

**Université Abdelmalek Essaadi.
Faculté des Sciences
de Tétouan.**

Thèse de Doctorat National

Présenté par : Laiachi EL Kaoutit.

Spécialité : Mathématiques Pures.

Sujet de la thèse :

**Le Spectre Premier de Certaines Algèbres
Quantiques.**

Soutenue le 26 Septembre 2003, devant le Jury composé de :

A. Kaidi (Almería) Président
L. Ben Yakoub (Tétouan) Encadrant
A. Bouanane (Tétouan) Rapporteur
J. L. Bueso (Granada) Rapporteur
J. Gómez-Torrecillas (Granada) Encadrant
M. P. Malliavin (Paris VI) Examineur

Le Spectre Premier de Certaines Algèbres Quantiques.

Laiachi EL Kaoutit

26 Septembre 2003

Le Spectre Premier de Certaines Algèbres Quantiques

Laiachi EL Kaoutit

Résumé

. Cette thèse entre dans le cadre de la théorie des anneaux associatifs unitaires non-commutatifs. Les thèmes générales que traite le présent mémoire, ce concentre sur l'étude des spectres premiers et primitifs par le calcul effectif de certains exemples "quantiques", notamment l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(q,\Lambda)}(\mathbb{k})$, les anneaux des coordonnées des espaces quantiques symplectique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et Euclidian $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2\times n})$, et aussi les algèbres d'Heisenberg quantiques H'_{q^2} et H_{q^2} .

Les trois premiers exemples forment partie d'une classe d'extension de Ore itérés, notée ici par $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$, déduite d'une construction de D. A. Jordan et d'une itération faite ultérieurement par S. Q. Oh. Cette classe fait partie des algèbres de type Poincaré-Birkhoff-Witt, étudiées largement par J. L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas et F. J. Lobillo. Notre méthode consiste à combiner la stratification des spectres premiers donnée par K. R. Goodearl et E. S. Letzter et les techniques d'algorithmes concernant ce dernier type d'algèbre.

Les liens entre les points du spectre premier et la localisation (classique) en relation avec les cliques associées, sont aussi étudiés. On calcule finalement les groupes des automorphismes, l'algèbre de Lie des dérivations et les dimensions homologiques, de quelques cas particuliers.

Remerciements

Je veux exprimer mes gratitudes et remerciements à mes directeurs de thèse les professeurs L'Moufadal Ben Yakoub et José Gómez-Torrecillas, pour le temps, la patience et l'encouragement durant ces longues années.

Mes remerciements au Agencia Española de Cooperación Internacional pour les bourses des actions intégrées, et spécialement le coordonnateur du département de Álgebra, Geometría y Topología de l'Université de Málaga le Professeur Candido Martinez González. Mes remerciements aussi au Professeur Francisco Javier Lobillo pour son attention, et le groupe de recherche "Teoría de Anillos" du département de Álgebra de l'Université de Granada pour une bourse. Je tiens à remercier le Ministère de l'Education Supérieur du Maroc pour la bourse de troisième cycle (A.Univ. 1997/2000).

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Amin Kaidi pour avoir accepté la présidence de la lecture de cette thèse.

Je tiens à adresser de vifs remerciements à Monsieur José Luis Bueso et Monsieur Abdelmalek Bouanane pour leur lecture attentive et approfondie de cette thèse et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je remercie vivement Madame Marie-Paule Malliavin pour l'honneur qu'elle m'accorde en faisant partie de ce Jury.

Dédie à : *Mi Mujer Juana María Sabiote Gimenez y
mi bebé María Menana. Mi madre Menana Ziri.
Las dos por su paciencia y tolerancia.*

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Table des matières	iv
Conventions	vi
Introduction	vii
1 Généralités sur les Anneaux non-commutatifs.	1
1.1 L'anneau des fractions (à droite).	1
1.2 Localisabilité et la condition de second niveau forte.	3
1.3 Les séparations normale et Artin-Rees.	9
1.4 Les actions rationnelles sur les \mathbb{k} -algèbres.	11
1.5 La \mathcal{H} -stratification du spectre premier.	12
1.6 L'équivalence de Dixmier-Moeglin.	13
1.7 Les extensions de Ore.	14
1.7.1 L'algèbre de McConnell-Pettit.	17
1.7.2 Les extensions de Ore q -tordues.	21
1.8 Les algèbres de type Poincaré-Birkhoff-Witt.	24
1.9 La dimension de Gelfand-Kirillov et les algèbres multi-filtrés.	29
2 Les idéaux premiers et primitifs.	35
2.1 L'algèbre $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ et les ensembles admissibles.	35
2.2 Les idéaux \mathcal{H} -premiers de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$	41
2.3 Les idéaux premiers et primitifs de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$	48
2.3.1 Les idéaux primitifs de $A_n^{(\mathfrak{q},\Lambda)}(\mathbb{k})$	51
2.3.2 Les idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$	52
2.3.3 Les idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2\times n})$	58
2.4 Les idéaux premiers et primitifs de H'_{q^2}	69

3 Cliques et localisabilité.	73
3.1 Les cliques des idéaux premiers de H'_{q^2} .	73
3.2 Les cliques des idéaux premiers de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$.	77
3.2.1 L'opération du groupe G_T sur $\text{Spect}_T(R)$.	81
3.2.2 Cliques et localisabilité.	85
4 Les automorphismes de $\mathcal{O}_q(\text{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et de H'_{q^2}, les dérivations de H_{q^2}.	89
4.1 Le groupe des automorphismes de H'_{q^2} .	89
4.2 Le groupe des automorphismes de $\mathcal{O}_q(\text{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.	91
4.3 Les dérivations de H_{q^2} .	93
5 La résolution injective minimale.	99
5.1 Préliminaires et notions de base.	99
5.2 La résolution injective minimale de H'_{q^2} .	102
5.3 La résolution injective minimale de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$.	103
6 Inégalité de Bernstein pour une localisation simple de $\mathcal{O}_q(\text{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.	106
6.1 L'algèbre $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$.	106
6.2 Inégalité de Bernstein.	108
6.3 Les modules holonomes et le polynôme de Bernstein.	112
Bibliographie	118
Index	123

Conventions

Dans cette thèse, tous les anneaux en considération sont associatifs unitaires, et tous les sous-anneaux et les modules sont aussi unitaires. Un domaine signifie un domaine d'intégrité pas nécessairement commutatif. Considérons un anneau R . Un idéal (i.e. bi-latéral) engendré par un ensemble X , sera noté par $\langle X \rangle$. Pour un R -module à gauche (à droite) ${}_R M$ (M_R), on note par $E(M)$ son enveloppe injective; l'annulateur à gauche (à droite) dans R de M sera noté par $l.\text{Ann}_R(M)$ ($r.\text{Ann}_R(M)$). Par contre si I est un idéal à droite, on note par $\text{Ann}_M(I)$ le sous-module de M annulateur de I . Un idéal premier P de R , est un idéal strictement propre satisfaisant la propriété suivante : Si I, J sont deux idéaux tels que $IJ \subseteq P$, alors $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Le spectre premier d'un anneau R , $\text{Spect}(R)$, est l'ensemble des idéaux premiers, munie de la topologie usuelle de Zariski; les ouverts sont les sous-ensemble $V(I) = \{P \in \text{Spect}(R) \mid P \supsetneq I\}$, où I parcourt l'ensemble de tous les idéaux de R . Un idéal primitif (à gauche), c'est un idéal de la forme $P = l.\text{Ann}_R(S)$, pour un R -module à gauche simple S . Tout idéal maximal est primitif, et tout idéal primitif est premier. Les symboles $\text{Prim}(R)$, $\text{Max}(R)$ notent donc, respectivement, les sous-ensembles de $\text{Spect}(R)$ des idéaux primitifs et maximaux. L'anneau R est dit premier (primitif) si 0 est un idéal premier (primitif). Un idéal P de R est dit semi-premier (semi-primitif) s'il est l'intersection des idéaux premiers (primitifs)

Le groupe des automorphismes et l'algèbre de Lie des dérivations de R , seront notés respectivement par, $\mathbf{Aut}(R)$ et $\mathbf{Der}(R)$.

Si R est cette fois une \mathbb{k} -algèbre, \mathbb{k} désigne toujours un corps commutatif. Tous les morphismes et les objets dans leur catégorie sont supposés \mathbb{k} -linéaires et \mathbb{k} -espaces vectoriels. Les dimensions globale, de Krull classique et de Gelfand-Kirillov, sont respectivement référés par les abréviations gldim , ClK.dim et GKdim . L'abréviation ACC signifie la condition des chaînes ascendantes dans un treillis.

Les lettres \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} et \mathbb{C} , dénotent respectivement le monoïde des nombres naturels, l'anneau des entiers, le corps des nombres réels, le corps des nombres rationnels et le corps des nombres complexes. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on note par $\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbb{Z})$ l'anneau des matrices de n -lignes et m -colonnes à coefficients dans \mathbb{Z} . Pour $p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note par $\mathbb{N}_p = \{1, \dots, p\}$. Finalement, on note par \mathbb{k}^\times le groupe multiplicatif sous-jacent du corps \mathbb{k} et par $\text{cara}(\mathbb{k})$ sa caractéristique.

Introduction

T. J. Hodges et T. Levasseur ont décrit le spectre primitif de l'anneau des coordonnées quantiques \mathbf{SL}_3 dans [44], puis celui de \mathbf{SL}_n dans [45]. Leurs résultats établissent une connection entre les idéaux primitifs, l'action d'un tore algébrique et la géométrie de Poisson. Les preuves se basent essentiellement sur des calculs effectifs en rendant inversibles les générateurs. Ultérieurement A. Joseph a généralisé ces travaux au cas des groupes quantiques algébriques semisimples, [51]. Quelques années plus tard, Hodges *et al* [46], ont étendu le travail de Joseph afin d'inclure certaines algèbres de déformation à multi-paramètres.

Il est naturel et important de savoir comment les méthodes et les techniques de la théorie précédente s'appliquent sur autres exemples d'algèbres, en particuliers ceux qui viennent de l'études des groupes quantiques.

K. R. Goodearl et E. S. Letzter ont établi dans [41] des résultats parallèles sur le spectre premier de certaine classe d'extension de Ore itéré sur un corps infini \mathbb{k} de caractéristique quelconque. Cette classe contient plusieurs algèbres quantiques ; parmi eux on trouve l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathfrak{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$, l'anneau des coordonnées de l'espace quantique symplectique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et l'anneau des coordonnées de l'espace quantique Euclidian $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n})$. Ces exemples en été particulièrement étudiés par L. Rigal [73], M. Akhavizadegan et D. A. Jordan [2], et aussi par S. Q. Oh, [68], [67] et S. Q. Oh et C. G. Park, [69].

L'idée centrale de [41], après la consideration d'un anneau R , consiste à donner un groupe \mathcal{H} agissant par des automorphismes d'anneaux sur R , ce qui donne raison aux ensembles $\mathcal{H}\text{-Spect}(R)$ constitués par des idéaux \mathcal{H} -premiers de R (si pour deux idéaux \mathcal{H} -stable I et J tels que $IJ \subseteq P$, alors $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$). La \mathcal{H} -stratification du $\text{Spect}(R)$, est définie donc comme la réunion disjointe, indexée par cet ensemble, des stratum $\text{Spect}_J(R)$ formés par les idéaux premiers P tel que $\bigcap_{h \in \mathcal{H}} h(P) = J$:

$$\text{Spect}(R) = \bigsqcup_{J \in \mathcal{H}\text{-Spect}(R)} \text{Spect}_J(R).$$

Dans le cas où \mathcal{H} est un tore algébrique de \mathbb{k} de rang fini, agissant cette fois rationnellement sur un anneau noethérien R , chaque stratum $\text{Spect}_J(R)$ correspondent a un idéal complètement premier \mathcal{H} -stable J de R , est homeorphe au spectre premier d'un anneau des polynômes de Laurent commutatif sur une extension du corps de base \mathbb{k} .

Si de plus R est une extension de Ore de type [41, Section 4], les idéaux primitifs de R correspondent aux éléments maximaux de chaque stratum.

Cette thèse analyse avec plus de détail et profondeur la stratification "abstraite" du spectre premier d'une classe d'extension de Ore itérée notée ici par $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$, introduite par S. Q. Oh comme forme itérée de celle de D. A. Jordan, et qui forme partie du programme de Goodearl-Letzter. Principalement on calcule les générateur de chaque idéal \mathcal{H} -premier en terme des ensembles admissibles, [65]; aussi la dimension de chacun des anneaux des polynômes de Laurent commutatifs qui apparaissent dans cette stratification ainsi leurs générateurs pour les cas particuliers ci-dessus cités. Cela est possible après avoir effectuer des bijections sur chaque membre de cette réunion. Un algorithme pour tester les idéaux primitifs dans le cas algébriquement clos, est aussi donner grace à la résolution des systèmes quantiques.

Comme application des résultats obtenus : Les idéaux premiers de hauteur un serviront, dans certains exemple, pour calculer le groupe des automorphismes. On classe aussi toutes les cliques des idéaux premiers de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ sous forme des orbites d'une opération "local" (i.e. sur chaque stratum) d'un groupe bien déterminé; en se basant sur les travaux de K. A. Brown et K. R. Goodearl [10] et leurs modification réalisé par M. Akhaviadegan [1]. Les questions de localisabilité (classique) concernant les sous ensembles de $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$, sont partiellement traités. On donne une autre application sur la résolution injective minimale et les propriétés de son dernier terme, en utilisant les résultats de [56], [31]. Enfin on prouve une inégalité de type "Bernstein" sur une localisation simple de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

Les algèbres H'_{q^2} et H_{q^2} , introduites par E. E. Kirkman et L. W. Small [53], sont aussi analysés, mais d'un point de vue plus différent du cas précédent et très ressemblant au travaux de M. P. Malliavin [57], [58].

Les résultats originaux de cette thèse sont essentiellement ceux qui se trouvent dans les chapitres 2, 3, 4 et 5. Les résultats du chapitre 6 sont inspiré de [74] mais ils sont démontrés par des méthodes légèrement différentes.

Chapitre 1

Généralités sur les Anneaux non-commutatifs.

Introduction

Ce chapitre représente un rassemblement adapté de diverses notions de base, données brièvement ou avec détails, qu'on a vue indispensables pour décrire les résultats cités dans les prochains chapitres. Pour les concepts standards et théoriques sur la théorie des anneaux, nos références sont [62], [48] et [42]. La référence [17] sera notre source des méthodes et algorithmes computationnels.

1.1 L'anneau des fractions (à droite).

Soit X un sous-ensemble d'un anneau R . La localisation par rapport à X , dans son terme général, consiste à rendre inversible les éléments de X , même ailleurs de R . Malheureusement ce procédé n'est pas toujours possible. Par contre, d'après les cours d'algèbre élémentaire, on sait que tout domaine d'intégrité s'injecte dans son corps des fractions (ici $X = R$), par exemple, l'anneau des entiers naturels \mathbb{Z} s'injecte dans son corps des nombres rationnels \mathbb{Q} .

Le problème d'extension d'un domaine d'intégrité non commutative R dans un anneau de division D , a été généralisé par Ore [70] en 1930, où chaque élément de D est écrit sous forme rx^{-1} , $r, x \in R$ avec $x \neq 0$. Comme un élément de la forme $y^{-1}s$ appartient à D , il doit être de la même forme i.e. $rx^{-1} = y^{-1}s$. Son effort a été de construire D et de décrire chacun de ces éléments comme multiple commun à droite, après l'établissement de certaines conditions nécessaires et suffisantes.

Dans cette section on donne un rappel et quelques propriétés élémentaires de l'anneau des fractions.

Définition 1.1.1. [42, page, 143]. Un ensemble *multiplicatif* d'un anneau R est un sous-ensemble $X \subseteq R$ tel que $1 \in X$ et que X est stable par multiplication (i.e $x, x' \in X \Rightarrow xx' \in X$). L'anneau des fraction à droite de R par rapport à X est un homomorphisme d'anneau $\phi : R \rightarrow S$ tel que

- (i) $\phi(x)$ est inversible dans S , pour tout $x \in X$,
- (ii) tout élément de S s'écrit sous forme : $\phi(r)\phi(x)^{-1}$, $r \in R$ et $x \in X$.
- (iii) $\ker(\phi) = \{r \in R \mid rx = 0, \text{ pour certain } x \in X\}$.

On dit que S est un anneau des fractions de R par rapport à X , et tout élément de S s'écrit sous forme $r.x^{-1}$, $x \in X$, $r \in R$. On note cet anneau par $S := R.X^{-1}$.

Définition 1.1.2. Un ensemble multiplicatif X d'un anneau R est dit *ensemble de Ore à droite* si $rX \cap xR \neq \emptyset$, pour tout $r \in R$, $x \in X$; et il est dit *reversible à droite* si pour tout $r \in R$, $x \in X$ avec $rx = 0$, il existe $x' \in X$ tel que $rx' = 0$. Un *ensemble dénominateur à droite* de R est un ensemble de Ore et reversible à droite. Les ensembles dénominateurs à gauche sont définis symétriquement. Un ensemble dénominateur de R est un ensemble dénominateur à gauche et à droite.

Lemme 1.1.3. *Un ensemble multiplicatif engendré¹ par une famille d'ensembles de Ore à droite d'un anneau R , est aussi un ensemble de Ore à droite.*

Démonstration. Soit M un ensemble multiplicatif engendré par un sous-ensemble E . Le lemme devient évident si on établit l'implication suivante : $eR \cap rM \neq \emptyset$, pour tout couple $(r, e) \in R \times E$ implique que $mR \cap rM \neq \emptyset$, pour tout couple $(r, m) \in R \times M$. Soit $(r, m) \in R \times M$, on procède par récurrence sur la longueur de m , comme produit des éléments de E , $m = ex$ avec $e \in E$ et $x \in M$ est de longueur inférieure à celle de m . Par hypothèse, $er' = rx'$, pour certains $r' \in R$, $x' \in M$. L'hypothèse de récurrence entraîne donc que $r'm' = xr''$, pour certains $m' \in M$, $r'' \in R$. D'où, $er'm' = exr'' = mr'' = rx'$, c'est à dire que $mR \cap rM \neq \emptyset$. \square

Proposition 1.1.4. *Soit X un ensemble de Ore à droite d'un anneau R . Si R possède la propriété ACC sur les annulateurs à droite des éléments, alors X est reversible à droite.*

Démonstration. Voir [42, Proposition 9.9]. \square

Théorème 1.1.5. *Soit X un ensemble multiplicatif d'un anneau R . L'anneau des fraction $R.X^{-1}$ existe si et seulement si X est un ensemble dénominateur à droite.*

L'anneau des fraction par rapport un ensemble multiplicatif s'il existe il est unique à un isomorphisme près.

¹Un ensemble multiplicatif M engendré par un ensemble E , est défini par $M = \{e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n} \mid e_i \in E, n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. Voir [42, Theorem 9.7] et [48, 1.1.1]. \square

La connection entre le treillis des idéaux de R et celui de $R.X^{-1}$ est donnée par les deux résultats suivants.

Définition 1.1.6. Soit X un ensemble dénominateur à droite d'un anneau R et soit J un idéal à gauche de $R.X^{-1}$, l'ensemble $\{r \in R \mid r.1^{-1} \in J\} = J^c$ est appelé la *contraction* de J sur R . Inversement, soit I un idéal à gauche de R , l'ensemble $I^e = \{rx^{-1} \mid r \in I, x \in X\}$ est dit l'*extension* de I à $R.X^{-1}$.

Théorème 1.1.7. Soit X un ensemble dénominateur à droite d'un anneau R et soit $R.X^{-1}$ l'anneau des fractions associé. Supposons que $R.X^{-1}$ est noethérien à droite. Alors, si I un idéal de R , I^e est aussi un idéal de $R.X^{-1}$.

Démonstration. Voir [42, Theorem 9.20]. \square

Théorème 1.1.8. Soit X un ensemble dénominateur à droite d'un anneau noethérien à droite R . Alors $R.X^{-1}$ est aussi noethérien à droite; de plus la contraction et l'extension établissent une bijection entre l'ensemble des idéaux premiers de R disjoints à X et l'ensemble des idéaux premiers de $R.X^{-1}$.

Démonstration. Voir [42, Theorems 9.17, 9.22]. \square

1.2 Localisabilité et la condition de second niveau forte.

Il est bien connue que si R est un anneau commutatif et $P \in \text{Spect}(R)$. Alors l'anneau des fractions par rapport à l'ensemble $X = R \setminus P$ existe, voir par exemple [76, 5.20]. Cela n'est pas toujours vrai dans le cas non commutatif, où il y a des obstacles qui évitent la localisation et qui s'appellent les liens.

Le concept des liens a été apparu originalement dans les travaux de Jategaonkar [48] concernant la localisation sur les anneaux noethériens. Dans cette section on va essayer de rappeler la connection existant entre ce concept et la localisation.

Un élément r d'un anneau R est dit *régulier à gauche* si $xr = 0$ entraîne $x = 0$; la notion régulier à droite se définit par symétrie. Un élément régulier est un élément régulier à droite et à gauche. L'ensemble de tout les éléments réguliers de R , sera noté par $\mathcal{C}_R(0)$ où tout simplement $\mathcal{C}(0)$ s'il n'y a aucune confusion. Si I est un idéal de R , on note

$$\mathcal{C}(I) = \{r \in R \mid r + I \text{ est régulier dans } R/I\}.$$

Définition 1.2.1. Un idéal I d'un anneau R est dit *localisable à droite* si $\mathcal{C}(I)$ est un ensemble dénominateur à droite de R . On dit que I est localisable si $\mathcal{C}(I)$ est un ensemble dénominateur à droite et à gauche.

Pour les définitions suivantes, on suit la terminologie de [42]

Définition 1.2.2. Soit R un anneau noethérien et P, Q deux idéaux premiers de R . On dit qu'il existe un *lien* de P vers Q , ou P est lié à Q , et on écrit $P \rightsquigarrow Q$, s'il existe un idéal I de R tel que $PQ \subseteq I \subsetneq P \cap Q$, avec $(P \cap Q)/I$ est de torsion libre comme (R/P) -module à gauche et comme (R/Q) -module à droite. Un lien de type $P \rightsquigarrow P$ est dit trivial. Le *bimodule de liaison* entre P et Q est le $(R/P - R/Q)$ -bimodule $(P \cap Q)/I$. Un ensemble X de $\text{Spect}(R)$ est dit de *lien-fermé à gauche* si pour tout $P \in X$ et $Q \rightsquigarrow P$, on a $Q \in X$; la notion du lien fermé à droite est définie par symétrie. Un ensemble est lien-fermé s'il est lien-fermé à gauche et à droite.

Ceci détermine un graphe dans $\text{Spect}(R)$ et la *clique* d'un idéal premier P est la composante connexe de ce graphe qui contient P , on l'a note par $\text{clique}(P)$. C'est donc le plus petit sous ensemble de lien-fermé de $\text{Spect}(R)$ contenant P .

1.2.3. Si P et Q sont deux idéaux maximaux d'un anneau noethérien R tel que R/P et R/Q soient Artiniens. Alors l'unique condition pour qu'il existe un lien $P \rightsquigarrow Q$, est que $P \cap Q \neq PQ$, voir [42, p. 178].

Proposition 1.2.4. Soit P et Q deux idéaux premiers d'un anneau noethérien R , tel que $P \rightsquigarrow Q$. Alors si \mathcal{C} est un ensemble de Ore à droite de R et que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(Q)$, on a $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(P)$.

Démonstration. Voir [77, p. 261] □

Cette dernière proposition nous conduit donc à la définition des ensembles suivants. Soit R un anneau noethérien et $X \subseteq \text{Spect}(R)$, on note :

$$\mathcal{C}_R(X) = \bigcap_{P \in X} \mathcal{C}(P).$$

Les deux lemmes suivants montrent que les liens se conservent par la localisation et les automorphismes d'anneaux.

Lemme 1.2.5. Soit \mathcal{C} un ensemble de Ore à droite d'un anneau noethérien R , et soit P, Q deux idéaux premiers de R disjoints à \mathcal{C} . Alors

$$P^e \rightsquigarrow Q^e \text{ dans } \text{Spect}(R.\mathcal{C}^{-1}) \text{ si et seulement si } P \rightsquigarrow Q \text{ dans } \text{Spect}(R).$$

Démonstration. Voir [77, Lemma 2.11]. □

Lemme 1.2.6. Soit R un anneau noethérien, P et Q deux idéaux premiers de R tels que $P \rightsquigarrow Q$. Alors $\sigma(P) \rightsquigarrow \sigma(Q)$, pour tout automorphisme d'anneau σ de R .

Démonstration. Il est trivial que le $(R/\sigma(P) - R/\sigma(Q))$ -bimodule $(\sigma(P) \cap \sigma(Q)/\sigma(I))$ est un bimodule de liaison entre $\sigma(P)$ et $\sigma(Q)$. \square

Lemme 1.2.7. *Soit R un anneau noethérien semi-premier et Q un idéal premier minimal de R . Alors il n'existe aucun idéal premier P de R avec la propriété $P \rightsquigarrow Q$ ou $Q \rightsquigarrow P$.*

Démonstration. Voir [42, Lemma 11.17]. \square

Maintenant, on passe à rappeler le lemme principal de Jategaonkar, ainsi la notion de la condition de second niveau forte ; pour celà on a besoin de certaines définitions.

Définition 1.2.8. Soit M un R -module à droite, M est dit *fidèlement fidèle* si tout les R -sous-modules non nuls de M sont fidèle (i.e. d'annulateur nul).

Un *annulateur premier* de M est un idéal premier P de R qu'est l'annulateur d'un certain sous-module non nul de M . Un *premier associé* de M est un annulateur premier $P = \text{Ann}_R(N)$, N est un sous-module non nul de M ; tel que N soit fidèlement fidèle comme (R/P) -module à droite.

Soit M un R -module à droite non nul. Un sous-module N de M est dit *affilié* si $N = \text{Ann}_M(P)$, dont P est un idéal maximal parmi tous les annulateurs des sous-modules de M . Une *suite affilié* de M est une suite des sous-modules non nul de M de la forme

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M \quad (1.1)$$

où M_i/M_{i-1} est un sous-module affilié de M/M_{i-1} , pour tout $1 \leq i \leq n$. Dans ce cas la suite des idéaux P_1, \dots, P_n où $P_i = \text{Ann}_R(M_i/M_{i-1})$ est dit la *suite affiliée des idéaux premiers* de M associé a la suite affiliée (1.1).

Théorème 1.2.9. [48] *Soit R un anneau noethérien et M un R -module à droite avec une suite affiliée $0 \subsetneq U \subsetneq M$ et la suite affiliée des premiers associés Q, P , tel que U est essentiel dans M . Soit M' un sous-module de M contenant proprement à U , tel que l'idéal $I = \text{Ann}_R(M')$ soit maximal parmi les annulateurs des sous-modules de M qui contiennent proprement U . Alors exactement l'une des condition alternatives est vraie :*

- (i) $P \subsetneq Q$ et $M'P = 0$. Dans ce cas M' et M'/U sont fidèles et de torsion comme (R/P) -modules à droite.
- (ii) $P \rightsquigarrow Q$ et $(P \cap Q)/I$ est un bimodule du liaison entre P et Q . Dans ce cas, si U est de torsion-libre comme (R/Q) -module à droite, on a M'/U est de torsion-libre comme (R/P) -module à droite.

Démonstration. Voir [42, Theorem 11.1]. \square

Définition 1.2.10. Soit R un anneau noethérien et $P \in \text{Spect}(R)$. Alors P est dit satisfait la condition de seconde niveau forte à droite, si sous les hypothèses du théorème 1.2.9 la condition (i) ne peut être jamais vrai. Si de plus U est de torsion-libre comme (R/Q) -module à droite, on dit que P satisfait la condition de seconde niveau à droite. L'anneau R satisfait la condition de seconde niveau forte à droite (la condition de seconde niveau à droite), si tout élément de $\text{Spect}(R)$ satisfait cette condition. Les définitions à gauche sont similaires. Finalement, R est dit satisfait la condition de seconde niveau, s'il satisfait cette condition à droite et à gauche.

Proposition 1.2.11. Soit R un anneau noethérien satisfaisant la condition de second niveau et P un idéal premier de R non minimal. Alors il existe un lien $Q \rightsquigarrow P$ dans $\text{Spect}(R)$.

Démonstration. Par hypothèse il existe P_0 un idéal premier minimal tel que $P_0 \subsetneq P$. Il est clair donc que tout lien de la forme $Q/P_0 \rightsquigarrow P/P_0$ dans $\text{Spect}(R/P_0)$, donne lieu à un lien $Q \rightsquigarrow P$ dans $\text{Spect}(R)$. D'où sans pert de généralité, on peut supposer que R est premier et que $P \neq 0$. Soit $E = E((R/P)_R)$ (E est non nul), d'après [42, Lemma 12.9], E est un R -module à droite fidèle; et par suite $E_1 = l.\text{Ann}_E(P)$ est un sous-module propre de E . Notons que E_1 est un (R/P) -module à droite libre de torsion. Choisir un sous-module affilié E_2/E_1 de E/E_1 avec premier affilié Q . Or R satisfait la condition de second niveau, on conclue donc, par le théorème 1.2.9. \square

1.2.12. ([1, 6.2.14] et [10]). Soit I un idéal polynormal (voir la section suivante pour la définition) d'un anneau R avec une suite normalisante des générateurs x_1, \dots, x_m tel que chaque x_j est α_j -normal modulo I_{j-1} , où $I_{j-1} = \langle x_1, \dots, x_{j-1} \rangle$ et $\alpha_j \in \mathbf{Aut}(R/I_{j-1})$, $1 \leq j \leq m$. C'est à dire que $\bar{x}_j \bar{r} = \alpha_j(\bar{r}) \bar{x}_j$, modulo l'idéal I_{j-1} , pour tout $r \in R$.

Lemme. Soit $P \rightsquigarrow Q$ un lien des idéaux premiers dans un anneau noethérien R et soit I un idéal polynormal de R contenu dans $P \cap Q$ avec une suite normalisante des générateurs, x_1, \dots, x_m tel que chaque x_j est α_j -normal modulo $I_{j-1} = \langle x_1, \dots, x_{j-1} \rangle$. Alors ou bien $P/I \rightsquigarrow Q/I$ ou bien $P/I_{j-1} = \alpha_j(Q/I_{j-1})$, pour un certain j .

Démonstration. Comme $P \rightsquigarrow Q$, il existe un idéal J de R tel que $PQ \subseteq J \subsetneq P \cap Q$ et $(P \cap Q)/J$ est le bimodule de liaison entre P et Q . Si $I \subseteq J$, alors $((P/I) \cap (Q/I))/(J/I)$ est un bimodule de liaison entre P/I et Q/I , et alors $P/I \rightsquigarrow Q/I$. Supposons que $I \not\subseteq J$ et soit donc le plus petit indice j tel que $x_j \notin J$. Alors $x = x_j + J$ est un élément non nul α_j -normal appartenant au bimodule $(P \cap Q)/J$ pour certain $\alpha_j \in \mathbf{Aut}(R/I_{j-1})$. Le lemma sera établi si on arrive à prouver que $Q/I_{j-1} = r.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}(x(R/I_{j-1}))$ et $P/I_{j-1} = l.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}((R/I_{j-1})x)$, car $(x_j + J)(r + I_{j-1}) = 0$ si et seulement si $(\alpha_j(r + I_{j-1}))(x_j + J) = 0$, i.e. $l.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}(x) = \alpha_j(r.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}(x))$ ou bien $P/I_{j-1} = \alpha_j(Q/I_{j-1})$. Comme $PRx_j \subset$

$J, P/I_{j-1} \subset l.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}((R/I_{j-1})x)$; soit $B/I_{j-1} = l.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}((R/I_{j-1})x)$, supposons que $P \subsetneq B$. Il est clair que B/P est un idéal non nul dans un anneau noethérien, qui est essentiel comme idéal à droite. D'après [42, Proposition 5.9], il existe $b \in B \cap \mathcal{C}(P)$, c'est à dire que $(b+P)(x_j+J) = 0$. Mais $(P \cap Q)/J$ est un R/P -module de torsion-libre, $b+P$ est régulier et $x_j+J \neq 0$, ceci est une contradiction. De même on montre que $Q/I_{j-1} = r.\text{Ann}_{R/I_{j-1}}(x(R/I_{j-1}))$. Ce qui achève la preuve. \square

Corollaire 1.2.13. *Soit R un anneau noethérien satisfaisant la condition de second niveau et I un idéal polynormal dans R avec une suite normalisante des générateurs, x_1, \dots, x_m tel que chaque x_j est α_j -normal modulo $I_{j-1} = \langle x_1, \dots, x_{j-1} \rangle$, où $\alpha_j \in \mathbf{Aut}(R/I_{j-1})$. Soit \mathcal{K} un sous-ensemble de $\text{Spect}(R)$ lien-fermé. Supposons que \mathcal{K} satisfait les hypothèses suivantes*

(a) *Chaque $K \in \mathcal{K}$ contient I ,*

(b) *la clique de K/I dans $\text{Spect}(R/I)$ est un singleton, pour chaque $K \in \mathcal{K}$,*

(c) *chaque $K \in \mathcal{K}$ est stable par les $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. (i.e. K/I_{j-1} est α_j -stable dans R/I_{j-1})*

Si $P \rightsquigarrow Q$ est un lien entre deux idéaux premiers distinct dans \mathcal{K} , alors il existe un indice j tel que $P/I_{j-1} = \alpha_j(Q/I_{j-1})$ et tel que $\alpha_j(K/I_{j-1}) \rightsquigarrow K/I_{j-1}$, pour tout $K \in \mathcal{K}$ contenant Q .

Démonstration. Voir [1, 6.2.17]. \square

Théorème 1.2.14. *Soit R un anneau noethérien satisfaisant la condition de seconde niveau, et soit $P, Q \in \text{Spect}(R)$ qui appartiennent au même clique. Alors*

$$\text{Clk.dim}(R/P) = \text{Clk.dim}(R/Q).$$

En particulier, si $P \neq Q$, on a P et Q sont incomparables.

