \varepsilon_C))_\psi$ una estructura entrelazante sobre $\mathbb{K}$ y su correspondiente A–coanillo $\mathfrak{C} = A \otimes_{\mathbb{K}} C$, Ejemplo 1.1.16. Recuerde del Ejemplo 1.1.17(1), que $(\nu, \phi) : (\mathbb{K}, C) \to (A, \mathfrak{C})$ vía $c \mapsto 1 \otimes_{\mathbb{K}} c$ es un morfismo de $(\mathbb{K}, A)$–coanillos. Considere pues los funtores inducción y ad-inducción asociados $\mathfrak{o} : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}^C$ y $- \otimes_{\mathbb{K}} A : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$, observe que el funtor olvido $\mathfrak{o}$ es isomorfo al funtor $-\square_{\mathfrak{C}}(A \otimes_{\mathbb{K}} C)$. Aplicando los resultados de la Proposición 1.6.3, se tiene un isomorfismo natural

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M \otimes_{\mathbb{K}} A, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(M, N) \\ f & \longmapsto & [m \mapsto f(m \otimes_{\mathbb{K}} 1)] \\ [m \otimes_{\mathbb{K}} a \mapsto g(m)a] & \longleftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

para cualquier M_C y $N_{\mathfrak{C}}$. Entonces el funtor del olvido $\mathfrak{o}$ es adjunto por la derecha del funtor $-\otimes_{\mathbb{K}} A$. Si $C_{\mathbb{K}}$ es un módulo plano, entonces $\mathfrak{o}$ es exacto, dado que el funtor $U_A : \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \to \mathcal{M}_A$ ya es exacto (Proposición 1.2.12). El siguiente lema es ahora inmediato

Lema 6.2.1. *Sea $(A, C)_\psi$ una estructura entrelazante sobre $\mathbb{K}$ tal que $C_\mathbb{K}$ es un módulo plano y $\mathfrak{C} = A \otimes_\mathbb{K} C$ su correspondiente A–coanillo. Si $\mathcal{M}^C$ tiene suficientes proyectivos, entonces $\mathcal{M}^\mathfrak{C}$ tiene también suficientes proyectivos.*

Corolario 6.2.2. *Sea $(A, C)_\psi$ una estructura entrelazante sobre $\mathbb{K}$ tal que $C_\mathbb{K}$ es un módulo proyectivo. Supongamos que $\mathbb{K}$ y A son anillo QF. Entonces $\mathfrak{C} = A \otimes_\mathbb{K} C$ es un coanillo semiperfecto por la derecha, siempre cuando C es una coálgebra semiperfecta. En particular, si este es el caso, entonces, $\mathrm{Rac}^l_\mathfrak{C}(-)$ es un funtor exacto.*

Demostración. Es consecuencia del Lema 6.2.1 y el Teorema 4.4.2. □

Se sabe que el dual por la izquierda ${}^*\mathfrak{C} \cong \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(C, A)$ como $\mathbb{K}$–módulos. Entonces el producto convolución de ${}^*\mathfrak{C}$ toma, módulo este isomorfismo, la siguiente forma

$$f.g = \mu \circ (A \otimes_K f) \circ \psi \circ (C \otimes_K g) \circ \Delta_C, \quad f, g \in \mathrm{Hom}_K(C, A). \tag{6.1}$$

Recuerde que la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi : C^* & \longrightarrow & {}^*\mathfrak{C} \\ x & \longmapsto & A \otimes_\mathbb{K} x \end{array} \tag{6.2}$$

es un morfismo de anillos, donde $C^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(C, \mathbb{K})$ es el anillo de convolución de C.

Proposición 6.2.3. *Sea $(A, C)_\psi$ una estructura entrelazante tal que $C_\mathbb{K}$ es un módulo proyectivo y considere su correspondiente A–coanillo $\mathfrak{C} = A \otimes_\mathbb{K} C$. Supongamos que existe un par racional por la derecha $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, \langle -, - \rangle)$ y un anti-morfismo de $\mathbb{K}$–álgebras $\varphi : C^* \to B$ que satisfacen las siguientes hipótesis: (1) $\beta \circ \varphi = \Phi$, donde $\beta : B \to {}^*\mathfrak{C}$ es el anti-morfismo canónico asociado a $\mathcal{T}$ y Φ es el morfismo de* (6.2)*; (2) para cualquier $a \in A$ y $x \in C^*$, existe un conjunto finito $\{(a_i, x_i)\} \subset A \times C^*$ tal que $a\varphi(x) = \sum_i \varphi(x_i)a_i$. Entonces*

$$\mathrm{Rac}^l_\mathfrak{C}({}_{{}^*\mathfrak{C}}M) = \mathrm{Rac}^\mathcal{T}(M_B) = \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M),$$

para cualquier ${}^*\mathfrak{C}$–módulo por la izquierda M (usando la restricción de escalares).

Demostración. La primera igualdad es evidente. Escoge $m \in \mathrm{Rac}^\mathcal{T}(M_B)$, con un conjunto de parámetros $\{\sum_k a_{kj} \otimes_\mathbb{K} c_{kj}, m_j\}$. Entonces, para cualquier $x \in C^*$ tenemos

$$\begin{aligned} xm = m\varphi(x) &= \sum_{k,j} m_j \langle a_{kj} \otimes_\mathbb{K} c_{kj}, \varphi(x) \rangle \\ &= \sum_{k,j} m_j \beta(\varphi(x))(a_{kj} \otimes_\mathbb{K} c_{kj}) \\ &= \sum_{k,j} m_j \Phi(x)(a_{kj} \otimes_\mathbb{K} c_{kj}), \quad \Phi = \beta \circ \varphi, \\ &= \sum_{k,j} m_j a_{kj} x(c_{kj}), \end{aligned}$$

luego $\{c_{kj}, m_j a_{kj}\}$ es un conjunto de parámetros racionales de $m \in {}_{C^*}M$. Se tiene pues que $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B) \subseteq \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M)$. Recíprocamente, sean $a \in A$, $x \in C^*$ y considere el conjunto de la hipótesis (2), $\{a_i, x_i\}$. Para cualquier $m \in \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M)$ con $\rho_{\mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M)}(m) = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
x(ma) = (ma)\varphi(x) &= m(a\varphi(x)) \\
&= \sum m(\varphi(x_i)a_i), \quad a\varphi(x) = \sum_i \varphi(x_i)a_i \\
&= \sum (x_i m)a_i \\
&= \sum (m_{(0)}x_i(m_{(1)}))a_i \\
&= \sum m_{(0)}(\Phi(x_i)(1 \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)})a_i) \\
&= \sum m_{(0)}(\beta(\varphi(x_i))(1 \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)})a_i) \\
&= \sum m_{(0)}(\beta(\varphi(x_i)a_i)(1 \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)})), \quad \beta \text{ es } A-\text{lineal por la derecha} \\
&= \sum m_{(0)}(\langle 1 \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)}, \varphi(x_i)a_i\rangle) \\
&= \sum m_{(0)}(\langle 1 \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)}, a\varphi(x)\rangle) \\
&= \sum m_{(0)}(\langle a_\psi \otimes_{\mathbb{K}} m^{\psi}_{(1)}, \varphi(x)\rangle), \quad \psi(m_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} a) = \sum a_\psi \otimes_{\mathbb{K}} m^{\psi}_{(1)} \\
&= \sum m_{(0)} a_\psi x(m^{\psi}_{(1)})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $ma \in \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M)$ con $\rho_{\mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M)}(ma) = \sum m_{(0)}a_\psi \otimes_{\mathbb{K}} m^{\psi}_{(1)}$. Es decir que $\mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M)$ es un módulo entrelazante por la derecha, luego es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha [17], finalmente $\mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M) \subseteq \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B)$. □

6.3. Los módulos de Doi-Koppinen.

Sea $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–álgebra de Hopf junto con (A, ρ_A) un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra por la derecha y (C, ϱ_C) un $\mathcal{H}$–módulo coálgebra por la izquierda. Siguiendo a [36, 70], un módulo de Doi-Koppinen M es un $\mathbb{K}$–módulo con una A–acción por la izquierda y una C–coacción por la derecha ρ_M tal que

$$\rho_M(am) = \sum a_{(0)}m_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}m_{(1)}, \text{ donde } \rho_A(a) = \sum a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)},$$

para cualquier $a \in A$ y $m \in M$. Los morfismos de Doi-Koppinen son morfismos A–lineales y C–colineales. Los módulos de Doi-Koppinen y sus morfismos forman la categoría ${}_A\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$. Considere la aplicación

$$
\begin{aligned}
\psi : C \otimes_{\mathbb{K}} A^o &\longrightarrow A^o \otimes_{\mathbb{K}} C \\
c \otimes_{\mathbb{K}} a^o &\longmapsto \sum a^o_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}c,
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

donde A^o es la álgebra opuesta de A. Es fácil de averiguar que ψ satisface las ecuaciones (1.5) del Ejemplo 1.1.16, es decir que $(A^o, C)_\psi$ es una estructura entrelazante sobre $\mathbb{K}$. Consideramos pues $\mathfrak{C} = A^o \otimes_{\mathbb{K}} C$ el A^o–coanillo correspondiente a $(A^o, C)_\psi$; la A^o–biacción sobre $\mathfrak{C}$ es definida por

$$b^o.(a^o \otimes_{\mathbb{K}} c) = (ab)^o \otimes_{\mathbb{K}} c, \text{ y } (b^o \otimes_{\mathbb{K}} c).a^o = b^o\psi(c \otimes_{\mathbb{K}} a^o) = \sum (a_{(0)}b)^o \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}c.$$

Sea $M \in {}_A\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$, vamos a considerar, de manera natural, la A^o–acción por la derecha sobre M i.e. $ma^o = am$, $a \in A$, $m \in M$. Con esta nueva notación, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_M(m)a^o &= \sum m_{(0)} \otimes_{A^o} ((1 \otimes_{\mathbb{K}} m_{(1)})a^o) \\ &= \sum m_{(0)} \otimes_{A^o} (\psi(m_{(1)} \otimes_{\mathbb{K}} a^o)) \\ &= \sum m_{(0)} \otimes_{A^o} (a^o_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}m_{(1)}), \end{aligned}$$

es decir

$$\rho_M(m)a^o = \sum m_{(0)}.a^o_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}m_{(1)} = \sum a_{(0)}m_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}m_{(1)}.$$

De otra parte

$$\rho_M(am) = \rho_M(ma^o) = \sum a_{(0)}m_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}m_{(1)} = \rho_M(m)a^o.$$

Por lo tanto M es actualmente un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha. Recíprocamente, si M es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, entonces M es un A–módulo por la izquierda y la coacción $\rho_M : M \to M \otimes_{A^o} A^o \otimes_{\mathbb{K}} C$ compuesta con el isomorfismo $\iota : M \otimes_{A^o} A^o \otimes_{\mathbb{K}} C \cong M \otimes_{\mathbb{K}} C$ nos da una C–coacción sobre $M_{\mathbb{K}}$. Como ρ_M es A^o–lineal por la derecha, tenemos

$$\iota \circ \rho_M(am) = \iota \circ \rho_M(ma^o) = \iota(\rho_M(m)a^o) = \sum a_{(0)}m_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}m_{(1)},$$

luego M es un módulo de Doi-Koppinen. Por lo tanto existe un isomorfismo de categorías directo $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \cong {}_A\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$. Esta claro ahora que si $C_{\mathbb{K}}$ es un módulo plano, entonces ${}_A\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$ es una categoría de Grothendieck.