Démonstration. Voir [48, Theorem 8.2.9] \square

Corollaire 1.2.15. *Soit R un anneau noethérien satisfaisant la condition de seconde niveau et P, Q sont deux idéaux premiers de R . Alors $P \rightsquigarrow Q$ si et seulement si $(P \cap Q)/PQ$ est fidèle comme (R/P) -module à gauche et comme (R/Q) -module à droite.*

Démonstration. Voir [35, Corollary 1.4]. \square

Définition 1.2.16. Soit R un anneau noethérien et $X \subseteq \text{Spect}(R)$.

- (1) On dit que X est un *ensemble localisable à droite* si $\mathcal{C}_R(X) = \bigcap_{P \in X} \mathcal{C}(P)$ est un ensemble dénominateur à droite de R , on note dans ce cas par R_X l'anneau des fractions associé. Si de plus R_X satisfait les propriétés suivantes

- (i) $R_X/P.R_X$ est simple artinian, pour tout $P \in X$,
- (ii) Les idéaux $P.R_X$, $P \in X$, sont les seuls idéaux primitifs de R_X ,
- (iii) $E(S_{R_X})$ est réunion de son socle série ², pour tout module simple S_{R_X} .

On dit alors que X est *classiquement localisable à droite*. Même définitions peuvent être données à gauche. L'ensemble X est dit classiquement localisable s'il est classiquement localisable à gauche et à droite.

- (2) On dit que X satisfait la condition de second niveau à droite si tout $P \in X$ satisfait cette condition ; on dit que X satisfait la *condition d'incomparabilité* s'ils n'existent pas $Q, P \in X$ tels que $Q \subsetneq P$. On dit que X satisfait la *condition d'intersection à droite*, si pour tout idéal à droite I de R tel que $I \cap \mathcal{C}(P) \neq \emptyset$, pour tout $P \in X$, entraîne que $I \cap \mathcal{C}(X) \neq \emptyset$. Par symétrie on donne les définitions à gauche ; si on n'énonce pas les mots à droite ni à gauche à la fin de l'une des définitions précédentes, cela signifie que la propriété est satisfaite à gauche et à droite.

Théorème 1.2.17. *Soit R un anneau noethérien et $X \subset \text{Spect}(R)$. Alors X est classiquement localisable à droite si et seulement si*

- (i) X est lien-fermé à droite,
- (ii) X satisfait la condition de second niveau à droite,
- (iii) X satisfait la condition d'intersection à droite,
- (iv) X satisfait la condition d'incomparabilité.

Démonstration. Voir [48, Theorem 7.1.5]. □

Corollaire 1.2.18. *Soit R un anneau noethérien et X une clique dans $\text{Spect}(R)$. Alors X est classiquement localisable si et seulement si X satisfait la condition d'intersection et la condition de second niveau.*

Démonstration. Le corollaire est une conséquence des théorèmes 1.2.14 et 1.2.17. □

Maintenant, on passe à rappeler la notion d'un idéal semi-premier localisable dans un anneau noethérien, pour plus de détails on renvoie le lecteur à [48, 3.2].

Soit R un anneau noethérien et P un idéal semi-premier de R . On note, comme d'habitude,

$$\mathcal{C}_R(P) = \{r \in R \mid r + P \text{ est régulier dans } R/P\};$$

on dit donc que P est *localisable (à droite)* si et seulement si $\mathcal{C}_R(P)$ est un ensemble de Ore (à droite). La localisation (à droite) de R par l'idéal semi-premier localisable (à droite) P est définie comme l'anneau des fractions (à droite) de R associé à l'ensemble de Ore (à

²Rappelons que le *socle série* $\{\text{soc}_n(M)\}_{n \geq 0}$ d'un module M est définie par récurrence en posant $\text{soc}_0(M) = 0$ et en prenant pour $\text{soc}_{n+1}(M)$ l'image inverse dans M du socle de $M/\text{soc}_n(M)$, $\forall n \geq 0$.

droite) $\mathcal{C}_R(P)$, qu'on note R_P . Si de plus l'anneau semi-local R_P est classique (à droite)³, on dit que P est un idéal *semi-premier classiquement localisable (à droite)*.

La proposition suivante donne une connection transparente entre la notion d'idéaux semi-premiers classiquement localisables et celle des ensembles classiquement localisables :

Proposition 1.2.19. *Un idéal semi-premier dans un anneau noethérien (à droite) R est classiquement localisable (à droite) si et seulement si l'ensemble de ces idéaux premiers associés⁴ est classiquement localisable (à droite)*

Démonstration. Voir [48, Proposition 7.1.1]. □

Théorème 1.2.20. *Soit R un anneaux noethérien satisfaisant la condition de second niveau (à droite) et P un idéal semi-premier de R . Alors P est classiquement localisable (à droite) si et seulement si l'ensemble des idéaux premier minimal sur P est lien-fermé (à droite).*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1.2.19 et le théorème 1.2.17, voir aussi [42, Theorem 12.21]. □

1.3 Les séparations normale et Artin-Rees.

Comme on a vu avant, la condition de second niveau forte aide beaucoup a résoudre les problèmes de localisabilité ; mais la vérification de celle ci est aussi un autre problème qui se presente. Cette section rappel comment la séparation normale à travers de la séparation de Artin-Rees, dans le spectre premier d'un anneau noethérien, implique cette condition.

Un élément $u \in R$ est dit *normal* si $uR = Ru$, (tout élément central est normal). Si R est intègre et $u \neq 0$ est un élément normal de R , alors il existe un automorphisme d'anneau de R , γ défini par $ur = \gamma(r)u$, pour tout $r \in R$; γ est dit l'automorphisme associé à u , et dans ce cas u est dit γ -*normal*. Voici un résultat très important sur la hauteur de certain idéaux premiers

1.3.1. (Le théorème de l'idéal principal) Soit P un idéal premier d'un anneau R , la hauteur de P est la plus grande longueur des chaînes saturées des idéaux premiers contenus dans P ⁵, ou l'infinie s'il y a des chaînes non bornée. On note par $\text{haut}(P)$ la hauteur de P . Naturellement, il se peut qu'il y on' a deux chaînes saturées de différente longueur enter deux idéaux emboîtés. Si cela n'ait jamais vrai dans R , on dit alors que R est un *anneau caténaire*.

³Un anneau semi-local R (i.e $R/J(R)$ est semi-simple), est dit *classique (à droite)* si $E(R/J(R))_R$ est réunion de son socle série.

⁴Les idéaux premiers associés à un idéal semi-premier P d'un anneaux noethérien à droite, sont les unques idéaux premiers P_1, \dots, P_n tels que chaque P_i soit minimal sur P et que $P = \bigcap_{1 \leq i \leq n} P_i$.

⁵C'est à dire des chaînes des idéaux premiers de la forme $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_k \subsetneq \dots \subsetneq P$.

Théorème. Soit R un anneau noethérien à droite et $r \in R$ un élément normal non inversible et P un idéal premier minimal sur rR . Alors $\text{haut}(P) \leq 1$

Démonstration. Voir [62, Theorem 4.1.11]. □

Une suite des éléments x_1, \dots, x_n de R est dite *normalisante* (resp. *centralisante*) si x_1 est normal (resp. central) dans R et pour tout $1 < i \leq n$, x_i est normal (resp. central) modulo l'idéal $\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$. Un idéal engendré par une suite normalisante (resp. centralisante) est dit *polynormal* (resp. *polycentral*).

Un anneau noethérien R est dit *polycentral*, si tout idéal de R est polycentral.

Un idéal I d'un anneau R est dit satisfait la *propriété de Artin-Rees* (en abréviation AR-propriété) à gauche, si pour tout idéal à gauche L de R , il existera un entier positive n tel que $L \cap I^n \subseteq I.L$. Cela est équivalent à la condition suivante : Tout R -module à gauche de type fini contenant un sous-module essentiel annulé par I , doit être annuler par une puissance de I . La AR-propriété à droite est définie par symétrie. Un *AR-idéal* de R est un idéal qui satisfait la AR-propriété à gauche et à droite.

Théorème 1.3.2. Soit R un anneau noethérien à droite, I un idéal de R engendré par un élément normal. Alors I satisfait la AR-propriété à droite.

Pour un idéal I de type fini le résultat est le suivant :

Théorème 1.3.3. Soit R un anneau noethérien à droite.

(i) Soit I un idéal de R engendré par une suite normalisante x_1, \dots, x_n tel que $x_1 I = I x_1$ et que

$$x_j I + \sum_{i=1}^{j-1} x_i R = I x_j + \sum_{i=1}^{j-1} x_i R, \text{ pour tout } j > 1.$$

Alors I satisfait la AR-propriété à droite.

(ii) En particulier, tout idéal polycentral satisfait la AR-propriété à droite.

Démonstration. [62, Theorem 4.2.7]. □

Définition 1.3.4. Soit R un anneau. On dit que R satisfait la *séparation normale*, ou bien $\text{Spect}(R)$ possède la séparation normale, si pour toute chaîne $P \subset Q$, d'idéaux premiers; il existe $r \in Q \setminus P$ tel que r soit normale modulo P . On dit que $\text{Spect}(R)$ possède la *séparation de Artin-Rees* (en abréviation AR-séparation) s'il existe un AR-idéal I non nul de R/P contenu dans Q/P .

D'après le théorème 1.3.2, on déduit que la séparation normale dans les anneaux noethériens entraîne la AR-séparation. Le lemme suivant donne une relation entre la séparation normale est la condition de seconde niveau forte :

Lemme 1.3.5. *Soit R un anneau noethérien. Si $\text{Spect}(R)$ possède la séparation normale ; alors R satisfait la condition de second niveau forte.*

Démonstration. Voir [42, Lemma 11.14]. □

Proposition 1.3.6. *Soit I un idéal d'un anneau noethérien R et P, Q deux idéaux premiers de R avec $P \rightsquigarrow Q$. Alors, si $I \leq P$ et I satisfait la propriété de Artin-Rees à gauche, on a $I \leq Q$. Mais, si $I \leq Q$ et I satisfait la propriété de Artin-Rees à droite, on a $I \leq P$.*

Démonstration. Soit J l'idéal associé au lien $P \rightsquigarrow Q$, on a donc $PQ \leq J$ et $l.\text{Ann}_R((Q \cap P)/J) = P$. La propriété de Artin-Rees à gauche implique que $(Q \cap P)I^n \leq I(Q \cap P)$, pour un certain entier positif n . Alors

$$I^n(Q \cap P) \leq Q \cap P \cap I^n \leq I(Q \cap P) \leq PQ \leq J,$$

d'où $I^n \leq l.\text{Ann}_R((Q \cap P)/J) = Q$, ce qui entraîne que $I \leq Q$. On démontre la dernière assertion par symétrie. □

Un anneau R noethérien (à droite) est dit *AR-anneau* (à droite), si chacun de ses idéaux est un AR-idéal (à droite). Par exemple tout anneau noethérien polycentral est un AR-anneau.

La proposition 1.3.6 implique clairement le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.7. *Le spectre premier d'un AR-anneau n'a pas de lien non-trivial.*

Démonstration. Voir [48, Corollary 5.3.11]. □

1.3.8. Soit P un idéal semi-premier d'un anneau noethérien (à droite) R ; on dit que P est *stable* si et seulement si, étant donné un lien $Q \rightsquigarrow Q'$ dans $\text{Spec}(R)$, Q est premier associé à P si et seulement si Q' l'est aussi. La proposition suivante est la Proposition 7.3.13 de [48]

Proposition. *Dans un anneau noethérien, un idéal premier satisfaisant la propriété de Artin-Rees est classiquement localisable si et seulement si il est stable.*

1.4 Les actions rationnelles sur les \mathbb{k} -algèbres.

Les actions des groupes algébriques sur certaines \mathbb{k} -algèbres jouent un rôle important dans la stratification de leurs spectres premiers, voir la prochaine section. Ce concept mérite donc un rappel, qu'on donne sous forme de cette petite section.

Soit \mathbb{k} un corps commutatif algébriquement clos. Suivant [71], considérons R une \mathbb{k} -algèbre et \mathcal{H} un groupe. Une action de \mathcal{H} sur R est un morphisme de groupe

$$\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(R),$$

dans ce cas on dit qu'on a une \mathcal{H} -action sur R .

Soit maintenant \mathcal{H} un groupe algébrique défini sur \mathbb{k} , une \mathcal{H} -action sur R est dite *rationnelle* si pour tout élément $x \in R$ il existe un sous-espace vectoriel V de R de dimension finie et \mathcal{H} -stable ⁶ contenant x tel que la restriction de l'action de \mathcal{H} à V induit un morphisme de groupe algébrique de \mathcal{H} vers $GL_{\dim(V)}(V)$. C'est à dire que R est limite directe de ces espace vectoriel. La condition de rationalité donne une certaine "graduation" sur R ; c'est à dire que tout élément de R est somme finie d'éléments homogènes au sens suivant : Un élément $x \in R$ non nul est dit homogène s'il existe un caractère algébrique (i.e morphisme de groupe algébrique) $\chi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{k}^\times$ tel que $h.x = \chi(h).x$, pour tout $h \in \mathcal{H}$.

Soit R une \mathbb{k} -algèbre, avec \mathbb{k} non nécessairement algébriquement clos, mais un corps infini; supposons qu'il existe une \mathcal{H} -action sur R et que \mathcal{H} soit un tore algébrique de dimension n sur \mathbb{k} , i.e. $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^n$. Alors d'après [43, 5.1] où [40, 6.1], si \mathcal{H} agit rationnellement sur R , celui là admet une $\widehat{\mathcal{H}}$ -graduation, où $\widehat{\mathcal{H}}$ est le groupe des caractères de \mathcal{H} : $R = \bigoplus_{x \in \widehat{\mathcal{H}}} R_x$ dont $R_x = \{r \in R \mid h.r = x(h)r, \forall h \in \mathcal{H}\}$. Inversement, toute \mathbb{Z}^n -graduation de R est donnée par une action rationnelle d'un tore algébrique de dimension n sur \mathbb{k} , voir [71, p. 784]. Dans le reste de ce travail on adopte la définition suivante

Définition 1.4.1. Soit \mathbb{k} un corps infini, R une \mathbb{k} -algèbre et $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^n$ un tore algébrique sur \mathbb{k} . On dit qu'il y a une \mathcal{H} -action rationnelle sur R si et seulement si $R = \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}^n} R_x$ ($x(h) = h_1^{m_1} \cdots h_n^{m_n}, (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$) est une \mathbb{Z}^n -graduation.

1.5 La \mathcal{H} -stratification du spectre premier.

Ici on rappelle la stratification du spectre premier d'un anneau admettant une action, sous forme des automorphismes, d'un groupe abélien. Celle ci est une réunion disjointe de ce spectre, indexé par les idéaux premiers qui sont stables sous la dite action.

Soit \mathcal{H} un groupe agissant comme automorphisme sur un anneau R . Un idéal propre et \mathcal{H} -stable J de R , est dit *\mathcal{H} -premier*, si pour tout K, L deux idéaux \mathcal{H} -stable de R tels que $K.L \subseteq J$, on a $K \subseteq J$ ou $L \subseteq J$. L'ensemble des idéaux \mathcal{H} -premiers de R , sera noté par $\mathcal{H} - \text{Spect}(R)$. Pour tout idéal I de R , on considère $\mathcal{H}(I)$ l'intersection de tout les éléments de l'orbite de I , c'est à dire

$$\mathcal{H}(I) = \bigcap_{h \in \mathcal{H}} h(I).$$

C'est donc le plus grand idéal \mathcal{H} -stable inclus dans I . Remarquons que si P est un idéal premier de R , alors $\mathcal{H}(P)$ est un idéal \mathcal{H} -premier de R .

Si R est anneau noethérien et I un idéal \mathcal{H} -premier, il est facile de vérifier que I est semi-premier et que les idéaux minimaux (qui sont en nombre finie dans ce cas, car R est noethérien) sur I forment une \mathcal{H} -orbite qui est un singleton (voir [24, Remark 4*,5*, p. 338]). En plus $\mathcal{H}(P) = I$, pour tout idéal premier P minimal sur I .

⁶Un sous-ensemble E de R est dit *\mathcal{H} -stable* si $h(E) \subseteq E, \forall h \in \mathcal{H}$.

Le \mathcal{H} -stratum, pour un idéal \mathcal{H} -premier J , est l'ensemble

$$\text{Spect}_J(R) = \{P \in \text{Spect}(R) \mid \mathcal{H}(P) = J\}.$$

On peut donc définir les \mathcal{H} -strata dans n'importe quel sous-ensemble de $\text{Spect}(R)$, par l'intersection avec chaque stratum. Par exemple, le \mathcal{H} -stratum de J dans $\text{Prim}(R)$, sera l'ensemble

$$\text{Prim}_J(R) = \{P \in \text{Prim}(R) \mid \mathcal{H}(P) = J\} = \text{Prim}(R) \cap \text{Spect}_J(R).$$

Puisque $\mathcal{H}(P) \in \mathcal{H} - \text{Spect}(R)$, pour tout $P \in \text{Spect}(R)$, on a donc une partition de $\text{Spect}(R)$ en \mathcal{H} -strata, i.e

$$\text{Spect}(R) = \bigsqcup_{J \in \mathcal{H} - \text{Spect}(R)} \text{Spect}_J(R). \tag{1.2}$$

Cette partition sera référé par la \mathcal{H} -stratification de $\text{Spect}(R)$. De même on a une partition de $\text{Prim}(R)$ en \mathcal{H} -strata $\text{Prim}_J(R)$, qu'on appel aussi la \mathcal{H} -stratification de $\text{Prim}(R)$.

1.6 L'équivalence de Dixmier-Moeglin.

Fixons R une \mathbb{k} -algèbre noethérienne. Soit P un idéal premier de R . Rappelons que P est dit *rationnel* si le centre de l'anneau des fractions de Goldie de R/P , $Z(\text{fract}(R/P))$, est algébrique sur \mathbb{k} ; l'ensemble des idéaux rationnels sera noté par $\text{Rat}(R)$. On rappelle encore que P est dit *localement fermé* dans $\text{Spect}(R)$ si :

$$P \subsetneq \bigcap_{\substack{P \subset Q \\ Q \text{ est premier}}} Q.$$

Définition 1.6.1. On dit que R satisfait *l'équivalence de Dixmier -Moeglin* si l'ensemble des idéaux primitifs coïncide avec l'ensemble des idéaux premiers rationnels et avec l'ensemble des idéaux premiers localement fermés.

L'avantage de cette équivalence, quand elle est vrai, est la reconnaissance des idéaux primitifs sans besoin de construire des représentations irréductibles.

D'après [62, Chap. 9], on dit que R satisfait le *Nullstellensatz* sur \mathbb{k} , si R est un anneau de Jacobson (i.e. tout idéal premier est semi-primitif) et si l'anneau des endomorphismes des R -module simple sont algébrique sur \mathbb{k} . Il résulte de [20, 4.1.6], que si R satisfait le Nullstellensatz, alors tout idéal primitif de R est rationnel. Bien sûr, il est immediate que tout idéal premier localement fermé d'un anneau de Jacobson, doit être primitif.

Supposons maintenant que \mathbb{k} est un corps algébriquement clos et qu'il existe une \mathcal{H} -action ($\mathcal{H} = (\mathbb{k}^*)^r$, $r \in \mathbb{N}$) rationnelle sur R . D'après [64] et [79]; \mathcal{H} agit transitivement sur les \mathcal{H} -strata de $\text{Rat}(R)$, c'est à dire que tout \mathcal{H} -stratum dans $\text{Rat}(R)$ est une \mathcal{H} -orbite

formée par un singleton. Si, de plus, R satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin, il est évident que le même résultat est vrai pour les \mathcal{H} -strata de $\text{Prim}(R)$.

Avec l'hypothèse que tout idéal \mathcal{H} -premier est complètement premier et que \mathbb{k} est un corps infini, K.R. Goodearl et E.S. Letzter ont démontré dans [40, Theorem 6.8] le résultat de transitivité sur les \mathcal{H} -strata de $\text{Prim}(R)$. Plus tard K.R. Goodearl a remarqué [43, Theorem 5.5], que le même résultat est vrai sous l'hypothèse que $\text{Spect}(R)$ possède la \mathcal{H} -séparation (les idéaux premiers emboîtés sont séparés par un élément \mathcal{H} -invariant et normale dans l'algèbre quotient).

1.7 Les extensions de Ore.

Il a été observé, dernièrement, que la plupart des algèbres quantiques peuvent être exprimées sous forme des extensions de Ore itérés. Cela a réveillé l'intérêt de plusieurs chercheurs à l'étude de ces extensions, voir par exemple [39] et ses références. Dans cette section on donne un rappel, ajusté à notre besoin, sur les extension de Ore.

Soit α un endomorphisme d'un anneau R , une α -dérivations à gauche de R est une application additive $\delta : R \rightarrow R$ tel que $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$, pour tout $a, b \in R$; on définit les α -dérivation à droite par symétrie. Si $\alpha = id_R$, δ est donc une dérivation ordinaire. Dans tout le reste de ce travail une α -dérivations signifie une α -dérivation à gauche.

Soit δ une α -dérivation de R ; d'après [42, Proposition 1.10] il existe un anneau T contenant R comme sous-anneau et un élément x de T tel que T est un R -module à gauche libre de base $1, x, \dots, x^n, \dots$ et avec la relation $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$, pour tout $r \in R$.

L'anneau T sera noté par $T = R[x; \alpha, \delta]$ et appelé l'extension de Ore de R . Quand $\alpha = id_R$ on note $T = R[x; \delta]$ dit l'anneau des opérateurs différentielles (formel) de R ; et si $\delta = 0$ on note T par $R[x; \alpha]$. L'anneau T possède la propriété universelle suivante : soit S un autre anneau qui contient R comme sous-anneau, si on suppose qu'il y a un élément $y \in S$ tel que $yr = \alpha(r)y + \delta(r)$, pour tout $r \in R$; alors, il est facile de prouver qu'il existe un morphisme d'anneau $\phi : T \rightarrow S$ envoyant $x \mapsto y$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & S \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ T & & \end{array}$$

soit commutatif. Tout élément non-nul f de T se décompose sous forme unique $f = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i x^i$, où $n \in \mathbb{N}$ et chaque $a_i \in R$ avec $a_n \neq 0$.

Un calcul évident prouve le lemme suivant

Lemme 1.7.1. *Étant donné un endomorphisme α de R et une application additive $\delta : R \rightarrow R$, on peut définir $\Phi : R \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}(R)$ via $r \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(r) & \delta(r) \\ 0 & r \end{pmatrix}$. Alors δ est une α -dérivation si et seulement si Φ est un morphisme des anneaux.*

Soit R un anneau et α un automorphisme de R ; d'après [42, Proposition 1.16], il existe un anneau T contenant R comme sous-anneau avec un élément inversible $x \in T$ tel que T est un R -module à gauche libre de base $1, x^{\pm 1}, x^{\pm 2}, \dots, x^{\pm n}, \dots$ avec la relation $xr = \alpha(r)x$, pour tout $r \in R$. L'anneau T est appelé l'anneau des *polynômes de Laurent tordue* à une seule variable, on le note par $T = R[x^{\pm 1}; \alpha]$. On verra plus tard que la construction de cet anneau vient en effet de la localisation de $R[x; \alpha]$ par l'ensemble multiplicatif engendré par x .

Remarque 1.7.2. Étant donné une extension de Ore $R_1 = R[x_1; \alpha_1, \delta_1]$ et supposant qu'il existe une α_2 -dérivation δ_2 de R_1 , on peut donc construire $R_2 = R_1[x_2; \alpha_2, \delta_2]$, et ainsi de suite. On appelle *extension de Ore itérée* de rang n de R la $n^{\text{ième}}$ extension de Ore R_n qu'on note par

$$R_n = R[x_1; \alpha_1, \delta_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_n; \alpha_n, \delta_n]$$

L'anneau de polynômes de Laurent tordus à une seule variable, est donc une extension de Ore itérée de R de rang 2, avec $x_1 = x$, $x_2 = x^{-1}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^{-1}$. C'est donc une autre manière de définir cet anneau de polynômes.

L'un des problèmes techniques qu'on rencontre dans les extensions de Ore, et que les propriétés de R ne passe pas toujours à $R[x; \alpha, \delta]$. Mais avec des hypothèse supplémentaires certaines de ces propriétés peuvent être transférés, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.7.3. *Considérons $T = R[x; \alpha, \delta]$.*

- (i) *Si α est un automorphisme et R est intègre, alors T est aussi intègre.*
- (ii) *Si α est un automorphisme et R est premier, alors T est aussi premier.*
- (iii) *Si α est un automorphisme et R est noethérien à gauche (à droite), alors T est aussi noethérien à gauche (à droite).*

Démonstration. Voir [62, Theorem 1.2.9]. □

Théorème 1.7.4. *Soit $T = R[x; \alpha, \delta]$, avec α un automorphisme, et soit I un idéal de R .*

- (i) *Si $\alpha(I) \subseteq I$ et $\delta(I) \subseteq I$, alors $TI = IT$ est un idéal de T .*
- (ii) *Si I est (α, δ) -stable (i.e. α -stable et δ -stable) considérons $\bar{\alpha}$ l'automorphisme de R/I induit par α , alors δ induit aussi une $\bar{\alpha}$ -dérivation $\bar{\delta}$ de R/I de telle manière que*

$$T/TI \cong R/I[x; \bar{\alpha}, \bar{\delta}]$$

soit un isomorphisme des anneaux.

Démonstration. Voir [39, 2.1(vi)]. □

Soit α un endomorphisme d'un anneau R , et δ une α -dérivation, soit X un ensemble dénominateur à droite de R , avec $\alpha(X) \subseteq X$. Considérons $\bar{\alpha}, \bar{\delta}$ les prolongement de α, δ à $R.X^{-1}$ définis par

$$\bar{\alpha}(r.x^{-1}) = \alpha(r).\alpha(x)^{-1}, \quad \bar{\delta}(r.x^{-1}) = \delta(r).x^{-1} - \bar{\alpha}(r.x^{-1})\delta(x).x^{-1} \quad (1.3)$$

Il est clair que $\bar{\alpha}$ est un endomorphisme de $R.X^{-1}$; en utilisant le lemme 1.7.1 on montre que $\bar{\delta}$ est une $\bar{\alpha}$ -dérivation de $R.X^{-1}$. Ensuite, on peut considéré l'extension de Ore $R.X^{-1}[x; \bar{\alpha}, \bar{\delta}]$.

Lemme 1.7.5. *Soit $T = R[x; \alpha, \delta]$ avec α un endomorphisme de R et soit X un ensemble dénominateur à droite de R , tel que $\alpha(X) \subseteq X$. Considérons $\bar{\alpha}, \bar{\delta}$ comme dans (1.3). Alors X est un ensemble dénominateur à droite de T et l'application identité de $R.X^{-1}$ se prolonge à un isomorphisme des anneaux $T.X^{-1} \cong R.X^{-1}[x; \bar{\alpha}, \bar{\delta}]$ via $x.1^{-1} \mapsto x$*

Démonstration. Voir [36, Lemma 1.4]. □

Soit α un endomorphisme de R , pour tout $a \in R$ l'application additive $r \mapsto ar - \alpha(r)a$ est clairement une α -dérivation; elle est dite une α -dérivation intérieure de R , on la note par δ_a .

Lemme 1.7.6. *Considérons $T = R[x; \alpha, \delta]$.*

- (i) *Supposons que α soit un automorphisme intérieur (i.e. il existe $u \in R$ inversible tel que $\alpha(r) = u^{-1}ru$, pour tout $r \in R$). Alors $u.\delta$ est une dérivation de R ; en plus l'application identité de R se prolonge à un isomorphisme $T \cong R[ux; u\delta]$ via $x \mapsto ux$.*
- (ii) *Supposons que δ est une α -dérivation intérieure avec $\delta = \delta_a$, $a \in R$. Alors l'application identité de R se prolonge à un isomorphisme $T \cong R[x - a; \alpha]$ via $x \mapsto x - a$.*

Démonstration. Voir [36, Lemma 1.5]. □

Théorème 1.7.7. [38, Theorem 2.3]. *Soit $T = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_n; \alpha_n, \delta_n]$ une extension de Ore itérée de \mathbb{k} ; pour chaque $i = 1, \dots, n$, on note $T_i = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_i; \alpha_i, \delta_i]$ et pour chaque $i = 2, \dots, n$ on suppose les conditions suivantes satisfaites*

- (a) *α_i est un \mathbb{k} -automorphisme de T_{i-1} et que δ_i est une \mathbb{k} -linéaire α_i -dérivation.*
- (b) *Pour tout $j = 1, \dots, i-1$ il existe $\lambda_{ij} \in \mathbb{k}^*$ tel que $\alpha_i(x_j) = \lambda_{ij}x_j$.*
- (c) *Il existe $q_i \in \mathbb{k}^*$ tel que $\delta_i \circ \alpha_i(x_j) = q_i\alpha_i \circ \delta_i(x_j)$, pour tout $j = 1, \dots, i-1$ et $i \geq 2$.*
- (d) *Où bien tous les q_i ne sont pas racine de l'unité, où bien chaque $q_i = 1$ et \mathbb{k} est de caractéristique nulle.*

De plus on suppose que le sous-groupe Λ de \mathbb{k}^ engendré par les λ_{ij} est torsion-libre. Alors tout idéal premier de T est complètement premier.*

1.7.1 L'algèbre de McConnell-Pettit.

Le contenu de cette sous-section est un rappel de [40].

1.7.8. Soit $\Lambda = (\lambda_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans \mathbb{k}^* tel que $\lambda_{ji} = \lambda_{ij}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$, pour tout $i, j = 1, \dots, n$. L'algèbre $\mathbb{k}_\Lambda[x_1, \dots, x_n]$ engendré par x_1, \dots, x_n soumis aux relations $x_i x_j = \lambda_{ij} x_j x_i$, pour tout $i, j = 1, \dots, n$, est appelée *l'anneau des coordonnées de l'espace quantique affine n -dimensionnelle* ou tout simplement *l'espace quantique associé à la matrice Λ* . C'est clair que c'est une extension de Ore itérés de \mathbb{k} de rang n :

$$\mathbb{k}_\Lambda[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2] \cdots [x_n; \alpha_n]$$

où $\alpha_j(x_i) = \lambda_{ij} x_i$ pour tout $i < j$. Comme \mathbb{k} est un corps et que chaque α_i est un automorphisme, d'après plusieurs application itératives du théorème 1.7.3, $\mathbb{k}_\Lambda[x_1, \dots, x_n]$ est une \mathbb{k} -algèbre noethérienne intègre (i.e. un domaine). On note par $\mathbb{k}_\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ son corps des fractions à gauche.

Il est clair que chaque x_i est normale ; alors l'ensemble multiplicatif engendré par tout ces x_i , $1 \leq i \leq n$:

$$\mathcal{X} = \{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \mid (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n\}$$

est un ensemble dénominateur de $\mathbb{k}_\Lambda[x_1, \dots, x_n]$, on note par $\mathbf{P}(\Lambda) = \mathbb{k}_\Lambda[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ l'anneau des fractions correspondant, c'est donc un anneau des polynômes de Laurent tordue en n -variables

$$\mathbf{P}(\Lambda) = \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}][x_2^{\pm 1}; \alpha_2] \cdots [x_n^{\pm 1}; \alpha_n],$$

cette algèbre est connue sous le nom de *l'algèbre de McConnell-Pettit* associé à la matrice Λ . La proposition suivante due à McConnell et Pettit, donne un critère de simplicité de $\mathbf{P}(\Lambda)$.

Proposition. *Soit $\mathbf{P}(\Lambda)$ une algèbre de McConnell-Pettit. Alors $\mathbf{P}(\Lambda)$ est simple si et seulement si la matrice Λ satisfait la propriété suivante : pour tout $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, la condition*

$$\prod_{1 \leq l \leq n} \lambda_{il}^{m_l} = 1, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n; \text{ entraîne } m = 0.$$

Démonstration. Voir [61, Proposition 1.3]. □

1.7.9. Soit $R = \mathbf{P}(\Lambda)$ une \mathbb{k} -algèbre de McConnell-Pettit associée à une matrice Λ . On définit l'application :

$$\begin{aligned} \sigma_\Lambda : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{k}^* \\ (s, t) &\longmapsto \sigma_\Lambda(s, t) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{ij}^{s_i t_j}, \end{aligned}$$

pour $s = (s_1, \dots, s_n), t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$. En utilisant cette définition, il est clair que σ_Λ satisfait les propriétés suivantes :

- (a) $\sigma_\Lambda(s, s) = 1$
- (b) $\sigma_\Lambda(s, t) = \sigma_\Lambda(t, s)^{-1}$, pour tout $(s, t) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$.
- (c) $\sigma_\Lambda(s, t + t') = \sigma_\Lambda(s, t) + \sigma_\Lambda(s, t')$, pour tout $s, t, t' \in \mathbb{Z}^n$.

La condition (c) entraîne que $\sigma_\Lambda(s, 0) = 1, \sigma_\Lambda(s, -t) = \sigma_\Lambda(s, t)^{-1}$, pour tout $s, t \in \mathbb{Z}^n$. D'où $\sigma_\Lambda(s, -) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{k}^*$ est un morphisme de groupe abélien, pour tout $s \in \mathbb{Z}^n$. Notons par $S := \{s \in \mathbb{Z}^n \mid \sigma_\Lambda(s, -) \equiv 1\}$ (i.e. $s \in S \Leftrightarrow \sigma_\Lambda(s, t) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}^n$); ceci est un sous-groupe de \mathbb{Z}^n . Pour $s \in \mathbb{Z}^n$, on note $x^s = x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$ les monômes de R ; il est évident que

$$x^s x^t = \sigma_\Lambda(s, t) x^t x^s.$$

Un élément z de R peut être exprimé sous forme unique $z = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r x^r$, pour certains $a_r \in \mathbb{k}$, où les a_r sont tous nuls si et seulement si z est nul.