El producto convolución de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A^o)$, es definido según la ecuación (6.1), por

$$f.g(c) = \sum f(g(c_{(2)})_{(1)}c_{(1)})g(c_{(2)})_{(0)} \text{ en } A, \ f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A^o) \text{ y } c \in C. \tag{6.4}$$

Este producto es el "generalized smash product" de A por C, $\sharp(C, A)$ definido en [70, (2.1)].

Observación 6.3.1. Escoge esta vez A un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra por la derecha y C un $\mathcal{H}$–módulo coálgebra por la derecha también. Entonces, el morfismo entrelazante de [15, Example 3.1(3)] $\psi : C \otimes_{\mathbb{K}} A \to A \otimes_{\mathbb{K}} C$ enviando $c \otimes_{\mathbb{K}} a \mapsto \sum a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} ca_{(1)}$, dota $\mathfrak{C} = A \otimes_{\mathbb{K}} C$ de una estructura de A–coanillo. El producto convolución sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, extraído de ${}^*\mathfrak{C}$, se define de acuerdo con la formula

$$(f.g)(c) = \sum g(c_{(2)})_{(0)} f(c_{(1)} g(c_{(2)})_{(1)}), \ f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A), \ c \in C.$$

Este producto es el opuesto de aquel definido en [70, (2.2)].

Aplicando el Corolario 6.2.2 a los módulos de Doi-Koppinen, se tiene

Corolario 6.3.2. *Sea $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–álgebra de Hopf junto con A un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra por la derecha y C un $\mathcal{H}$–módulo coálgebra por la izquierda tal que $C_{\mathbb{K}}$ es un módulo plano. Consideramos la categoría ${}_A\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$ de módulo de Doi-Koppinen y supongamos que $\mathbb{K}$ y A son anillo QF. Si C es una $\mathbb{K}$–coálgebra semiperfecta por la derecha, entonces ${}_A\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$ es una categoría semiperfecta en el sentido de M. Harada [59].*

Ahora vamos a comprobar que, si la coálgebra es un módulo proyectivo, entonces todos los módulos de Doi-Koppinen son en realidad módulos racionales sobre un conocido anillo. En [37] los autores definen el producto cruzado $A\sharp C^*$ cuyo $\mathbb{K}$–módulo sub-yacente es $A\otimes_{\mathbb{K}}C$ y con el producto interior

$$(a\sharp x).(b\sharp y) = \sum ab_{(0)}\sharp(xb_{(1)})y,$$

donde la $\mathcal{H}$–acción por la derecha sobre C^* es inducida por la $\mathcal{H}$–acción por la izquierda sobre C. La unidad de $A\sharp C^*$ es $1\sharp\varepsilon_C$. Esta claro que las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{-\sharp\varepsilon_C} A\sharp C^*, & & C^* \xrightarrow{1\sharp-} A\sharp C^* \\ a \longmapsto a\sharp\varepsilon_C & & x \longmapsto 1\sharp x \end{array}$$

son morfismo de $\mathbb{K}$–álgebras. Un cálculo inmediato, demuestra que

$$\begin{array}{rcl} \gamma : A\sharp C^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A^o) \\ a\sharp x & \longmapsto & [c \mapsto a^o x(c)] \end{array}$$

es también un morfismo de $\mathbb{K}$–álgebras, donde $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A^o)$ es dotado del producto (6.4).

Proposición 6.3.3. *Sean $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–álgebra de Hopf, A un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra por la derecha y C un $\mathcal{H}$–módulo coálgebra por la izquierda. Considere $\mathfrak{C} = A^o\otimes_{\mathbb{K}}C$ el A^o–coanillo asociado a la estructura entrelazante $(A^o, C)_\psi$ (6.3) junto con el $\mathbb{K}$–álgebra opuesta del producto cruzado: $B = (A\sharp C^*)^o$. Supongamos que $C_{\mathbb{K}}$ es un módulo proyectivo. Entonces $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, \langle -, -\rangle)$ es un par racional sobre A^o, donde $\langle -, -\rangle$ es definida por*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{C} \times B & \longrightarrow & A^o \\ (a^o \otimes_{\mathbb{K}} c, (b\sharp x)^o) & \longmapsto & [a^o \otimes_{\mathbb{K}} c, (b\sharp x)^o] = a^o b^o x(c) \end{array}$$

$a, b \in A$, $c \in C$, $x \in C^*$. En particular, $(A^o, C)_\psi$, $\mathcal{T}$ y $\varphi = (1\sharp-)^o : C^* \to B$ satisfacen las hipótesis (1) y (2) de la Proposición 6.2.3 y luego

$$\mathrm{Rac}^l_{\mathfrak{C}}({}_{^*\mathfrak{C}}M) = \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M) = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B),$$

para cualquier ${}^*\mathfrak{C}$–módulo M (usando la restricción de escalares).

Demostración. Está claro que $\langle -, - \rangle$ es A^o–bilineal. Considere ahora la transformación natural asociada a $\langle -, - \rangle$:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_N : \quad N \otimes_{A^o} \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^o}(B_{A^o}, N) \\ n \otimes_{A^o} a^o \otimes_{\mathbb{K}} c & \longmapsto & [(b\sharp x)^o \mapsto n[a^o \otimes_{\mathbb{K}} c, (b\sharp x)^o] = n(a^o b^o x(c))]. \end{array}$$

Sea $\{c_l, x_l\}$ una base dual de $C_{\mathbb{K}}$, y $\sum_i n_i \otimes_{A^o} 1 \otimes_{\mathbb{K}} c_i \in N \otimes_{A^o} \mathfrak{C}$ cuya image por α_N es cero. Entonces tenemos $\alpha_N(\sum_i n_i \otimes_{A^o} 1 \otimes_{\mathbb{K}} c_i)((1\sharp x_l)^o) = \sum_i n_i x_l(c_i) = 0$, para todos los l. Ahora,

$$\sum_i n_i \otimes_{A^o} 1 \otimes_{\mathbb{K}} c_i = \sum_{i,l} n_i \otimes_{A^o} 1 \otimes_{\mathbb{K}} x_l(c_i) c_l = \sum_l (\sum_i n_i x_l(c_i)) \otimes_{A^o} 1 \otimes_{\mathbb{K}} c_l = 0,$$

es decir que α_N es inyectiva para cualquier módulo N_{A^o}. Por lo tanto $\mathcal{T}$ es un sistema racional por la derecha. Como $\beta : B \to {}^*\mathfrak{C}$ vía $(b\sharp x)^o \mapsto [a^o \otimes_{\mathbb{K}} c \mapsto [a^o \otimes_{\mathbb{K}} c, (b\sharp x)^o]]$ es una anti-extensión de $\mathbb{K}$–álgebras, y B es una extensión de A^o, $\mathcal{T}$ es ahora un par racional por la derecha. Sean $a^o \in A^o$, $c \in C$ y $x \in C^*$, entonces

$$\beta(\varphi(x))(a^o \otimes_{\mathbb{K}} c) = \langle a^o \otimes_{\mathbb{K}} c, (1\sharp x)^o \rangle = a^o x(c) = \Phi(x)(a^o \otimes_{\mathbb{K}} c)$$

lo que implica la condición (1) en la Proposición 6.2.3. Si $a^o \in A^o$ y $x \in C^*$, es fácil de averiguar que el conjunto finito $\{a^o_{(0)}, x a_{(1)}\}$, donde $\rho_A(a) = \sum a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} a_{(1)}$, cumple con la condición (2) de la Proposición 6.2.3. La última afirmación es ahora una aplicación directa de la Proposición 6.2.3. $\square$

Teorema 6.3.4. *Sean $\mathcal{H}$ una $\mathbb{K}$–álgebra de Hopf, A un $\mathcal{H}$–comódulo álgebra por la derecha y C un $\mathcal{H}$–módulo coálgebra por la izquierda. Considere $\mathfrak{C} = A^o \otimes_{\mathbb{K}} C$ el A^o–coanillo asociado a la estructura entrelazante $(A^o, C)_\psi$* (6.3) *junto con el $\mathbb{K}$–álgebra opuesta del producto cruzado: $B = (A\sharp C^*)^o$. Supongamos que $C_{\mathbb{K}}$ es un módulo proyectivo y consideramos, como en la Proposición 6.3.3, el par racional por la derecha $\mathcal{T} = (\mathfrak{C}, B, [-, -])$ junto con $\mathfrak{a} = \mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(B_B)$. Si $A_{\mathbb{K}}$ es un módulo plano y Rac^l_C es funtor exacto. Entonces*

(a) $\mathrm{Rac}^l({}_{C^*}C^*)$ *es un $\mathcal{H}$–submódulo de $C^*_{\mathcal{H}}$, y $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$ es un ideal bilátero de B.*

(b) $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*) = \mathfrak{a}$*; además existe un isomorfismo natural*

$$U \circ \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}_B, -) \cong \mathrm{Hom}_{C^*}(\mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*), -) \circ U,$$

donde U es el funtor de restricción de escalares por la derecha asociado a la anti-extensión $C^* \to B$.

Demostración. (a) Considere $y \in \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$ con un conjunto de parámetros por la izquierda $\{y_i, c_i\} \subseteq C^* \times C$. Sea $h \in \mathcal{H}$, $x \in C^*$, como en [37, Lemma 3.1], se tiene, para cualquier $c \in C$,

$$\begin{aligned}(x(yh))(c) &= \sum_{(c)} x(c_{(1)})y(hc_{(2)}) \\ &= \sum_{(c),(h)} x(\varepsilon(h_{(1)})c_{(1)})y(h_{(2)}c_{(2)}) \\ &= \sum_{(c),(h)} x(S(h_{(1)})h_{(2)}c_{(1)})y(h_{(3)}c_{(2)}) \\ &= \sum_{(h)} (xS(h_{(1)})y)(h_{(2)}c) \\ &= \sum_{(h),i} y_i(h_{(2)}c)(xS(h_{(1)}))(c_i),\end{aligned}$$

donde S es la antípoda de $\mathcal{H}$. Por lo tanto $\{y_i h_{(2)}, S(h_{(1)})c_i\}_{(h),i}$ es un conjunto de parámetros racionales por la izquierda de yh. Es decir que $yh \in \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$. Esto en conjugación con el Teorema 5.2.3 aplicado a C, implican que $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$ es un ideal bilátero de $A\sharp C^*$.
(b) Sean $x \in C^*$, $a \otimes_{\mathbb{K}} y \in A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$ y $\{y_i, c_i\}$ un conjunto de parámetros racionales por la izquierda de y, entonces

$$x(a \otimes_{\mathbb{K}} y) = \sum a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} ((xa_{(1)})y) = \sum (a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} y_i)x(a_{(1)}c_i);$$

luego $\{a_{(0)} \otimes_{\mathbb{K}} y_i, a_{(1)}c_i\}$ es un conjunto de parámetros racionales para $a \otimes_{\mathbb{K}} y \in {}_{C^*}(A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*))$. Como en la demostración de la Proposition 6.3.3, $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$ es un B–módulo racional por la derecha, luego $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*) \subseteq \mathfrak{a}$. Recíprocamente, $\mathfrak{a}$ es un $\mathfrak{C}$–comódulo por la derecha, según el Teorema 1.3.19; olvidando la A^o–acción $\mathfrak{a}$ es ahora un C–comódulo por la derecha. Aplicando el Teorema 5.2.3 a C, se tiene $\mathfrak{a} = \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)\mathfrak{a}$. Ahora es fácil de ver que $\mathfrak{a} = A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)$. Considere un módulo M_B denotaremos por $F(M) = \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}_B, M)$, entonces

$$\begin{aligned}F(M) &= \mathrm{Hom}_B((A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*))_B, M) \\ &= \mathrm{Hom}_{B^o}({}_{B^o}(A \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)), M) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{A\sharp C^*}({}_{A\sharp C^*}(A \otimes_{\mathbb{K}} C^* \otimes_{C^*} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)), M) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{A\sharp C^*}({}_{A\sharp C^*}((A\sharp C^*) \otimes_{C^*} \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)), M) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{C^*}({}_{C^*}(\mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)), M),\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la adjunción asociada a la extensión $C^* \to A\sharp C^*$. Lo que termina la demostración. □

Observación 6.3.5. Según la Proposición 6.3.3 y los Teoremas 6.3.4 y 5.2.3, se tiene

$$\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}(M_B) = \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}M) = M.\mathfrak{a} = \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*).M, \tag{6.5}$$

para cualquier B–módulo por la derecha M, es decir $\mathrm{Rac}^{\mathcal{T}}$ es un funtor exacto. Además la ecuación (6.5) establece un funtor radical $t : {}_{A\sharp C^*}\mathcal{M} \to {}_{A}\mathcal{M}(\mathcal{H})^C$, actuando sobre los objetos por $M \to \mathrm{Rac}^l_C({}_{C^*}C^*)M$. Notemos que t ha sido definido en [37, Lemma 2.9], para coálgebras sobre cuerpos. Escogiendo esta vez C una coálgebra semiperfecta por la izquierda y por la derecha sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{K}$. Utilizando [12, Theorem 2.4] y [54, Proposition 2.2], se tiene una generalización de la mayoría de los resultados de [37]. Vamos a citar esto en el siguiente orden; [37, Prposition 2.5] es el Lema 6.2.1, [37, Proposition 2.7, Lemma 2.9(i),(ii), (iii)] son derivaciones de la Proposición 6.3.3 y la Proposición 5.2.2, [37, Theorem 3.5] se deduce del Corolario 5.2.5 en conjugación con el Teorema 6.3.4(b), [37, Corollary 3.7] es consecuencia del Lema 5.2.1 y la Proposición 6.3.3, [37, Proposition 3.9] es un caso particular de la Proposición 5.2.2 teniendo en cuenta la Proposición 6.3.3, y finalmente [37, Theorem 4.3] es justamente el Corolario 5.2.6(b), según la Proposición 6.3.3.

Apéndices

Introducción

Presentaremos en este capítulo todas las herramientas técnicas que hemos visto necesarias para demostrar los resultados de los capítulos anteriores. A nuestro conocimiento algunas de las nociones son muy bien conocidas pero no figuran en ninguna referencia concreta, así las hemos acompañado de una demostración; ejemplos de esta situación son los resultado de la sección **A**.3 y el primer párrafo de la sección **A**.4. En las secciones **A**.1 y **A**.2, hemos citado varios resultados sin demostración, o bien porque esta es sencilla o bien hemos citados una referencia antes, de todos modos la mayoría de ellos vienen dados en [1], [7, 8]. Los últimos párrafos de la última sección forman un recordatorio literal sobre los cotriples y sus cogeneradores universales citados en [11], [38] y [69].

A.1. La categoría de A–anillos y sus módulos.

Fijamos $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo, con 1 y $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ su categoría de $\mathbb{K}$–módulos unitarios. La noción de $\mathbb{K}$–álgebra tiene su generalización de la siguiente manera. Llamaremos $\mathbb{K}$–*anillo* a todo grupo aditivo A tales que

(I) A es un $\mathbb{K}$–bimódulo (unitario) central, i.e. $ka = ak$, para todo $a \in A$, $k \in \mathbb{K}$.

(II) A es un anillo asociativo cuya multiplicación es un morfismo $\mathbb{K}$–bilineal $\mu_A : A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$.

Si existe un morfismo $\mathbb{K}$–bilineal $\eta : \mathbb{K} \to A$ tal que $\mu \circ (A \otimes_{\mathbb{K}} \eta) = \mu \circ (\eta \otimes_{\mathbb{K}} A) = A$, entonces $\eta(1)$ es claramente una unidad de A, es decir que A en este caso es una $\mathbb{K}$-álgebra.

Morfismo de $\mathbb{K}$*–anillos.* Un *morfismo de* $\mathbb{K}$*–anillos* es un morfismo $\varphi : A' \to A$, $\mathbb{K}$–bilineal tales que $\varphi \circ \mu_{A'} = \mu_A \circ (\varphi \otimes_{\mathbb{K}} \varphi)$. Si consideramos $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de $\mathbb{K}$–anillos y $A := \Pi_{i \in I} A_i$ su producto de $\mathbb{K}$–bimódulos, es fácil de ver que A es un $\mathbb{K}$–anillo con el producto

$$\begin{aligned} \mu_A : (\Pi_I A_i) \otimes_{\mathbb{K}} (\Pi_I A_i) &\longrightarrow \Pi_I A_i \\ (a_i)_{i \in I} \otimes_{\mathbb{K}} (a'_i)_{i \in I} &\longmapsto (\mu_{A_i}(a_i \otimes_{\mathbb{K}} a'_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

Así cada proyección canónica $\pi_i : A \to A_i$, se convierte en un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos.

La categoría de A–módulos. Consideramos un $\mathbb{K}$–anillo A, denotaremos por $\mathfrak{M}_A$ (${}_A\mathfrak{M}$), su categoría de todos los A–módulos por la derecha (por la izquierda), implícitamente objetos de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$. Un A–módulo por la derecha M, se dice que es *unitario*, si $MA = M$ en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ (MA es el $\mathbb{K}$-submódulo generado por los elementos de forma ma, $m \in M$, $a \in A$). La categoría de todos los A–módulos unitarios por la derecha (por la izquierda), será denotada por $\mathcal{M}_A$ (${}_A\mathcal{M}$). Si la multiplicación μ_A es sobreyectiva, entonces el propio $\mathbb{K}$–anillo A es claramente un A–módulo unitario por la derecha y por la izquierda. En general, se puede ver que $\mathrm{End}(A_A)$ y $\mathrm{End}({}_AA)$ son en realidad dos $\mathbb{K}$-álgebras. Está claro que hay un funtor fiel $\mathcal{O} : \mathcal{M}_A \to \mathfrak{M}_A$. De otra parte, se puede observar que si A es un A–módulo unitario (i.e. $A^2 = A$), entonces cada A–módulo por la derecha M contiene un A-sub-módulo unitario maximal MA. En este caso, hay un funtor $(-)A : \mathfrak{M}_A \to \mathcal{M}_A$. Estos dos funtores están ligados por la adjunción $\mathcal{O} \dashv (-)A$.

La aplicación $\omega_{A',A}$. Sea $\varphi : A' \to A$ un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos, está claro que cualquier A–módulos admite una estructura de A'–módulo, inducida por φ, así cualquier morfismo que es A–lineal es particularmente A'–lineal. Se tiene pues el funtor de restricción $(-)_\varphi$: $\mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_{A'}$ cuya restricción a $\mathcal{M}_A$ no tiene necesariamente la "imagen.^{en} $\mathcal{M}_{A'}$. Considere X_A un A–módulo por la derecha y ${}_AY$ un A–módulo por la izquierda, tal que $XA = X$ (i.e. unitario) consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \omega_{A',A} : X \times Y &\longrightarrow X \otimes_A Y \\ (x, y) &\longmapsto x \otimes_A y \end{aligned}$$

Sea $a' \in A'$, $x \in X$, $y \in Y$, con $x = \sum_i x_i a_i$, $x_i \in X$, $a_i \in A$. Se tiene pues

$$\begin{aligned} \omega_{A',A}((xa', y)) &= \textstyle\sum_i x_i \otimes_A (a_i\varphi(a'))y \\ &= \textstyle\sum_i x_i \otimes_A a_i(\varphi(a')y) \\ &= (\textstyle\sum_i x_i a_i) \otimes_A (a'y) \\ &= \omega_{A',A}((x, a'y)), \end{aligned}$$

lo que implica que $\omega_{A',A}$ se puede extender a

$$\omega_{A',A} : X \otimes_{A'} Y \to X \otimes_A Y. \tag{\textbf{A}.1}$$

Además se puede ver fácilmente que $\omega_{-,-} : (- \otimes_{A'} -) \to (- \otimes_A -)$ es una transformación natural; siendo los funtores $(-)_\varphi \otimes_{A'} -$, $(- \otimes_A -) : \mathcal{M}_A \times {}_A\mathfrak{M} \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$.