Lemme. *Soit R et S définies comme ci-dessus. Alors le centre de R est égal*

$$\mathcal{Z}(R) = \mathbb{k}[x^s \mid s \in S].$$

Démonstration. Il est clair qu'un monôme $x^s \in R$, où $s \in S$, appartient au centre de R . Inversement, soit $z \in \mathcal{Z}(R), z = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} a_r x^r$ (somme finie), alors pour tout $t \in \mathbb{Z}^n$ on a :

$$z x^t = \sum_r a_r x^r x^t = \sum_r a_r \sigma_\Lambda(r, t) x^t x^r = \sum_r a_r x^t x^r = x^t z,$$

d'où $\sigma_\Lambda(r, t) = 1, \forall t \in \mathbb{Z}^n$ i.e $r \in S$, pour tout $a_r \neq 0$. Et par suite $z \in \mathbb{k}[x^s \mid s \in S]$. \square

1.7.10. Soient R et S comme dans 1.7.9.

- (i) S est un groupe abélien libre, car \mathbb{Z}^n l'est; soit donc $\{b_1, \dots, b_k\}$ une base de S . D'après le lemme 1.7.9, $\mathcal{Z}(R)$ est engendré comme \mathbb{k} -espace vectoriel par les monômes : $(x^{b_1})^{\pm 1}, \dots, (x^{b_k})^{\pm 1}$. Supposons que $(x^{b_1})^{n_1} \cdots (x^{b_k})^{n_k} = 1$, pour certains $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que $n_1 b_1 + \dots + n_k b_k = 0$, comme les b_j sont indépendants, $\mathcal{Z}(R)$ est un anneau des polynômes de Laurent

$$\mathcal{Z}(R) = \mathbb{k}[(x^{b_1})^{\pm 1}, \dots, (x^{b_k})^{\pm 1}].$$

- (ii) Soit T la "transversal" de S dans \mathbb{Z}^n ($\mathbb{Z}^n = S \oplus T$), tout monôme x^r peut être écrit sous forme : $\lambda x^s x^t, \lambda \in \mathbb{k}^*,$ et $s \in S, t \in T$. Cela signifie que $\{x^t \mid t \in T\}$ est une base du $\mathcal{Z}(R)$ -module libre R .
- (iii) Choisissons T tel que $0 \in T$, on aura donc $R = \mathcal{Z}(R) \oplus R'$, pour un certain $\mathcal{Z}(R)$ -module R' .

Lemme 1.7.11. *Soit R et S comme dans 1.7.9.*

(a) *Si I est un idéal de R , alors $I = (I \cap \mathcal{Z}(R))R$.*

(b) *Si J est un idéal de $\mathcal{Z}(R)$, alors $J = (R.J) \cap \mathcal{Z}(R)$.*

Démonstration. (a) Soit T une transversal de S dans \mathbb{Z}^n . D'après 1.7.10(ii) R est un $\mathcal{Z}(R)$ -module libre de base $\{x^t \mid t \in T\}$. Considérons $x^\nu, \nu \in \mathbb{Z}^n$ et $f : R \rightarrow R, r \mapsto x^\nu r x^{-\nu}$ l'automorphisme intérieur associé à x^ν , qu'on note par σ_{x^ν} . Soit donc $\alpha : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(R)$ tel que $\alpha(r) = \sigma_{x^r}$. Pour tout monôme $x^t, t \in T$, on a $\alpha(\nu)(x^t) = x^\nu x^t x^{-\nu} = \sigma_\Lambda(\nu, t)x^t$; c'est à dire que x^t est un vecteur propre de $\alpha(\nu)$ avec valeur propre $\sigma_\Lambda(\nu, t)$. Si $t \neq u \in T$,

$$\sigma_\Lambda(-, t)\sigma_\Lambda(-, u)^{-1} = \sigma_\Lambda(-, t - u) \neq 1, \text{ puisque } t - u \notin S.$$

D'où $\sigma_\Lambda(-, t) \neq \sigma_\Lambda(-, u)$. Et par suite l'espace propre

$$V_t = \{r \in R \mid \alpha(\nu)(r) = \sigma_\Lambda(\nu, t)r, \text{ pour tout } \nu \in \mathbb{Z}^n\}$$

associé à la valeur propre $\sigma_\Lambda(\nu, t)$ est égal à $\mathcal{Z}(R)x^t$. Soit I un idéal de R , alors $\alpha(\nu)(I) = I$, puisque $\alpha(\nu)$ est intérieur, c'est à dire que I est $\alpha(\nu)$ -stable. Soit $r \in I$,

$$r = z_1 x^{t_1} + \cdots + z_m x^{t_m}$$

l'expression de r dans la base $\{x^t \mid t \in T\}$ du $\mathcal{Z}(R)$ -module libre R . Alors, $z_i x^{t_i}, i = 1, \dots, m$ sont tous des éléments de I . En effet, soit $0 \neq r \in I$ avec m minimal, tel que $z_i x^{t_i} \notin I$ (ici les $z_i x^{t_i}$ sont les composantes homogènes de r qu'on vient de considérer). On peut donc choisir $i = 1$; pour tout $\nu \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$\alpha(\nu)(r) = \sigma_\Lambda(\nu, t_1)z_1 x^{t_1} + \cdots + \sigma_\Lambda(\nu, t_m)z_m x^{t_m}.$$

Prenant cette fois ν tel que $\sigma_\Lambda(\nu, t_2) \neq \sigma_\Lambda(\nu, t_1)$, on aura donc,

$$\alpha(\nu)(r) - \sigma_\Lambda(\nu, t_1)r = (\sigma_\Lambda(\nu, t_2) - \sigma_\Lambda(\nu, t_1))z_2 x^{t_2} + \cdots + (\sigma_\Lambda(\nu, t_m) - \sigma_\Lambda(\nu, t_1))z_m x^{t_m}.$$

est un élément non-nul de I , puisque $\sigma_\Lambda(\nu, t_2) - \sigma_\Lambda(\nu, t_1) \neq 0$. Ceci est une contradiction avec la minimalité du m . D'où $z_1 x^{t_1} \in I$, et par suite I est engendré par $\{z x^t \mid z \in \mathcal{Z}(R), t \in T, z x^t \in I\}$ qui est l'espace des vecteurs propres de $\alpha(\nu)$. D'autre part $z x^t \in I$, où $z \in \mathcal{Z}(R), t \in T$ entraîne que $z \in I \cap \mathcal{Z}(R)$; et alors $I \subseteq \mathcal{Z}(R) \cap I$. Donc $I = (\mathcal{Z}(R) \cap I).R$.

(b) Se déduit de la décomposition $R = \mathcal{Z}(R) \oplus R'$ cité dans 1.7.10(iii). \square

Corollaire 1.7.12. *Soit $R = \mathbf{P}(\Lambda)$ comme dans 1.7.9.*

(a) *Le treillis des idéaux de R est en bijection avec le treillis des idéaux de $\mathcal{Z}(R)$, la bijection est donné par contraction et extension.*

(b) *La contraction et l'extension, induisent une bijection entre $\text{Spect}(R)$ et $\text{Spect}(\mathcal{Z}(R))$.*

(c) La contraction et l'extension, induisent une bijection entre $\text{Prim}(R)$ et $\text{Max}(\mathcal{Z}(R))$.

Démonstration. (a) La contraction et l'extension cités dans la proposition 1.7.11, donne la bijection désirée.

(b) Se déduit de (a).

(c) D'après (a), il y a une bijection entre $\text{Max}(R)$ et $\text{Max}(\mathcal{Z}(R))$. Alors il suffit de prouver que les idéaux primitifs de R sont maximaux. Puisque $\mathcal{Z}(R)$ est un anneau des polynômes de Laurent commutatif sur \mathbb{k} , c'est donc une \mathbb{k} -algèbre affine. Il est connue que $\mathcal{Z}(R)$ est un anneau de Jacobson. L'algèbre R peut être reconstruite de $\mathcal{Z}(R)$ en ajoutons successivement les variables $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}$. Donc R est une "almost" extension normalisante de $\mathcal{Z}(R)$, voir [62, 1.6.10]. En utilisant cet fois [62, 9.4.12], R est une $\mathcal{Z}(R)$ -algèbre constructive; elle satisfait donc le Nullstellensatz, d'après [62, 9.4.21]. Et par suite tout idéal primitif de R contracte $\mathcal{Z}(R)$ en un idéal maximal. D'où le résultat. \square

Remarque 1.7.13. On verra plus loin que les algèbres de type $P(\Lambda)$ sont inclus dans une classe des algèbres qui satisfait le Nullstellensatz; ce qui simplifie la démonstration précédente.

Proposition 1.7.14. Soit $R = B[x_1^{\pm 1}; \alpha_1] \cdots [x_n^{\pm 1}; \alpha_n]$ un anneau des polynômes de Laurent tordue sur une \mathbb{k} -algèbre simple noethérienne B , dont chaque α_i est un automorphisme de \mathbb{k} -algèbre tel que $\alpha_j(x_i) \in \mathbb{k}^* x_i$, pour $i < j$. Alors R est une \mathbb{k} -algèbre polycentrale.

Démonstration. Voir [37, Proposition 3.10]. \square

Corollaire 1.7.15. Soit $R = \mathbf{P}(\Lambda)$ comme dans 1.7.9. Alors R est polycentrale.

1.7.16. Soit $R = \mathbf{P}(\Lambda)$ comme en 1.7.9 et \mathcal{H} le tore $(\mathbb{k}^*)^n$. Alors \mathcal{H} agit sur R comme un groupe d'automorphismes de la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(R) \\ h = (h_i) &\longmapsto [x_i \mapsto h_i x_i]. \end{aligned}$$

D'où $h(x^s) = h_1^{s_1} \cdots h_n^{s_n} x^s$, $\forall s \in \mathbb{Z}^n$. Ou bien $h(x^s) = \gamma_s(h) x^s$, où $\gamma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}$ via $s \mapsto [h \mapsto h_1^{s_1} \cdots h_n^{s_n}]$

Lemme. Si \mathbb{k} est un corps infini. Alors R est une \mathbb{k} -algèbre \mathcal{H} -simple (i.e. les uniques idéaux \mathcal{H} -stables sont 0 et R).

Démonstration. Comme \mathcal{H} agit rationnellement sur R , tous idéal \mathcal{H} -stable est engendré comme \mathbb{k} -espace vectoriel par des éléments \mathcal{H} -propres. Il suffit donc de vérifier que chaque \mathcal{H} -vecteur propre non nul est inversible. Mais chaque \mathcal{H} -espace propre est de la forme $\mathbb{k}x^s$, pour un certain $s \in \mathbb{Z}^n$, ce qui termine la preuve. \square

1.7.2 Les extensions de Ore q -tordues.

Soit R un anneau noethérien, α un automorphisme de R et δ une α -dérivation de R ; considérons donc $T = R[x; \alpha, \delta]$ l'extension de Ore correspondante. Si Q est un idéal complètement premier de R qui est (α, δ) -stable, on note par α, δ les prolongements de α, δ , respectivement, à $F = \text{fract}(R/Q)$ le corps des fractions à gauche de R/Q . On a donc, d'après le théorème 1.7.4 et lemme 1.7.5, l'isomorphisme suivant

$$F[x; \alpha, \delta] \cong (T/QT).(R/Q \setminus \{0\})^{-1}.$$

Si on suppose que δ est intérieure sur F , i.e. $\exists f \in F$ tel que $\delta = \delta_f$, on a donc, d'après le lemme 1.7.6, que

$$F[x; \alpha, \delta] \cong F[x - f; \alpha] \cong (T/TQ).(R/Q \setminus \{0\})^{-1}.$$

D'où $\langle x - f \rangle^c = \langle x - f \rangle \cap (T/TQ)$ est un idéal premier de $T/TQ \cong (R/Q)[x; \alpha, \delta]$, en utilisant le théorème 1.1.8; et par suite $P = QT + \langle x - f \rangle^c$ est un idéal premier de T dont la contraction à R est Q , i.e. $P \cap R = Q$.

Soit $R[x; \alpha, \delta]$ comme ci-dessus et $q \in R$ un élément central (α, δ) -constant (i.e. $\alpha(q) = q, \delta(q) = 0$). On dit que δ est une α -dérivation q -tordue lorsque $\delta\alpha = q\alpha\delta$. Dans ce cas on appelle $R[x; \alpha, \delta]$ une *extension de Ore q -tordue*. Une extension de Ore q -tordue est dite de type $(*, 0)$ si $\forall i \in \mathbb{N}, q^i + q^{i-1} + \dots + 1$ est inversible dans R . C'est le cas en particulier, si R est une \mathbb{k} -algèbre avec la caractéristique de \mathbb{k} est nulle et $q = 1$.

Le théorème suivant est une forme restreinte du théorème 11.1 de [39] au cas où, dans les anneaux envisagés, tout idéal premier est complètement premier.

Théorème 1.7.17. *Soit R un anneau noethérien, α un automorphisme de R et δ une α -dérivation de R , soit q un élément central inversible (α, δ) -constant de R . On suppose que $T = R[x; \alpha, \delta]$ est une extension de Ore q -tordue de type $(*, 0)$ de R et que tout idéal premier de R ou de T est complètement premier. Alors :*

- (i) *Si P est un idéal premier de T , sa contraction $P \cap R$ à R est un idéal premier qui, ou bien n'est pas α -stable, ou bien, est (α, δ) -stable.*
- (ii) *Si Q est un idéal premier de R non α -stable, il existe au plus un idéal premier P de T tel que $Q = P \cap R$.*
- (iii) *Si Q est un idéal premier (α, δ) -stable de R , on note $F = \text{fract}(R/Q)$ le corps à gauche des fractions de R/Q . Supposons que α induit un automorphisme de F dont aucune puissance n'est intérieur. Alors*
 - (a) *Si δ est intérieure sur F , $\delta = \delta_f$; alors il existe exactement deux idéaux premiers de T contractant Q à R ; plus précisément $QT \subseteq QT + \langle z \rangle^c$, où $z = x - f$.*
 - (b) *Si δ n'est pas intérieure sur F , alors il existe exactement un idéal premier de T contractant Q à R .*

1.7.18. Maintenant on va considérer des extensions de Ore plus spéciales. Soit R cet fois une \mathbb{k} -algèbre noethérienne et $T = R[x; \alpha, \delta]$ une extension de Ore de R tel que

- (i) α est un \mathbb{k} -automorphisme de R et δ une α -dérivation \mathbb{k} -linéaire de R . Rappelons que la multiplication de T est déterminée par la relation $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$, et que T est aussi une \mathbb{k} -algèbre noethérienne, d'après le théorème 1.7.3.
- (ii) Soit \mathcal{H} un groupe agissant sur T par des \mathbb{k} -automorphismes; en supposant que R est \mathcal{H} -stable (i.e. $h(R) \subseteq R, \forall h \in \mathcal{H}$), et que x est un \mathcal{H} -vecteur propre (i.e. $\forall h \in \mathcal{H}, h(x) = \lambda_h x, \lambda_h \in \mathbb{k}^*$), et qu'en plus α coïncide avec la restriction d'un élément $h_0 \in \mathcal{H}$. Soit donc $\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{k}^*$ la fonction des valeurs propres associé à x ; c'est à dire le caractère de \mathcal{H} défini par $h(x) = \lambda(h)x$, pour tout $h \in \mathcal{H}$.
- (iii) On pose $q = \lambda(h_0)^{-1}$, on a donc $h_0(x) = q^{-1}x$. Soit $r \in R$, on observe que

$$\begin{aligned} \alpha\delta(r) &= h_0(\delta(r)) = h_0(xr - \alpha(r)x) \\ &= q^{-1}xh_0(r) - h_0(\alpha(r))q^{-1}x = q^{-1}xh_0(r) - h_0^2(r)q^{-1}x \\ &= q^{-1}(x\alpha(r) - \alpha^2(r)x) = q^{-1}\delta\alpha(r); \end{aligned}$$

d'où $\alpha\delta = q^{-1}\delta\alpha$. Alors d'après le théorème 1.7.7 tout idéal premier de T est complètement premier, si q n'est pas racine de l'unité. De plus α peut être prolonger à un automorphisme de T , par $\alpha(x) = q^{-1}x$, cette extension est donc h_0 .

Lemme 1.7.19. Soit R, T, \mathcal{H} et q comme dans 1.7.18. Si q est non racine de l'unité, alors tout idéal \mathcal{H} -premier de T se contracte en un idéal δ -stable \mathcal{H} -premier de R .

On dit que R es \mathcal{H} -simple si les seuls idéaux \mathcal{H} -stables sont 0 et R

Lemme 1.7.20. Soit R, T, \mathcal{H} et q comme dans 1.7.18. Supposons que q n'est pas racine de l'unité et que R est \mathcal{H} -simple; mais T ne l'est pas.

- (i) Il existe un unique élément $d \in R$ tel que $\delta = \delta_d$ et $h(d) = \lambda(h)d, \forall h \in \mathcal{H}$.
- (ii) Il existe précisément deux idéaux \mathcal{H} -premiers dans T , exactement 0 et $\langle x - d \rangle$.

Démonstration. Voir [41, Lemma 3.3]. □

Proposition 1.7.21. Soit R, T, \mathcal{H} et q comme dans 1.7.18. Supposons que q n'est pas racine de l'unité.

- (i) Il existe au plus deux idéaux \mathcal{H} -premiers dans T et aussi dans R .
- (ii) Si tous les idéaux \mathcal{H} -premiers de R sont premiers (complètement premiers), alors il en est de même pour T .

Démonstration. Voir [41, Proposition 3.4]. □

1.7.22. Dans la suite on va considérer une extension de Ore itérés de rang n , qu'on suppose satisfait les hypothèses comme dans le cas du 1.7.18.

Soit donc $T = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_n; \alpha_n, \delta_n]$ et \mathcal{H} un groupe agissant sur T par des automorphismes d'algèbres, pour le quel les x_1, \dots, x_n sont des \mathcal{H} -vecteurs propres; notons que l'image de \mathcal{H} dans $\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(T)$ sera donc abélienne. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $T_i = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_i; \alpha_i, \delta_i]$. On suppose satisfaites les hypothèses suivantes :

1. ($\mathcal{H}a$) Il existe une infinité de valeurs propres pour l'action de \mathcal{H} sur x_1 (\mathbb{k} doit donc être un corps infini).
2. ($\mathcal{H}b$) Tout α_i est un \mathbb{k} -automorphisme de T_{i-1} et les δ_i sont des α_i -dérivation \mathbb{k} -linéaire sur T_{i-1} .
3. ($\mathcal{H}c$) Pour tout $2 \leq i \leq n$, il existe $h_i \in \mathcal{H}$ dont la restriction à T_{i-1} est égale à α_i et la h_i -valeur propre de x_i est non racine de l'unité.

Proposition. *Les idéaux \mathcal{H} -premiers de T sont tous complètement premiers et ils sont en nombre fini inférieur ou égale à 2^n .*

Démonstration. Se fait par récurrence sur n , en utilisant la proposition 1.7.21. □

Théorème 1.7.23. *Soit T une extension de Ore itérées de rang n sur un corps infini \mathbb{k} . Supposons que T satisfait les hypothèses ($\mathcal{H}a$), ($\mathcal{H}b$) et ($\mathcal{H}c$) citées dans 1.7.22, et supposons de plus que $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^*)^r$ agit rationnellement sur T . Soit J un idéal complètement premier \mathcal{H} -stable de T avec*

$$\mathrm{Spect}_J(T) = \{P \in \mathrm{Spect}(T) \mid \mathcal{H}(P) = J\}$$

le \mathcal{H} -stratum correspondant du $\mathrm{Spect}(T)$. Alors il existe un ensemble de Ore \mathcal{E}_J dans l'algèbre T/J tel que :

- (a) La localisation $T \rightarrow T/J \rightarrow T_J = (T/J)\mathcal{E}_J^{-1}$ induit un homeomorphisme du $\mathrm{Spect}_J(T)$ à $\mathrm{Spect}(T_J)$.
- (b) La contraction et l'extension induisent un homeomorphisme entre $\mathrm{Spect}(T_J)$ et le spectre premier $\mathrm{Spect}(\mathcal{Z}(T_J))$ du centre de T_J , $\mathcal{Z}(T_J)$.
- (c) $\mathcal{Z}(T_J)$ est un anneau des polynômes de Laurent commutatif en $p \leq r$ variable sur un anneau (extension du corps \mathbb{k}).

Si de plus T satisfait le Nullstellensatz sur \mathbb{k} et que tout idéal \mathcal{H} -premier est complètement premier. Alors T satisfait l'équivalence de Dixmier-Moeglin et les idéaux primitifs sont exactement les idéaux premiers maximaux dans leur \mathcal{H} -stratum.

Démonstration. C'est un cas particulier de [41, Theorem 6.6, 6.9]. □

1.8 Les algèbres de type Poincaré.Birkhoff.Witt.

Cette classe d'algèbres couvre, par exemple les espaces quantiques, les algèbres de McConnell-Pettit associées et la plupart des extensions de Ore itérées par une forme q -tordue. Dans cette section on rappelle les définitions et les propriétés élémentaires des algèbres de type Poincaré.Birkhoff.Witt, notre référence ici sera [17]. Cela nous sera de plus grande utile pour réaliser certains calculs effectifs dans les prochains chapitres.

Définition 1.8.1. Soit p un entier strictement positif, considérons le monoïde $(\mathbb{N}^p, +)$. Un ordre total \leq sur $(\mathbb{N}^p, +)$ est dit *admissible* si $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ est un élément minimal pour \leq , et si \leq est compatible avec l'addition, i.e.

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma, \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^p,$$

où $\alpha < \beta$ signifie que $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

Exemple 1.8.2. (1) *L'ordre lexicographique* ; soit $(\mathbb{N}^p, +)$ et \leq défini par

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{ou} \\ \alpha_i < \beta_i \text{ où } i \text{ est le premier indice tel que } \alpha_i \neq \beta_i. \end{cases}$$

Il est évident que \leq est un ordre admissible sur \mathbb{N}^p qu'on appelle l'ordre lexicographique directe. Si on note $\epsilon_i = (0, \dots, \underset{i\text{ème}}{1}, \dots, 0)$ on a dans ce cas $\epsilon_1 > \dots > \epsilon_n$. L'ordre lexicographique indirecte est défini par $\epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$.

(2) *L'ordre gradué* ; pour n'importe quel élément $\alpha \in \mathbb{N}^p$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Un ordre admissible \leq sur \mathbb{N}^p est dit gradué si $\alpha \leq \beta$ entraîne que $|\alpha| \leq |\beta|$. On peut associé à tout ordre admissible \leq un ordre admissible gradué, qu'on note par \leq_g , comme suit :

$$\alpha \leq_g \beta \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \text{ou} \\ |\alpha| = |\beta| \text{ et } \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}^p$ est dit un *monodéal* si

$$E + \mathbb{N}^p = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in E, \beta \in \mathbb{N}^p\} = E$$

C'est à dire que E est stable par toute translation.

Le théorème suivant rassemble les résultats qu'on va utiliser durant se travail, pour la preuve on renvoie le lecteur à [12], [17], [14], [55], [52].

Théorème 1.8.3. *Considérons le monoïde $(\mathbb{N}^p, +)$.*

- (1) *(Lemme de Dickson). Pour tout $A \subseteq \mathbb{N}^p$, ils existent des éléments $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in A$ tels que $A \subseteq \cup_{1 \leq i \leq m} (\alpha^i + \mathbb{N})$.*
- (2) *Tout monoidéal de \mathbb{N}^p possède un unique système des générateurs minimal par rapport à l'inclusion.*
- (3) *\mathbb{N}^p satisfait la condition des chaînes ascendantes pour les monoidéaux.*
- (4) *Tout ordre admissible \leq sur \mathbb{N}^p est un bon ordre.*

Démonstration. Voir [17, Section 2.1]. □

Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type fini engendrée par les éléments x_1, \dots, x_p , $\mathcal{B} = \{u_\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p\}$ est une \mathbb{k} -base (i.e. base d'espace vectoriel); on note $\epsilon_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{ieme}}{1}, 0, \dots, 0)$. Considérons un ordre admissible \leq sur \mathbb{N}^p ; tout élément non nul $f \in R$ a une représentation unique

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} c_{\alpha, f} u_\alpha,$$

les $c_{\alpha, f}$ représentent les coefficients de u_α dans l'expression de f par rapport à la base \mathcal{B} . Le diagramme de Newton sera donc l'ensemble suivant

$$\mathcal{N}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^p \mid c_{\alpha, f} \neq 0\}.$$

Comme cet ensemble est fini on peut considérer

$$\exp(f) = \max(\mathcal{N}(f)), \text{ si } f \neq 0 \text{ et } \exp(0) = -\infty;$$

ce qu'on appelle *l'exposant* de f ; on appelle aussi, le *coefficient dominant* et le *monôme dominant*, respectivement, les éléments

$$lc(f) = c_{\exp f, f}, \quad lm(f) = lc(f)u_{\exp(f)}.$$

Le théorème suivant est évident :

Théorème 1.8.4. *Soit R une \mathbb{k} -algèbre avec une \mathbb{k} -base $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$, soit \leq un ordre admissible sur \mathbb{N}^p . Alors*

- (1) $\mathcal{N}(f + g) \subseteq \mathcal{N}(f) \cup \mathcal{N}(g)$
- (2) $\exp(f + g) \leq \max(\exp(f), \exp(g))$, avec inégalité stricte si et seulement si $lm(f) = -lm(g)$.

Proposition 1.8.5. *Soit R une \mathbb{k} -algèbre avec une \mathbb{k} -base $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ et soit \leq un ordre admissible sur \mathbb{N}^p . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes*

- (i) $\exp(fg) = \exp(f) + \exp(g)$, pour tout $f, g \in R$;

(ii) $u_\alpha u_\beta = q_{\alpha,\beta} u_{\alpha+\beta} + \sum_{\gamma < \alpha+\beta} c_\gamma u_\gamma$, où $q_{\alpha,\beta} \in \mathbb{k}^*$;

(iii) $x_j x_i = q_{ij} x_i x_j + \sum_{\gamma < \epsilon_i + \epsilon_j} c_\gamma u_\gamma$, où $q_{ij} \in \mathbb{k}^*$.

Étant donné l'une de ces conditions, on a

$$lc(fg) = q_{exp(f),exp(g)} lc(f)lc(g).$$

En particulier R est intègre.

Démonstration. [17, Proposition 2.2.4] ou [55, Proposición 2.3, Corolario 2.9]. \square

Définition 1.8.6. On appelle une \mathbb{k} -algèbre R de type *Poincaré-Birkhoff-Witt* (P.B.W en abrégé), toute \mathbb{k} -algèbre possédant une \mathbb{k} -base $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ avec un ordre admissible \leq sur \mathbb{N}^p vérifiant l'une des conditions équivalente de la proposition 1.8.5. Dans ce cas on dit que \leq est \mathcal{B} -admissible.

Exemple 1.8.7. Soit $R = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_p; \alpha_p, \delta_p]$ une extension de Ore itérée de rang p du corps \mathbb{k} , notons par $\mathcal{B} = \{u_\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p\}$ la \mathbb{k} -base de R . Supposons que, pour tout $i < j$, on a

$$\alpha_j(x_i) = q_{ij} x_i + \sum_{\gamma < \epsilon_i} c_\gamma u_\gamma, \quad q_{ij} \in \mathbb{k}^*.$$

Alors l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^p , $\epsilon_p > \cdots > \epsilon_1$ est un ordre \mathcal{B} -admissible, ce qui entraîne que R est une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W.

Théorème 1.8.8. (*Algorithme de division à gauche*). Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W, de \mathbb{k} -base $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$. Considérons $f_1, \dots, f_m \in R \setminus \{0\}$ on définit

$$\Delta_1 = exp(f_1) + \mathbb{N}^p$$

$$\Delta_i = (exp(f_i) + \mathbb{N}^p) \setminus (\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_{i-1})$$

$$\bar{\Delta} = \mathbb{N}^p \setminus (\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m).$$

Alors, pour tout $f \in R$, ils existent $g_1, \dots, g_m, r \in R$ uniques tels que

$$(a) \quad f = \sum_{1 \leq i \leq m} g_i f_i + r,$$

$$(b) \quad r = 0 \text{ ou } \mathcal{N}(r) \subseteq \bar{\Delta}, \quad exp(r) \leq exp(f),$$

$$(c) \quad exp(f) + \mathcal{N}(g_i) \subseteq \Delta_i, \quad exp(g_i f_i) \leq exp(f).$$

Démonstration. Voir [17, Theorem 2.4.2] ou [12, Theorem 2.1]. \square

Remarque 1.8.9. L'algorithme de division à droite est défini par symétrie. Supposons qu'il y a un ordre \leq admissible sur \mathbb{N}^p . Alors \leq est \mathcal{B} -admissible si et seulement si l'algorithme de division à gauche est vrai dans R .

Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W et soit $F \subseteq R$, on note

$$\text{Exp}(F) = \{\text{exp}(f) \mid 0 \neq f \in F\}.$$

Proposition 1.8.10. Soit I un idéal de R . Alors $\text{Exp}(I) = \text{Exp}(I) + \mathbb{N}^p$ i.e. $\text{Exp}(I)$ est un monoïdale de \mathbb{N}^p . Si $I \neq 0$ et $\text{Exp}(I) = \cup_{1 \leq i \leq s} (\alpha^i + \mathbb{N}^p)$ où $\alpha^i = \text{exp}(f_i)$, $f_i \in I$, $i = 1, \dots, s$; alors $I = Rf_1 + \dots + Rf_s$.

Démonstration. Voir [17] ou [12, Lemma 2.6, Proposition 2.7]. □

Définition 1.8.11. [17, Définition 2.5.1]. Un ensemble $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ d'un idéal à gauche ou à droite I de R est dit une *base de Gröbner* si

$$\text{Exp}(I) = \bigcup_{i=1}^s (\text{exp}(f_i) + \mathbb{N}^p)$$

Corollaire 1.8.12. Soit I un idéal (à gauche ou à droite) non nul de R . Alors il existe une base de Gröbner pour I ; si de plus $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ une telle base on a $I = Rf_1 + \dots + Rf_s$. En particulier R est noethérien. Si I est un idéal non nul de R et G est une base de Gröbner pour I , on a $I = Rf_1 + \dots + Rf_s = f_1R + \dots + f_sR$.

Soit $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ un s -uplets de R , on note par ${}^G\bar{f}$ le reste de la division à gauche de f sur G .

Corollaire 1.8.13. Soit I un idéal à gauche non nul de R . Alors $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ est une base de Gröbner pour I si et seulement si ${}^G\bar{f} = 0$, pour tout $f \in I$.

Démonstration. Voir [17, Theorem 2.5.3] ou [12, Corollary 2.13]. □

Définition 1.8.14. Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W et $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ une \mathbb{k} -base avec \leq un ordre \mathcal{B} -admissible de \mathbb{N}^p . Soit $f, g \in R$, on définit le *S-polynôme à gauche* de f et g comme :

$$S^l(f, g) = c_{\beta, g} q_{\alpha, \gamma - \alpha} u_{\gamma - \alpha} f - c_{\alpha, f} q_{\beta, \gamma - \beta} u_{\gamma - \beta} g,$$

où $f = \sum c_{\alpha^i, f} u_{\alpha^i}$, $g = \sum c_{\beta^j, g} u_{\beta^j}$, $\alpha = \text{exp}(f)$, $\beta = \text{exp}(g)$, et $\gamma = (\gamma_i) = (\max\{\alpha_i, \beta_i\})$.

Théorème 1.8.15. Soit R comme dans la définition 1.8.14 et $G = \{f_1, \dots, f_s\}$ un système de générateurs d'un idéal à gauche I de R . Alors G est une base de Gröbner pour I si et seulement si ${}^G\overline{S^l(f_i, f_j)} = 0$, pour tout $i \neq j = 1, \dots, s$.

Démonstration. Voir [17, Theorem 2.6.5] ou [12, Theorem 3.2, Remark 3.4]. □

Soit $F \subseteq R$ un sous-ensemble fini, on note par $I^l(F)$ ($I^r(F)$) l'idéal à gauche (à droite) engendré par F , et par $I(F)$ l'idéal engendré par F . On dit que G est une base de *Gröbner bilatérale* (resp. à gauche, à droite) s'il est une base de Gröbner de $I(F)$ (resp. de $I^l(F)$, $I^r(f)$).

Remarque 1.8.16. [17, Theorem 2.9.10]. Considérons R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W.

(1) Soit $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ un système des générateurs d'un idéal à gauche I de R . On définit la suite $\{F_k\}$ de systèmes des générateurs à gauche de I en posant $F_0 = F$ et par récurrence

$$F_{k+1} = F_k \cup \{\overline{F_k S^l(f, g)} \mid f, g \in F_k\}.$$

On a donc une chaîne ascendante de systèmes des générateurs

$$F \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_t \subseteq \dots$$

Ce qui donne raison à une chaîne des monoïdeaux de \mathbb{N}^p

$$\langle \text{Exp}(F) \rangle = (\text{Exp}(F) + \mathbb{N}^p) \subseteq \text{Exp}(F_1) + \mathbb{N}^p \subseteq \dots \subseteq \text{Exp}(F_t) + \mathbb{N}^p \subseteq \dots.$$

Comme \mathbb{N}^p est noethérien, par le théorème 1.8.3, il existe un certain $h \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{Exp}(F_h) + \mathbb{N}^p = \text{Exp}(F_{h+1}) + \mathbb{N}^p.$$

Supposons qu'il existe $f, g \in F$ tel que $\overline{F_h S^l(f, g)} = r \neq 0$; alors $\mathcal{N}(r) \not\subseteq \text{Exp}(F_h) + \mathbb{N}^p$ et donc

$$\text{Exp}(F_h) + \mathbb{N}^p \subsetneq \text{Exp}(F_h \cup \{r\}) + \mathbb{N}^p \subseteq \text{Exp}(F_{h+1}) + \mathbb{N}^p;$$

ce qui est impossible. Et par suite :

$$\overline{F_h S^l(f, g)} = 0, \quad \forall f, g \in F_h.$$

D'après le théorème 1.8.15, F_h est une base de Gröbner de I . On note donc $\text{lgb}(F) := F_h$; observons que $\text{lgb}(F_h)$ est une base de Gröbner à gauche et que $I^l(F) = I^l(\text{lgb}(F)) = I$.

(2) Suivant la remarque 3.13 de [12], si $I = I(F)$, pour un ensemble fini F ; posons $F_0 = F$, donnant F_k , on définit

$$\begin{aligned} G_k &= \text{lgb}(F_k) \\ F_{k+1} &= G_k \cup \{\overline{G_k g x_j} \mid g \in G_k, 1 \leq j \leq p\}. \end{aligned}$$

Alors $G_k = F_{k+1}$ si et seulement si $G = G_k$ est une base de Gröbner bilatéral de I . En effet, un tel entier k existe en utilisant le même argument que dans (1).

1.9 La dimension de Gelfand–Kirillov et les algèbres multi–filtrés.

La dimension de Gelfand–Kirillov mesure la croissance d’une algèbre affine en terme de importe quel sous ensemble qu’elle engendre [62, chap. 8]. Cette dimension a pour origine les travaux de I. M. Gelfand et A. A. Kirillov [22], et aussi un papier de J. Milnor [63]. Elle a été vastamente étudié par G.R. Krause et T. Lenagan dans [54], on doit aussi signaler que la relation entre celle ci et les algèbres multi–filtrées a été introduite par J. Gómez-Torrecillas dans [25].

Fixons p un entier naturel strictement positif. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, on définit le *support* de α par :

$$\text{Supp}(\alpha) = \{i \in \mathbb{N}_p \mid \alpha_i \neq 0\}$$

c’est évident que $\text{Supp}(\alpha) = \emptyset$ si $\alpha = 0$. Considérons un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{N}^p$ et définissons :

$$T(X) = \{\sigma \subseteq \mathbb{N}_p \mid \sigma \cap \text{Supp}(\alpha) \neq \emptyset, \forall \alpha \in X\}.$$

Le lemme suivant est immediate

Lemme 1.9.1. *Considérons le monoïde $(\mathbb{N}^p, +)$ et $X \subseteq \mathbb{N}^p$.*

- 1- $T(X) = \emptyset$ si et seulement si $0 \in X$.
- 2- Si $\sigma_1 \in T(X)$ et $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$, alors $\sigma_2 \in T(X)$.
- 3- Si $\sigma \in T(X_1)$ et $X_2 \subseteq X_1$, alors $\sigma \in T(X_2)$.

Proposition 1.9.2. *Considérons le monoïde $(\mathbb{N}^p, +)$ et $E \subseteq \mathbb{N}^p$ un monoïdeal, $\{\alpha^1, \dots, \alpha^s\}$ un ensemble générateur de E . Alors*

$$T(E) = T(\{\alpha^1, \dots, \alpha^s\}).$$

Démonstration. Voir [17, Section 7] ou [55, Proposición 5.3]. □

Cette dernière proposition nous permis de re-définir $T(E)$ pour un monoïdeal E de \mathbb{N}^p :

$$T(E) = \{\sigma \in \mathbb{N}_p \mid \sigma \cap \text{Supp}(\alpha^i) \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, s\}$$

où $\{\alpha^1, \dots, \alpha^s\}$ est un ensemble générateur de E . En plus cette définition est indépendante du choix de l’ensemble générateur. Cela nous conduit à définir la *dimension d’un monoïdeal* E de \mathbb{N}^p :

$$\dim(E) = \begin{cases} p, & \text{si } E = \emptyset \\ 0, & \text{si } E = \mathbb{N}^p \\ p - \min\{\text{card}(\sigma) \mid \sigma \in T(E)\}, & \text{autrement} \end{cases}$$

Le lemme suivant est donc évident :

Lemme 1.9.3. *Considérons le monoïde $(\mathbb{N}^p, +)$.*

(1) *Soit E un monoïdal de $(\mathbb{N}^p, +)$ engendré par un ensemble minimal $\{\alpha^1, \dots, \alpha^k\}$ tel que $\text{Supp}(\alpha^i) \cap \text{Supp}(\alpha^j) = \emptyset$, pour tout $i \neq j$. Alors*

$$\dim(E) = p - k$$

(2) *Soit $E = B + \mathbb{N}^p$, avec $B = \uplus_{k=1}^r B_k$ une réunion disjointe des sous-ensembles de \mathbb{N}^p . Considérons $E_k = B_k + \mathbb{N}^p$, $k = 1, \dots, r$ et supposons que E possède un ensemble des générateurs du support disjoints (comme dans (1)). Alors*

$$\dim(E) = p(1 - r) + \sum_{k=1}^r \dim(E_k).$$

Maintenant, on rappelle la définition de la dimension de Gelfand-Kirillov. Soit $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive croissante à partir d'un rang $n \gg 0$. On dit que F possède une *croissance polynomial* s'il existe un réel d tel que $F(n) \leq n^d$, pour tout $n \gg 0$. Si F est de ce type on définit :

$$\gamma(F) = \inf\{d \in \mathbb{R} \mid F(n) \leq n^d, \text{ pour } n \gg 0\};$$

dans le cas contraire on pose $\gamma(F) = \infty$

Lemme 1.9.4. *Soit $G, F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives croissantes à partir d'un rang $n \gg 0$ et qui possèdent une croissance polynomial. Alors*

1- $\gamma(F) = \limsup \left(\frac{\log(F(n))}{\log(n)} \right).$

2- $\gamma(F + G) = \max(\gamma(F), \gamma(G)).$

3- $\gamma(FG) \leq \gamma(F) + \gamma(G).$

4- *Si $F(n) = p(n)$, pour $n \gg 0$, où $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, avec coefficient dominant positif, alors $\gamma(F) = \deg(p(x)).$*

5- *S'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $G(n) \leq F(an + b), \forall n \in \mathbb{N}$; alors $\gamma(G) \leq \gamma(F).$*

Démonstration. Voir [62, 8.16, 8.17]. □

Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type fini et V un sous- \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie. On dit que V est un *sous-espace générateur* de R si $1 \in V$ et il engendre R comme \mathbb{k} -algèbre. On définit donc

$$V^0 = \mathbb{k}, V^1 = V, \dots, V^n = V.V^{n-1}.$$

On peut donc prouver sans difficulté

Lemme 1.9.5. *Considérons R une \mathbb{k} -algèbre de type fini et V un \mathbb{k} -sous-espace générateur de dimension finie.*

1. On a $V^n \subseteq V^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $f \in R$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f \in V^n$.

On définit donc la *fonction de Hilbert* de R associée à l'espace V , par

$$HF_V(n) = \dim_{\mathbb{k}}(V^n).$$

Cette définition est bien sûr dépend de l'espace V ; mais la croissance de la fonction de Hilbert ne dépend que de R :

Proposition 1.9.6. *Soit V et V' deux sous-espace générateurs de R . Alors*

$$\gamma(HF_V) = \gamma(HF_{V'}).$$

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 1.9.5 et 1.9.4. □

Définition 1.9.7. On définit la dimension de Gelfand-Kirillov de R (en abréviation GK-dimension), comme

$$\text{GKdim}(R) = \gamma(HF_V),$$

pour n'importe quel sous-espace engendrant V de R .

Cette formule est bien définie pour une \mathbb{k} -algèbre de type fini, parce que toute algèbre de type fini admet un sous-espace engendrant ; en plus la proposition 1.9.6 assure l'égalité de la croissance des fonctions de Hilbert attachées. Si maintenant R est une \mathbb{k} -algèbre non nécessairement de type fini, alors la GK-dimension est définie par :

$$\text{GKdim}(R) = \text{Sup}_A(\text{GKdim}(A)),$$

où A parcourt l'ensemble de tout les sous \mathbb{k} -algèbres de R de type fini. La GK-dimension d'un R -module à gauche de type fini M est définie par la croissance de la fonction $F(n) = \dim_{\mathbb{k}}(V^n.U)$, où U est un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie engendrant ${}_R M$, on a donc

$$\text{GKdim}(M) = \gamma(\dim_{\mathbb{k}}(V^n.U)) = \limsup \left(\frac{\log(\dim_{\mathbb{k}}(V^n.U))}{\log(n)} \right).$$

1.9.8. Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W du \mathbb{k} -base $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$, alors $V = 1.\mathbb{k} + \mathbb{k}.u_{\epsilon_1} + \dots + \mathbb{k}.u_{\epsilon_p}$ est un sous-espace engendrant de R . D'après [17] ou [55, Corolarios, 5.29, 5.31, 5.35], on a

Proposition. *Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W par rapport a un order admissible gradué sur \mathbb{N}^p . Alors la dimension de Gelfand-Kirillov de R est un entier naturelle ; en plus pour tout idéal à gauche de I de R , on a*

$$\text{GKdim}(R/I) = \dim(\text{Exp}(I)).$$

En particulier, $\text{GKdim}(R/Rf) = p - 1$, pour tout $f \in R$ tel que $Rf \neq R$.

Fixons \leq un order admissible sur le monoïde \mathbb{N}^p . Le reste de ce chapitre sera consacré à des rappels, [25], sur les algèbres et les modules multi-filtrés (i.e. par le monoïde \mathbb{N}^p), ainsi que leurs algèbres et modules multi-gradués associés.

Définition 1.9.9. Un anneau R est dit *multi-filtré* (ou \mathbb{N}^p -filtré) s'il existe une famille de sous-groupes additif $\{F_\alpha(R) \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ vérifiant :

- 1- $F_\alpha(R) \subseteq F_\beta(R)$ si $\alpha \leq \beta$.
- 2- $F_\alpha(R)F_\beta(R) \subseteq F_{\alpha+\beta}(R)$.
- 3- $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^p} F_\alpha(R) = R$.
- 4- $1 \in F_0(R)$.

Fixons une multi-filtration $\{F_\alpha(R) \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ de R .

Définition 1.9.10. Un R -module à gauche est dit *multi-filtré* s'il existe une famille de sous-groupes de M , $\{F_\alpha(M) \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ satisfaisant

- 1- $F_\alpha(M) \subseteq F_\beta(M)$ if $\alpha \leq \beta$.
- 2- $F_\alpha(R)F_\beta(M) \subseteq F_{\alpha+\beta}(M)$.
- 3- $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^p} F_\alpha(M) = M$.

Notamment on peut associé à tout anneau multi-filtré R , son anneau \mathbb{N}^p -gradué, qu'on définit comme suit : Étant donné un R -module à gauche M et $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on écrit

$$V_\alpha(M) = \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta(M), \quad V_0 = \{0\}.$$

Considérons le groupe additif

$$G_\alpha(M) = F_\alpha(M)/V_\alpha(M),$$

et définissons

$$G(M) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^p} G_\alpha(M).$$

Pour $r + V_\alpha(R) \in G_\alpha(R)$ et $m + V_\beta(M) \in G_\beta(M)$, on définit

$$(r + V_\alpha(R))(m + V_\beta(M)) = rm + V_{\alpha+\beta}(M).$$

Si $M = R$, on a donc un produit associatif dans $G(R)$, qui le rend à un anneau \mathbb{N}^p -gradué. De plus $G(M)$ devient un $G(R)$ -module à gauche \mathbb{N}^p -gradué. Observons que $G(R)$ peut être munit d'une multi-filtration naturelle

$$F_\alpha(G(R)) = \bigoplus_{\beta \leq \alpha} G_\beta(R).$$

Par analogie, tout \mathbb{N}^p -gradué $G(R)$ -module à gauche peut être vu comme un module à gauche multi-filtré.

Théorème 1.9.11. *Soit R un anneau \mathbb{N}^p -filtré. Si $G(R)$ est noethérien à gauche. Alors R est noethérien à gauche.*

Démonstration. Voir [25, Theorem 1.5]. □

Un exemple de ce genre des anneaux sont les \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W par rapport à un ordre admissible \leq sur \mathbb{N}^p , dont la multi-filtration est donné par les sous-groupes

$$F_\alpha(R) = \{f \in R \mid \exp(f) \leq \alpha\}.$$

Dans le reste de cette section, on suppose que R est une \mathbb{k} -algèbre de type fini, \mathbb{N}^p -filtré de filtration $\{F_\gamma(R) \mid \gamma \in \mathbb{N}^p\}$. Soit M un R -module à gauche \mathbb{N}^p -filtré par $\{F_\gamma(M) \mid \gamma \in \mathbb{N}^p\}$. On dit que cette *multi-filtration est finie* si :

$$\dim_{\mathbb{k}}(F_\gamma(M)) < \infty, \forall \gamma \in \mathbb{N}^p.$$

Théorème 1.9.12. *Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type fini et \mathbb{N}^p -filtré et M un R -module à gauche \mathbb{N}^p -filtré. Supposons que $G(R)$ est une \mathbb{k} -algèbre de type fini et que $G(M)$ est un $G(R)$ -module à gauche de type fini. Alors*

$$\text{GKdim}({}_R M) \geq \text{GKdim}({}_{G(R)} G(M)).$$

Si, en plus, les multi-filtrations sont finies, on a

$$\text{GKdim}({}_R M) = \text{GKdim}({}_{G(R)} G(M)).$$

Démonstration. Voir [25, Theorem 2.8]. □

Exemple 1.9.13. [25, Example 3.3]. (1) Soit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ un p -uplets de \mathbb{R}^p avec $\omega_i > 0, \forall i = 1, \dots, p$ et considérons le produit $\langle -, - \rangle$ point par point sur \mathbb{R}^p i.e. $\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{i=1}^p \omega_i \omega'_i$. On note par $\epsilon_1 <_{lex} \dots <_{lex} \epsilon_p$, l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^p . La relation binaire sur \mathbb{N}^p définie par : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^p$

$$\alpha <_\omega \beta \text{ si } \langle \alpha, \omega \rangle < \langle \beta, \omega \rangle \text{ ou } \begin{cases} \langle \alpha, \omega \rangle = \langle \beta, \omega \rangle \\ \text{et } \alpha <_{lex} \beta \end{cases}$$

est un ordre *localement fini* ; c'est à dire que l'intervalle $[0, \alpha] = \{\beta \in \mathbb{N}^p \mid 0 \leq \beta \leq \alpha\}$ est fini, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$. Le vecteur ω s'appelle le *vecteur poids* "weight" de l'ordre $<_\omega$. Soit $R = \mathbb{k}[x_1][x_2; \sigma_2, \delta_2] \cdots [x_p; \sigma_p, \delta_p]$ une extension de Ore itérées de \mathbb{k} . On suppose que $\sigma_j(x_i) = q_{ij}x_i$, pour tout $i < j \leq p, q_{ij} \in \mathbb{k}^*$. L'ensemble $\mathcal{B} = \{X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p\}$ est une \mathbb{k} -base de R . Soit $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} c_\alpha X^\alpha, \mathcal{N}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^p \mid c_\alpha \neq 0\}$. On va construire un vecteur poids pour $R, \omega = (\omega_1, \dots, \omega_p)$.

Posons $\omega_1 = 1$ et définissons ω_{12} comme le degré en x_1 de $\delta_2(x_1)$, puis $\omega_2 = \max(1, \omega_{12})$. Supposons qu'on a : $\omega_1, \dots, \omega_{j-1}$, pour $j \geq 2$; posons

$$\omega_{kj} = \max\{\alpha_1 \omega_1, \dots, \alpha_{j-1} \omega_{j-1}, \alpha_k \in \delta_j(x_k)\}, \text{ pour tout } k = 1, \dots, j-1$$

et choisissons $\omega_j = \max\{1, \omega_{kj} - \omega_i, 1 \leq i, k \leq j-1\}$. On munit \mathbb{N}^p par l'ordre admissible $<_\omega$. Si $1 < j \leq p$, on a $\langle \epsilon_i + \epsilon_j, \omega \rangle = \omega_i + \omega_j \geq \omega_{ij} \geq \langle \alpha, \omega \rangle$, pour tout $\alpha \in \mathcal{N}(\delta_j(x_i))$. D'où $\alpha <_\omega \epsilon_i + \epsilon_j$, pour tout $\alpha \in \mathcal{N}(\delta_j(x_i))$, $i < j$. D'après [25, Proposition 3.2], R admet une \mathbb{N}^p -filtration finie dont le \mathbb{N}^p -gradué associé est une \mathbb{k} -algèbre *semi-commutative*, c'est à dire engendrée par des éléments semi-comutatifs ⁷. On en déduit donc que le théorème 1.9.12 s'applique à ce type des \mathbb{k} -algèbre.

(2) Soit R une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W de \mathbb{k} -base $\mathcal{B} = \{u_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ et d'ordre \mathcal{B} -admissible \leq . Posons $R_\alpha = \{f \in R \mid \exp(f) \leq \alpha\}$, alors $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^p}$ est un \mathbb{N}^p -filtration de R dont le \mathbb{N}^p -gradué associé $G(R)$ est une \mathbb{k} -algèbre semi-commutative, en effet est un espace quantique.

Remarque 1.9.14. (1) D'après la remarque précédente et [16, Theorem 2.1], dans tout \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W, l'ordre \mathcal{B} -admissible \leq , peut être remplacé par un ordre \leq_u , pour un certain $u = (u_1, \dots, u_p)$, $u_i \in \mathbb{N}^*$. On peut donc filtrer R par une filtration $R = \cup_{n \in \mathbb{N}} R_n$, où chaque $R_n = \sum_{\langle \alpha, u \rangle \leq n} \mathbb{k}u_\alpha$ est un espace vectoriel de dimension finie, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est facile de prouver que $\text{gr}(R)$ est un espace affine quantique sur \mathbb{k} .

(2) D'après (1) et le théorème 3.8 de [60], tout \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W satisfait le Nullstellensatz sur \mathbb{k} et elle est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-régulière, voir le chapitre 5 pour les définitions.

⁷Une suite des éléments y_1, \dots, y_t est dite *semi-commutative*, s'il existent des $k_{ij} \in \mathbb{k}^*$ tels que $y_i y_j = k_{ij} y_j y_i$, $\forall i, j \in \mathbb{N}_t$.

Chapitre 2

Les idéaux premiers et primitifs.

Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner une description complète et détaillée de la \mathcal{H} -stratification de l'algèbre $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ (voir la définition 2.1.1 ci-dessous), dans les aspects suivants. Premièrement, on démontre que les idéaux \mathcal{H} -premiers, pour un tore bien déterminé, sont exactement les idéaux engendrés par les ensembles admissibles, d'où la dérivation de chaque stratum. Deuxièmement, on construit une procédure effective pour calculer les générateurs de chacun des anneaux des polynômes de Laurent attachés à cette stratification, dans les cas des algèbres quantiques citées ci-dessus. Finalement, on calcule par des méthodes classiques le spectre premier de H'_{q^2} .

2.1 L'algèbre $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ et les ensembles admissibles.

Fixons \mathbb{k} un corps commutatif. D. A. Jordan a introduit dans [49] une classe d'extension de Ore R , définie par $R = A[y; \alpha][x; \beta, \delta]$, où A est une \mathbb{k} -algèbre et un domaine noethérien et les variables y, x sont soumises aux relations suivantes : $ya = \alpha(a)y$, $xa = \beta(a)x$, pour tout $a \in A$ et $xy - \rho yx = v$, où $\rho \in \mathbb{k}^*$ et v est un élément normal de A . L'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(q,\Lambda)}(\mathbb{k})$ apparus dans les travaux de Maltsoniotis [59], représente un exemple révélant qui a été construit à partir de la classe R . Ultérieurement, S.Q. Oh a étudié dans [66] une classe d'extension de Ore itérées, résultant comme forme itérée de celle de Jordan. L'algèbre sous consideration a été introduite et étudiée dans [27]; comme on verra dans la définition suivante, elle constitue une sous-classe de celle de Oh.

Définition 2.1.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = (c_1, c_2, \dots, c_n, d, \lambda, u)$ un élément de $(\mathbb{k}^*)^{n+2} \times \mathbb{k}$ avec $d = 1$ si $u \neq 0$. Considérons $\Lambda = (\lambda_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ une matrice anti-symétrique à coefficients dans \mathbb{k}^* tel que $\lambda_{ii} = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n$. On définit $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ comme la \mathbb{k} -algèbre de type fini engendrée par $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$, satisfaisant les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 y_j y_i &= \lambda_{ji} y_i y_j, & y_j x_i &= \lambda_{ji}^{-1} d x_i y_j & (j > i) \\
 x_j x_i &= \lambda_{ji} c_i^{-1} d^{-1} x_i x_j, & x_j y_i &= \lambda_{ji}^{-1} c_i y_i x_j & (j > i)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$x_i y_i = c_i y_i x_i + \lambda \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda d)^{i-1-l} (c_l d - 1) y_l x_l + (d\lambda)^{i-1} u, \quad (i \geq 1)$$

D'après [66, p. 39], $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ est une extension de Ore itérée

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) = R_n,$$

où $R_0 = \mathbb{k}$ et $R_k = R_{k/2}[x_k; \beta_k, \delta_k]$, $R_{k/2} = R_{k-1}[y_k; \alpha_k]$ pour tout $k \geq 1$ et α_i, β_i sont des automorphismes d'algèbres :

$$\begin{aligned}
 \alpha_j(y_i) &= \lambda_{ji} y_i, & \alpha_j(x_i) &= \lambda_{ji}^{-1} d x_i, & i < j \\
 \beta_j(y_i) &= \lambda_{ji}^{-1} c_i y_i, & \beta_j(x_i) &= \lambda_{ji} c_i^{-1} d^{-1} x_i, & i < j \\
 \beta_i(y_i) &= c_i y_i,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

et chaque δ_i est une β_i -dérivation définie par

$$\begin{aligned}
 \delta_i(y_i) &= \lambda \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda d)^{i-1-l} (c_l d - l) y_l x_l + (\lambda d)^{i-1} u, \quad i > 1 \\
 \delta_i(R_{i-1}) &= 0, \quad i \geq 1, & \text{et } \delta_1(y_1) &= u.
 \end{aligned}$$

On note par \sum_k^n , l'ensemble $\{\alpha_k, \beta_k, \delta_k, \dots, \alpha_n, \beta_n, \delta_n\}$, pour tout $k = 1, \dots, n$.

On peut vérifier sans aucun problème que $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W par rapport à l'ordre lexicographique gradué, voir l'exemple 1.8.2.

L'espace quantique *attaché* à $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ est $\mathbb{k}_{Q_n}[Y_1, X_1, \dots, Y_n, X_n]$, où Q_n étant la matrice définie par

$$\begin{array}{l}
 Y_1 \\
 X_1 \\
 Y_2 \\
 X_2 \\
 \vdots \\
 Y_n \\
 X_n
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & \cdots & \cdots & Y_n & X_n \\
 1 & c_1^{-1} & \lambda_{21}^{-1} & \lambda_{21} c_1^{-1} & \cdots & \lambda_{n1}^{-1} & \lambda_{n1} c_1^{-1} \\
 c_1 & 1 & \lambda_{21} d^{-1} & \lambda_{21}^{-1} c_1 d & \cdots & \lambda_{n1} d^{-1} & \lambda_{n1}^{-1} c_1 d \\
 \lambda_{21} & \lambda_{21}^{-1} d & 1 & c_2^{-1} & \cdots & \lambda_{n2}^{-1} & \lambda_{n2} c_2^{-1} \\
 \lambda_{21}^{-1} c_1 & \lambda_{21} c_1^{-1} d^{-1} & c_2 & 1 & \cdots & \lambda_{n2} d^{-1} & \lambda_{n2}^{-1} c_2 d \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \lambda_{n1} & \lambda_{n1}^{-1} d & \lambda_{n2} & \lambda_{n2}^{-1} d & \cdots & 1 & c_n^{-1} \\
 \lambda_{n1}^{-1} c_1 & \lambda_{n1} c_1^{-1} d^{-1} & \lambda_{n2}^{-1} c_2 & \lambda_{n2} c_2^{-1} d^{-1} & \cdots & c_n & 1
 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Notons que $Y_1 u = d u Y_1$ et $X_1 u = d^{-1} u X_1$.

Cette classe d'algèbres contient l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q},\Lambda)}(\mathbb{k})$ ($C = (\mathbf{q}, 1, 1, 1)$) avec $\mathbf{q} = (c_i)_{i=1}^n$, l'anneau des coordonnées de l'espace quantique symplectique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ ($C = (q^2, \dots, q^2, 1, q, 0)$, $\lambda_{ji} = q$) et l'anneau des coordonnées de l'espace quantique Euclidian $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n})$ ($C = (1, \dots, 1, q^{-2}, q, 0)$, $\lambda_{ji} = q^{-1}$). Suivant [66, p. 39], on a

Lemme 2.1.2. Posons $z_i = dx_i y_i - y_i x_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $z_0 = du$. Alors

$$\begin{aligned} z_j y_i &= c_i y_i z_j, & z_j x_i &= c_i^{-1} x_i z_j & (i \leq j) \\ z_j y_i &= d^{-1} y_i z_j, & z_j x_i &= dx_i z_j & (i > j) \\ z_j z_i &= z_i z_j & & & (\text{pour tout } i, j) \\ x_i y_i &= c_i y_i x_i + \lambda z_{i-1} & (i = 2, \dots, n), & & x_1 y_1 = c_1 y_1 x_1 + d^{-1} z_0 \\ z_i &= (c_i d - 1) y_i x_i + d \lambda z_{i-1} & (i = 2, \dots, n), & & z_1 = (c_1 d - 1) y_1 x_1 + z_0. \end{aligned}$$

En particulier, $\delta_i(y_i) = \lambda z_{i-1}$, pour tout $i > 1$.

Remarque 2.1.3. D'après les relations (2.1), on a $\delta_i \beta_i = c_i d \beta_i \delta_i$, pour tout $i \geq 1$. Alors si chacun des $c_i d$ n'est pas racine de l'unité, $i = 1, \dots, n$, tout idéal premier de $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ est complètement premier, d'après le théorème 1.7.7.

Afin de classifier les idéaux premiers de $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$, on suppose dans tout ce chapitre que chacun des $c_i d$, $i = 1, \dots, n$, n'est pas racine de l'unité.

Notons par \wp_n le sous-ensemble suivant de R :

$$\wp_n = \begin{cases} \{z_1, y_1, x_1, \dots, z_n, y_n, x_n\}, & \text{si } z_0 = 0, \\ \{z_1, z_2, y_2, x_2, \dots, z_n, y_n, x_n\}, & \text{si non.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Définition 2.1.4. [65]. Un sous-ensemble T de \wp_n est dit *admissible* s'il est un ensemble vide ou s'il satisfait les conditions suivantes :

- (1) y_i ou $x_i \in T \Leftrightarrow z_i$ et $z_{i-1} \in T$, pour tout $i \geq 2$
- (2) x_1 ou $y_1 \in T \Leftrightarrow z_1 \in T$, si $z_0 = 0$.

Pour un tel ensemble admissible T , on désigne par $ind(T) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid z_i \in T\}$. Un indice $i \in ind(T)$ est dit *renouvelable* si T contient x_i et y_i ; l'ensemble de tout les indices renouvelables sera noté par $Renv(T)$. Si on note $\mathcal{J}_T = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid y_i \in T\}$ et $\mathcal{I}_T = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j \in T\}$, alors $Renv(T) = \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{I}_T \cap \mathcal{J}_T = \emptyset$. On dit que T est *connexe* si pour tout $i, j \in ind(T)$ tel que $i < k < j$, on a $k \in ind(T)$. Une *composante connexe* de T est un sous-ensemble connexe U de T tel que pour tout sous-ensemble connexe V de T avec $U \subseteq V$ on a $U = V$. Tout ensemble admissible est d'une forme unique, réunion disjointe de ses composantes connexes; se qu'on appelle la *décomposition en composantes connexes* de T . Posons $i_k = \min(ind(T_k))$, $j_k = \max(ind(T_k))$, on suppose toujours que $j_{k-1} < i_k - 1$, $k = 2, \dots, r$. Un exemple de tel décomposition est le suivant : posons $n = 3$ et prenant $T = \{x_1, z_1\} \cup \{z_3\}$ dans $R_3^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ avec $z_0 = 0$; alors $\{x_1, z_1\}$, $\{z_3\}$ sont les composantes connexes de T .

Si T est un ensemble admissible connexe on définit la *longueur* de T , notée par $long(T)$, comme

$$long(T) = card(ind(T)) + card(Renv(T)),$$

où $\text{card}(\text{ind}(T))$ (resp. $\text{card}(\text{Renv}(T))$) est le cardinal de $\text{ind}(T)$ (resp. le cardinal de $\text{Renv}(T)$). La longueur d'un ensemble admissible non nécessairement connexe T est définie par

$$\text{long}(T) = \sum_{k=1}^r \text{long}(T_k),$$

où $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$ est la décomposition de T en composantes connexes.

Notre prochain but est de démontrer que tout ensemble admissible engendre un idéal premier.

Proposition 2.1.5. *Pour tout $k \geq 2$, considérons Q un idéal premier (α_k, β_k) -stable de R_{k-1} tel que $z_{k-1} \notin Q$. Alors les idéaux $QR_k + z_k R_k$, QR_k sont des extensions premiers de Q à R_k .*

Démonstration. D'après le théorème 1.7.17, appliqué à Q dans les itérations $R_{k/2}$ et R_k , QR_k est un idéal premier qui étend Q à R_k . Pour achever la preuve, on va encore utiliser le théorème 1.7.17. Considérons $A_{k/2} = \text{fract}(R_{k/2}/QR_{k/2})$ le corps à gauche des fractions de $R_{k/2}/QR_{k/2}$; rappelons que tout idéal premier est complètement premier et que chaque itération est noethérienne. On doit montrer que l'extension de δ_k , noter aussi par δ_k , à $A_{k/2}$ est une β_k -dérivation intérieure, où β_k étant le prolongement de β_k à $A_{k/2}$. Il suffit donc de prouver ceci à l'extension de δ_k à l'anneaux des polynômes de Laurent tordue $F_{k/2} = \frac{R_{k-1}}{Q}[y_k^{\pm 1}; \alpha_k]$. Posons $u_k = (1 - c_k d)^{-1} \lambda \bar{z}_{k-1} y_k^{-1} \in F_{k/2}$, où \bar{z}_{k-1} est l'image de z_{k-1} dans $F_{k/2}$. Alors

$$\delta_k(y_k) = u_k y_k - c_k y_k u_k \text{ et } \delta_k(y_k^{-1}) = -\beta_k(y_k^{-1}) \delta_k(y_k) y_k^{-1} = u_k y_k^{-1} - c_k^{-1} y_k^{-1} u_k.$$

Ce qui entraîne que δ_k est une β_k -dérivation intérieure de $F_{k/2}$, d'où $\delta_k(a) = u_k a - \beta_k(a) u_k$, pour tout $a \in A_{k/2}$. Ensuite, d'après le théorème 1.7.4 et les lemmes 1.7.5, 1.7.6, on a l'isomorphisme suivant :

$$\frac{R_k}{QR_k} [C_{k/2}]^{-1} \cong A_{k/2} [x_k; \beta_k, \delta_k] \cong A_{k/2} [x_k - u_k; \beta_k],$$

où $C_{k/2} = (R_{k/2}/QR_{k/2}) \setminus \{0\}$. Maintenant le théorème 1.7.17 implique que l'image inverse de $\langle x_k - u_k \rangle$ à R_k est aussi un idéal premier qui est un étendu de QR_k . Comme $x_k - u_k = -c_k (1 - c_k d)^{-1} \bar{z}_k y_k^{-1}$, où \bar{z}_k est l'image de z_k dans R_k/QR_k ; cette image inverse à R_k est exactement l'idéal $P = QR_k + z_k R_k$. \square

Corollaire 2.1.6. *L'idéal $\langle z_i \rangle$ est premier pour tout $i \geq 2$. Si $z_0 \neq 0$, alors $\langle z_1 \rangle$ est aussi premier.*

Démonstration. C'est claire que $\langle z_i \rangle \cap R_i = z_i R_i = R_i z_i$ est un idéal \sum_{i+1}^n -stable pour tout $i \geq 1$. Alors il suffit de montrer que $R_i z_i$ est un idéal premier de R_i . Mais cela est une

conséquence évidente de la proposition 2.1.5 avec $Q = 0$ dans R_{i-1} et $i \geq 2$. Pour le cas $z_0 \neq 0$ et $i = 1$ considérons $F_0 = \mathbb{k}[y_1^{\pm 1}]$ est l'élément $v_1 = (1 - c_1 d)^{-1} u y_1^{-1} \in F_0$. On note par δ_1, β_1 l'extension de δ_1, β_1 à F_0 , respectivement. Alors $\delta_1(y_1) = v_1 y_1 - c_1 y_1 v_1$ et $\delta_1(y_1^{-1}) = -c_1^{-1} d^{-1} u y_1^{-2}$; d'où $\delta_1(y_1^{-1}) = v_1 y_1^{-1} - c_1^{-1} y_1^{-1} v_1$. En suite δ_1 est une β_1 -dérivation intérieure de F_0 , et alors $F_0[x_1; \beta_1, \delta_1] \cong F_0[x_1 - v_1; \beta_1]$. D'après l'égalité $x_1 - v_1 = -(1 - c_1 d)^{-1} c_1 z_1 y_1^{-1}$, l'image inverse de l'idéal premier $\langle z_1 y_1^{-1} \rangle$ dans R_1 est l'idéal premier $z_1 R_1$. \square

Proposition 2.1.7. *Soit I un idéal premier \sum_{j+1}^n -stable de R_j , pour $j < n-2$ et soit T un ensemble admissible connexe de R_n tel que $i = \min(\text{ind}(T)) > j + 1$. Alors $J = IR_n + \langle T \rangle$ est un idéal premier de R_n .*

Démonstration. On note par $k := \max(\text{ind}(T))$; on utilise une récurrence sur k . Si $k = j+2$, alors $i = k$ et $T = \{z_k\}$. Comme $z_{j+1} \notin IR_{j+1}$, d'après proposition 2.1.5, $IR_{j+2} + z_{j+2}R_{j+2}$ est un idéal premier \sum_{j+3}^n -stable de R_{j+2} . Donc $J = (IR_{j+2} + z_{j+2}R_{j+2})R_n$ est un étendu premier de $IR_{j+2} + z_{j+2}R_{j+2}$. Maintenant, supposons que la proposition est vrai pour tout ensemble admissible connexe T' avec $\max(\text{ind}(T')) < k$. Soit donc $T' = T \cap R_{k-1}$, d'où T' est un ensemble admissible connexe de R_{k-1} et

$$T = \begin{cases} T' \cup \{y_k, z_k\}, & \text{si } k \in \mathcal{J}_T, \quad k \notin \mathcal{I}_T \\ T' \cup \{x_k, z_k\}, & \text{si } k \in \mathcal{I}_T, \quad k \notin \mathcal{J}_T \\ T' \cup \{y_k, x_k, z_k\}, & \text{si } k \in \text{Renv}(T). \end{cases}$$

Posons $J_{k-1} = IR_{k-1} + T'R_{k-1}$. Alors par hypothèse de récurrence $J_{k-1}R_n$ est un idéal premier de R_n . Rappelons que dans chaque itération tout idéal premier est complètement premier; d'où J_{k-1} est premier \sum_k^n -stable dans R_{k-1} . Nous déclarons que J est un premier étendu à R_n de l'idéal premier J_{k-1} . En effet, considérons les cas possibles suivantes

1) Si $T = T' \cup \{y_k, z_k\}$ alors, de l'isomorphisme

$$\frac{R_k}{J_{k-1}R_k} \cong \frac{R_{k-1}}{J_{k-1}}[y_k; \alpha_k][x_k; \beta_k],$$

on déduit que l'idéal $J_k = J_{k-1}R_k + y_kR_k$ est premier dans R_k . Remarquons que $J_k = IR_k + TR_k$ et qu'il est \sum_{k+1}^n -stable. Donc $J = J_kR_n$ est un premier étendue de J_{k-1} à R_n .