La adjunción asociada a bimódulos. Sean A, A' dos $\mathbb{K}$–anillos. Un (A', A)–bimódulo unitario M es un A'–módulo unitario por la izquierda y un A–módulo unitario por la derecha tal que $a'(ma) = (a'm)a$ para todo $m \in M$, $a \in A, a' \in A'$; la categoría de todos los (A', A)–bimódulos unitarios y sus morfismos ((A', A)–bilineales) se denota por ${}_{A'}\mathcal{M}_A$. Si X, Y son dos (A', A)–bimódulos, entonces el $\mathbb{K}$–módulo $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ es considerado canónicamente como A'–bimódulo (no necesariamente unitario), mientras que $\mathrm{Hom}_{A'}(X, Y)$ es considerado como A–bimódulo. De esta manera, a cualquier (A', A)–bimódulo Z, se le asocian dos funtores $-\otimes_{A'} Z : \mathfrak{M}_{A'} \to \mathfrak{M}_A$ y $\mathrm{Hom}_A(Z,-) : \mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_{A'}$, con la siguiente adjunción

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(X\otimes_{A'} Z, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{A'}(X, \mathrm{Hom}_A(Z,Y)) \\ f &\longmapsto [x \mapsto [z \mapsto f(x\otimes_{A'} z)]] \\ [x\otimes_{A'} z \mapsto g(x)(z)] &\longleftarrow\!\shortmid\; g \end{aligned} \tag{\textbf{A}.2}$$

Los anillos sobre $\mathbb{K}$*–anillos.* En lo que sigue vamos a definir la noción de un A–anillo, donde A es un $\mathbb{K}$–anillo. Es decir estructuras con multiplicación (producto) A–bilineal y A–equilibrada; aquí el anillo de escalarse es A y el anillo de base total es $\mathbb{K}$. Consideramos $\mathcal{B}$ un $\mathbb{K}$–módulo, se dice que $\mathcal{B}$ es un A*–anillo*, si

Ring.1) $\mathcal{B}$ es un A–bimódulo, no necesariamente unitario;

Ring.2) La multiplicación $\mu_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}\otimes_A\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ es A–bilineal y asociativa i.e. $\mu_{\mathcal{B}}\circ(\mu_{\mathcal{B}}\otimes_A\mathcal{B}) = \mu_{\mathcal{B}} \circ (\mathcal{B}\otimes_A \mu_{\mathcal{B}})$.

Por el momento, si $\varphi : A \to \mathcal{B}$ es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos, consideramos $\mathcal{B}$ como A–bimódulo por la restricción de φ. Se tiene pues au $(ba)b' = (b\varphi(a))b' = b(\varphi(a)b') = b(ab')$, para cualquier $a \in A$ y $b, b' \in \mathcal{B}$, es decir que $\mathcal{B}$ es un A–anillo, llamado A*–anillo extensión de* A.

Los Módulos sobre A*–anillos.* Consideramos $\mathcal{B}$ un A–anillo y M un $\mathbb{K}$–módulo, se dice que M es un $\mathcal{B}$–módulo por la derecha, si

1). M es un A–módulo por la derecha no necesariamente unitario;

2). La acción $\varsigma_M : M\otimes_A \mathcal{B} \to M$ es un morfismo A–lineal por la derecha que satisface la asociatividad, i.e. $\varsigma_M \circ (M\otimes_A \mu_{\mathcal{B}}) = \varsigma_M \circ (\varsigma_M \otimes_A \mathcal{B})$.

La segunda condición sobre $\mathcal{B}$–módulo, puede cambiarse por la siguiente: existe un morfismo A–lineal por la derecha $\varrho_M : M \to \mathrm{Hom}_{-A}(\mathcal{B}, M)$, donde $\mathrm{Hom}_{-A}(\mathcal{B}, M)$ es considerado de manera canónica como A–módulo por la derecha, y que convierte el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varrho_M"] \arrow[d, "\varrho_M"'] & & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \arrow[d, "h(\mu, M)"] \\ \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M) \arrow[r, "h(\mathcal{B}, \varrho_M)"] & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}, M)) \cong & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{B}\otimes_A \mathcal{B}, M) \end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo viene de la adjunción (**A**.2). Un morfismo de $\mathcal{B}$–módulos por la derecha $f : (M, \varsigma_M) \to (M', \varsigma_{M'})$ es un morfismo A–lineal por la derecha tal que $\varsigma_{M'} \circ f = (f\otimes_A \mathcal{B}) \circ \varsigma_M$. Un $\mathcal{B}$–módulo (M, ς_M), se dice que es *unitario* si ς_M es sobreyectiva, lo que es equivalente a que $M\mathcal{B} = M$, donde $M\mathcal{B}$ es el A–submódulo de M generado por los elementos de forma $\{mb |\, m \in M,\, b \in \mathcal{B}\}$. Se puede observar que si M es unitario, entonces el A–módulo subyacente M_A es unitario si $\mathcal{B}_A$ lo es. El objeto (M, ϱ_M) se dice que es *fiel*, si ϱ_M es un inyectiva. La categoría de todos los $\mathcal{B}$–módulos unitarios por la derecha (resp. por la izquierda) y sus morfismos, será denotada por $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ (resp. ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{M}$). Como ha sido comentado antes, si en la condición **Ring**.1) $\mathcal{B}$ es un A–bimódulo unitario, se tiene el funtor del olvido $\mathcal{O}_A : \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{M}_A$. El caso general queda muy intrincado ver cuando el A–módulos subyacente de un $\mathcal{B}$–módulo unitario es también unitario. El emparejamiento entre anillos y (co)–anillo mediante, pares racionales sección 1.3 del capítulo 1, resuelve parcialmente este problema por el caso de A–anillos extensiones de A restringiéndose a los $\mathcal{B}$–módulos racionales, la Observación 1.3.22.

Un morfismo de $A' - A$–anillos, entre un A'–anillo $\mathcal{B}'$ y un A–anillo $\mathcal{B}$ con $\mathcal{B}_A$ un módulo unitario, es un par de morfismos $(\varphi, \phi) : (A', \mathcal{B}') \to (A, \mathcal{B})$, donde $\varphi : A' \to A$ es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos y $\phi : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ es un morfismo A'–bilineal ($\mathcal{B}$ es un A'–bimódulo por restricción) tal que $\phi \circ \mu_{\mathcal{B}'} = \mu_{\mathcal{B}} \circ \omega_{A',A} \circ (\phi \otimes_{A'} \phi)$.

Sea A un $\mathbb{K}$–anillo y $\mathcal{B}$ un A–anillo. Para cada pareja $X_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}Y$ de $\mathcal{B}$–módulos tal que $X\mathcal{B} = X$ (i.e. unitario), uno puede definir, como en el caso de $\mathbb{K}$–anillos, la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \omega_{A,\mathcal{B}} : X \otimes_A Y &\longrightarrow X \otimes_{\mathcal{B}} Y \\ x \otimes_A y &\longmapsto x \otimes_{\mathcal{B}} y \end{aligned}$$

El producto tensor de dos A–anillos. Sean A y B dos $\mathbb{K}$-álgebras. Consideramos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, un A–anillo y un B–anillo juntos con su $\mathbb{K}$-producto tensor $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$ considerado como $(R = A \otimes_{\mathbb{K}} B)$–bimódulo de manera canónica. La siguiente multiplicación

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}) \otimes_R (\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}) \arrow[r, dotted, "\mu_{\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}}"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{A},\mathcal{B}}"'] & \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B} \\ (\mathcal{A} \otimes_A \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{K}} (\mathcal{B} \otimes_B \mathcal{B}) \arrow[ur, "\mu_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{K}} \mu_{\mathcal{B}}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\eta_{-,-}$ es el isomorfismo natural de la sección **A**.3 de este capítulo, define sobre $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$ una estructura de R–anillo.

Los $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulos. Sean A y B dos $\mathbb{K}$–anillos. Consideramos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, un A–anillo y un B–anillo. Sea M un (A, B)–bimódulo tal que $(M, \varsigma_M) \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ con ς_M es A–lineal por la izquierda y $(M, \nu_M) \in {}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ con ν_M es B–lineal por la derecha. Considerando $\mathcal{A} \otimes_A M$ como un $\mathcal{B}$–módulo por la derecha con la acción $\mathcal{A} \otimes_A \varsigma_M$ y $M \otimes_B \mathcal{B}$ como $\mathcal{A}$–módulo por la izquierda con la acción $\nu_M \otimes_B \mathcal{B}$, es fácil de comprobar que ς_M es morfismo de $\mathcal{A}$–módulos por la izquierda si y sólo si ν_M es un morfismo de $\mathcal{B}$–módulos por la derecha. En este caso se dice que M es un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulo. Un morfismo de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulos es un morfismo $\mathcal{A}$–lineal por la izquierda y $\mathcal{B}$–lineal por la derecha. Se denota por ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, la categoría de todos los $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–bimódulos unitarios (i.e. por la izquierda y por la derecha) y sus morfismos.

A.2. Anillos con unidades locales y (bi)módulos unitarios.

Siguiendo a [1] (véase también [7] y [8]), un anillo A se dice que es *un anillo con unidades locales*, si para cualquier, $a_1, \cdots, a_n$ en A existe un elemento idempotente e tal que $a_ie = ea_i = a$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Esto es equivalente a que, para cada $a, a' \in A$ existe un anillo unitario de forma $A_e := eAe$, para un cierto idempotente e, tal que $a, a' \in A_e$.

Cualquier anillo con unidad es trivialmente un anillo con unidades locales. Por otra parte cualquier anillo con suficientes idempotentes ortogonales $A = \oplus_{i\in I}Ae_i = \oplus_{i\in I}e_iA$ es claramente un anillo con unidades locales, [46], [45]. Cualquier anillo con suficientes idempotentes ortogonales extraído de una categoría $\mathbb{K}$–abeliana y pequeña, es un $\mathbb{K}$–anillo y con unidades locales.

Los Morfismos de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Sea A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales, es decir un $\mathbb{K}$–anillo cuya multiplicación admite unidades locales. Se denota por $\mathbf{Idemp}(A)$ el conjunto de todos los elementos idempotentes de A. Sean ahora A, A' dos $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, un morfismo de $\mathbb{K}$–módulos $\varphi : A' \to A$, se dice que es *un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales* si φ es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos y si para cualquier $a \in A$, existe un idempotente $e' \in \mathbf{Idemp}(A')$ tal que $a\varphi(e') = ae' = \varphi(e')a = e'a = a$. Está claro que si $\sigma : A \to A$ es un auto-morfismo de $\mathbb{K}$–anillos, entonces σ y σ^{-1} son morfismos de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. De esta manera un sub-anillo A' de un $\mathbb{K}$–anillo A con unidades locales, es un $\mathbb{K}$–módulo de A tal que la inyección $A' \hookrightarrow A$ sea un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Está claro que $\mathbf{Im}(\varphi)$ es un subanillo de A. Si $\{A_i\}_I$ es una familia de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales, es fácil comprobar que $A = \Pi_I A_i$ es también un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales y que cada proyección canónica $\pi_i : A \to A_i$ es un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales.