2) Le cas $T = T' \cup \{x_k, z_k\}$ est similaire à 1) en prenant l'idéal $J_k = J_{k-1}R_k + x_kR_k$.

3) Si $T = T' \cup \{y_k, x_k, z_k\}$, considérons donc $J_k = J_{k-1}R_k + y_kR_k + x_kR_k$ et $J_{k/2} = J_{k-1}R_{k/2} + y_kR_{k/2}$. Il est clair que $J_k = J_{k/2}R_k + x_kR_k$ (parce que $z_{k-1} \in J_{k-1}$) et donc $J_{k/2}$ est un premier étendu de J_{k-1} à $R_{k/2}$ qui est β_k -stable. Ensuite $J_{k/2}R_k$ est un idéal premier de R_k et on a l'isomorphisme suivant :

$$\frac{R_k}{J_{k/2}R_k} \cong \frac{R_{k/2}}{J_{k/2}}[x_k; \beta_k].$$

D'où J_k est un idéal premier de R_k et $J_k = IR_k + TR_k$. C'est un idéal \sum_{k+1}^n -stable, alors $J_kR_n = J$ est idéal premier étendu de J_k à R_n . Donc J est idéal premier étendu de J_{k-1} à R_n . \square

Théorème 2.1.8. *Soit T un ensemble admissible de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Alors $\langle T \rangle$ est un idéal premier polynormal.*

Démonstration. C'est clair que T est une suite polynormale. On montre par récurrence sur le nombre des composantes connexes que $\langle T \rangle$ est premier. Si T est connexe, avec $\min(\text{ind}(T)) > 1$, alors $\langle T \rangle$ est premier d'après la proposition 2.1.7. Le cas contraire est évident. Soit $T = T_1 \cup T_2 \cdots \cup T_r$, $r > 1$, $i_k = \min(\text{ind}(T_k))$, $j_k = \max(\text{ind}(T_k))$, $k = 1, \dots, r$. Considérons $I = (T_1 \cup \cdots \cup T_{r-1})R_{j_{r-1}}$ comme un idéal de $R_{j_{r-1}}$, d'après l'hypothèse de récurrence IR_n est un idéal premier de R_n ; et alors I est un idéal premier de $R_{j_{r-1}}$. Observons que $\langle T \rangle = IR_n + T_r R_n$; appliquons la proposition 2.1.7, on a $\langle T \rangle$ est un idéal premier de R_n . \square

Pour calculer la GK-dimension des algèbres quotient, par un idéal engendré par un ensemble admissible; on va utiliser les résultats de la section 1.9, puisque $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ est un \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W. par rapport à l'ordre lexicographique gradué.

Lemme 2.1.9. *Soit T un ensemble admissible de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Alors T est une base de Gröbner bilatérale.*

Démonstration. Soit $T = T_1 \cup \cdots \cup T_r$ la décomposition en composantes connexes de T . Il est clair que ${}^T S^l(u, v) = 0$ pour tout $u \in T_s$ et $v \in T_t$ tel que $s \neq t \in \{1, \dots, r\}$. Fixons $k \in \{1, \dots, r\}$ et considérons T_k , $i = \min(\text{ind}(T_k))$, $j = \max(\text{ind}(T_k))$. D'après le lemme 2.1.2, les z_s sont des éléments semi-commutatifs, pour tout $s = 1, \dots, n$. Alors ${}^{T_k} S^l(z_s, v_t) = 0$ pour tout $s \in \{i, \dots, j\}$ et $t \in \{i+1, \dots, j\}$, où $v_t \in \{y_t, x_t\}$. D'après (2.1), on a aussi ${}^{T_k} S^l(v_s, v_t) = 0$ pour tout $t, s \in \{i+1, \dots, j\}$ avec $s \neq t$. Il suffit donc de montrer que ${}^{T_k} S^l(y_s, x_s) = 0$ pour tout $s \in \{i+1, \dots, j\} \cap \text{Renv}(T_k)$. Mais $S^l(y_s, x_s) = c_s^{-1} x_s y_s - y_s x_s = \lambda c_s^{-1} z_{s-1} \in T_k$. Alors, d'après le théorème 1.8.15, T est une base de Gröbner à gauche de RT . D'autre part, si $t \in \mathcal{J}_T$ alors ${}^T \overline{y_t x_t} = {}^T c_t^{-1} x_t y_t - \lambda c_t^{-1} z_{t-1} = 0$, et si $t \in \mathcal{I}_T$ on a ${}^T \overline{x_t y_t} = {}^T c_t y_t x_t + \lambda z_{t-1} = 0$. En utilisant la remarque 1.8.16(2), T est donc une base de Gröbner bilatérale. \square

Proposition 2.1.10. *Soit T un ensemble admissible de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Alors*

$$\text{GKdim} \left(\frac{R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})}{\langle T \rangle} \right) = 2n - \text{long}(T).$$

Démonstration. Utilisant le lemme 2.1.9 et la proposition 1.9.8, on a :

$$\text{GKdim} (R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) / \langle T \rangle) = \dim(\text{Exp}(\langle T \rangle)).$$

Il suffit donc de calculer $\dim(\text{Exp}(\langle T \rangle))$. Supposons que T est connexe, avec $i = \min(\text{ind}(T))$, $j = \max(\text{ind}(T))$. D'après le lemme 2.1.9, $\text{Exp}(\langle T \rangle)$ est engendré par les éléments $\epsilon_i + \epsilon_i'$,

ϵ_k si $k \in \mathcal{J}_T$, et ϵ_l si $l \in \mathcal{I}_T$, où $k, l = i + 1, \dots, j$. Appliquons le Lemme 1.9.3 1) à fin d'avoir $\dim(\text{Exp}(\langle T \rangle)) = 2n - \text{long}(T)$. Si T n'est pas connexe, considérons $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$ sa décomposition usuelle. Alors, d'après le Lemme 2.1.9,

$$\text{Exp}(T) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Exp}(T_k)$$

et $\text{Exp}(\langle T \rangle)$ a un ensemble des générateurs à support disjoints. D'après le lemme 1.9.3 2) on a :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Exp}(\langle T \rangle)) &= 2n(1 - r) + \sum_{k=1}^r \dim(\text{Exp}(\langle T_k \rangle)) \\ &= 2n(1 - r) + \sum_{k=1}^r (2n - \text{long}(T_k)) \\ &= 2n - \text{long}(T). \end{aligned}$$

□

2.2 Les idéaux \mathcal{H} -premiers de $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$.

Soit \mathbb{k} un corps commutatif infini. On définit une action rationnelle du tore \mathcal{H} égale à $(\mathbb{k}^\times)^n$ ou $(\mathbb{k}^\times)^{n+1}$ (dépendant de la valeur de u) sur l'algèbre $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$, afin d'identifier les idéaux \mathcal{H} -premiers avec ce qui sont engendrés par des ensembles admissibles. Le procédé est purement effectif, de tel manière qu'il nous permettra de calculer le nombres de tous ces idéaux.

Remarque 2.2.1. Soit G un groupe agissant sur $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ par des automorphismes de \mathbb{k} -algèbres. Supposons que $y_i, x_i, i = 1, \dots, n$ sont des G -vecteurs propres¹. Si $h \in G$ alors, d'après les équations (2.1), l'actions de h est l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} h.y_i = \eta_i y_i & \text{et } h.x_i = \eta_i^{-1} x_i, & \text{si } u \neq 0 \\ & \text{ou} \\ h.y_i = \eta_i y_i & \text{et } h.x_i = \eta_i^{-1} \theta x_i, & \text{si } u = 0; \end{cases} \quad (2.5)$$

où η_i est la h -valeur propre de $y_i, i = 1, \dots, n$ et θ est la h -valeur propre commune de z_1, \dots, z_n . En conclusion, le groupe G peut être remplacé par le tore algébrique $(\mathbb{k}^\times)^n$ ou le tore $(\mathbb{k}^\times)^n \times \mathbb{k}^\times$.

Dans tout ce qui suit \mathcal{H} désignera le tore $(\mathbb{k}^\times)^n$ ou $(\mathbb{k}^\times)^{n+1}$, dépendant de la valeur de u .

Définition 2.2.2. On définit l'action rationnelle de \mathcal{H} sur $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$, comme suit :

¹Un élément x est dite G -vecteur propre si pour tout $g \in G$, existe $\lambda_{g,x} \in \mathbb{k}$ tel que $g(x) = \lambda_{g,x} x$.

1) Si $u \neq 0$, alors $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^n$ et pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{H}$ on prend

$$\begin{aligned} h.y_i &= h_i y_i, & i &= 1, \dots, n, \\ h.x_i &= h_i^{-1} x_i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2) Si $u = 0$, alors $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^{n+1}$, et pour tout $h = (h_1, \dots, h_n, h_{n+1}) \in \mathcal{H}$ on prend

$$\begin{aligned} h.y_i &= h_i y_i \\ h.x_i &= h_i^{-1} h_{n+1} x_i. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3. L'action définie dans la définition précédente satisfait les conditions $(\mathcal{H}a)$, $(\mathcal{H}b)$ et $(\mathcal{H}c)$ de la section 1.7, 1.7.22. En effet, rappelons que tous les $c_i d$ ne sont pas racines de l'unité. Si $u \neq 0$ on a $d = 1$, alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ les restrictions à R_{j-1} et à $R_{j/2}$ de l'action des éléments de \mathcal{H} est donnée par :

$$\begin{aligned} h^j &= (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jj-1}, c_j, 1, \dots, 1), \\ g^j &= (\lambda_{j1}^{-1} c_1, \dots, \lambda_{jj-1}^{-1} c_{j-1}, c_j, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

qui coïncident avec les automorphismes α_j, β_j , respectivement. Si $u = 0$, alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ on prend

$$\begin{aligned} h^j &= (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jj-1}, c_j d, 1, \dots, 1, d), \\ g^j &= (\lambda_{j1}^{-1} c_1, \dots, \lambda_{jj-1}^{-1} c_{j-1}, c_j, 1, \dots, 1, d^{-1}). \end{aligned}$$

C'est clair que α_j, β_j sont les restrictions de h^j, g^j respectivement. D'où les actions définies ci-dessus satisfassent les conditions citées. Notons que si $d = 1$ et $u = 0$, alors on peut prendre le tore $(\mathbb{k}^\times)^n$ au lieu de $(\mathbb{k}^\times)^{n+1}$, avec les actions citées avant. Mais si $d \neq 1$, il faut élargir la dimension du tore, afin de "placer" le paramètre d . L'action définie en [41, 5.4] pour l'espace Euclidien quantique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}^{2 \times n})$ ne satisfait pas les hypothèses $(\mathcal{H}a)$ – $(\mathcal{H}c)$, comme le montre le contre exemple suivant :

Exemple 2.2.4. Considérons $R_2^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}^{2 \times 2})$ avec q non racine de l'unité. Si on suppose que $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^2$ et que son action satisfait les conditions $(\mathcal{H}a)$ – $(\mathcal{H}c)$, alors il existera $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}$ tel que la restriction de h à $\mathbb{k}[y_1, x_1]$ coïncide avec l'automorphisme α_2 . Donc

$$\begin{aligned} \alpha_2(y_1) &= q^{-1} y_1 = h.y_1 = h_1 y_1 \\ \alpha_2(x_1) &= q^{-1} x_1 = h.x_1 = h_1^{-1} x_1, \end{aligned}$$

cela signifie que $q^2 = 1$, contradiction avec le fait que q n'est pas racine de l'unité.

Dans tout le reste de cette section $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ sera noté par R .

Remarque 2.2.5. D'après la remarque 2.2.3 et la proposition 1.7.22, tout idéal \mathcal{H} –premier de R est complètement premier, et leur nombre est inférieur à 2^{2n} . Comme R est une \mathbb{k} –algèbre de type P.B.W, la remarque 1.9.14 implique que R satisfait le Nullstellensatz. En appliquant le théorème 1.7.23 et la définition 2.2.2, R satisfera l'équivalence de Dixmier-Moeglin, donc les idéaux primitifs sont les maximaux dans leur \mathcal{H} –stratum.

Notre prochain objet est de décrire les idéaux \mathcal{H} -premiers de R . Pour cela, on a besoin de contrôler la GK-dimension de certaines localisations de R .

Proposition 2.2.6. *Soit W un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$. Considérons l'ensemble multiplicatif \mathcal{Y} de R engendré par les $y_k, k \in W$. Alors \mathcal{Y} est un ensemble de Ore à droite, et la dimension de Gelfand-Kirillov de $R\mathcal{Y}^{-1}$ est égale à $2n$.*

Démonstration. D'après les lemmes 1.7.5 et 1.1.3, \mathcal{Y} est un ensemble de Ore à droite de R , d'où $\text{GKdim}(R) \leq \text{GKdim}(R\mathcal{Y}^{-1})$. Considérons la \mathbb{k} -algèbre S engendrée par $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ avec les relations (2.1) et par des nouveaux variables $\Omega_k, k \in W$, qui satisfassent les relations additionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_i \Omega_j &= \lambda_{ji}^{-1} \Omega_j \Omega_i, & x_i \Omega_j &= \lambda_{ji}^{-1} d \Omega_j x_i & (j > i) \\ \Omega_i x_j &= \lambda_{ji}^{-1} c_i x_j \Omega_i, & y_i \Omega_j &= \lambda_{ji} \Omega_j y_i & (j > i) \\ \Omega_i y_j &= \lambda_{ji} y_j \Omega_i & & & (j > i) \\ \Omega_i y_i &= y_i \Omega_i = 1 & & & \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Omega_k x_k = c_k x_k \Omega_k + \lambda d^{-1} \sum_{l=1}^{k-1} (d\lambda)^{k-1-l} (c_l d - 1) y_l x_l \Omega_k^2 + d^{k-3} \lambda^{k-1} z_0 \Omega_k^2.$$

Il existe un morphisme d'algèbre surjective $S \rightarrow R\mathcal{Y}^{-1}$ envoyant y_i à y_i, x_i à x_i et Ω_k à y_k^{-1} . Alors $\text{GKdim}(R\mathcal{Y}^{-1}) \leq \text{GKdim}(S)$. Il suffit donc de montrer que $\text{GKdim}(S) = 2n$. Si on ordonne les variables :

$$\Omega_{k_1} < \dots < \Omega_{k_m} < y_1 < x_1 < \dots < y_n < x_n,$$

où $W = \{k_1, \dots, k_m\}$. Soit $\leq_{\mathbf{w}}$ l'ordre lexicographique dirigé sur \mathbb{N}^{2n+m} et qui est défini par le vecteur poids

$$\mathbf{w} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{(m)}, 1, 2, 1, 4, \dots, 1, 2n,);$$

voir l'exemple 1.9.13. D'après l'exemple 1.9.13, S possède une $(\mathbb{N}^{2n+m}, \leq_{\mathbf{w}})$ -filtration tel que l'algèbre \mathbb{N}^{2n+m} -gradué $G(S)$ est semi-commutative, en effet, elle est engendrée par l'ensemble fini des éléments homogènes suivants :

$$\Omega_{k_1}, \dots, \Omega_{k_m}, y_1, x_1, \dots, y_n, x_n,$$

de plus $y_k \Omega_k = 0$ pour tout $k \in W$. Ensuite $G(S)$ est le quotient de l'espace quantique $(2n+m)$ -dimensionnelle par l'idéal engendré par les éléments $y_k \Omega_k, k \in W$. Il est donc clair que $\text{GKdim}(G(S)) = 2n+m-m$, d'où le théorème 1.9.12 implique que $\text{GKdim}(S) = \text{GKdim}(G(S)) = 2n$. \square

Fixons un ensemble admissible $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$ avec $i_k = \min(\text{ind}(T_k)), j_k = \max(\text{ind}(T_k))$. La proposition suivante donne la hauteur d'un idéal premier engendré par l'ensemble admissible T .

Proposition 2.2.7. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors*

$$\text{haut}(\langle T \rangle) = \text{long}(T) = 2n - \text{GKdim} \left(\frac{R}{\langle T \rangle} \right).$$

Démonstration. On va prouver premièrement la proposition pour un T connexe. Considérons $j = \max(\text{ind}(T))$ et $i = \min(\text{ind}(T))$; on utilise une récurrence sur j . Si $j = i = 1$ alors les ensembles admissibles possible sont $\{z_1\}$ si $z_0 \neq 0$ ou $\{z_1, x_1\}, \{z_1, y_1\}$ et $\{z_1, y_1, x_1\}$ si $z_0 = 0$. En utilisant le corollaire 2.1.6, la définition de la longueur et le théorème 1.3.1, on aura le résultat dans ce cas. Supposons que la proposition est vrai pour tous les admissibles connexes T' tels que $\max(\text{ind}(T')) < j$. On peut décomposer T comme réunion disjointe

$$T = \begin{cases} T' \cup \{z_j, y_j\}, & \text{si } j \in \mathcal{J}_T, j \notin \text{Renv}(T) \\ T' \cup \{z_j, x_j\}, & \text{si } j \in \mathcal{I}_T, j \notin \text{Renv}(T) \\ T' \cup \{z_j, y_j, x_j\}, & \text{si } j \in \text{Renv}(T), \end{cases}$$

où T' est un admissible de R . On a donc une chaîne des idéaux premiers

$$\begin{aligned} \langle 0 \rangle \subsetneq \langle T' \rangle \subsetneq \langle T', v_j \rangle = T, \quad v_j \in \{y_j, x_j\} \\ \text{ou} \\ \langle 0 \rangle \subsetneq \langle T' \rangle \subsetneq \langle T', y_j \rangle \subsetneq \langle T', y_j, x_j \rangle = T. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.8 on sait que T est une suite polynormal. En utilisant le théorème 1.3.1, les chaînes ci-dessus sont maximaux. En suite $\text{haut}(\langle T \rangle) = \text{haut}(\langle T' \rangle) + \epsilon$, où $\epsilon \in \{1, 2\}$. Il est clair maintenant que le résultat vient de l'hypothèse de récurrence. Soit T un admissible quelconque et $T_1 \cup \dots \cup T_r$ sa décomposition canonique. On montre la proposition cette fois par récurrence sur r . Pour $r = 1$ la proposition a été déjà démontrée. Supposons que $r > 1$, $T = T' \cup T_r$ où $T' = T_1 \cup \dots \cup T_{r-1}$. On note par $i_r = \min(\text{ind}(T_r))$. Alors, d'après la proposition 2.1.7, on a la chaîne suivante d'idéaux premiers

$$\langle 0 \rangle \subseteq \langle T' \rangle \subsetneq \langle T', z_{i_r} \rangle \subsetneq \dots \subsetneq \langle T', T_r \rangle = \langle T \rangle.$$

Cette chaîne est maximale (saturée), parce que $\langle T \rangle$ est un idéal polynormal. Le nombre des idéaux premiers entre $\langle T', z_{i_r} \rangle$ et $\langle T \rangle$ est exactement le nombre des variables $y_l, x_l, l \in \text{ind}(T_r)$. On a donc $\text{haut}(\langle T \rangle) = \text{haut}(\langle T' \rangle) + \text{long}(T_r)$, d'où par récurrence et la définition de la longueur d'un admissible, on a $\text{haut}(\langle T \rangle) = \text{long}(T)$. La deuxième égalité vient de la proposition 2.1.10. \square

On note par \mathcal{Y}_T l'ensemble multiplicatif de R engendré par $y_j, j \notin \mathcal{J}_T$; d'après la proposition 2.2.6 c'est un ensemble de Ore à droite de R . Soit Q_T la sous-matrice de Q_n définie en annulons les lignes et les colonnes correspondantes aux variables $x_i, y_i \in T$ et $x_{i_k}, k = 1, \dots, r$. Si $z_0 = 0$ et $x_1 \notin T$ on va pas annuler la ligne et la colonne correspondante au variable x_1 . Considérons A_T l'espace quantique associé à la matrice Q_T ,

considérée comme sous-algèbre de l'espace quantique $A_\emptyset = \mathbb{k}_{Q_n}[Y_1, X_1, \dots, Y_n, X_n]$ attaché à R . L'ensemble multiplicatif \mathbb{Y}_T de A_T engendré par tous les Y_k est un ensemble de Ore à droite, considérons $B_T = A_T \mathbb{Y}_T^{-1}$. On note par \bar{a} l'image de $a \in R$ dans $\frac{R}{\langle T \rangle}$. Le morphisme de \mathbb{k} -algèbre, $\Psi_T : \frac{R}{\langle T \rangle} \bar{\mathcal{Y}}_T^{-1} \rightarrow B_T$ défini par

$$\begin{aligned} \Psi_T(\bar{x}_i) &= \Psi(\bar{y}_j) = 0, \text{ pour } i \in \mathcal{I}_T, \text{ et } j \in \mathcal{J}_T, \\ \Psi_T(\bar{y}_k) &= Y_k, \text{ pour tout } k \notin \mathcal{J}_T, \end{aligned}$$

et tel que si $k \notin \mathcal{I}_T$

$$\begin{aligned} \Psi_T(\bar{x}_1) &= X_1 + (1 - c_1 d)^{-1} Z_0 Y_1^{-1} && (\text{ si } k = 1 \notin \text{ind}(T)) \\ \Psi_T(\bar{x}_1) &= (1 - c_1 d)^{-1} Z_0 Y_1^{-1} && (\text{ si } k = 1 \in \text{ind}(T), \text{ et } z_0 \neq 0) \\ \Psi_T(\bar{x}_1) &= X_1 && (\text{ si } k = 1 \in \text{ind}(T) \text{ et } z_0 = 0) \end{aligned}$$

$$\Psi_T(\bar{x}_k) = X_k \quad (\text{ si } k - 1 \in \text{ind}(T), k \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_T(\bar{x}_k) &= X_k + (1 - c_k d)^{-1} \lambda Z_{k-1} Y_k^{-1} && (\text{ si } 2 \leq k \text{ et } k, k-1 \notin \text{ind}(T)) \\ \Psi_T(\bar{x}_k) &= (1 - c_k d)^{-1} \lambda Z_{k-1} Y_k^{-1} && (\text{ si } 2 \leq k \text{ et } k \in \text{ind}(T) \text{ et } k-1 \notin \text{ind}(T)), \end{aligned}$$

où $Z_0 = d^{-1} z_0 = u$, $Z_k = (c_k d - 1) Y_k X_k$. Il est clair que $\mathcal{Y}_T \cap \langle T \rangle = \emptyset$ alors, d'après [19, Proposition 3.6.15], $\frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}} \cong \frac{R}{\langle T \rangle} \bar{\mathcal{Y}}_T^{-1}$. En composant Ψ_T avec cet dernier isomorphisme on arrive à une nouvelle application qu'on note aussi par Ψ_T . Un morphisme similaire a été donné dans [72, Section 3.2] pour l'algèbre $A_n^{\mathfrak{q}, \Lambda}(\mathbb{k})$ et dans [30] pour $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et aussi dans [69] pour $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

Proposition 2.2.8. *L'application :*

$$\Psi_T : \frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}} \rightarrow B_T$$

est un isomorphisme des \mathbb{k} -algèbres.

Démonstration. Il est clair que Ψ_T est surjective et que $\langle T \rangle \subseteq \ker(\Psi_T)$. Alors $\text{GKdim}(B_T) \leq \text{GKdim}(\frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}})$. On a $\text{GKdim}(\frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}) \leq \text{GKdim}(B_T)$. En effet, de [54, Lemma 3.16], on a $\text{GKdim}(\frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}) \leq \text{GKdim}(R \mathcal{Y}_T^{-1}) - \text{haut}(\langle T \rangle)$. En utilisant les propositions 2.2.6 et 2.2.7, on a $\text{GKdim}(\frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}) \leq 2n - \text{long}(T)$. On sait que $\text{GKdim}(A_T) = 2n - \text{long}(T) = \text{GKdim}(B_T)$. Donc $\text{GKdim}(\frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}) \leq \text{GKdim}(B_T)$. Puisque $\langle T \rangle$ est un idéal complètement premier par le théorème 2.1.8, on déduit de [54, Proposition 3.15] que Ψ_T est un isomorphisme de \mathbb{k} -algèbres. \square

Considérons le tore algébrique \mathcal{H} avec son action sur R définie comme dans 2.2.2. Pour tout sous-ensemble $X \subseteq \{1, \dots, n\} = \mathbb{N}_n$, on note par \mathcal{H}_X le tore

$$\mathcal{H}_X = \begin{cases} \{(h_i)_{i \in X \cup \{n+1\}} \mid h_i \in \mathbb{k}^\times\}, & \text{ si } \mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^{n+1} \\ \{(h_i)_{i \in X} \mid h_i \in \mathbb{k}^\times\}, & \text{ si } \mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^n. \end{cases}$$

Soit T un ensemble admissible de R ; on note par $I_n(T)$ l'ensemble des indices des variables qui apparaissent dans A_T ; $I_n(T) \subseteq \mathbb{N}_n$. Définissons l'action suivante du tore $\mathcal{H}_{I_n(T)} := \mathcal{H}_T$ sur A_T .

Si $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^{n+1}$, alors pour tout $(h_i)_{i \in I_n(T) \cup \{n+1\}} \in \mathcal{H}_T$,

$$\begin{aligned} (h_i)_{i \in I_n(T) \cup \{n+1\}} \cdot Y_l &= h_l Y_l \\ (h_i)_{i \in I_n(T) \cup \{n+1\}} \cdot X_k &= h_k^{-1} h_{n+1} X_k. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^n$, alors pour tout $(h_i)_{i \in I_n(T)} \in \mathcal{H}_T$,

$$\begin{aligned} (h_i)_{i \in I_n(T)} \cdot Y_l &= h_l Y_l \\ (h_i)_{i \in I_n(T)} \cdot X_k &= h_k^{-1} X_k. \end{aligned}$$

Considérons l'extension canonique de l'action de \mathcal{H}_T au localisation $B_T = A_T \mathbb{Y}^{-1}$. Pour tout $h \in \mathcal{H}_T$, on a l'application suivante

$$\frac{R}{\langle T \rangle} \overline{\mathcal{Y}}_T^{-1} \xrightarrow{\Psi_T} B_T \xrightarrow{h} B_T \xrightarrow{\Psi_T^{-1}} \frac{R}{\langle T \rangle} \overline{\mathcal{Y}}_T^{-1}.$$

où h est le prolongement de h à B_T .

Définition 2.2.9. On définit l'action du tore \mathcal{H}_T sur $\frac{R}{\langle T \rangle} \overline{\mathcal{Y}}_T^{-1}$ comme suit. Étant donné $h \in \mathcal{H}_T$, on définit

$$h.x = (\Psi_T^{-1} h \Psi_T)(x)$$

pour tout $x \in \frac{R}{\langle T \rangle} \overline{\mathcal{Y}}_T^{-1}$.

Le lemme suivant est clair.

Lemme 2.2.10. *Considérons \mathcal{H}_T comme un groupe quotient du tore \mathcal{H} . L'action de \mathcal{H}_T induite sur $R/\langle T \rangle$ par celle de \mathcal{H} coïncide avec la restriction de l'action définie dans 2.2.9.*

Proposition 2.2.11. *Il existe une bijection ζ entre $\mathcal{H} - \text{Spec}(R)$ et $\mathcal{A}_n(R)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles admissibles de R , définie par*

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{H} - \text{Spec}(R) &\longrightarrow \mathcal{A}_n(R) \\ J &\longmapsto J \cap \wp_n, \end{aligned}$$

avec application inverse

$$\begin{aligned} \zeta' : \mathcal{A}_n(R) &\longrightarrow \mathcal{H} - \text{Spec}(R) \\ T &\longmapsto \langle T \rangle. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème 2.1.8 et les remarques 2.2.3, 2.2.5, les application ζ , ζ' sont bien définies et que $\zeta\zeta' = id$. Considérons $J \in \mathcal{H} - \text{Spec}(R)$ tel que $J \cap \wp_n = T$, et

supposons que $\langle T \rangle \subsetneq J$. Soit $\overline{\mathcal{J}}_T = \mathbb{N}_n \setminus \mathcal{J}_T = \{j_1, \dots, j_r\}$; B_T est une extension de Ore itérée de la forme

$$B_T = \mathbb{k}_{\overline{\mathcal{Q}}}[Y_{j_1}^{\pm 1}, \dots, Y_{j_r}^{\pm 1}][X_{i_1}; \beta_{i_1}] \cdots [X_{i_t}; \beta_{i_t}],$$

où $\mathbb{k}_{\overline{\mathcal{Q}}}[Y_{j_1}^{\pm 1}, \dots, Y_{j_r}^{\pm 1}] := B_T^0$ étant l'algèbre de McConnell-Pettit associée à la matrice $\overline{\mathcal{Q}}$, résultant des relations de semi-commutation entre les Y_j . Fixons $l \in \{1, \dots, t-1\}$, et posons $h = (h_i) \in \mathcal{H}_T$, comme suit; si $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^{n+1}$, on prend

$$h_i = \begin{cases} \lambda_{i_l j_k}^{-1} c_{j_k}, & i = j_k < i_l \\ \lambda_{j_k i_l} d^{-1}, & i = j_k > i_l \\ \lambda_{i_l i_k}^{-1} c_{i_k}, & i = i_k < i_l \\ c_i, & i = i_l \\ d^{-1}, & i = n+1 \\ 1, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^n$, on prend :

$$h_i = \begin{cases} \lambda_{i_l j_k}^{-1} c_{j_k}, & i = j_k < i_l \\ \lambda_{j_k i_l} d^{-1}, & i = j_k > i_l \\ \lambda_{i_l i_k}^{-1} c_{i_k}, & i = i_k < i_l \\ c_i, & i = i_l \\ 1, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il est clair que la restriction de $h \in \mathcal{H}_T$ à l'algèbre

$$B_T^{l-1} = B_T^0[X_{i_1}; \beta_{i_1}] \cdots [X_{i_{l-1}}; \beta_{i_{l-1}}]$$

coïncide avec β_{i_l} . comme les $c_i d$ ne sont pas racines de l'unité, on peut donc appliquer le lemme 1.7.20 sur chaque itération, sachant que B_T n'est pas \mathcal{H}_T -simple, parce que $\mathcal{P} = \Psi_T(J/\langle T \rangle) \overline{\mathcal{Y}}_T^{-1}$ est un idéal premier non nul. Notons $\mathcal{P}^l = \mathcal{P} \cap B_T^l$, $l = 1, \dots, t-1$. L'action de \mathcal{H}_T sur B_T^0 est exactement l'action du tore $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{J}}_T}$, qui est l'action naturelle du tore $(\mathbb{k}^\times)^r$. Alors, d'après le lemme 1.7.16, B_T^0 est \mathcal{H}_T -simple. On va utiliser une récurrence sur t pour montrer que B_T est aussi \mathcal{H}_T -simple, ce qui donnera une contradiction, et ainsi la preuve. Si $t = 1$, et B_T^1 n'est \mathcal{H}_T -simple, le lemme 1.7.20, entraîne que $X_{i_l} \in \mathcal{P}^1$, puisque B_T^0 est \mathcal{H}_T -simple. D'où $x_{i_l} \in J \setminus T$ or $z_{j_1} \in J \setminus I$, ce qui est impossible. Alors B_T^1 doit être \mathcal{H} -simple. Ce qui entraîne aussi que $B_T = B_T^t$ doit être \mathcal{H} -simple. \square

Corollaire 2.2.12. *Le nombre des idéaux \mathcal{H} -premiers est :*

$$\frac{1}{2} \left[(2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n \right] \quad (u \neq 0)$$

ou

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(2 + \sqrt{2})^{n+1} - (2 - \sqrt{2})^{n+1} \right] \quad (u = 0)$$

Démonstration. d'après la proposition 2.2.11, il suffit de calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_n(R)$, qu'on note par C_m . Soit $m < n$ et considérons T un ensemble admissible de $R_m^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ contenant z_m . Alors il y a 4 ensembles admissibles de $R_{m+1}^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$, qui se contractent à T ; en effet T , $T \cup \{z_{m+1}, y_{m+1}\}$, $T \cup \{z_{m+1}, x_{m+1}\}$ et $T \cup \{z_{m+1}, y_{m+1}, x_{m+1}\}$. Dans le cas où T ne contient pas z_m , il y a seulement deux ensembles admissibles dans $R_{m+1}^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ se contractant à T . Le nombre des ensembles admissibles de $R_m^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ qui ne contiennent pas z_m est exactement C_{m-1} , on a donc une suite linéaire

$$C_{m+1} = 4(C_m - C_{m-1}) + 2C_{m-1} = 2(2C_m - C_{m-1}).$$

On sait que $C_0 = 1$ (par conventions $R_0^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathbb{k}$), et que $C_1 = 4$, si $u = 0$ et que $C_1 = 2$, si $u \neq 0$. En résolvant ces systèmes, on trouve le résultat. \square

2.3 Les idéaux premiers et primitifs de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$.

Cette section contient notre résultat principal concernant les idéaux premiers et primitifs de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$, théorème 2.3.6. Il est donné sous forme d'une bijection entre le spectre $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ et la réunion de tous les spectres premiers des centres des algèbres de McConnell-Pettit dont les matrices associées sont des sous matrices de Q_n (voir l'équation (2.3)) correspondantes aux ensembles admissibles.

Rappelons, d'après la section 1.5, que $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ admet, avec l'action du tore \mathcal{H} défini dans 2.2.2, la \mathcal{H} -stratification

$$\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) = \bigcup_{J \in \mathcal{H}\text{-Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))} \text{Spect}_J(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$$

où

$$\text{Sepct}_J(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) = \{P \in \text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) \mid \mathcal{H}(P) = \bigcap_{h \in \mathcal{H}} h(P) = J\}$$

et $\mathcal{H}\text{-Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ désigne l'ensemble des idéaux \mathcal{H} -premiers. Dans ce qui suit, on va donner une forme simple de cette \mathcal{H} -stratification, c'est à dire on va caractériser chaque \mathcal{H} -stratum en terme des ensembles admissibles; ce qui est raisonnable en vertu la proposition 2.2.11.

L'algèbre $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ sera notée par R . Soit T un ensemble admissible de R , on notera par $\text{Spect}_T(R)$, le sous-ensemble de $\text{Spect}(R)$, suivant :

$$\text{Spect}_T(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) = \{P \in \text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) \mid P \cap \wp_n = T\}.$$

Lemme 2.3.1. *Soit J un idéal \mathcal{H} -premier de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ et T l'ensemble admissible tel que $J = \langle T \rangle$. Alors*

$$\text{Spect}_T(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) = \text{Spect}_J(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})).$$

Démonstration. Soit $P \in \text{Spect}_T(R)$ et J' un idéal \mathcal{H} -premier de R tel que $P \in \text{Spect}_{J'}(R)$. Posons $T' = \wp_n \cap J'$ (i.e $\langle T' \rangle = J'$), il est clair que $T' \subseteq T$. Supposons qu'il existe $u_i \in \{z_i, y_i, x_i\}$, tel que $u_i \in T \setminus T'$. L'idéal $\langle T' \cup \{u_i\} \rangle \subseteq P$ contient donc strictement J' , en plus il est \mathcal{H} -stable. Ceci est impossible, puisque J' est le plus grand idéal \mathcal{H} -stable contenu dans P . Alors $T = T'$ et d'après la proposition 2.2.11, $J = J'$. On vient donc de montrer que $\text{Spect}_T(R) \subseteq \text{Spect}_J(R)$. Inversement, soit $P \in \text{Spect}_J(R)$, posons $P \cap \wp_n = T'$, on a donc d'une part $J \cap \wp_n = T \subseteq T'$ et d'autre part, on sait que J est le plus grand idéal \mathcal{H} -stable contenu dans P , ce qui entraîne que $J = \langle T' \rangle$ et donc $T = T'$. Enfin $P \in \text{Spect}_T(R)$ ce qui termine la preuve. \square

Proposition 2.3.2. *La \mathcal{H} -stratification de $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ est donnée par*

$$\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})) = \bigsqcup_{T \text{ est admissible}} \text{Spect}_T(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})). \quad (2.7)$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.2.11 et lemme 2.3.1. \square

On peut vérifier sans aucun problème que la \mathbb{k} -algèbre obtenu de B_T en localisant par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par tout les X_k qui apparaissent dans l'espace quantique A_T ; est l'algèbre de McConnell-Pettit $\mathbf{P}(Q_T)$. Considérons l'application

$$\Phi_T : R \rightarrow \frac{R\mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}} \xrightarrow{\Psi_T} B_T \hookrightarrow \mathbf{P}(Q_T)$$

Remarque 2.3.3. Soit J un idéal \mathcal{H} -premier de R et $J \cap \wp_n = T$ et \mathcal{X}_T l'image inverse dans $\frac{R\mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}$ de l'ensemble multiplicatif de B_T engendré par tout les X_k . C'est un ensemble de Ore à droite et la localisation correspondante R_T satisfait $R_T \cong \mathbf{P}(Q_T)$. Clairement $R_T \subseteq R_J$, où $J = \langle T \rangle$ et $R_J = (R/J)\mathcal{E}_J^{-1}$; \mathcal{E}_J est l'ensemble de tous les éléments homogènes par rapport à une certaine \mathbb{Z}^r -graduation venant d'une action rationnelle d'un tore de rang r (i.e. les ensembles de Ore qui apparaissent dans la stratification de Goodearl-Letzter). En général R_T est différent de R_J . En effet, prenant $n = 2$, $R_2^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}^{2 \times 2})$, $T = \{z_2\}$; alors l'élément homogène $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ de degré $(1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^3$ n'est pas inversible dans R_T .

Théorème 2.3.4. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors Φ_T induit un homeomorphisme entre $\text{Spect}(\mathbf{P}(Q_T))$ et $\text{Spect}_T(R)$ défini par*

$$\begin{aligned} \Phi_T^{-1} : \text{Spect}(\mathbf{P}(Q_T)) &\rightarrow \text{Spect}_T(R) \\ \mathcal{P} &\mapsto \Phi_T^{-1}(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

Démonstration. Notons d'abord que $\Phi_T^{-1}(\mathcal{P})$ est premier car tout idéal premier de R ou de $\mathbf{P}(Q_T)$ est complètement premier. Pour montrer que Φ_T^{-1} est bien définie, il suffit de montrer que $\Phi_T^{-1}(\mathcal{P}) \in \text{Spect}_T(R)$ pour tout $\mathcal{P} \in \text{Spect}(\mathbf{P}(Q_T))$. Posant $\Phi_T^{-1}(\mathcal{P}) \cap \wp_n = T'$; il est clair que $T \subseteq T'$. Pour l'autre inclusion supposons qu'il existe $k \in \text{ind}(T')$ et $k \notin \text{ind}(T)$,

modulo $\langle T \rangle$, on a $\bar{z}_k \neq 0$ et $\Psi_T(\bar{z}_k) = (c_k d - 1)Y_k X_k \in \mathcal{P}$, qui est en contradiction avec $\mathcal{P} \in \text{Spect}(\mathbf{P}(Q_T))$. Maintenant, si $\text{ind}(T) = \text{ind}(T')$, il existe $x_k \in T'$ tel que $\Psi_T(\bar{x}_k) = X_k \in \mathcal{P}$ c'est aussi une contradiction. Montrons l'injection ; soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux éléments du $\text{Spect}(\mathbf{P}(Q_T))$ tels que $\Phi_T^{-1}(\mathcal{P}) = \Phi_T^{-1}(\mathcal{P}')$. Il est clair que $\Phi_T^{-1}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{Y}_T = \Phi_T^{-1}(\mathcal{P}') \cap \mathcal{Y}_T = \emptyset$. Appliquons Ψ_T à

$$\frac{\Phi_T^{-1}(\mathcal{P})\mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}} = \frac{\Phi_T^{-1}(\mathcal{P}')\mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}$$

pour avoir $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Pour la surjection, soit $P \in \text{Spect}_T(R)$ et on pose $\mathcal{P} = \Psi_T\left(\frac{P\mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}}\right)$; alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{Y}_T = \emptyset$. Supposons qu'il existe une indéterminée X_k de $\mathbf{P}(Q_T)$ telle que $X_k \in \mathcal{P}$. Ensuite, si $\Psi_T(\bar{x}_k) = X_k$ alors $x_k \in P$ avec $k \notin \mathcal{I}_T$; c'est une contradiction avec $P \in \text{Spect}_T(R)$. Si $\Psi_T(\bar{x}_k) = X_k + (1 - c_k d)^{-1} \lambda Z_{k-1} Y_k^{-1}$, alors $\Psi_T^{-1}(X_k) = -(1 - c_k d)^{-1} \bar{y}_k^{-1} \bar{z}_k$. Donc $k \notin \text{ind}(T)$ et $z_k \in P$; c'est encore une contradiction avec $P \in \text{Spect}_T(R)$. On a montré donc que l'extension de \mathcal{P} à $\mathbf{P}(Q_T)$ est un idéal premier qui est l'image inverse par Φ_T^{-1} de P . \square

Corollaire 2.3.5. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors $\text{Spect}_T(R)$ is homeomorphe à $\text{Spect}(Z(\mathbf{P}(Q_T)))$, où $Z(\mathbf{P}(Q_T))$ étant le centre de $\mathbf{P}(Q_T)$.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.7.12(b), la contraction $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \cap Z(\mathbf{P}(Q_T))$ donne un homeomorphisme entre $\text{Spect}(\mathbf{P}(Q_T))$ et $\text{Spect}(Z(\mathbf{P}(Q_T)))$. Le corollaire est donc une conséquence du théorème 2.3.4. \square

Soit \mathfrak{p} un idéal premier de $Z(\mathbf{P}(Q_T))$, on note par \mathfrak{p}^e son extension à $\mathbf{P}(Q_T)$.

Théorème 2.3.6. *Considérons $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ et soient :*

$$\mathcal{SP} = \{(T, \mathfrak{p}) \mid T \text{ est un ensemble admissible, } \mathfrak{p} \in \text{Spect}(Z(\mathbf{P}(Q_T)))\}$$

et

$$\mathcal{P} = \{(T, \mathfrak{p}) \mid T \text{ est un ensemble admissible, } \mathfrak{p} \in \text{Max}(Z(\mathbf{P}(Q_T)))\}.$$

Si chacun des paramètres $c_i d$, $i = 1, \dots, n$ n'est pas racines de l'unité, alors $(T, \mathfrak{p}) \mapsto \Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}^e)$ définit une bijection entre \mathcal{SP} et le spectre premier $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ dont la restriction à \mathcal{P} est une bijection dans le spectre primitif $\text{Prim}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$.

Démonstration. La bijection entre \mathcal{SP} et $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ vient du théorème 2.3.4, corollaire 2.3.5 et la stratification (2.7). Le reste de la démonstration est une conséquence du corollaire 1.7.12(c) et la remarque 2.2.5. \square

Remarque 2.3.7. La bijection établit dans le théorème 2.3.6, nous permet de déterminer les idéaux premiers et primitifs de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$, si on sait une procédure pour calculer la base des algèbres des polynômes de Laurent $Z(\mathbf{P}(Q_T))$, où T varie dans $\mathcal{A}_n(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$. Certaines suppositions sur les paramètres de la matrice Q_n , facilite cette procédure ; voyant ce qui se passe dans les cas particuliers suivantes : $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$, $A_n^{(\mathfrak{q},\Lambda)}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

2.3.1 Les idéaux primitifs de $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$.

Les idéaux premiers de l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ ont été étudiés par K.R. Goodearl dans [36] pour $n = 1$; ultérieurement par L. Rigal [72] et indépendamment par M. Akhazavidegan et D. A. Jordan dans [2], pour tout entier n .

En combinant les hypothèses génériques de Rigal (plus au moins fortes mais claires que celle de Akhazavidegan-Jordan) et en utilisant nos méthodes, on va re-démontrer ici les résultats cités dans ces travaux. Cela nous conduit bien sûr à la détermination, pour la première fois, du spectre primitif de $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$.

Notons par Γ_n le sous-groupe de \mathbb{k}^\times engendré par les λ_{ij} et q_i , $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i < j$, ($\Gamma_0 = \langle 1 \rangle$). D'après [72, Proposition 2.3.8] on a

Proposition 2.3.8. *Soit T un ensemble admissible de $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ tel que $\text{long}(T) < 2n - 1$. Si Γ_n est groupe libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, alors $\mathbf{P}(Q_T)$ est une \mathbb{k} -algèbre simple.*

Observons que si $\text{long}(T) = 2n - 1$ alors

$$T = \wp_n = \{z_1, y_2, x_2, z_2, \dots, y_n, x_n, z_n\}.$$

On a $\Psi_{\wp_n}(\bar{y}_1) = Y_1$ et $\Psi_{\wp_n}(\bar{x}_1) = (1 - q_1)^{-1}Y_1^{-1}$ ce qui implique que $Z(\mathbf{P}(Q_{\wp_n})) = \mathbb{k}[Y_1^{\pm 1}]$. On note par \mathfrak{P}_{\wp_n} l'ensemble des idéaux de $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ contenant strictement $\langle \wp_n \rangle$ et qui sont images inverse par Φ_{\wp_n} d'un idéal premier non-nul de $\mathbb{k}[Y_1^{\pm 1}]$. D'après le corollaire 2.3.5, on a

$$\text{Spect}_{\wp_n}(A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) = \{\langle \wp_n \rangle\} \cup \mathfrak{P}_{\wp_n}. \quad (2.8)$$

Corollaire 2.3.9. *Si Γ_n est libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, alors*

$$\text{Spect}(A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) = \left(\bigsqcup_{T \text{ admissible}} \{\langle T \rangle\} \right) \cup \mathfrak{P}_{\wp_n}$$

et

$$\text{Prim}(A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) = \left(\bigsqcup_{T \neq \wp_n, T \text{ admissible}} \{\langle T \rangle\} \right) \cup \mathfrak{P}_{\wp_n}.$$

En particulier $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre primitive. Si \mathbb{k} est algébriquement clos, alors

$$\text{Spect}(A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) = \left(\bigsqcup_{T \text{ admissible}} \{\langle T \rangle\} \right) \cup \{\langle \wp_n, x_1 - \alpha \rangle\}$$

et

$$\text{Prim}(A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) = \left(\bigsqcup_{T \neq \wp_n, T \text{ admissible}} \{\langle T \rangle\} \right) \cup \{\langle \wp_n, x_1 - \alpha \rangle\},$$

où $\alpha \in \mathbb{k}^\times$.

Démonstration. Dans le cas général c'est une conséquence du théorème 2.3.6, proposition 2.3.8 et les équations (2.7) et (2.8). Si \mathbb{k} est algébriquement clos, soit $\alpha \in \mathbb{k}^\times$, alors

$$\Phi_{\wp_n}^{-1}(\langle Y_1 - \alpha \rangle) = \langle \wp_n, x_1 - \alpha^{-1}(1 - q_1)^{-1} \rangle.$$

D'où $\mathfrak{P}_{\wp_n} = \{ \langle \wp_n, x_1 - \alpha^{-1}(1 - q_1)^{-1} \rangle \mid \alpha \in \mathbb{k}^\times \}$. Ensuite

$$\text{Spect}_{\wp_n}(A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) = \{ \langle \wp_n \rangle \subsetneq \langle \wp_n, x_1 - \alpha^{-1}(1 - q_1)^{-1} \rangle \}_{\alpha \in \mathbb{k}^\times}.$$

□

Remarque 2.3.10. En réalité l'hypothèse faite sur le groupe Γ_n , est très forte dans le sens qu'elle rend presque tous les algèbres quotients simples, après localisation. On ne sait pas s'il existent des autres hypothèses génériques moins fortes ou "local", sous les quelles ces quotients ne seront pas toujours simples.

2.3.2 Les idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

Au contraire du cas 2.3.1, même si on suppose que q n'est pas racine de l'unité, les quotients de McConnell-Pettit par rapport aux ensembles admissibles de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ ne sont pas tous des algèbres simples. Cela complique plus les étapes de calcul. Mais en utilisant les systèmes quantiques, définies ci-dessous, on peut éviter ce problème.

Rappelons que $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$, pour $C = (q^2, \dots, q^2, 1, q, 0)$, $\lambda_{ij} = q$, et les générateurs $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ satisfassent les relations suivantes

$$\begin{aligned} y_j x_i &= q^{-1} x_i y_j, & y_j y_i &= q y_i y_j & (1 \leq i < j \leq n) \\ x_j x_i &= q^{-1} x_i x_j, & x_j y_i &= q y_i x_j & (1 \leq i < j \leq n) \\ x_i y_i - q^2 y_i x_i &= (q^2 - 1) \sum_{l=1}^{i-1} q^{i-l} y_l x_l & & & (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les éléments normaux $z_i = \sum_{l=1}^i q^{i-l} y_l x_l$ ($i \geq 1$) vérifient

$$\begin{aligned} z_i y_k &= q^2 y_k z_i, & z_i x_k &= q^{-2} x_k z_i & (k \leq i) \\ z_i x_k &= x_k z_i, & z_i y_k &= y_k z_i & (i < k) \\ z_i z_k &= z_k z_i & & & (\text{pour tout } i, k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} z_i &= \sum_{j < l \leq i} q^{i-l} y_l x_l + q^{i-j} z_j, & (j \leq i) \\ x_i y_i - q^2 y_i x_i &= (q^2 - 1) q z_{i-1} \\ x_i y_i - y_i x_i &= (q^2 - 1) z_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

La matrice de l'espace quantique attaché à $\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n})$ est donnée par :

$$\begin{array}{c}
 Y_1 \quad X_1 \quad Y_2 \quad X_2 \quad \cdots \quad Y_n \quad X_n \\
 \\
 Q_n = \begin{array}{c}
 Y_1 \\
 X_1 \\
 Y_2 \\
 X_2 \\
 \vdots \\
 Y_n \\
 X_n
 \end{array} \begin{pmatrix}
 1 & q^{-2} & q^{-1} & q^{-1} & \cdots & q^{-1} & q^{-1} \\
 q^2 & 1 & q & q & \cdots & q & q \\
 q & q^{-1} & 1 & q^{-2} & \cdots & q^{-1} & q^{-1} \\
 q & q^{-1} & q^2 & 1 & \cdots & q & q \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 q & q^{-1} & q & q^{-1} & \cdots & 1 & q^{-2} \\
 q & q^{-1} & q & q^{-1} & \cdots & q^2 & 1
 \end{pmatrix} \quad (2.12)
 \end{array}$$

Soit T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n})$ et Q_T la matrice associée. Alors $Q_T = (q^{k_{ij}})_{1 \leq i, j \leq t}$, où $k_{ij} \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$ et t désigne le nombre des variables de A_T . Considérons $\mathcal{M}_T = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq t} \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$.

Définition 2.3.11. Soit T un ensemble admissible et $\mathcal{M}_T \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$, la matrice associée, comme ci-dessus. On appelle *le système quantique* associé à T : le système linéaire des équations entiers $\mathcal{M}_T \mathbf{m} = 0$ où $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^t$. On note par $Null(\mathcal{M}_T)$ le groupe libre des solutions $\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^t : \mathcal{M}_T \mathbf{m} = 0\}$.

On se propose de calculer la base de $Z(\mathbf{P}(Q_T))$, en utilisant les systèmes quantiques associés à T . Pour cela on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.3.12. Soit $A \in \mathbf{M}_{m \times m}(\mathbb{Z})$, $v \in \mathbf{M}_{m \times 1}(\mathbb{Z})$, $w \in \mathbf{M}_{1 \times m}(\mathbb{Z})$ et ρ un entier non-nul. Alors

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & v & v \\ w & 0 & -\rho \\ w & \rho & 0 \end{pmatrix} = 2 + \text{rank} A$$

et

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & v & v & v \\ w & 0 & -2 & -1 \\ w & 2 & 0 & 1 \\ w & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + \text{rank} A$$

Démonstration. On calcule les rangs en utilisant les mineurs et des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. \square

Suivant [65], notons par $ocomp(T)$ le nombre des composantes connexes de longueur impaire qui apparaissent dans la décomposition canonique de T .

Proposition 2.3.13. Soit T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n})$ et soit $\mathcal{M}_T \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$ la matrice associée. Alors $\text{rank} \mathcal{M}_T = t - ocomp(T)$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Les cas $n = 1, 2$ sont faciles à traiter. Supposons que $n > 2$ et soit $j = \max(\text{ind}(T))$. Si T a un indice renouvelable i , soit donc T' un ensemble admissible contenu dans $\wp_n \setminus \{x_i, y_i\}$ et obtenu en déplaçant les variables x_i, y_i . Notons que $\text{ocomp}(T) = \text{ocomp}(T')$. Soit $\mathcal{M}_{T'}^{n-1}$ la matrice associée à T' par rapport à Q_{n-1} . D'après l'hypothèse de récurrence, $\text{rank}\mathcal{M}_{T'}^{n-1} = t' - \text{ocomp}(T')$. Mais $t = t'$; en effet, $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_{T'}^{n-1}$ et donc $\text{rank}\mathcal{M}_T = t - \text{ocomp}(T)$. Pour un T sans indices renouvelable, on va considérer plusieurs cas.

Décomposons $T = T' \cup T_r$, où T_r est la dernière composante connexe de T ; posons $i_r = \min(\text{ind}(T_r))$, v, w sont comme dans le lemme 2.3.12; mais cette fois adéquates.

Cas 1 : Si $j < n$, alors

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{n-1} & v & v \\ w & 0 & -2 \\ w & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{M}_{T'}^{n-1}$ est la matrice associée à T' relative à Q_{n-1} . Par hypothèse de récurrence,

$$\text{rank}\mathcal{M}_{T'}^{n-1} = t - 2 - \text{ocomp}(T').$$

D'après le lemme 2.3.12, $\text{rank}\mathcal{M}_T = t - \text{ocomp}(T)$.

Cas 2 : Supposons que $j = n$ et $i_r = j$. Dans ce cas on a nécessairement $T_r = \{z_n\}$ et donc

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{n-2} & v & v & v \\ w & 0 & -2 & -1 \\ w & 2 & 0 & 1 \\ w & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par hypothèse de récurrence, $\text{rank}\mathcal{M}_{T'}^{n-2} = t - 3 - \text{ocomp}(T')$. Or $\text{ocomp}(T') = \text{ocomp}(T) - 1$ qui avec le lemme 2.3.12, donne l'égalité $\text{rank}\mathcal{M}_T = t - \text{ocomp}(T)$.

Cas 3 : Supposons $i_r < j = n$ avec $j = i_r + 1$. Alors $T_r = \{z_{n-1}, z_n, x_n\}$ ou $T_r = \{z_{n-1}, z_n, y_n\}$. Ensuite

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{n-2} & v & v \\ w & 0 & \epsilon \\ w & -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

où $\epsilon \in \{1, -1\}$. Dans ce cas $\text{ocomp}(T) = \text{ocomp}(T')$. On utilise encore l'hypothèse de récurrence et le lemme 2.3.12, pour trouver l'égalité désirée.

Cas 4 : C'est le dernier cas, où $i_r + 1 < j = n$. Ici, $T_r = T'_r \cup \{z_{n-1}, z_n, u_{n-1}, u_n\}$ où $u_{n-1} \in \{y_{n-1}, x_{n-1}\}$, $u_n \in \{y_n, x_n\}$ et $T'_r \neq \emptyset$ est un ensemble admissible avec $\text{long}(T'_r) = \text{long}(T_r) - 2$. Maintenant,

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T''}^{n-2} & v & v \\ w & 0 & \epsilon \\ w & -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

où $T'' = T' \cup T'_r$ et $\epsilon \in \{1, -1\}$. Par hypothèse de récurrence, $\text{rank} \mathcal{M}_{T''}^{n-2} = t-2 - \text{ocomp}(T'')$. Mais $\text{ocomp}(T'') = \text{ocomp}(T)$ ce qui implique, d'après le lemme 2.3.12, l'égalité désirée. \square

Corollaire 2.3.14. *Soit T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$. Alors le rang du groupe abélien libre $\text{Null}(\mathcal{M}_T)$ est $\text{ocomp}(T)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.3.13. \square

Soit T un ensemble admissible et soit

$$\{U^\alpha = U_1^{\alpha_1}, \dots, U_t^{\alpha_t} : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathbb{Z}^t\}$$

la base canonique of $\mathbf{P}(Q_T)$, où les U_l sont des monomials de A_T . Soit

$$\{\mathbf{m}_1^T, \dots, \mathbf{m}_k^T\}$$

la base du groupe $\text{Null}(\mathcal{M}_T)$. D'après le corollaire 2.3.14, on sait que $k = \text{ocomp}(T)$. D'où l'observation 1.7.10, entraîne que

$$Z(\mathbf{P}(Q_T)) = \mathbb{k}[(U^{\mathbf{m}_1^T})^{\pm 1}, \dots, (U^{\mathbf{m}_k^T})^{\pm 1}]. \quad (2.13)$$

C'est l'anneau des polynômes de Laurent à variables $(U^{\mathbf{m}_1^T})^{\pm 1}, \dots, (U^{\mathbf{m}_k^T})^{\pm 1}$, il est donc isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{k}[\mathbb{Z}^{\text{ocomp}(T)}]$. D'après, le théorème 2.3.6, on a :

Théorème 2.3.15. *Considérons $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ et soient*

$$\mathcal{SP} = \{(T, \mathfrak{p}) \mid T \text{ est ensemble admissible, } \mathfrak{p} \in \text{Spect}(\mathbb{k}[\mathbb{Z}^{\text{ocomp}(T)}])\}$$

et

$$\mathcal{P} = \{(T, \mathfrak{p}) \mid T \text{ est un ensemble admissible, } \mathfrak{p} \in \text{Max}(\mathbb{k}[\mathbb{Z}^{\text{ocomp}(T)}])\}.$$

Si q n'est pas racine de l'unité. Alors l'application $(T, \mathfrak{p}) \mapsto \Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}^e)$ définit une bijection entre \mathcal{SP} et le spectre premier $\text{Spect}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n}))$ dont la restriction à \mathcal{P} est aussi une bijection dans le spectre primitif $\text{Prim}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n}))$.

Remarque 2.3.16. Soit T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$. D'après les propositions 2.3.13, 1.7.8; si T est connexe de longueur impaire, i.e. $\text{ocomp}(T) = 0$, alors $\mathbf{P}(Q_T)$ est une algèbre simple si et seulement si $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})) = \{T\}$.

Dans le reste de cette sous-section on suppose que \mathbb{k} est algébriquement clos. Notre objectif sera de donner une procédure pour calculer les idéaux primitifs de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$, on utilise les systèmes quantiques définis dans 2.3.11. Une approche a été réalisée dans [65], mais de notre point de vue elle n'est pas de tout convaincante, voir la remarque 2.3.18.

Les idéaux maximaux de $Z(\mathbf{P}(Q_T))$ sont tous de la forme

$$\mathfrak{p}(\lambda) = \langle U^{\mathbf{m}_1^T} - \lambda_1, \dots, U^{\mathbf{m}_k^T} - \lambda_k \rangle$$

où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{k}^*)^{\text{ocomp}(T)}$. D'après le théorème 2.3.6 les idéaux primitifs de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ sont de la forme $\Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}(\boldsymbol{\lambda})^e)$, où T parcourt les ensembles admissibles de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

Pour $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_t) \in \mathbb{Z}^t$ on note

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^+ &= \frac{1}{2}(m_1 + |m_1|, \dots, m_t + |m_t|) \\ \text{et} \\ \mathbf{m}^- &= \frac{1}{2}(m_1 - |m_1|, \dots, m_t - |m_t|) \end{aligned}$$

où $|m|$ est la valeur absolue de $m \in \mathbb{Z}$. Alors l'image inverse de $\mathfrak{p}(\boldsymbol{\lambda})$ dans A_T est

$$\langle U^{\mathbf{m}_1^{T+}} - \lambda_1 U^{-\mathbf{m}_1^{T-}}, \dots, U^{\mathbf{m}_k^{T+}} - \lambda_k U^{-\mathbf{m}_k^{T-}} \rangle \quad (2.14)$$

Pour tout $s = 1, \dots, k$, soit $Y_{\mathbf{m}_s^T}(\lambda_s)$ un élément de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ tel que

$$\Psi_T(Y_{\mathbf{m}_s^T}(\lambda_s) + \langle T \rangle) = U^{\mathbf{m}_s^{T+}} - \lambda_s U^{-\mathbf{m}_s^{T-}}.$$

Alors

$$\Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}(\boldsymbol{\lambda})^e) = \langle T, Y_{\mathbf{m}_1^T}(\lambda_1), \dots, Y_{\mathbf{m}_k^T}(\lambda_k) \rangle$$

Ce qui donne une description de $\text{Prim}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$ très claire que celle donné dans [65, Theorem 7.1].

Corollaire 2.3.17. *Les idéaux primitifs de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$, où q n'est pas racine de l'unité, sont les éléments maximaux de chaque stratum $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$, où T étant un ensemble admissible. Si \mathbb{k} est algébriquement clos, ils sont donc de la forme*

$$\langle T, Y_{\mathbf{m}_1^T}(\lambda_1), \dots, Y_{\mathbf{m}_k^T}(\lambda_k) \rangle$$

où $k = \text{ocomp}(T)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{k}^*)^k$.

Remarque 2.3.18. 1) Dans le cas où T est connexe, les éléments $Y_{\mathbf{m}_1^T}(\lambda_1)$ sont les $a - \lambda_1 b$ de [65, Definition 4.2.(3)]. Mais, si T n'est pas connexe, alors les éléments $Y_{\mathbf{m}_s^T}(\lambda_s)$ sont différent des éléments $Y_{T_s}(\lambda_s)$ définis dans [65, page 542], comme le montre le cas de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times 3})$ avec $T = \{y_1, \Omega_1, \Omega_3\}$, (où les $\Omega_i = z_i$ dans notre cas).

2) Soit T un admissible connexe. Alors si T est de longueur pair $\text{Spect}_T(R) = \{\langle T \rangle\}$, et si T est de longueur impaire $\text{Spect}_T(R) = \{\langle T \rangle \subsetneq \langle T, Y_{\mathbf{m}_1^T}(\lambda) \rangle\}$, où \mathbf{m}_1^T étant la base de $\text{Null}(\mathcal{M}_T)$.

Exemple 2.3.19. On donne le spectre premier et primitif de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2})$, où q n'est pas racine de l'unité et \mathbb{k} algébriquement clos. Observons que dans ce cas tous les admissibles sont connexes, alors les idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ sont tous de la forme citée dans la remarque 2.3.18.2). Le treillis des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ est désigné dans la figure 1. Les idéaux primitifs engendrés par un ensemble A sont notés par $\langle\langle A \rangle\rangle$; les idéaux premiers mais non primitifs sont notés par $\langle A \rangle$. Une ligne connectant deux premiers signifie l'inclusion. Quand deux idéaux sont dans le même stratum on les connecte par une ligne ondulante. Finalement, α est un scalaire non-nul.

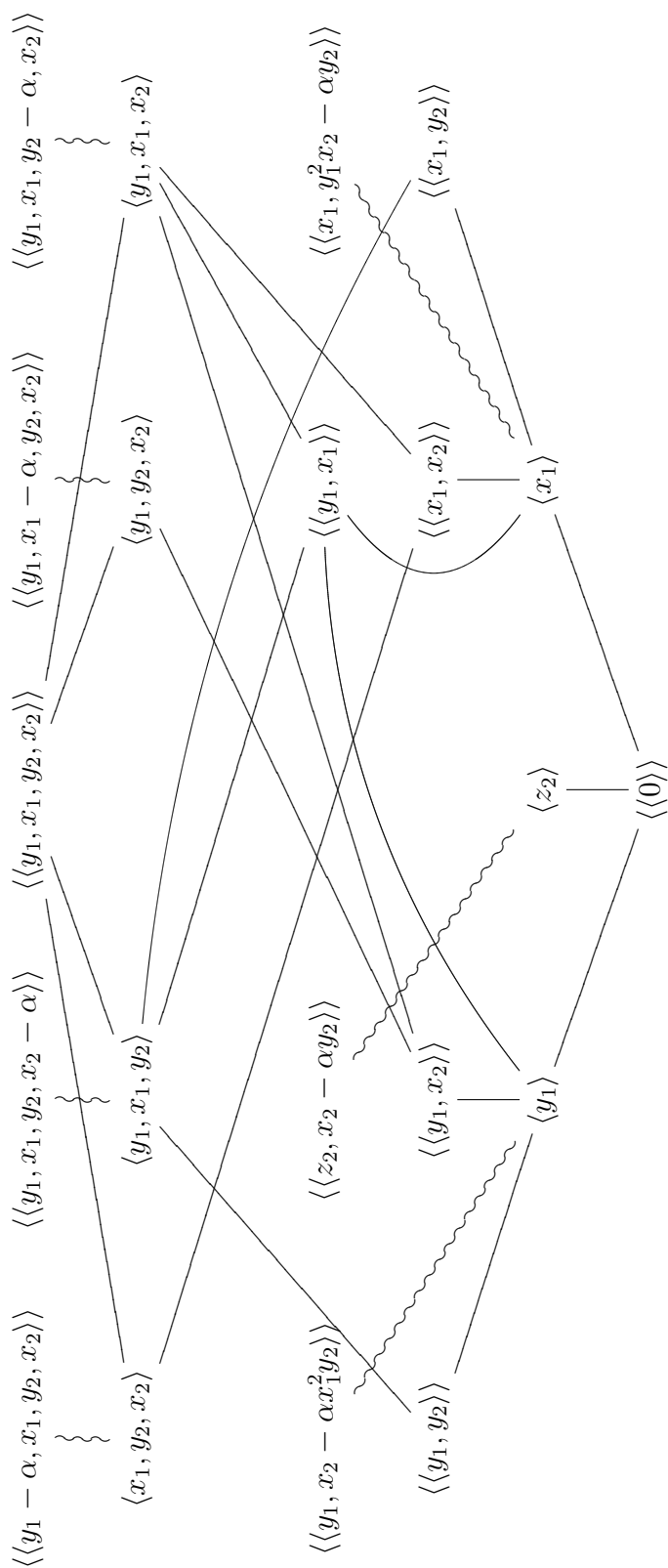


Fig.1 le spectre premier de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}_{\mathbb{k}^{2 \times 2}})$ (\mathbb{k} est algébriquement clos, $\alpha \in \mathbb{k}^*$).