La categoría de A–módulos unitarios. Consideramos A un $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Cualquier A–módulo unitario por la derecha M es ahora un A–módulo que satisface: Para cualquier $m \in M$, existe $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ tal que $me = m$. La categoría $\mathcal{M}_A$ tiene conúcleos y coproducto; por lo tanto admite cualquier límite inductivo. Se puede comprobar que el (co)núcleo de un morfismo en $\mathcal{M}_A$ se calcula en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$, así los isomorfismos núcleo-conúcleo y conúcleo-núcleo son satisfechos. El producto en $\mathcal{M}_A$ se calcula de la siguiente manera: Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ un familia de A–módulos unitarios por la derecha, consideramos $\Pi_I M_i$ el $\mathbb{K}$–módulo producto cartesiano, como A–módulo por la derecha canónicamente. El A–submódulo $(\Pi_I M_i)A$ es un objeto de $\mathcal{M}_A$ y que juega el papel del producto de $\{M_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{M}_A$. Así $\mathcal{M}_A$ es un categoría abeliana completa, co-completa y si $(M, \varsigma_M) \in \mathcal{M}_A$ con $\pi : \mathbb{K}^{(I)} \to M \to 0$ un representación libre en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$, entonces

$$A^{(I)} \cong \mathbb{K}^{(I)} \otimes_{\mathbb{K}} A \xrightarrow{\pi\otimes_{\mathbb{K}}A} M \otimes_{\mathbb{K}} A \xrightarrow{\varsigma_M} M \longrightarrow 0$$

es una representación de M_A en $\mathcal{M}_A$. Además la exactitud del límite directo en $\mathcal{M}_A$ se comprueba en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$. Por lo tanto $\mathcal{M}_A$ es una categoría de Grothendieck completa.

Transformaciones naturales y límites directos. Fijamos $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ y consideramos el A–módulo por la derecha eA. El módulo eA es un sumando directo de A, en efecto

$A = eA \oplus \langle a - ea |\, a \in A\rangle$. Asociada a eA existe una adjunción canónica $- \otimes_{\mathrm{End}(A_{eA})} eA \dashv \mathrm{Hom}_A(eA, -)$. Ahora un cálculo evidente muestra que $\mathrm{End}(A_{eA}) \cong eAe$, como anillos unitarios, y que $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \cong \{m \in M |\, me = m\}$, isomorfismo de eAe–módulos por la derecha. Finalmente, $\mathrm{Hom}_A(eA, -) \cong - \otimes_A Ae$ es un isomorfismo natural, luego eA es un A–módulo finitamente generado y proyectivo. Otros funtores, con mucha más importancia, asociados al idempotente e, vienen en seguida. Sea M un A–módulo por la izquierda (no necesariamente unitario), se puede ver claramente que $M = eM \oplus \langle m - em |\, m \in M\rangle$ suma directa en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$, donde eM es naturalmente isomorfo al $\mathbb{K}$–módulo $eA \otimes_A M$. Además si $f : M \to N$ es A–lineal, entonces $f_e : eM \to eN$ es $\mathbb{K}$–lineal. Existen pues dos funtores

$$\begin{array}{ll} D_e^A : {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}, & eA \otimes_A - : {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}} \\ \quad M \longmapsto eM & \quad M \longmapsto eA \otimes_A M \end{array}$$

tal que $D_e^A \cong eA \otimes_A -$ es un isomorfismo natural. De otra parte existen dos transformaciones naturales

$$\begin{array}{ll} \gamma_{e,X} : X \longrightarrow eA \otimes_A X, & \tau_{e,X} : eA \otimes_A X \longrightarrow X \\ \quad x \longmapsto e \otimes_A x & \quad ea \otimes_A x \longmapsto eax \end{array} \qquad (\mathbf{A}.3)$$

para cualquier $X \in {}_A\mathfrak{M}$. Si X es un (A, B)–bimódulo (B es otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales), entonces $\gamma_{e,X}$ y $\tau_{e,X}$ se convierten B–lineales por la derecha. Está claro que $\gamma_{e,-} \circ \tau_{e,-} = eA \otimes_A -$. Sea ahora $e' \in \mathbf{Idemp}(A)$ otro idempotente y $f : eA \to e'A$ un morfismo A–lineal (observe que $e'f(e) = f(e)$). Entonces

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma_{e,X}"] \arrow[d, "\lambda_{f(e)}"'] & eA \otimes_A X \arrow[d, "f \otimes_A X"] \\ X \arrow[r, "\gamma_{e',X}"] & e'A \otimes_A X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} eA \otimes_A X \arrow[r, "\tau_{e,X}"] \arrow[d, "f \otimes_A X"'] & X \arrow[d, "\lambda_{f(e)}"] \\ e'A \otimes_A X \arrow[r, "\tau_{e',X}"] & X \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{A}.4)$$

donde $\lambda_{f(e)} : X \to X$ es la multiplicación por la izquierda por el elemento $f(e)$. Consideramos el siguiente orden $\leq$ sobre $\mathbf{Idemp}(A)$, definido en [1]

$$e \leq e' \Longleftrightarrow e = ee' = e'e$$

está claro que es un orden parcial sobre $\mathbf{Idemp}(A)$. Para cualquier módulo X_A y cualquier pareja $e \leq e'$, considere $\mu_{ee'} : Xe \to Xe'$ y $\mu_e : Xe \to X$ las inyecciones canónicas. Así, si $e \leq e' \leq e''$, está claro que $\mu_{ee''} = \mu_{e'e''} \circ \mu_{ee'}$, luego (Xe, μ_e) forman un sistema dirigido de $\mathbb{K}$–módulos en X. Además si X es un (A', A)–bimódulo, (Xe, μ_e) se convierte en sistema dirigido de A'–submódulos de X. De esta manera, es fácil comprobar que ${}_AA = \varinjlim(Ae)$ y que X es ahora unitario por la derecha si y sólo si $\varinjlim(Xe) = X$ en $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$. Para obtener sistemas dirigidos dentro de la categoría $\mathcal{M}_A$, se consideran los módulos $(Xe \otimes_{eAe} eA, \mu'_e)$, donde $\mu'_{ee'} : Xe \otimes_{eAe} eA \to Xe' \otimes_{e'Ae'} e'A$, $e \leq e'$ y $\mu'_e : Xe \otimes_{eAe} eA \to X$, son las aplicaciones canónicas; se tiene pues que

$$X_A \cong \varinjlim(Xe \otimes_{eAe} eA, \mu'_e)$$

La adjunción asociada a bimódulos. Sea M un (A', A)–bimódulo tal que M_A sea un módulo unitario, la adjunción ($\mathbf{A}$.2) se restringe a los módulos unitarios; en efecto el funtor $-\otimes_{A'} M : \mathcal{M}_{A'} \to \mathcal{M}_A$ es un adjunto por la izquierda del funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)A' : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_{A'}$. En efecto, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_A(X \otimes_{A'} M, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A'}(X, \mathrm{Hom}_A(M, Y)A') \\ f & \longmapsto & f(x \otimes_{A'} -) \\ [x \otimes_{A'} m \mapsto g(x)(m)] & \longleftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

es isomorfismo natural bien definido, gracias a la igualdad $f(x \otimes_{A'} -)e = f(x \otimes_{A'} -)$, para cualquier $xe = x \in X$, $e\mathbf{Idemp}(A')$. Para cualquier módulo unitario M_A existe un isomorfismo de A–módulos

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A, M)A \\ m & \longmapsto & [a \mapsto ma] \\ f(e) & \longleftarrow\!\shortmid & fe = f,\, e \in \mathbf{Idemp}(A) \end{array}$$

Considere ahora $\varphi : A' \to A$ un morfismo de $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales. Por definición, A es ahora un (A', A)–bimódulo unitario, entonces se tiene como antes que $-\otimes_{A'} A$ es adjunto por la izquierda de $\mathrm{Hom}_A(A, -)A'$. De otra parte existe un isomorfismo natural entre el funtor $(-)_\varphi : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_{A'}$ (olvidando la A–acción) y el funtor $\mathrm{Hom}_A(A, -)A'$, que viene dado por

$$\begin{array}{rcl} Y_\varphi & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A, Y)A' \\ y & \longmapsto & [a \mapsto ya] \\ f(\varphi(e)) & \longleftarrow\!\shortmid & fe \end{array}$$

Ahora la counidad y la unidad de la adjunción $-\otimes_{A'} A \dashv (-)_\varphi$, son

$$\begin{array}{rcl} \xi_{Y_A} : Y \otimes_{A'} A & \longrightarrow & Y, \\ y \otimes_{A'} a & \longmapsto & ya \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \eta_{X_{A'}} : X & \longrightarrow & X \otimes_{A'} A \\ x & \longrightarrow & x \otimes_{A'} \varphi(e),\ (xe = x) \end{array}$$

Por lo tanto φ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales si y sólo si η_- y ξ_- son isomorfismos naturales si y sólo si $-\otimes_{A'} A$ es una equivalencia de categoría con inverso $(-)_\varphi$.

Los módulo finitamente generados y proyectivos. La familia de A–módulos unitarios por la derecha (por la izquierda) $\{eA\}_{e\in\mathbf{Idemp}(A)}$ ($\{Ae\}_{e\in\mathbf{Idemp}(A)}$), forma una familia de generadores proyectivos finitamente generados de la categoría de A–módulos unitarios por la derecha (por la izquierda). Sea pues P_A cualquier módulo unitario, supongamos que P es finitamente generado y proyectivo, entonces existe un conjunto finito $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ de idempotentes de A, tal que

$$\oplus_{1\leq i\leq n} e_i A \cong P \oplus P', \quad \text{para un cierto } P' \in \mathcal{M}_A.$$

Consideramos las siguientes aplicaciones A–lineales por la derecha,

$$p_i^* : P \longrightarrow \oplus_{1\leq i\leq n} e_i A \xrightarrow{\pi_i} e_i A \hookrightarrow A,$$

donde π_i es la proyección canónica. De otra parte consideramos los elementos de P definidos por: $p_i = \tau(e_i)$, $i = 1, \cdots, n$, donde

$$\tau : e_i A \xrightarrow{\tau_i} \oplus_{1\leq i\leq n} e_i A \longrightarrow P.$$

Para cualquier $p \in P$, se puede comprobar que $p = \sum_{1\leq i\leq n} p_i p_i^*(p)$. Esto es el criterio de la base dual, respeto de un módulo unitario finitamente generado y proyectivo. Consideramos ahora el dual por la derecha $P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$, se tiene pues

$$\mathrm{Hom}_A(P, A) \oplus \mathrm{Hom}_A(P', A) \cong \oplus_{1\leq i\leq n} \mathrm{Hom}_A(e_i A, A) \cong \oplus_{1\leq i\leq n} A e_i$$

lo que significa que P^* es un A–módulo unitario por la izquierda y finitamente generado proyectivo. Utilizando el criterio de la base dual, se tiene para cualquier módulo Q_A, el siguiente isomorfismo $\mathbb{K}$–lineal

$$\begin{aligned} \xi_{Q,P} : Q \otimes_A P^* &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, Q) \\ q \otimes_A \sigma &\longmapsto [p \mapsto q\sigma(p)] \\ \textstyle\sum_i g(p_i) \otimes_A p_i^* &\longleftarrow\!\!\shortmid\; g \end{aligned} \qquad (\mathbf{A}.5)$$

Finalmente, consideramos N un (A, B)–bimódulo unitario tal que ${}_AN$ es finitamente generado y proyectivo (B es otro $\mathbb{K}$–anillo con unidades locales). Entonces ${}^*N$ es de manera natural un (B, A)–bimódulo unitario. En efecto, escoge una base dual finita $\{n_i, {}^*n_i\}_{1\leq i\leq n}$ para ${}_AN$ y $f \in \mathbf{Idemp}(B)$ una unidad por la derecha del conjunto $\{n_i\}_{1\leq i\leq n}$, fijamos por el momento $\varphi \in {}^*N$, es fácil de ver que $f\varphi = \varphi$; si escogemos, esta vez, $e \in \mathbf{Idemp}(A)$ un unidad del conjunto $\{\varphi(n_i)\}_{1\leq i\leq n}$, está claro que $\varphi e = \varphi$. Lo que implica que ${}^*N$ es un (A, B)–bimódulo unitario. De otra parte, se sabe que ${}^*N_A$ es un módulo unitario finitamente generado y proyectivo, entonces, según el isomorfismo natural $\xi_{-,N}$ de la ecuación ($\mathbf{A}$.5), $-\otimes_A N$ es isomorfo a $\mathrm{Hom}_A({}^*N, -)$. Por lo tanto, la adjunción asociada al bimódulo unitario ${}_B{}^*N_A$, implica que el funtor $- \otimes_A N : \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$ es un adjunto por la derecha del funtor $- \otimes_B {}^*N : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A$.

El siguiente resultado es una extensión de un resultado conocido en teoría de anillos unitarios, véase [92].

Proposición A.2.1. *Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de $\mathbb{K}$–anillos con unidades locales. Si φ es sobreyectivo entonces $\omega_{A,B} : X \otimes_A Y \to X \otimes_B Y$ es un isomorfismo, para cualquier pareja de módulos unitarios $(X_A, {}_AY)$.*

A.3. Transformaciones naturales sobre módulos.

Fijamos A, B dos $\mathbb{K}$-álgebras. Para cualquier pareja de A–bimódulo Q y B–bimódulo T, se considera $Q \otimes_{\mathbb{K}} T$ como $A \otimes_{\mathbb{K}} B$–bimódulo, vía la siguiente bi-acción

$$(a \otimes_{\mathbb{K}} b)q \otimes_{\mathbb{K}} t(a' \otimes_{\mathbb{K}} b') = aqa' \otimes_{\mathbb{K}} btb'. \qquad (\mathbf{A}.6)$$

De esta manera, $Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T$ es un $A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$–bimódulo, donde Q^o es el A^o–módulo opuesto de Q. Cualquier (A,B)–bimódulo M, debe de ser considerado como $A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$–módulo por la derecha con la acción

$$m(a^o \otimes_{\mathbb{K}} b) = amb;$$

por el momento, $Q \otimes_A M \otimes_B T$ es un $A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$–módulo. Finalmente, para cualquier (A,B)–bimódulo M, $M \otimes_{A^o \otimes_{\mathbb{K}} B} Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T$ es, de esta manera, un $A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$–módulo. Con todas estas notaciones, podemos enunciar

Lema A.3.1. *Sean A y B dos $\mathbb{K}$-álgebras y Q un A–bimódulo, T un B–bimódulo, entonces*

$$Q \otimes_A M \otimes_B T \cong M \otimes_{A^o \otimes_{\mathbb{K}} B} Q^o \otimes_K T,$$

como B–módulos por la derecha y para todo (A,B)–bimódulo M. Además este isomorfismo es natural en M y en (Q,T).

Demostración. Denotaremos por $R := A^o \otimes_{\mathbb{K}} B$, consideramos los siguientes funtores

$$Q \otimes_A - \otimes_B T : \mathcal{M}_R \cong {}_A\mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_B, \quad - \otimes_R Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_B.$$

Está claro que $Q \otimes_A A^o \otimes_{\mathbb{K}} B \otimes_B T \cong R \otimes_R Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T$, vía $\xi_{R_R} : q \otimes_A a^o \otimes_{\mathbb{K}} b \otimes_B t \mapsto (qa)^o \otimes_{\mathbb{K}} bt$, donde A^o es considerado como A–módulo por la izquierda. Sea ahora $f : R_R \to R_R$, entonces

$$(f \otimes_R Q \otimes_{\mathbb{K}} T) \circ \xi_{R_R} = \xi_{R_R} \circ (Q \otimes_A f \otimes_B T).$$

Como R_R es un generador proyectivo de $\mathcal{M}_R$ y el producto tensor conmuta con límites directos, el teorema de Mitchell [86], implica que existe una (única) extensión de de esta transformación natural $\xi_{M_R} : Q \otimes_A M \otimes_B T \to M \otimes_R Q^o \otimes_{\mathbb{K}} T$, vía $\xi_{M_R}(q \otimes_A m \otimes_B t) = m \otimes_R q^o \otimes_{\mathbb{K}} t$. Notemos que estas imágenes, mediante ξ_{M_R}, se deducen usando la representación libre de cada sub-módulo cíclico. □

Sean C y D, respectivamente, un A–bimódulo y un B–bimódulo. Denotemos $R := A \otimes_{\mathbb{K}} B$.

Lema A.3.2. *Para cada pareja $(M_A, N_B) \in \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$, existe un morfismo de B–módulos por la derecha*

$$\begin{aligned} \eta_{(M_A,N_B)} : \quad & M \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} N \otimes_B D \longrightarrow (M \otimes_{\mathbb{K}} N) \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D) \\ & m \otimes_A c \otimes_{\mathbb{K}} n \otimes_B d \longmapsto (m \otimes_{\mathbb{K}} n) \otimes_R (c \otimes_{\mathbb{K}} d), \end{aligned}$$

y es de (A,B)–bimódulos si $M \in {}_A\mathcal{M}_A$. Además

$$\eta_{(-,-)} : - \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} - \otimes_B D \longrightarrow (- \otimes_{\mathbb{K}} -) \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D)$$

es un isomorfismo natural.

Demostración. Sabemos que $A \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} B \otimes_B D \cong R \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D)$, vía $a \otimes_A c \otimes_{\mathbb{K}} b \otimes_B d \mapsto (a \otimes_{\mathbb{K}} b).(c \otimes_{\mathbb{K}} d) = ac \otimes_{\mathbb{K}} bd$; sea ahora $(f, g) : (A_A, B_B) \to (A_A, B_B)$ un morfismo en la categoría producto $\mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$, es fácil pues de ver que

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} B \otimes_B D \arrow[r, "f \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} g \otimes_B D"] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} B \otimes_B D \arrow[d, "\cong"] \\
(A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D) \arrow[r, "(f \otimes_{\mathbb{K}} g) \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D)"] & (A \otimes_{\mathbb{K}} B) \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo. Como (A_A, B_B) es un generador proyectivo de la categoría producto $\mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_B$ y el producto tensor conmuta con límites directos, el teorema de Mitchell [86], implica la existencia (única) de un isomorfismo natural

$$\eta_{(-,-)} : - \otimes_A C \otimes_{\mathbb{K}} - \otimes_B D \longrightarrow (- \otimes_{\mathbb{K}} -) \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{K}} D).$$

La forma de la imagen de cada elemento: $\eta_{(M,N)}(m \otimes_A c \otimes_{\mathbb{K}} n \otimes_B d)$, se calcula utilizando los morfismo $(A_A, B_B) \to (mA, nB)$ y la naturalidad de η. $\square$

A.4. Funtores entre categorías aditivas.

Funtores adjuntos. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categoría aditivas. Considere $\mathcal{A}^o$ la categoría opuesta de $\mathcal{A}$ y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ dos funtores covariantes. Existen pues dos funtores

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(-), -) : \mathcal{A}^o \times \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ (X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), Y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, G(-)) : \mathcal{A}^o \times \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ (X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(Y)) \end{aligned}$$

que actúan sobre los morfismos de manera canónica mediante la composición. Se dice que F es *adjunto* por la izquierda de G (se denota por $F \dashv G$), si existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), Y) \xrightarrow{\Phi_{X,Y}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(Y))$$

La *unidad de la adjunción*, es la transformación natural

$$\eta_- = \Phi_{-,F(-)}(F(-)) : id_{\mathcal{A}} \to GF(-).$$

La *counidad de la adjunción*, es la transformación natural

$$\xi_- = \Phi^{-1}_{G(-),-}(G(-)) : FG(-) \to id_{\mathcal{B}}$$

El isomorfismo natural $\Phi_{-,-}$ puede ser expresado mediante la unidad o la counidad. En efecto, consider el morfismo $(X, f) : (X, F(X)) \to (X, Y)$ en la categoría producto $\mathcal{A}^o \times \mathcal{B}$, la naturalidad de $\Phi_{-,-}$, implica que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,f)\circ\Phi_{X,F(X)} = \Phi_{X,Y}\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),f)$, calculando la imagen de la identidad $F(X)$, se tiene $\Phi_{X,Y}(f)=G(f)\circ\Phi_{X,F(X)}(F(X))$, es decir que

$$\Phi_{X,Y}(f)=G(f)\circ\eta_X,\ \text{para cualquier } f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),Y).$$

Esto implica, de otra parte, que dado $g: X\to G(Y)$ un morfismo en $\mathcal{A}$, existe un único morfismo $f: F(X)\to Y$ tal que $G(f)\circ\eta_X=g$.
Recíprocamente, sean $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ y $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ dos funtores tales que existen dos transformaciones naturales

$$\xi : FG\longrightarrow id_{\mathcal{B}}\,,\qquad \eta : id_{\mathcal{A}}\longrightarrow GF$$

que satisfacen

$$\xi_{F(-)}\circ F(\eta_-)=F(-),\ \text{ y }\ G(\xi_-)\circ\eta_{G(-)}=G(-).$$

Entonces existe un isomorfismo natural

$$\begin{aligned}\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(Y))\\ f &\longmapsto G(f)\circ\eta_X\end{aligned}$$

Consideramos ahora un diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & W \arrow[d, "\beta"] \\ Y \arrow[r, "\gamma"] & W' \end{tikzcd} \tag{A.7}$$

cualquiera en la categoría $\mathcal{B}$, se tiene pues el correspondiente diagrama en la categoría $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\eta_X"] & & \\ & GF(X) \arrow[r, "G(\alpha)"] \arrow[d, "G(\delta)"'] & G(W) \arrow[d, "G(\beta)"] \\ & G(Y) \arrow[r, "G(\gamma)"] & G(W') \end{tikzcd} \tag{A.8}$$

Tenemos, entonces la siguiente propiedad. Si el diagrama (**A**.8) es conmutativo, entonces el diagrama (**A**.7) es conmutativo. En efecto, la hipótesis hecha sobre el diagrama (**A**.8), significa la siguiente ecuación

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(\beta))\circ\Phi_{X,W}(\alpha)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(\gamma))\circ\Phi_{X,Y}(\delta) \tag{A.9}$$

De otra parte, tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),Y) \arrow[rr, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[dr, "h(F(X),\gamma)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(Y)) \arrow[dr, "h(X,G(\gamma))"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),W') \arrow[rr, "\Phi_{X,W'}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(W')) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),W) \arrow[u, "h(F(X),\beta)"] \arrow[rr, "\Phi_{X,W}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(W)) \arrow[u, "h(X,G(\beta))"']
\end{tikzcd}$$

donde el el rectángulo y el paralelogramo son conmutativos. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Phi_{X,W'} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),\beta)(\alpha) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(\beta)) \circ \Phi_{X,W}(\alpha) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(\gamma)) \circ \Phi_{X,Y}(\delta), \qquad \text{usando } (\mathbf{A}.9) \\
&= \Phi_{X,W'} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),\gamma)(\delta)
\end{aligned}$$

como $\Phi_{-,-}$ es un isomorfismo, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),\beta)(\alpha) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),\gamma)(\delta)$, lo que significa que $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \delta$, es decir que ($\mathbf{A}$.7) es conmutativo.