2.3.3 Les idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$.

La \mathbb{k} -algèbre $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$ est obtenu de $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$, en posant

$$C = (1, \dots, 1, q^{-2}, q, 0), \quad \lambda_{ji} = q^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Dans tout cette sous-section on notera $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$ par R . Les relation qui définissent R sont

$$\begin{aligned} y_j y_i &= q^{-1} y_i y_j, & y_j x_i &= q^{-1} x_i y_j \quad (j > i) \\ x_j x_i &= q x_i x_j, & x_j y_i &= q y_i x_j \quad (j > i) \\ x_i y_i &= y_i x_i + (1 - q^2) \sum_{l=1}^{i-1} q^{l-i} y_l x_l \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les éléments normaux sont $z_i = q^{-2} x_i y_i - y_i x_i, i = 1, \dots, n, z_0 = 0$ avec les relations

$$\begin{aligned} z_j y_i &= y_i z_j, & z_j x_i &= x_i z_j \quad (i \leq j) \\ z_j y_i &= q^2 y_i z_j, & z_j x_i &= q^{-2} x_i z_j \quad (i > j) \\ z_j z_i &= z_i z_j & & \text{(pour tout } i, j) \\ x_i y_i &= y_i x_i + q z_{i-1} & & (i = 1, \dots, n), \\ z_i &= (q^{-2} - 1) y_i x_i + q^{-1} z_{i-1} & & (i = 1, \dots, n), \quad z_0 = 0 \end{aligned}$$

Finalement la matrice Q_n est la suivante

$$\begin{array}{c} Y_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ \vdots \\ Y_n \\ X_n \end{array} \begin{pmatrix} Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & \cdots & Y_n & X_n \\ 1 & 1 & q & q^{-1} & \cdots & q & q^{-1} \\ 1 & 1 & q & q^{-1} & \cdots & q & q^{-1} \\ q^{-1} & q^{-1} & 1 & 1 & \cdots & q & q^{-1} \\ q & q & 1 & 1 & \cdots & q & q^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q^{-1} & q^{-1} & q^{-1} & q^{-1} & \cdots & 1 & 1 \\ q & q & q & q & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit T un ensemble admissible de $R_n = R$ et $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$ sa décomposition usuelle, $i_k = \min(\text{ind}(T)), j_k = \max(\text{ind}(T)), k = 1, \dots, r$. On note par A_T^n l'espace quantique attaché à $\frac{R_n}{(T)}$ avec matrice associée $Q_T = (q^{k_{ij}})_{1 \leq i, j \leq t}$, où $k_{ij} \in \{0, 1 - 1\}$. Pour $1 \leq l \leq t$ le symbole V_l désignera la variable X_l pour $l \in \{i_k + 1, \dots, j_k\} \setminus \mathcal{I}_T$, au variable Y_l pour $l \in \{i_k + 1, \dots, j_k\} \setminus \mathcal{J}_T, k = 1, \dots, r$, et l'absence du variable quand $l \in \text{Renv}(T)$. On notera enfin $\mathcal{M}_T^n = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq t} \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$.

Comme dans le cas de l'algèbre $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$, on donne la définition suivante :

Définition 2.3.20. Soit T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$, considérons comme ci-dessus la matrice associée $\mathcal{M}_T^n = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq t}$. Le système quantique associé à T est le système linéaire des équations entières $\mathcal{M}_T^n \mathbf{m} = 0$, où $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^t$.

On note par $\text{Null}(\mathcal{M}_T^n)$ le groupe abélien libre de torsion $\{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^t \mid \mathcal{M}_T^n \mathbf{m} = 0\}$. Ordonnons les variables $Y_1 < X_1 < \dots < Y_n < X_n$ et considérons l'ordre induit sur

l'ensemble des variables qui apparaissent dans A_T^n . On note par $C_n(T)$ le nombre des couples ordonnés (W_i, W_j) et qui satisfait les conditions suivantes :

- (a) Tout W_k represente ou bien le variable X_k ou bien Y_k de A_T^n ,
- (b) aucun variable n'apparaîtra dans deux couples différents,
- (c) $W_i < W_j$ sont consécutives et $i < j$.

On peut voir $C_n(T)$ comme le nombre des sous-matrices consécutives et disjointes de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}$ dans la tridiagonal de \mathcal{M}_T^n , où $\epsilon \in \{1, -1\}$. Par exemple, si $n = 3$ et

$T = \{x_1, z_1\} \cup \{z_3\}$ alors $A_T^3 = \mathbb{k}_{Q_T}[Y_1, Y_2, X_2, Y_3]$, d'où $C_3(T) = 2$; les couples sont donc $(Y_1, Y_2), (X_2, Y_3)$. Si $n = 4$, $T = \{x_1, z_1, y_2, z_2\} \cup \{z_4\}$ alors $A_T^4 = \mathbb{k}_{Q_T}[Y_1, X_2, Y_3, X_3, Y_4]$ et les couples satisfaisant les dites conditions sont $(Y_1, X_2), (X_3, Y_4)$, donc $C_4(T) = 2$.

Remarque 2.3.21. 1) Soit T un ensemble admissible tel que $\text{Renv}(T) = \emptyset$, et $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$ la décomposition connexe de T avec $i_k = \min(\text{ind}(T_k)), j_k = \max(\text{ind}(T_k)), k = 1, \dots, r$. Supposant que $j_r = n - 1$, alors $A_T^n = A_T^m[Y_{i_r}, V_{i_r+1}, \dots, V_{n-2}, V_{n-1}, Y_n, X_n]$, $m = i_r - 1$. Et par suite

$$C_n(T) = \begin{cases} C_{n-1}(T) + 1 & \text{si } (n - i_r - 1) \text{ est impair} \\ C_{n-1}(T) & \text{si } (n - i_r - 1) \text{ est pair.} \end{cases}$$

Si on pose $T' = R_{n-2} \cap T$ alors $C_n(T) = C_{n-2}(T') + 1$.

2) Soit T un ensemble admissible avec $j = \max(\text{ind}(T)) \leq m - 1$, $m < n$. Alors $A_T^n = A_T^{m-1}[Y_m, X_m, \dots, Y_n, X_n]$; d'où $C_n(T) = C_m(T) + (n - m)$.

On écrit $[z] = p$, pour un entier z , où z est égale à $2p$ ou à $2p + 1$.

Lemme 2.3.22. Soit T un ensemble admissible tel que $\text{Renv}(T) = \emptyset$, considérons $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$ la décomposition connexe de T avec $i_k = \min(\text{ind}(T_k)), j_k = \max(\text{ind}(T_k)), k = 1, \dots, r$.

1) Supposons que $j_r < n - 1$ et posons

$$T' = \begin{cases} T_1 \cup \dots \cup T_r \cup \{z_{n-1}\}, & \text{si } j_r < n - 2 \\ T_1 \cup \dots \cup T_{r-1} \cup (T_r \cup \{z_{n-2}, x_{n-1}, z_{n-1}\}), & \text{si } j_r = n - 2. \end{cases}$$

Alors $C_n(T) = C_{n-1}(T') + 1$.

2) Supposons que $j_r = n, r > 1$ et posons $T' = T_1 \cup \dots \cup T_{r-1}$. Alors $C_n(T) = C_m(T') + [n - i_r] + 1$ où $m = i_r - 1$.

Démonstration. 1) Si $j_r < n - 2$ alors

$$\begin{aligned} A_{T'}^n &= A_T^{n-3}[Y_{n-2}, X_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n, X_n] \\ A_T^n &= A_T^{n-3}[Y_{n-2}, X_{n-2}, Y_{n-1}, X_{n-1}, Y_n, X_n]. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $C_n(T') = C_{n-2}(T)+1$ et $C_n(T) = C_{n-2}(T)+2$ d'où $C_n(T) = C_n(T')+1$. Appliquons la remarque 2.3.21.1) à T' à fin d'avoir $C_n(T) = C_{n-1}(T') + 1$.

Si $j_r = n - 2$ alors

$$\begin{aligned} A_{T'}^n &= A_T^{n-3}[V_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n, X_n] \\ A_T^n &= A_T^{n-3}[V_{n-2}, Y_{n-1}, X_{n-1}, Y_n, X_n]. \end{aligned}$$

Ici on distingue deux cas. Le premier étant : $n - i_r - 1$ est pair ; d'après la remarque 2.3.21.1) (avec $n - 1$) appliqué à T , on a $C_{n-1}(T) = C_{n-2}(T) + 1$. Clairement $C_n(T) = C_{n-2}(T) + 2$, d'où $C_n(T) = C_{n-1}(T) + 1$. Observons que $C_n(T') = C_{n-1}(T)$, donc $C_n(T) = C_n(T') + 1$. Appliquons encore la remarque 2.3.21.1) à T' , on a $C_n(T) = C_{n-1}(T') + 1$. Le second cas : $n - i_r - 1$ est impair, alors $C_n(T) = C_{n-2}(T) + 1$, $C_n(T') = C_{n-2}(T) + 1$, et donc $C_n(T) = C_n(T') = C_{n-1}(T') + 1$, en appliquant la remarque 2.3.21.1) à T' .

2) Si $j_r = n$, alors

$$A_T^n = A_T^m[Y_{i_r}, V_{i_r+1}, \dots, V_n], \quad m = i_r - 1.$$

Donc si $n - i_r$ est impair on a $C_n(T) = C_m(T') + (p + 1)$ avec $n - i_r = 2p$. On obtient le même résultat, si $n - i_r = 2p + 1$. \square

Lemme 2.3.23. Soit $A \in \mathbf{M}_{m \times m}(\mathbb{Z})$, $v \in \mathbf{M}_{m \times 1}(\mathbb{Z})$, $v^t \in \mathbf{M}_{1 \times m}(\mathbb{Z})$ le vecteur transposé de v et $\epsilon, \epsilon' \in \{1, -1\}$. Alors

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & \epsilon'v & \epsilon v \\ -\epsilon'v^t & 0 & \epsilon \\ -\epsilon v^t & -\epsilon & 0 \end{pmatrix} = \text{rank}A + 2$$

et

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & v & -v & v \\ -v^t & 0 & 0 & 1 \\ v^t & 0 & 0 & 1 \\ -v^t & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix} + 2$$

Démonstration. On calcule les rangs on utilisant les mineurs et des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. \square

Proposition 2.3.24. Soit T un ensemble admissible de R et $\mathcal{M}_T^n \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$ la matrice associée. Alors $\text{rank}\mathcal{M}_T^n = 2 \times C_n(T)$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Les cas $n = 1, 2$ sont évidents. Supposons le résultat vrai pour tout ensemble admissible de $R_m, m < n$. S'il existe $i \in \text{Renv}(T)$, alors on considère T' un sous-ensemble admissible de $\wp_n \setminus \{y_i, x_i\}$ obtenu en déplaçant les y_i, x_i de T . Notons que $\mathcal{M}_T^n = \mathcal{M}_{T'}^{n-1}$ alors $C_n(T) = C_{n-1}(T')$. Le résultat dans ce cas découle de l'hypothèse de récurrence. Supposons maintenant que $\text{Renv}(T) = \emptyset$, et soit la

décomposition connexe $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$ avec $i_k = \min(\text{ind}(T_k))$, $j_k = \max(\text{ind}(T_k))$, $k = 1, \dots, r$. On va traiter plusieurs cas possibles. La notation v signifie un vecteur colonne dont tous ces composantes sont égaux à 1, et v^t son transposé.

Cas 1 : Si $j_r < n - 1$ alors

$$\mathcal{M}_T^n = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_T^{n-2} & v & -v & v & -v \\ -v^t & 0 & 0 & 1 & -1 \\ v^t & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -v^t & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v^t & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 2.3.23, on a donc

$$\text{rank} \mathcal{M}_T^n = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_T^{n-2} & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix} + 2. \quad (2.16)$$

Posons

$$T' = \begin{cases} T \cup \{z_{n-1}\}, & \text{si } j_r < n - 2 \\ T \cup \{z_{n-2}, x_{n-1}, z_{n-1}\}, & \text{si } j_r = n - 2, \end{cases}$$

et considérons T' comme ensemble admissible de R_{n-1} , on a donc

$$\mathcal{M}_{T'}^{n-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_T^{n-2} & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence $\text{rank} \mathcal{M}_{T'}^{n-1} = 2 \times C_{n-1}(T')$. En utilisant le lemme 2.3.22.1) et l'équation (2.16) on a $\text{rank} \mathcal{M}_T^n = 2 \times C_n(T)$.

Cas 2 : Si $j_r = n - 1$ alors

$$\mathcal{M}_T^n = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{n-2} & \epsilon v & v & -v \\ -\epsilon v^t & 0 & 1 & -1 \\ -v^t & -1 & 0 & 0 \\ v^t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\epsilon \in \{1, -1\}$ et $T' = T \cap R_{n-2}$. Alors le lemme 2.3.23 implique que

$$\text{rank} \mathcal{M}_T^n = \text{rank} \mathcal{M}_{T'}^{n-2} + 2. \quad (2.17)$$

Par hypothèse de récurrence on a $\text{rank} \mathcal{M}_{T'}^{n-2} = 2 \times C_{n-2}(T')$. D'où $\text{rank} \mathcal{M}_T^n = 2 \times C_n(T)$, d'après la remarque 2.3.21.1) et l'équation (2.17).

Cas 3 : Si $j_r = n$ posons $T' = T_1 \cup \dots \cup T_{r-1}$, $m = i_r - 1$, alors

$$\mathcal{M}_T^n = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^m & v & \epsilon_{i_r+1}v & \cdots & \epsilon_{n-1}v & \epsilon_n v \\ -v^t & 0 & \epsilon_{i_r+1} & \cdots & \epsilon_{n-1} & \epsilon_n \\ -\epsilon_{i_r+1}v^t & -\epsilon_{i_r+1} & 0 & \cdots & \epsilon_{n-1} & \epsilon_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\epsilon_{n-1}v^t & -\epsilon_{n-1} & -\epsilon_{n-1} & \cdots & 0 & \epsilon_n \\ -\epsilon_n v^t & -\epsilon_n & -\epsilon_n & \cdots & -\epsilon_n & 0 \end{pmatrix},$$

où $\epsilon_k \in \{1, -1\}$, $k = i_r + 1, \dots, n$. Appliquons le lemme 2.3.23 plusieurs fois, on obtient

$$\text{rank} \mathcal{M}_T^n = \begin{cases} \text{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^m & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix} + (n - i_r) & \text{si } (n - i_r) \text{ est pair} \\ \text{rank} \mathcal{M}_{T'}^m + (n - i_r + 1) & \text{si } (n - i_r) \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors on a

$$\text{rank} \mathcal{M}_T^n = \begin{cases} \text{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{m-1} & v & -v & v \\ -v^t & 0 & 0 & 1 \\ v^t & 0 & 0 & 1 \\ -v^t & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + (n - i_r) & \text{si } n - i_r \text{ est pair} \\ \text{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{m-1} & v & -v \\ -v^t & 0 & 0 \\ v^t & 0 & 0 \end{pmatrix} + (n - i_r + 1) & \text{si } n - i_r \text{ est impair.} \end{cases}$$

On applique encore le lemme 2.3.23 on trouve :

$$\text{rank} \mathcal{M}_T^n = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{m-1} & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix} + 2(p + 1), \quad (2.18)$$

où $p = [n - i_r]$. Posons

$$T'' = \begin{cases} T' \cup \{z_m\} & \text{si } j_{r-1} < m - 1 \\ T_1 \cup \dots \cup T_{r-2} \cup (T_{r-1} \cup \{z_{m-1}, x_m, z_m\}) & \text{si } j_{r-1} = m - 1, \end{cases}$$

considéré comme ensemble admissible de R_m , la matrice associée à T'' est de la forme :

$$\mathcal{M}_{T''}^m = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{T'}^{m-1} & v \\ -v^t & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a $\text{rank} \mathcal{M}_{T''}^m = 2 \times C_m(T'')$. Si on applique maintenant le lemme 2.3.22.1) à T'' avec $n = m + 1$, on aura $C_{m+1}(T'') = C_m(T'') + 1$; d'où

$$\text{rank} \mathcal{M}_{T''}^m = 2(C_{m+1}(T'') - 1). \quad (2.19)$$

D'après le lemme 2.3.22.2) on a $C_n(T) = C_m(T') + (p+1)$, et d'après la remarque 2.3.21.2) on a $C_{m+1}(T') = C_m(T') + 1$, parce que $j_{r-1} < m$. Cela entraîne donc que $C_n(T) = C_{m+1}(T') - 1 + (p+1)$. Combinant cette dernière équation avec celle de (2.18) et (2.19), on obtient $\text{rank} \mathcal{M}_T^n = 2 \times C_n(T)$. \square

Corollaire 2.3.25. *Soit T un ensemble admissible de R et $\mathcal{M}_T^n \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$ la matrice associée. Alors le rang du groupe abélien libre $\text{Null}(\mathcal{M}_T^n)$ est égale à $N_n(T) = t - 2 \times C_n(T)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 2.3.24. \square

Soit T un ensemble admissible de R et $\mathcal{M}_T^n \in \mathbf{M}_{t \times t}(\mathbb{Z})$ la matrice associée et soit

$$\{U^\alpha = U_1^{\alpha_1} \cdots U_t^{\alpha_t} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathbb{Z}^t\}$$

la \mathbb{k} -base de $\mathbf{P}(Q_T)$, où les U_l sont des monômes de A_T^n . Soit

$$\{\mathbf{m}_1^T, \dots, \mathbf{m}_k^T\}$$

une base de $\text{Null}(\mathcal{M}_T^n)$. D'après le corollaire 2.3.25, on a $k = N_n(T)$. On utilise le lemme 1.7.9, on aura

$$Z(\mathbf{P}(Q_T)) = \mathbb{k}[(U^{\mathbf{m}_1^T})^{\pm 1}, \dots, (U^{\mathbf{m}_k^T})^{\pm 1}]$$

C'est l'anneau des polynômes de Laurent à variables $(U^{\mathbf{m}_1^T})^{\pm 1}, \dots, (U^{\mathbf{m}_k^T})^{\pm 1}$; d'où il est isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{k}[\mathbb{Z}^{N_n(T)}]$.

Corollaire 2.3.26. *Considère $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n})$ avec q est non racine de l'unité. Soit*

$$\mathcal{SP} = \{(T, \mathfrak{p}) \mid T \text{ est un ensemble admissible, } \mathfrak{p} \in \text{Spect}(\mathbb{k}[\mathbb{Z}^{N_n(T)}])\}$$

et

$$\mathcal{P} = \{(T, \mathfrak{p}) \mid T \text{ est un ensemble admissible, } \mathfrak{p} \in \text{Max}(\mathbb{k}[\mathbb{Z}^{N_n(T)}])\}.$$

Alors l'application $(T, \mathfrak{p}) \mapsto \Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}^e)$ définit une bijection entre \mathcal{SP} et $\text{Spect}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n}))$ dont la restriction à \mathcal{P} est une bijection sur $\text{Prim}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n}))$.

Démonstration. Appliquons le théorème 2.3.6 et le corollaire 2.3.25. \square

Dans le rest de cette sous-section, on suppose que \mathbb{k} est algébriquement clos, afin de décrire le spectre primitif de R comme dans 2.3.2. Soit T un ensemble admissible et $\{\mathbf{m}_1^T, \dots, \mathbf{m}_k^T\}, k = N_n(T)$ la base de $\text{Null}(\mathcal{M}_T^n)$. Il est bien connu que, dans ce cas, les idéaux maximaux de $Z(\mathbf{P}(Q_T))$ sont tous de la forme

$$\mathfrak{p}(\lambda) = \langle U^{\mathbf{m}_1^T} - \lambda_1, \dots, U^{\mathbf{m}_k^T} - \lambda_k \rangle,$$

où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{k}^\times)^k$.

D'après le corollaire 2.3.26, les idéaux primitifs de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$ sont de la forme $\Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}(\boldsymbol{\lambda})^e)$, où T parcourt l'ensemble de tous les ensembles admissibles. Comme dans 2.3.2, on va donner une procédure pour les calculer à partir des solutions des systèmes quantiques définis dans 2.3.20.

L'image inverse de $\mathfrak{p}(\boldsymbol{\lambda})$ à A_T est

$$\langle U^{\mathbf{m}_1^{T+}} - \lambda_1 U^{-\mathbf{m}_1^{T-}}, \dots, U^{\mathbf{m}_k^{T+}} - \lambda_k U^{-\mathbf{m}_k^{T-}} \rangle. \quad (2.20)$$

(voir 2.3.2 pour les symboles \mathbf{m}_i^{T+}). Pour tout $s = 1, \dots, k$, soit $Y_{\mathbf{m}_s^T}(\lambda_s)$ un élément de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$ tel que

$$\Psi_T(Y_{\mathbf{m}_s^T}(\lambda_s) + \langle T \rangle) = U^{\mathbf{m}_s^{T+}} - \lambda_s U^{-\mathbf{m}_s^{T-}}.$$

Alors

$$\Phi_T^{-1}(\mathfrak{p}(\boldsymbol{\lambda})^e) = \langle T, Y_{\mathbf{m}_1^T}(\lambda_1), \dots, Y_{\mathbf{m}_k^T}(\lambda_k) \rangle$$

Ce qui donne une description de $\text{Prim}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n}))$.

Corollaire 2.3.27. *Les idéaux primitifs de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n})$, où q n'est pas racine de l'unité, sont les éléments maximaux de chaque stratum $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n}))$, où T est un ensemble admissible. Si \mathbb{k} est algébriquement clos, alors ils sont de la forme :*

$$\langle T, Y_{\mathbf{m}_1^T}(\lambda_1), \dots, Y_{\mathbf{m}_k^T}(\lambda_k) \rangle.$$

où $k = N_n(T)$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{k}^\times)^k$.

Exemple 2.3.28. Dans cet exemple on va calculer le spectre premier et primitif de l'algèbre $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$, où $q \in \mathbb{k}^\times$ n'est pas racine de l'unité et \mathbb{k} est algébriquement clos. Chacun des 14 strata peut être explicitement décrit ; pour illustration, on calcule ici deux. Premièrement, on considère le stratum correspondant aux ensembles admissibles \emptyset et $\{z_1, y_1, x_1\}$. On sait que $A_\emptyset = \mathbb{k}_{Q_2}[Y_1, X_1, Y_2, X_2]$; résolvons les systèmes quantiques, nous trouvons la base de $\text{Null}(\mathcal{M}_\emptyset)$ qui est $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. D'où

$$Z(\mathbf{P}(Q_2)) = \mathbb{k}[(Y_1^{-1}X_1)^{\pm 1}, (Y_2X_2)^{\pm 1}]$$

et alors les idéaux maximaux correspondant au \emptyset -stratum sont $\langle z_2 - \gamma, x_1 - \alpha y_1 \rangle$, où $\alpha, \gamma \in \mathbb{k}^\times$. Notons par \mathcal{I} l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$ qui sont l'image inverse par Φ_\emptyset d'un idéal premier mais non maximal de $\mathbb{k}[(Y_1^{-1}X_1)^{\pm 1}, (Y_2X_2)^{\pm 1}]$. Alors

$$\text{Spect}_\emptyset(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})) = \{\langle 0 \rangle\} \cup \{I \mid I \in \mathcal{I}\} \cup \{\langle z_2 - \gamma, x_1 - \alpha y_1 \rangle\}.$$

De même, pour $T = \{z_1, y_1, x_1\}$, on a

$$\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})) = \{\langle y_1, x_1 \rangle\} \cup \{J \mid J \in \mathcal{J}\} \cup \{\langle y_1, x_1, y_2 - \gamma, x_2 - \alpha \rangle\},$$

où \mathcal{J} l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$ contenant strictement à $\langle y_1, x_1 \rangle$ et qui sont l'image inverse par Φ_T des idéaux premiers non-nuls mais non maximaux de $Z(\mathbf{P}(Q_T)) = \mathbb{k}[y_2^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$ et $\alpha, \gamma \in \mathbb{k}^\times$. Pour n'importe quel autre ensemble admissible T , l'algèbre $Z(\mathbf{P}(Q_T))$ est à un seul variable, les calculs sont donc évidents. Le treillis des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$ est désigné dans la figure 2. Les idéaux primitifs engendrés par un ensemble A sont notés par $\langle\langle A \rangle\rangle$; les idéaux premiers mais non primitifs sont notés par $\langle A \rangle$. Une ligne connectant deux premiers signifie l'inclusion. Quand ces deux idéaux sont dans le même stratum on les connectent par une ligne ondulante.

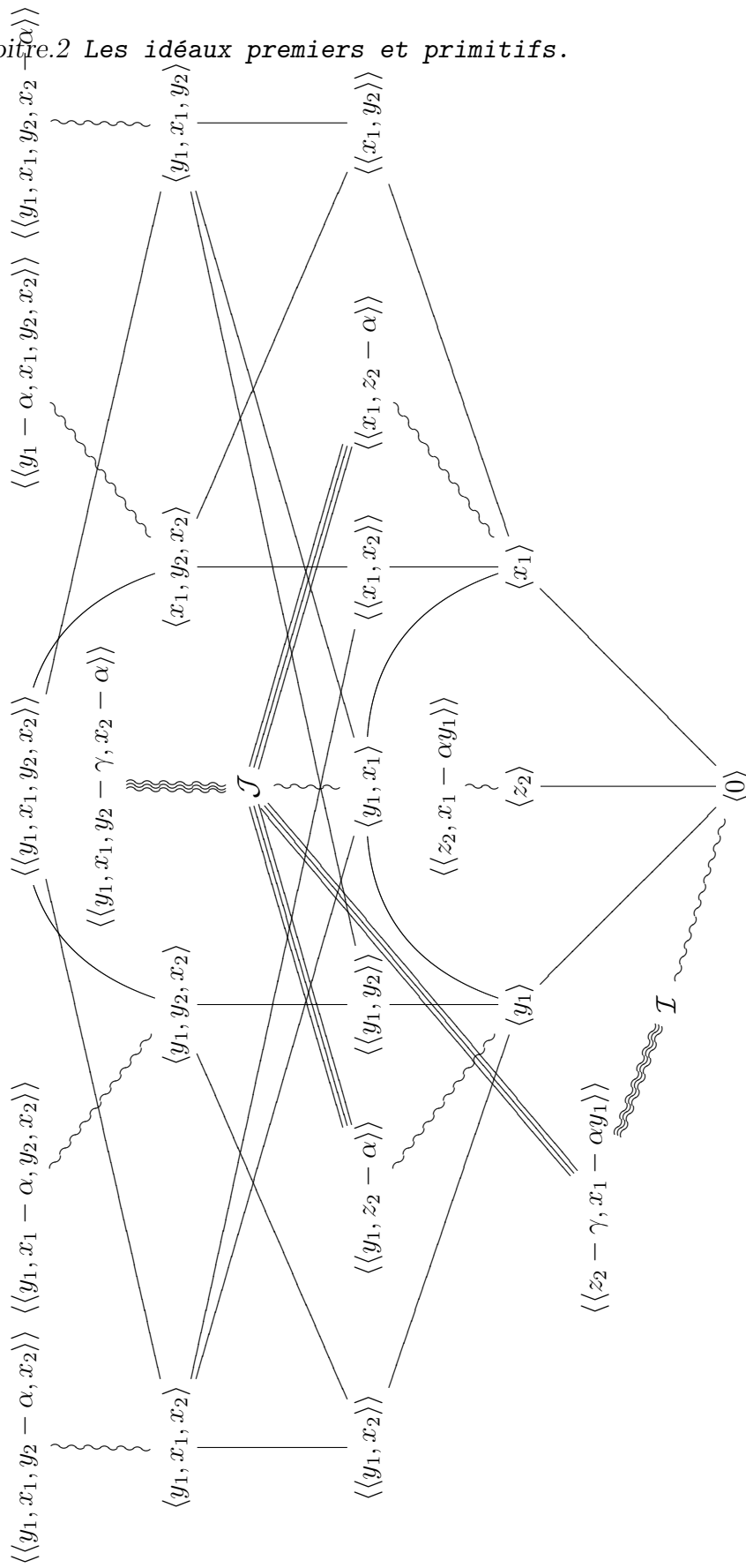


Fig.2 Le spectre premier de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{alk}^{2 \times 2})$ (\mathbb{k} est algébriquement clos, $\alpha, \gamma \in \mathbb{k}^\times$).

Suivant [66, Exemple 5], l'anneau des coordonnées de l'espace quantique Euclidien $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n+1})$, où q a une racine carrée dans \mathbb{k} (i.e $q^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{k}$), est la \mathbb{k} -algèbre engendrée par $(2n+1)$ variables $\omega, y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} y_j y_i &= q^{-1} y_i y_j, & y_j x_i &= q^{-1} x_i y_j & (j > i) \\ x_j x_i &= q x_i x_j, & x_j y_i &= q y_i x_j & (j > i) \\ y_i \omega &= q^{-1} \omega y_i, & x_i \omega &= q \omega x_i & (\text{pour tout } i) \\ x_i y_i &= y_i x_i + (1 - q^2) \sum_{l=1}^{i-1} q^{l-i} y_l x_l + q^{1-i} (q^{-1/2} - q^{1/2}) \omega^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Cette \mathbb{k} -algèbre est une extension de Ore itérée

$$\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n+1}) = \mathbb{k}[\omega][y_1; \alpha_1][x_1; \beta_1, \delta_1] \cdots [y_n; \alpha_n][x_n; \beta_n, \delta_n],$$

où α_i, β_i sont des automorphismes d'algèbres et δ_i sont des β_i -dérivations, provenant des relations (2.21). Remarquons que $\beta_i \delta_i = q^{-2} \delta_i \beta_i$ pour tout $i \geq 1$.

Considérons $R_{n+1}^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ avec $C = (1, \dots, 1, q^{-2}, q, 0)$, $\lambda_{ij} = q^{-1}$ pour $1 \leq i < j \leq n+1$. On a, donc $R_{n+1}^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times (n+1)})$; d'après [66, Exemple 5], il existe un epimorphisme

$$\phi : \mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times (n+1)}) \longrightarrow \mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n+1})$$

défini par $y_1 \mapsto q^{1/2}(1+q)^{-1}\omega$, $x_1 \mapsto \omega$, $y_i \mapsto y_{i-1}$, $x_i \mapsto x_{i-1}$, ($i \geq 2$). Le noyau de ϕ , $\ker(\phi) = \langle y_1 - q^{1/2}(1+q)^{-1}\omega \rangle$. Notons par

$$\text{Spect}_0(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times (n+1)})) = \{P \in \text{Spect}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times (n+1)})) \mid \ker(\phi) \subseteq P\}$$

Clairement, $\text{Spect}(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times n+1}))$ est homeomorphe à $\text{Spect}_0(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times (n+1)}))$.

Exemple 2.3.29. Ici on applique l'homeomorphisme précédent pour calculer le spectre premier de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^3)$ quand q a une racine carrée dans \mathbb{k} et non racine de l'unité. Soit $\beta \in \mathbb{k}^\times$, notons par η_β l'automorphisme de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$ défini par $y_1 \mapsto \beta y_1$, $y_2 \mapsto y_2$ et $x_i \mapsto x_i$, $i = 1, 2$. Considérons l'epimorphisme

$$\phi_\beta : \mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2}) \longrightarrow \mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^3)$$

appliquant $y_2 \mapsto \beta y_1$, $x_2 \mapsto x_1$, $y_1 \mapsto q^{1/2}(1+q)^{-1}\omega$ et $x_1 \mapsto \omega$. Il est clair que $\ker(\phi_\beta \eta_\beta) = \langle x_1 - \beta^{-1} q^{-1/2} (1+q) y_1 \rangle$. Fixons, maintenant, $\alpha \in \mathbb{k}^\times$ et posons $\beta = \alpha^{-1} q^{-1/2} (1+q)$; alors $\ker(\phi_\beta \eta_\beta) = \langle x_1 - \alpha y_1 \rangle$. En utilisant la Figure 2., on trouve le treillis des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^3)$, voir la Figure 3, \mathcal{S} est l'ensemble des idéaux premiers $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^3)$ qui sont des images par $\phi_\beta \eta_\beta$ des éléments de \mathcal{J} , $\alpha, \gamma \in \mathbb{k}^\times$ et $\check{z}_1 = (q^{-2} - 1) \beta y_1 x_1 + q^{-2} (q^{-1/2} - q^{1/2}) \omega^2$.

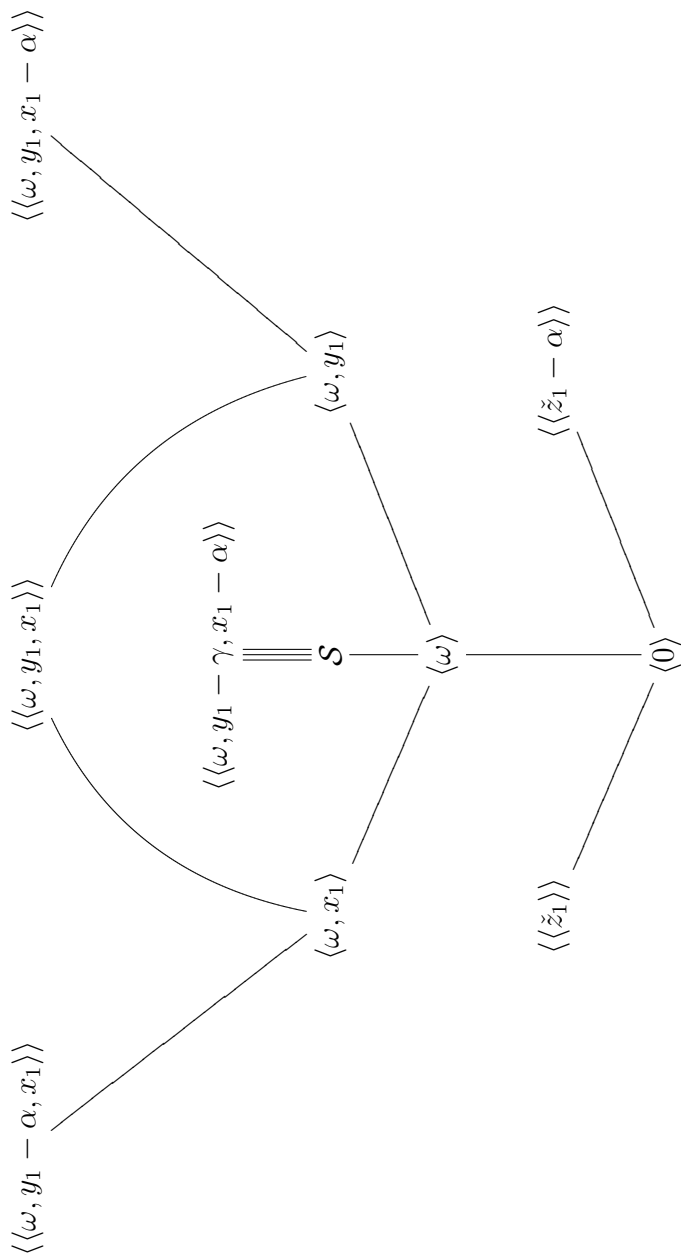


Fig.3 Le spectre premier de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^3)$ (\mathbb{k} est algébriquement clos, $\alpha, \gamma \in \mathbb{k}^\times$).