En los siguientes paso vamos a recordar los resultados de [38], [69].

La categoría de cotriples. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un funtor covariante junto con dos transformaciones naturales $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^2$ y $\xi : \mathcal{F} \to id_{\mathcal{A}}$. Se dice que $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$ es un *cotriple*, si los siguientes diagramas de trasformaciones naturales

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{F}^2 \arrow[d, "\delta_{\mathcal{F}}"] \\
\mathcal{F}^2 \arrow[r, "\mathcal{F}(\delta)"] & \mathcal{F}^3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, equal] & \mathcal{F}^2 \arrow[d, "\mathcal{F}(\xi)"] \\
\mathcal{F}^2 \arrow[r, "\xi_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd} \tag{A.10}$$

son conmutativos. Los morfismos de cotriples han sido definidos en [11], vamos a recorda esta definición. Considere $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$ y $(\mathcal{F}', \delta', \xi')$ dos cotriples sobre $\mathcal{A}$, un *morfismo de cotriples*

$$\Phi : (\mathcal{F}, \delta, \xi) \longrightarrow (\mathcal{F}', \delta', \xi')$$

es una trasformación natural $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, que satisface

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{F}' \arrow[d, "\delta'"] \\
\mathcal{F}^2 \arrow[r, "\varrho(\Phi)"] & (\mathcal{F}')^2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathcal{F}' \arrow[d, "\xi'"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, equal] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

donde $\varrho(\Phi)_-$ es una de las transformación natural del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\mathcal{F}(-) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{F}(-)}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\Phi_-)"'] & \mathcal{F}'\mathcal{F}'(-) \arrow[d, "\mathcal{F}'(\Phi_-)"] \\
\mathcal{F}\mathcal{F}' \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{F}'(-)}"] & \mathcal{F}'\mathcal{F}'.
\end{tikzcd}$$

Cotriples inducidos y cogeneradores universales. Ejemplos de cotriples vienen dados para cualquier adjunción $F \dashv G$ entre $\mathcal{A}$ y cualquier otra categoría $\mathcal{B}$. En efecto sean η y ξ, respectivamente, la unidad y la counidad de la adjunción $F \dashv G$, se tiene pues el funtor

$$FG : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \text{ junto con, } \delta = F(\eta_G) : FG \to (FG)^2, \text{ y } \xi : FG \to id_{\mathcal{A}}$$

Ahora es fácil comprobar que $(FG, F(\eta_G), \xi)$ satisfacen (**A**.10). El dual de un cotriple es un triple; así un *triple* sobre $\mathcal{A}$ es $(\mathcal{G}, \mu, \eta)$, donde $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\mu : \mathcal{G}^2 \to \mathcal{G}$, $\eta : id_{\mathcal{A}} \to \mathcal{G}$, tal que $(\mathcal{G}^o, \mu^o, \eta^o)$ sea un cotriple sobre la categoría dual $\mathcal{A}^o$. Por supuesto que cualquier adjunción $F \dashv G$ induce el triple $(GF, G(\xi), \eta)$. Los morfismos de triples son igualmente definidos.

Cualquier cotriple (FG, δ, ξ) que viene inducido por una adjunción $F \dashv G$, se le llama un *cotriple inducido* y $(\mathcal{B}, F \dashv G)$ se le dice un *cogenerador del cotriple*. Vamos a analizar el sentido contrario, es decir dada una categoría $\mathcal{A}$ y un cotriple $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$ sobre $\mathcal{A}$; ¿existirá alguna categoría $\mathcal{B}$ y una adjunción $F \dashv G$ entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, tal que $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$ sea inducido por $F \dashv G$?. La respuesta ha sido dada por H. Kleisli en [69]: Sea $\mathcal{B}$ la categoría con objetos los de $\mathcal{A}$ y con morfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) \quad = \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}(X), Y)$$

la identidad en cualquier objeto es definida por $X = \xi_X : \mathcal{F}(X) \to X$. Mientras la composición, viene dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ \mathcal{F}(f) \circ \delta_X \end{aligned}$$

Finalmente, la adjunción que induce $\mathcal{F}$, viene dada por el funtor

$$\begin{aligned} T : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ X &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto f \circ \xi_X \end{aligned}$$

y el funtor

$$\begin{aligned} S : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ X &\longrightarrow \mathcal{F}(X) \\ g &\longmapsto \mathcal{F}(g) \circ \delta_X \end{aligned}$$

Está claro que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S(X), Y) \quad = \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, T(Y))$$

luego $(\mathcal{B}, S \dashv T)$ induce $\mathcal{F}$.
En lo que sigue, vamos a recordar de [38], la noción de un *cogenerador universal*. Un cogenerador universal de un cotriple $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$ se constitue de una categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$, llamada *categoría del cogenerador universal*, y una adjunción

$$S^{\mathcal{F}} : \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \rightleftarrows \mathcal{A} : T^{\mathcal{F}}$$

tal que $(\mathcal{B}, S^{\mathcal{F}} \dashv T^{\mathcal{F}})$ induce $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$ y que satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier otro cogenerador $(\mathcal{B}, S \dashv T)$ de $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$, existe un único funtor $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}^{\mathcal{F}}$ tal que

$$L \circ T = T^{\mathcal{F}}, \text{ y } S^{\mathcal{F}} \circ L = S$$

El teorema de Eilenberg-Moore [38, Theorem 2.2] garantiza y confirma la construction de un cogenerador universal, que vamos a recordar en seguida. Considere $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$ la categoría cuyos objetos son pares de forma (X, d^X), donde X es un objeto de $\mathcal{A}$ y $d^X : X \to \mathcal{F}(X)$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, que satisface las siguientes propiedades

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d^X"] \arrow[d, "d^X"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\delta_X"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(X)"] & \mathcal{F}^2(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "d^X"] \arrow[dr, "X"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\xi_X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Un morfismo $f : (X, d^X) \to (Y, d^Y)$ en la categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$ es un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{A}$ que satisface

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "d^X"'] & Y \arrow[d, "d^Y"] \\ \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{F}(Y) \end{tikzcd}$$

Se puede ver que cualquier objeto X de $\mathcal{A}$ se le asocia un objeto $(\mathcal{F}(X), \delta_X = d^{\mathcal{F}(X)})$ en la categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$. Esto establece el funtor

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{F}} : \mathcal{A}^{\mathcal{F}} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ X &\longrightarrow \mathcal{F}(X) \end{aligned}$$

Si denotaremos por $S^{\mathcal{F}} : \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \to \mathcal{A}$ el funtor del olvido, se tiene pues el isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(S^{\mathcal{F}}(X), Y) & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{F}}}(X, T^{\mathcal{F}}(Y)) \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) \circ d^X \\ \xi_Y \circ g & \longleftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

Para comprobar la propiedad universal de $(\mathcal{A}^{\mathcal{F}}, S^{\mathcal{F}} \dashv T^{\mathcal{F}})$, considere $(\mathcal{B}, S \dashv T)$ un cogenerador cualquiera de $(\mathcal{F}, \delta, \xi)$, escoge como funtor de factorización el siguiente funtor

$$\begin{aligned} L : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \\ B &\longrightarrow \big(S(B), d^{S(B)} = S(\eta_B)\big) . \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] G. D. Abrams, *Morita equivalence for rings with local units*, Commun. in Algebra **11** (1983), no. 8, 801–837.

[2] J. Y. Abuhlail, *Morita context for corings and equivalences*, in "Hopf algebras in noncommutative geometry and physics" (S. Caenepeel and F. Van Oystaeyen, eds.), Lect. Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York, por aparecer.

[3] ———, *Rational modules for corings*, Commun. in Algebra **31** (2003), no. 12, 5793–5840.

[4] J. Y Abuhlail, J. Gómez-Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Duality and rational modules in Hopf algebras over commutative rings*, J. of Algebra **240** (2001), 165–184.

[5] K. Al Takhman, *Equivalences of comodules categories for coalgebras oves rings*, J. Pure Appl. Algebra **173** (2002), no. 3, 245–271.

[6] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and categories of modules.*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[7] P. N. Ánh and L. Márki, *Rees matrix rings*, J. of Algebra **81** (1983), 340–369.

[8] ———, *Morita equivalence for rings without identity*, Tsukuba J. Math **11** (1987), no. 1, 1–16.

[9] P. N. Ánh and R. Wiegandt, *Morita duality for Grothendieck categories*, J. of Algebra. **168** (1994), 273–293.

[10] M. Auslander, *Representation theory of Artin algebras I*, Commun. in Algebra **1** (1974), no. 3, 177–268.

[11] R. Bautista, L. Colavita, and L. Salmerón, *On adjoint functors in representation theory*, Lecture Notes in Math., vol. 903, Springer-Verlag, 1981, pp. 9–25.

[12] M. Beattie, S. Dăscălescu, L. Grünenfelder, and C. Năstăsescu, *Finiteness conditions, co-Frobenius Hopf algebras, and quantum groups*, J. of Algebra **200** (1998), 312–333.

[13] T. Brezeziński, *Galois comodules*, Preprint arXiv:math.RA/0312159 v1, 2003.

[14] T. Brezeziński and R. Wisbauer, *Corings and comodules*, LMS, vol. 309, Cambridge University Press, 2003.

[15] T. Brzeziński, *On modules associated to coalgebra Galois extansion*, J. of Algebra **215** (1999), 290–317.

[16] ______, *Coalgebra-Galois extension from the extension theory point of view*, in "Hopf Algebras and Quantum Groups" (S. Caenepeel and F. V. Oystaeyen, eds.), Marcel Dekker, New York, 2000, Lect. Notes Pure Appl. Math., pp. 47–68.

[17] ______, *The structure of corings. Induction functors, Maschke-type theorem, and Frobenius and Galois-type properties*, Alg. Rep. Theory **5** (2002), 389–410.

[18] ______, *The sructure of corings with a grouplike element*, Banach Center Publications **61** (2003), 21–35.

[19] ______, *Towers of corings*, Commun. in Algebra **31** (2003), 2015–2026.

[20] T. Brzeziński and J. Gómez-Torrecillas, *On comatrix corings and bimodules*, K-Theory **29** (2003), 101–115.

[21] T. Brzeziński and P. M. Hajac, *Coalgebras extensions and algebra coextensions of Galois type*, Commun. in Algebra **27** (1999), 1347–1367.

[22] T. Brzeziński and S. Majid, *Coalgebra bundles*, Commun. in Math. Phys. (1998), no. 191, 467–492.

[23] S. Caenepeel, *Galois corings from descent point of view*, Fields Inst. Comm., por aparecer.

[24] S. Caenepeel, E. De Groot, and G. Militaru, *Frobenius functors of the second kind*, Commun. in Algebra **30** (2002), 5357–5389.

[25] S. Caenepeel, E. De Groot, and J. Vercruysse, *Galois theory for comatrix corings: Descent theory, Morita theory, Frobenius and separability properties*, (2004), Preprint.

[26] S. Caenepeel and M. Iovanov, *Comodules over semiperfect corings*, Preprint, 2004.

[27] S. Caenepeel, G. Militaru, and S. Zhu, *Doi-Hopf modules, Yetter-Drinfel'd modules and Frobenius type properties*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 4311–4342.

[28] ______, *"Frobenius and separable functors for generalized module categories and non-linear equations"*, Lecture Note in Math., vol. 1787, Springer-Verlag, 2002.

[29] S. Caenepeel, J. Vercruysse, and S. Wang, *Morita theory for corings and cleft entwining structures*, arXiv:math.RA/0206198v1,, J. of Algebra, por aparecer.

[30] F. Castaño Iglesias, J. Gómez-Torrecillas, and C. Năstăsescu, *Frobenius functors: Aplications*, Commun. in Algebra **27** (1999), no. 10, 4879–4900.

[31] M. Cipolla, *Discesa fedelmente piatta dei moduli*, Red. Circ. Math. Palermo **25** (1976), no. 2, 34–46.

[32] R. R. Colby and K. R. Fuller, *Exacteness of double dual and Morita duality for Grothendieck categories*, J. of Algebra. **82** (1983), 546–558.

[33] E. C. Dade, *Group-graded rings and modules*, Math. Z. (1980), no. 3, 241–262.

[34] F. R. DeMeyer, *Some notes on the general Galois theory of rings*, Osaka J. Math. **2** (1965), 117–127.

[35] Y. Doi, *Homological coalgebra*, J. Math. Soc. Japan (1981), no. 33, 31–50.

[36] ______, *Unifying Hopf modules*, J. of Algebra. (1992), no. 153, 373–385.

[37] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and B. Torrecillas, *Co-Frobenius Hopf algebras: integrals, Doi-Koppinen modules and injectives objects*, J. of Algebra **220** (1999), 542–560.

[38] S. Eilenberg and J. C. Moore, *Adjoint functors and triples*, Illinois J. Math. **9** (1965), 381–398.

[39] ______, *Homology and fibrations I, coalgebras, cotensor product and its derived functors*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 199–236.

[40] L. El Kaoutit and J. Gómez-Torrecillas, *Morita Duality for Corings over Quasi-Frobenius rings*, in "Hopf algebra in non-commutative geometry and physics" (S. Caenepeel and F. Van Oystaeyen, eds.), Lecture Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York, por aparecer.

[41] ______, *Comatrix corings: Galois coring, Descent theory, and a structure theorem for cosemisimple corings*, Math. Z. **244** (2003), 887–906.

[42] L. El Kaoutit, J. Gómez-Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Semisimple corings*, Algebra Colloquium, por aparecer, arXiv:math.RA/0201070v1.

[43] L. El Kaoutit and J. Gómez-Torrecillas, *Infinte comatrix corings*, Int. Math. Res. Notices **39** (2004), 2017–2037.

[44] P. Freyd, *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*, Harper and Row, New York, Evanston and London, 1966.

[45] K. R. Fuller and H. Hullinger, *Rings with finiteness conditions and their categories of functors*, J. of Algebra **55** (1978), 94–105.

[46] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[47] P. Gabriel and N. Popescu, *Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 4188–4191.

[48] J. L. Gómez Pardo, *Counterinjective modules and duality*, J. Pure. Appl. Algebra **61** (1989), 165–170.

[49] J. L. Gómez Pardo and P. A. Guil Asensio, *Linear compactness and Morita duality for Grothendieck categories*, J. of Algebra. **148** (1992), 53–67.

[50] ———, *Morita duality for Grothendieck categories*, Publicacions Matemàtiques **36** (1992), 625–635.

[51] J. Gómez-Torrecillas, *Coalgebras and comodules over commutative ring*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl **43** (1998), no. 5-6, 591–603.

[52] ———, *Separable functors in corings*, Int. J. Math. Math. S. **30** (2002), no. 4, 203–225.

[53] J. Gómez-Torrecillas and A. Louly, *Coseparable corings*, Commun. in Algebra **31** (2003), no. 9, 4455–4471.

[54] J. Gómez-Torrecillas and C. Năstăsescu, *Quasi-co-Fronenius coalgebras*, J. of Algebra. **174** (1995), 909–923.

[55] ———, *Colby-Fuller duality between coalgebras*, J. of Algebra. **185** (1996), 527–543.

[56] G. Grafinkel, *Universally torsonless and trace modules*, J. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 119–144.

[57] P. A. Guil Asensio, *Dualidades de Morita entre categorías de Grothendieck y anillos de endomorfismos*, Ph.D. thesis, Universidad de Murcia, 1990.

[58] F. Guzman, *Cointegration, Relative Cohomology for Comdules, and Coseparable Coring*, J. of Algebra. **126** (1989), 211–224.

[59] M. Harada, *Perfect categories I*, Osaka J. Math. **10** (1973), 329–341.

[60] ———, *Perfect categories II*, Osaka J. Math. **10** (1973), 343–355.

[61] ———, *Perfect categories III*, Osaka J. Math. **10** (1973), 357–367.

[62] C. U. Jensen, *Les foncteurs dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs applications en théorie des modules*, Lecture Notes in Math., vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[63] D. W. Jonah, *Cohomology of coalgebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **82** (1968).

[64] A. Joyal and R. Street, *An introduction to Tannaka duality and quantum groups*, Category theory (Como, 1990) (Berlin Springer, ed.), Lecture Note in Math., vol. vol. 1488, 1991, pp. 413–492.

[65] L. Kadison, *New examples of Frobenius extensions*, Providence, Amer. Math. Soc., 1999.

[66] ———, *Separability and twisted Frobenius bimodule*, Algebras. Represent. Theory **2** (1999), 397–414.

[67] T. Kanzaki, *On commutor rings and Galois theory of separable algebras*, Osaka J. Math. **1** (1964), 103–115.

[68] M. Kleiner, *The dual ring to a coring with a grouplike*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 540–542.

[69] H. Kleisli, *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 544–546.

[70] M. Koppinen, *Variation on the smash product with applications to group-graded rings*, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), 61–80.

[71] I.-P. Lin, *Semiperfect coalgebras*, J. of Algebra. **49** (1977), 357–373.

[72] F. W. Long, *The Brauer Groups of Dimodule Algebras*, J. of Algebra **31** (1974), 559–601.

[73] E. A. Mares, *Semi-perfect modules*, Math. Z. **82** (1963), 347–360.

[74] A. Masuoka, *Cogalois theory for field extensions*, J. Math. Sco. Japan **41** (1989), no. 4, 576–592.

[75] ———, *Corings and invertible bimodules*, Tsukuba. J. Math **13** (1989), no. 2, 353–362.

[76] T. Nakayama and T. Tsuzuku, *On Frobenius extensions, I*, Nagoya Math. J. **17** (1960), 89–110.

[77] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen, *Graded ring theory*, North-Holland Mathematical Library, 1982.

[78] C. Năstăsescu, S. Raianu, and F. Van Oystaeyen, *Modules graded by G-sets*, Math. Z. **203** (1990), 605–627.

[79] C. Năstăsescu, Liu. Shaoxue, and F. Van Oystaeyen, *Graded modules over G-sets II*, Math. Z. **207** (1991), 341–358.

[80] C. Năstăsescu, M. Van den Bergh, and F. Van Oystaeyen, *Seperable functors applied to graded rings*, J. of Algebra **123** (1989), 397–413.

[81] P. Nuss, *Noncommutative descent and non-abelian cohomology*, K-Theory **12** (1997), 23–74.

[82] J. McConnell and J. C. Robson, *Noncommutative noetherian rings*, Wiley Interscience, New York, 1988.

[83] C. Menini, *Functors between categoris of graded modules. Aplications*, Bull. de la Soc. Math. de Belgique, Serie B **45** (1993), no. 3, 297–315.

[84] C. Menini, B. Torrecillas, and R. Wisbauer, *Strongly rational comodules and semiperfect Hopf algebras over QF rings*, J. of Pure and Applied Alg. **155** (2001), 237–255.

[85] J. Milnor and J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. Math. **81** (1965), 211–264.

[86] B. Mitchell, *Theory of Categories*, New York and London ed., Academic Press, 1965.

[87] K. Morita, *Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect A **9** (1965), 40–71.

[88] B. Pareigis, *Categories and Functors*, Academic Press, New York, 1970.

[89] N. Popescu, *Abelian Category with Application to Ring and Modules*, Academic Press London and New York, 1973.

[90] M. D. Rafael, *Separable functors revisited*, Commun. in Algebra **18** (1990), no. 5, 1445–1459.

[91] H. J. Schneider, *Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras*, Israel J. Math **72** (1990), no. 1-2, 167–195.

[92] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer, Berlin, 1975.

[93] K. Sugano, *Note on separability of endomorphism ring*, Hokkaido Math. J. **11** (1982), 111–115.

[94] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[95] ———, *Groups of simple algebras*, I. H. E. S. Publ. **44** (1975), 79–189.

[96] ———, *The predual theorem to the Jacobson-Bourbaki theorem*, Tran. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 391–406.

[97] M. Takeuchi, *Morita theorems for categories of comodules*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), 629–644.

[98] C. E. Watts, *Intrinsic characterization of some additive functors*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 5–8.

[99] R. Wisbauer, *On Galois corings*, in "Hopf algebras in non-commutative geometry and physics" (S. Caenepeel and F. van Oystaeyen, eds.), Lect. Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York, por aparecer.

[100] ______, *Introduction to coalgebras and comodules*, Lecture Notes, University of Düsseldorf, 1998.

[101] ______, *Semiperfect Coalgebras over Ring*, Algebras and Combinatorics., Springer-Verlag Singapore, 1999, An International Congress, ICAC'97, Hong Kong, pp. 487–512.

[102] ______, *On the category of comodules over corings*, in " Mathematics and mathematics education (Bethlehem 2000)", World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, pp. 325–336.

[103] M Wischnewsky, *On linear representation of affine groups. I*, Pac. J. Math. **61** (1975), 551–572.

[104] B. Zimmermann-Huignes, *Pure sudmodules of direct products of free modules*, Math. Ann. **224** (1976), 233–245.

Índice alfabético