2.4 Les idéaux premiers et primitifs de H'_q .

Dans cette section on détermine le spectre premier de l'algèbre H'_q . Cette algèbre est une variation de l'algèbre de Heisenberg quantique H_{q^2} associée au l'oscillateur harmonique en mécanique quantique. Suivant [53], soit \mathbf{a} un opérateur agissant sur un espace de Hilbert ayant une base orthogonal $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tels que $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = 1$ (\mathbf{a}^+ est l'opérateur transposé de \mathbf{a}) et $H\psi_n = (n + (1/2))\hbar\omega\psi_n$, où H est le Hamiltonian, $H = \hbar\omega(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + (1/2))$. Les matrices représentantes de \mathbf{a} et de \mathbf{a}^+ agissent sur les ψ_n par

$$\mathbf{a}^+\psi_n = \sqrt{(n+1)}\psi_{n+1}, \quad \mathbf{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}, \quad \mathbf{a}\psi_0 = 0.$$

Une manière de produire un "q-analogue" (pour avoir plus des représentations d'algèbre), est de remplacer chaque entier dans la représentation de \mathbf{a} par un "q-entier" adéquat. L'un des ces "q-entier" est $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1}) = q^{n-1} + q^{n-3} + \dots + q^{-(n-3)} + q^{-(n-1)}$. Quand on remplace n par $[n]_q$ dans la matrice de \mathbf{a} et de \mathbf{a}^+ , tels que

$$\mathbf{a}^+\psi_n = \sqrt{[n+1]_q}\psi_{n+1}, \quad \mathbf{a}\psi_n = \sqrt{[n]_q}\psi_{n-1}, \quad \mathbf{a}\psi_0 = 0,$$

on obtient des matrices \mathbf{a} , \mathbf{a}^+ et N , qui satisfont

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{a}^+ - q\mathbf{a}^+\mathbf{a} &= q^{-N}, \\ N\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^+N &= \mathbf{a}^+, \\ N\mathbf{a} - \mathbf{a}N &= -\mathbf{a}, \end{aligned}$$

où N étant l'opérateur des nombres (i.e. matrice diagonale avec $n_{ii} = i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$). On prenant cette fois $L = q^{-N}$, la matrice diagonale avec $l_{ii} = q^{-i}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on trouve les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{a}^+ - q\mathbf{a}^+\mathbf{a} &= L, \\ L\mathbf{a}^+ &= q^{-1}\mathbf{a}^+L, \\ L\mathbf{a} &= q\mathbf{a}L. \end{aligned} \tag{2.22}$$

L'algèbre H_{q^2} est donc l'algèbre engendrée par les opérateurs \mathbf{a} , \mathbf{a}^+ et L soumises aux relations de l'équation (2.22). Notons que si $q = 1$, H_1 coïncide avec l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Heisenberg Lie $U(\hbar)$.

L'algèbre H'_q est une algèbre engendrée par \mathbf{a} , \mathbf{a}^+ et L soumises aux relations suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{a}^+ - q\mathbf{a}^+\mathbf{a} &= L, \\ L\mathbf{a}^+ &= q\mathbf{a}^+L, \\ L\mathbf{a} &= q^{-1}\mathbf{a}L; \end{aligned} \tag{2.23}$$

celle ci est aussi une q-analogue de $U(\hbar)$.

L'algèbre H'_q est une \mathbb{k} -algèbre de type fini engendrée par x_1, x_2, x_3 (on remplaçant q par q^2 et $x_1 = -q^{-1}L$, $x_2 = \mathbf{a}^+$, $x_3 = \mathbf{a}$ dans les équations (2.23)) avec les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2, \\ x_3x_1 &= q^2x_1x_3, \\ x_2x_1 &= q^{-2}x_1x_2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

H'_{q^2} est une extension de Ore itérée de la forme : $H'_{q^2} = R[x_3; \alpha_2, \delta_2]$ avec $R = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_1]$ où α_1, α_2 sont les automorphismes définis par :

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) &= q^{-2}x_1, & \alpha_2(x_1) &= q^2x_1, \\ & & \alpha_2(x_2) &= q^2x_2, \end{aligned}$$

et δ_2 est la α_2 -dérivation définie par :

$$\delta_2(x_1) = 0, \quad \delta_2(x_2) = -qx_1.$$

On en déduit donc que $\alpha_2\delta_2 = \delta_2\alpha_2$. Si on suppose que la caractéristique de \mathbb{k} est nulle alors, d'après le théorème 1.7.7, tous les idéaux premiers de H'_{q^2} sont complètement premiers.

Dans toute cette sous-section, on suppose que \mathbb{k} est de *caractéristique nulle*.

Proposition 2.4.1. *Soit P un idéal premier de H'_{q^2} avec q non racine de l'unité, dont l'intersection avec $R = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_1]$ est nul, alors P est nul.*

Démonstration. Comme R est intègre, il suffit de montrer que l'ensemble des étendus premiers de l'idéal zéro de R à $H'_{q^2} = R[x_3; \alpha_2, \delta_2]$ est réduit aussi à zéro. d'autre part H'_{q^2} et R satisfassent les conditions du théorème 1.7.17 et spécialement la condition (iii), car q est supposé non racine de l'unité. Il reste donc de prouver que le prolongement de δ_2 au corps des fractions à gauche $\text{fract}(R)$, n'induit pas une α_2 -dérivation intérieure.

Remarquons d'abord que $S = \{q^l x_2^i x_1^j \mid l \in \mathbb{Z}, i, j \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénominateur de R car R est intègre et x_1, x_2 sont normaux dans R , voir chapitre 1. D'autre part S est α_2 -stable. D'après le lemme 1.7.5, S est un ensemble de Ore de H'_{q^2} et on a :

$$H'_{q^2}.S^{-1} = \mathbb{k}[x_1^{\pm 1}][x_2^{\pm 1}; \alpha_1][x_3; \alpha_2, \delta_2],$$

où α_2 (resp, δ_2) est le prolongement de α_2 (resp, de δ_2) à $R.S^{-1} := T$. Remarquons que T est une algèbre de McConnell-Pettit, et puisque q n'est pas racine de l'unité, T est simple d'après la proposition 1.7.8. Montrons que δ_2 n'est pas une α_2 -dérivation intérieure sur T ; cela sera suffisant pour achever la preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in T$ tel que $\delta_2(r) = ar - \alpha_2(r)a$, pour tout $r \in T$. Pour $r = x_1$, on déduit que : $0 = ax_1 - q^2x_1a$. Pour $r = x_2$, il vient : $-qx_1 = ax_2 - q^2x_2a$. Écrivons $a = \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-n}^n \lambda_{ij} x_1^i x_2^j$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{k}$. On a donc

$$\sum_{i,j=-n}^n (q^{-2j} - q^2)\lambda_{ij} x_1^{i+1} x_2^j = ax_1 - q^2x_1a = 0, \quad \text{d'où } \lambda_{ij} = 0 \text{ pour } j \neq -1.$$

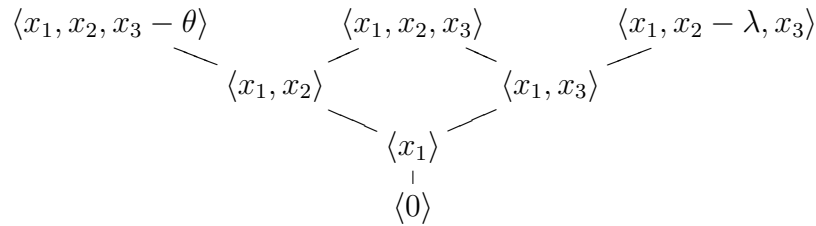
Et par suite $a = \sum_{i=-n}^n \mu_i x_1^i x_2^{-1}$. L'identité $-qx_1 = ax_2 - q^2 x_2 a$, devient alors :

$$\begin{aligned} -qx_1 &= \sum_{i=-n}^n \mu_i x_1^i - q^2 \left(\sum_{i=-n}^n \mu_i x_2 x_1^i x_2^{-1} \right) \\ &= \sum_{i=-n}^n \mu_i x_1^i - q^2 \sum_{i=-n}^n \mu_i q^{-2i} x_1^i \\ &= \sum_{i=-n}^n \mu_i (1 - q^{2(1-i)}) x_1^i. \end{aligned}$$

Donc $\mu_i = 0$ si $i \neq 1$ et $-q = \mu_1(1 - 1) = 0$. On aboutit à une contradiction, ce qui prouve que δ_2 n'est pas intérieure. \square

En appliquant maintenant le théorème 1.7.17 à R , on trouve que les idéaux premiers sont : $\langle 0 \rangle, \langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_1, x_2 - \mu \rangle, \langle x_1 - \lambda, x_2 \rangle$, où $\mu, \lambda \in \mathbb{k}^*$, si \mathbb{k} est algébriquement clos. Considérons P est un idéal premier non nul de H'_2 et si P contient x_2 , il contient x_1 à cause de la relation $x_1 = qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2$. Donc $P \cap R \neq \langle x_2 \rangle$ et $P \cap R \neq \langle x_2, x_1 - \mu \rangle$, avec $\mu \neq 0$. Par suite, d'après la proposition 2.4.1, P contient nécessairement x_1 . Comme x_1 est normalisant, $P/H'_2 x_1$ est un idéal premier de $H'_2/H'_2 x_1$ et $H'_2/H'_2 x_1 = \mathbb{k}[\bar{x}_2][\bar{x}_3; \bar{\alpha}_2]$, où \bar{x}_2, \bar{x}_3 sont les images de x_2, x_3 à $H'_2/H'_2 x_1$ et $\bar{\alpha}_2$ est le prolongement de α_2 à $R/Rx_1 \cong \mathbb{k}[\bar{x}_2]$. D'où $P/H'_2 x_1$ est de la forme : $\langle \bar{0} \rangle, \langle \bar{x}_2 \rangle, \langle \bar{x}_3 \rangle, \langle \bar{x}_2 - \lambda, \bar{x}_3 \rangle, \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle, \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 - \theta \rangle$; avec $\lambda, \theta \in \mathbb{k}^*$. On a donc :

Proposition 2.4.2. *Considérons H'_{q^2} avec q non racine de l'unité et supposons que \mathbb{k} est algébriquement clos de caractéristique nulle. Alors le treillis des idéaux premiers de H'_{q^2} est donné par :*



avec $\lambda, \theta \in \mathbb{k}^*$. En particulier H'_{q^2} satisfait la separation normale.

D'après la proposition 2.4.2 et le lemme 1.3.5, on a

Corollaire 2.4.3. *Considérons H'_{q^2} avec q non racine de l'unité et supposons que \mathbb{k} est algébriquement clos de caractéristique nulle. Alors H'_{q^2} est caténaire et satisfait la condition de second niveau forte.*

Remarque 2.4.4. Observons les équations (2.24), on peut espérer d'avoir une relation entre H'_{q^2} est l'algèbre $R_2^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ par exemple. Plus précisément une injection de H'_{q^2} à $R_2^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$. En réalité, dans le cas racine de l'unité (i.e. les $c_i d$ sont racines de l'unité), cela

existe mais inservible. Pour le voir notons par t_1, t_2, t_3 les générateurs de H'_{q^2} , alors t_1 doit être envoyé à un polynôme de degré 1 de $\mathbb{k}[z_1]$ et dans ce cas le paramètre d doit être égale à q^{-2} et $c_2 = q^2$, d'où $c_2d = 1$.

Chapitre 3

Cliques et localisabilité.

Introduction

K. A. Brown et K. R. Goodearl ont étudié dans [10] le spectre premier de certaines algèbres satisfaisant sept hypothèses. Ils ont montré que l'anneau vérifiant ces hypothèses, satisfait la séparation normale, d'où la condition de second niveau forte. Les liens entre les idéaux premiers d'une algèbre R satisfaisant les sept hypothèses ont été aussi étudiés ; ils ont démontré que la clique de chaque idéal premier P de R coïncide avec la \mathcal{H} -orbite de P , où \mathcal{H} est un groupe abélien de rang fini engendré par des automorphismes d'algèbre de R .

Dans ce chapitre on étudie, premièrement, les liens entre les idéaux premiers de l'algèbre H'_{q^2} , mais avec des méthodes classiques. Deuxièmement, on applique la théorie citée avant, pour calculer les cliques de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Signalons que $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ ne satisfait pas la troisième hypothèse de [10, 1.1], comme l'indique l'exemple 3.2.8. Pour procéder, on va utiliser d'une part la classification du spectre premier $\text{Spect}(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}))$ de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ déterminé par des méthodes effectives dans le chapitre 2, et d'autre part les versions modifiées des résultats de K. A. Brown et K. R. Goodearl [10], effectuées par M. Akhavizadegan dans [1]. La description des cliques des idéaux premiers dans $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ nous permettra d'étudier les ensembles et les idéaux (classiquement) localisables, en utilisant des résultats classiques de [77, 48, 42]. Par des méthodes traditionnelles, on calcule aussi les cliques des idéaux premiers de l'algèbre H'_{q^2} .

3.1 Les cliques des idéaux premiers de H'_{q^2} .

Dans cette section on suppose que \mathbb{k} est de caractéristique nulle, on note par A l'algèbre H'_{q^2} . Rappelons que c'est une \mathbb{k} -algèbre de type fini engendrée par x_1, x_2, x_3 soumis aux relations (2.24).

Lemme 3.1.1. *Les idéaux premiers $\langle x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_1, x_3 \rangle$, $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, vérifient la propriété AR.*

Démonstration. C'est évident pour $\langle x_1 \rangle$, car x_1 est un élément normalisant dans A . Les cas $\langle x_1, x_2 \rangle$ et $\langle x_1, x_3 \rangle$ sont symétriques. Il suffit d'appliquer le critère du théorème 1.3.3 à $\langle x_1, x_2 \rangle$ et $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

Dans le cas où $P = Ax_1 + Ax_2 = x_1A + x_2A$, on a $Px_1 = x_1P$ car si $ax_1 \in Px_1$, $a \in A$, alors comme x_1 est normal $ax_1 = x_1b \in Ax_1^2 + Ax_2x_1 = x_1^2A + x_1Ax_2$ où $b \in A$ et comme A est intègre $b \in x_1A + x_2A = P$. Donc $Px_1 \subseteq x_1P$ et inversement. Montrons que $x_2P + x_1A = Px_2 + x_1A$, c'est à dire la condition (i) du théorème 1.3.3. Par symétrie il suffit de vérifier que $x_2P \subseteq Px_2 + x_1A$, c'est à dire $x_2Ax_2 \subseteq Px_2$, ce qui est clair.

Pour l'idéal $P = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$ on procède de la même façon que dans ([57], lemme 3.1). \square

En utilisant le critère de P.F.Smith cité en ([57], théorème 3.1), on montre comme dans ([57], proposition 3.1) que :

Proposition 3.1.2. *Si $P = Ax_1$, $Ax_1 + Ax_2$, $Ax_1 + Ax_3$, ou $Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$ alors $C(P) = A \setminus P$ est un ensemble de Ore.*

On montre comme dans [57], proposition 3.3 que :

Proposition 3.1.3. *Les cliques des idéaux premiers Ax_1 , $Ax_1 + Ax_2$, $Ax_1 + Ax_3$, $Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$ sont triviales.*

Démonstration. (1) Cas de $P = Ax_1$. Comme A est intègre, $P = Ax_1 \neq P^2 = Ax_1^2$ et P/P^2 est un A/P -module sans torsion à droite et à gauche. Donc $Ax_1 \rightsquigarrow Ax_1$. Si $Q \rightsquigarrow Ax_1$ ou si $Ax_1 \rightsquigarrow Q$ on a $Ax_1 \subseteq Q$ d'après la proposition 1.3.6. D'autre part les propositions 1.2.4, 3.1.2, impliquent que $A \setminus P \subseteq A \setminus Q$; donc $Q \subseteq P$ et $P = Ax_1 = Q$.

(2) Cas de $P = Ax_1 + Ax_2$ ou $Ax_1 + Ax_3$. Il suffit d'examiner le cas $P = Ax_1 + Ax_2$. On a $Ax_1 + Ax_2 \neq (Ax_1 + Ax_2)^2$ car sinon $x_1 \in Ax_1^2 + Ax_1x_2 + Ax_2^2$ et on aurait $x_1 = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, où $a, b, c, \in A$. D'où $cx_2^2 \in Ax_1$ et $c \in Ax_1$. Donc $1 \in Ax_1 + Ax_2$ ce que n'est pas vrai. On peut vérifier facilement, comme dans la preuve de ([57], proposition 3.3(ii)) que $Ax_1 + Ax_2 / (Ax_1 + Ax_2)^2$ est sans torsion à droite et à gauche comme $A / (Ax_1 + Ax_2)$ -module. Supposons par exemple que $r(ux_1 + vx_2) = u_0x_1^2 + v_0x_1x_2 + w_0x_2^2$, avec $u, v, u_0, v_0, w_0 \in A$ et $r \notin P$. Alors

$$(ru + u_0x_1)x_1 = (v_0x_1 + w_0x_2 - rv)x_2.$$

Donc, $rv \in P$ et $v \in P$. Par suite $ru x_1 \in Px_1 + Px_2$, c'est à dire que $ru x_1 = px_1 + p'x_2$, $p, p' \in P$. Donc $p' \in Ax_1$ et $ru \in P$, d'où $u \in P$ et $ux_1 + vx_2 \in P^2$. Par suite $P \rightsquigarrow P$. Si Q est un idéal premier, tel que $P \rightsquigarrow Q$, on a par la proposition 1.3.6 puisque P vérifie la propriété AR, par le lemme 3.1.1, $P \subseteq Q$. D'autre part $A \setminus P \subseteq A \setminus Q$, d'après les propositions 1.2.4 et 3.1.2. D'où $Q \subseteq P$ et par suite $P = Q$.

(3) Le cas $P = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$. Il suffit de montrer en appliquant les mêmes résultats qu'en (1) et (2) que $P \rightsquigarrow P$. On verra que c'est le cas en appliquant la proposition 3.1.7 et le théorème 3.1.8 avec $\mu = \lambda = 0$ que nous démontrerons plus loin (remarque 3.1.9). \square

Corollaire 3.1.4. *Les idéaux premiers de la proposition précédente sont classiquement localisables.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 3.1.3 et des corollaires 2.4.3, 1.2.18. \square

Dans la suite on va déterminer les liens entre les idéaux maximaux de la forme : $x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ où λ est un paramètre de \mathbb{k} . Considérons dans $A = R[x_3; \sigma_3, \delta_3]$, $M = x_1R + x_2R$, et les idéaux premiers suivants : $P = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ et $Q = x_1A + x_2A + (x_3 - \mu)A$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$. Avec ces notations on a :

Lemme 3.1.5. *i) $P \cap Q = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)(x_3 - \mu)A$ si $\lambda \neq \mu$.*

ii) $PQ = M^2A + (x_3 - \lambda)MA + M(x_3 - \mu)A + (x_3 - \lambda)(x_3 - \mu)A$.

Démonstration. Analogue à celle du lemme 3.4 de [57]. \square

Remarque 3.1.6. ([57], remarque 3.4). On déduit du lemme précédent que si $f(x_3)$ est un polynôme de $R[x_3; \sigma_2, \delta_2]$ tel que $Mf(x_3) \subseteq PQ$, alors $(P \cap Q)f(x_3) \subseteq PQ$ si $\lambda \neq \mu$, ceci parce que $MA = AM$. Si de plus P est lié à Q et si $Mf(x_3) \subseteq PQ$, alors $f(x_3)$ appartient à l'annulateur à droite de $(P \cap Q)/PQ$ qui est égal à Q . En effet puisque $P \rightsquigarrow Q$, on a $Q \subseteq l.\text{Ann}((P \cap Q)/PQ)$ et $PQ \neq P \cap Q$. Comme Q est maximal on a : $Q = l.\text{Ann}((P \cap Q)/PQ)$.

On notera, comme dans [57, 3], la surjection canonique $x \rightarrow \bar{x}$ de R sur R/M^2 . En particulier $\overline{M} = M/M^2$ et $\overline{MA} = MA/M^2A$; \overline{M} s'identifie à un sous espace vectoriel de \overline{MA} . On notera $\bar{\delta}, \bar{\sigma}$ les applications de \overline{M} dans \overline{M} définies par :

$$\bar{\delta}(m + M^2) = \delta_2(m) + M^2 \text{ et } \bar{\sigma}(m + M^2) = \sigma_2(m) + M^2,$$

pour tout $m \in M$. Il est clair que \overline{M} est un $\widehat{R} (= R/M = \mathbb{k})$ -espace vectoriel, et que si $\widehat{r} \in \widehat{R}$ et $\overline{m} \in \overline{M}$, on a : $\bar{\delta}(\widehat{r}\overline{m}) = \widehat{r}\delta_2(m) + M^2 = \widehat{r}\bar{\delta}(\overline{m})$. Donc $\bar{\delta}$ est une application \mathbb{k} -linéaire. Il en est de même pour $\bar{\sigma}$ car :

$$\bar{\sigma}(\widehat{r}\overline{m}) = \widehat{r}\sigma_2(m) + M^2 = \widehat{r}\bar{\sigma}(\overline{m}).$$

On considérera la base de \overline{M} sur \widehat{R} donnée par : $\overline{m}_1 = \overline{x}_1, \overline{m}_2 = \overline{x}_2$. Comme dans [57], la matrice U de $\bar{\delta}$ relativement à cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais la matrice V de $\bar{\sigma}$ est :

$$\begin{pmatrix} q^{-2} & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1.7. *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ avec $\lambda \neq \mu$ et $P \rightsquigarrow Q$, alors $\mu = q^{-2}\lambda$ ou bien $\mu = q^2\lambda$.*

Démonstration. On pose $\widehat{m} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Alors $(x_3 - \lambda)\widehat{m} + \widehat{m}(x_3 - \mu)$ est une ligne à deux éléments dont les coordonnées appartiennent à PQ/M^2A et qui est égale à $\widehat{m}(Vx_3 + U - \lambda I_2 + (x_3 - \mu)I_2)$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet, de l'égalité $x_3 m_j = \sigma_2(m_j)x_3 + \delta_2(m_j)$ où $m_j = x_1, x_2$, on déduit que $x_3 \bar{m}_j = \bar{\sigma}(\bar{m}_j)x_3 + \bar{\delta}(\bar{m}_j)$. Donc $x_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)Vx_3 + (\bar{x}_1, \bar{x}_2)U$, d'où si $f(x_3) \in A$, alors

$$\bar{f}(x_3)\widehat{m} = \widehat{m}\bar{f}(Vx_3 + U).$$

En particulier, pour $f(x_3) = x_3 - \lambda$, on a

$$(x_3 - \lambda)\widehat{m} + \widehat{m}(x_3 - \mu) = \widehat{m}(Vx_3 + U - \lambda I_2 + (x_3 - \mu)I_2).$$

On pose $D = Vx_3 + U - \lambda I_2 + (x_3 - \mu)I_2$:

$$D = \begin{pmatrix} q^{-2}x_3 - \lambda + x_3 - \mu & -q \\ 0 & q^2x_3 - \lambda + x_3 - \mu \end{pmatrix}.$$

Alors $\widehat{m}DD^* = \widehat{m}\det(D)$, où D^* est la matrice adjointe de D . Pour $i = 1, 2$ on a $\bar{m}_i \det(D) \in PQ/M^2A$ et donc $\overline{M}\det(D) \subseteq PQ/M^2A$. D'après la remarque 3.1.6, on a $\det(D) \in \overline{Q} = (x_3 - \mu)\mathbb{k}[x_3]$, donc $(q^2x_3 - \lambda)(q^{-2}x_3 - \lambda) \in (x_3 - \mu)\mathbb{k}[x_3]$. D'où le résultat. \square

On démontre comme pour le théorème 3.4.1 de [57] que :

Théorème 3.1.8. *Soient λ, μ quelconques dans \mathbb{k} . Soient $P = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ et $Q = x_1A + x_2A + (x_3 - \mu)A$. Si $\mu = q^{-2}\lambda$, alors $P \rightsquigarrow Q$.*

Démonstration. On adapte la démonstration du théorème 3.4.1 de [57], mais en prenant $I = M^2A + x_1A + x_2(x_3 - q^{-2}\lambda)A + (x_3 - \lambda)A$. Remarquons que $x_2 \notin I$ car si on avait $x_2 \in M^2A + x_1A + x_2(x_3 - q^{-2}\lambda)A + (x_3 - \lambda)A$, on aurait modulo $M^2A + x_1A$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \bar{x}_2(x_3 - q^{-2}\lambda)\bar{a} + (x_3 - \lambda)\bar{a}', \quad a, a' \in A \\ \bar{x}_2 &= q^{-2}(x_3 - \lambda)\bar{x}_2\bar{a} + (x_3 - \lambda)\bar{a}' \\ &= (x_3 - \lambda)(q^{-2}\bar{x}_2\bar{a} + \bar{a}'). \end{aligned}$$

Comme dans [57], l'idéal de $\overline{A} = A/(M^2A + x_1A)$ engendré par \bar{x}_2 est complètement premier, il existerait donc $\bar{b} \in \overline{A}$ tel que : $q^{-2}\bar{x}_2\bar{a} + \bar{a}' = \bar{b}\bar{x}_2$, d'où $(1 - (x_3 - \lambda)\bar{b})\bar{x}_2 = \bar{0}$ dans \overline{A} , c'est à dire $(1 - (x_3 - \lambda)\bar{b})x_2 \in M^2A + x_1A$. Donc modulo M^2A , on aurait $1 - (x_3 - \lambda)\bar{b} \in x_1A$ et $1 \in x_1A + (x_3 - \lambda)A \subseteq P$, d'où la contradiction. On définit une

application $\psi : A \longrightarrow A/I$ telle que $\psi(a) = x_2a + I$, pour tout $a \in A$. Puisque $M^2A \subseteq I$, il est clair que $MA \subseteq \text{Ker}(\psi)$. D'autre part :

$$\psi(x_3 - q^{-2}\lambda) = x_2(x_3 - q^{-2}\lambda) + I = 0 + I.$$

Donc $MA + (x_3 - q^{-2}\lambda)A = Q \subseteq \text{Ker}(\psi)$. Montrons que $\text{Ker}(\psi) = Q$; en effet puisque Q est un idéal maximal à droite, il suffit de montrer que $\text{Ker}(\psi) \neq A$. Or, $\text{Ker}(\psi) = A$ implique que $\psi(1) = x_2 + I$ est nul, ce qui entraîne que $x_2 \in I$, ce qui est faux. Remarquons que $\psi(A) = x_2A + I = P$. Donc ψ induit un monomorphisme $\Psi : A/Q \longrightarrow A/I$ d'image P/I . On a alors la suite exacte des A -modules à droite :

$$0 \rightarrow A/Q \xrightarrow{\Psi} A/I \xrightarrow{\pi} A/P \rightarrow 0,$$

où π est la surjection naturelle. Puisque M annule A/P et A/Q , ($MA \subseteq Q$ et $MA \subseteq P$) mais n'annule pas A/I (car MA n'est pas inclus dans I), cette suite exacte n'est pas scindée. En appliquant ([57], sous-lemme 3.4) on voit que $P \rightsquigarrow Q$. \square

Remarque 3.1.9. 1). La proposition 3.1.7 et le théorème 3.1.8 montrent que la clique de $P(\lambda) = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ est triviale si $\lambda = 0$ ce qui termine la démonstration de la proposition 3.1.3 (3). Mais si $\lambda \neq 0$ on a, en posant $P_n(\lambda) = x_1A + x_2A + (x_3 - q^{2n}\lambda)A$, où $n \in \mathbb{Z}$; la clique de $P(\lambda) = P_0(\lambda)$ est $\{P_n(\lambda)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i.e.

$$\dots \rightsquigarrow P_2(\lambda) \rightsquigarrow P_1(\lambda) \rightsquigarrow P_0(\lambda) \rightsquigarrow P_{-1}(\lambda) \rightsquigarrow P_{-2} \rightsquigarrow \dots$$

2). On peut donner une description parallèle de la clique de $x_1A + (x_2 - \lambda)A + x_3A$ où $\lambda \in \mathbb{k}$. Le lemme 3.3.1 de [57] montre que pour $\lambda \neq 0$ aucun des P_n n'est localisable.

Théorème 3.1.10. *Supposons que \mathbb{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Alors toutes les cliques de A sont classiquement localisables.*

Démonstration. Comme A satisfait la condition de second niveau (corollaire 2.4.3) et que les cliques (qui ont été complètement décrites, d'après la proposition 3.1.3 et la remarque 3.1.9) vérifient la condition d'incomparabilité il suffit de vérifier la condition d'intersection corollaire 1.2.18. Supposons que J soit un idéal à droite contenu dans la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n$ avec les notations de la remarque 3.1.9. Comme chaque P_n contient MA on a $J + MA \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n$ et alors modulo MA on a $\bar{J} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bar{P}_n$. Mais \bar{A} est un anneau de polynôme à une indéterminée donc \bar{J} est principal et il existe nécessairement $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{J} \subseteq \bar{P}_n$. Donc $J \subseteq P_n$. \square

3.2 Les cliques des idéaux premiers de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$.

Rappelons que tout idéal de la forme $\langle T \rangle$, pour T un ensemble admissible, est un idéal complètement premier et polynormal, théorème 2.1.8. Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition prochaine.

Lemme 3.2.1. *Considérons les variables $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ avec les relations (2.1). Alors*

(a) *Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $i = 2, \dots, n$, on a :*

$$\begin{aligned} x_i^r y_i - c_i^r y_i x_i^r &= \lambda d^{-(r-1)}(r)_{c_i d z_{i-1}} x_i^{r-1}, \\ x_i y_i^r - c_i^r y_i^r x_i &= \lambda(r)_{c_i d z_{i-1}} y_i^{r-1}, \end{aligned}$$

où $(r)_k = 1 + k + \dots + k^{r-1}$, pour chaque $k \in \mathbb{k}$. Pour $i = 1$, on a :

$$\begin{aligned} x_1^r y_1 - c_1^r y_1 x_1^r &= d^{-r}(r)_{c_1 d z_0} x_1^{r-1}, \\ x_1 y_1^r - c_1^r y_1^r x_1 &= d^{-1}(r)_{c_1 d z_0} y_1^{r-1}. \end{aligned}$$

(b) *Soit $X^\nu = y_1^{\nu_1} x_1^{\bar{\nu}_1} \dots y_n^{\nu_n} x_n^{\bar{\nu}_n}$, $\nu = (\nu_1, \bar{\nu}_1, \dots, \nu_n, \bar{\nu}_n) \in \mathbb{N}^{2n}$, alors*

$$\begin{aligned} y_i X^\nu &= \lambda_\nu X^\nu y_i + \lambda_{\nu'} X^{\nu'} z_{i-1}, \\ x_i X^\nu &= \lambda'_\nu X^\nu x_i + \lambda'_{\nu'} X^{\nu'} z_{i-1}, \end{aligned}$$

où $\nu' \in \mathbb{N}^{2n}$, $\lambda_\nu, \lambda_{\nu'}, \lambda'_\nu, \lambda'_{\nu'} \in \mathbb{k}^*$; $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. Pour celle de (b) on utilise (a). Une récurrence sur r et lemme 2.1.2, nous prouve (a). \square

On note par R l'algèbre $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$. Maintenant, on va définir l'ordre lexicographique \preceq_{lex} sur l'ensemble des monômes de R , $\{X^\nu = y_1^{\nu_1} x_1^{\bar{\nu}_1} \dots y_n^{\nu_n} x_n^{\bar{\nu}_n} \mid \nu = (\nu_1, \bar{\nu}_1, \dots, \nu_n, \bar{\nu}_n) \in \mathbb{N}^{2n}\}$. Pour tout $1 \leq i \leq 2n$, on considère, comme dans la section 1.8, l'élément $\epsilon_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ de \mathbb{N}^{2n} qui a 0 par tout sauf 1 dans la i -ième composante. L'ordre \prec_{lex} avec $\epsilon_1 \prec_{lex} \dots \prec_{lex} \epsilon_{2n}$, est défini sur \mathbb{N}^{2n} par

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n}) \prec_{lex} (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) \iff \begin{cases} \text{il existe un indice } 1 \leq j \leq 2n \text{ tel que} \\ \sigma_i = \gamma_i \text{ pour } i > j \text{ et } \sigma_j < \gamma_j, \end{cases}$$

c'est l'ordre lexicographique indirecte. Il est clair que \preceq_{lex} induit sur les monômes de R un ordre qu'on note aussi par \preceq_{lex} , de tel façon qu'on a

$$y_1 \prec_{lex} x_1 \prec_{lex} z_1 \prec_{lex} \dots \prec_{lex} z_{n-1} \prec_{lex} y_n \prec_{lex} x_n \prec_{lex} z_n. \quad (3.1)$$

Proposition 3.2.2. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors l'idéal $\langle T \rangle$ vérifie la propriété AR.*

Démonstration. Écrivons $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ avec $t_i \prec_{lex} t_{i+1}$, $i = 1, \dots, r$, d'après (3.1). La suite $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ est clairement polynormal. En plus si $t_i \in \{y_k, x_k\}$, $i > 1$, $k \in \text{ind}(T)$ alors $z_{k-1} \in \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle$. On en déduit, d'après le lemme 3.2.1(b), que pour tout $i, j > 1$ et $\nu \in \mathbb{N}^{2n}$ on a

$$t_i X^\nu t_j \equiv \lambda_i X^\nu t_j t_i [\text{mod} \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle], \text{ pour un certain } \lambda_i \in \mathbb{k}^\times$$

et aussi

$$t_i X^\nu t_j \equiv \lambda_j t_j t_i X^\nu [\text{mod} \langle t_1, \dots, t_{j-1} \rangle], \text{ pour un certain } \lambda_j \in \mathbb{k}^\times.$$

C'est à dire que

$$t_i \langle T \rangle + \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle = \langle T \rangle t_i + \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle, \quad i > 1.$$

Pour $i = 1$, on a $t_1 \in \{x_1, y_1, z_k\}$, $k > 1$ si $z_0 = 0$ ou $t_i \in \{z_k\}$, $k \geq 1$ si $z_0 \neq 0$. Alors, d'après le lemme 2.1.2, $t_1 \langle T \rangle = \langle T \rangle t_1$. En conclusion la proposition découle par application du critère du théorème 1.3.3. \square

Afin de prouver la séparation normal de $R = R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$, on a besoin du matériel technique suivant

3.2.3. Soit T un ensemble admissible de R , on note par \mathcal{X}_T l'image inverse, par Ψ_T (l'isomorphisme de (2.2.8)), de l'ensemble multiplicatif \mathbb{X}_T engendré par tous les variables X_i qui apparaissent dans l'espace quantique A_T associé à la matrice Q_T . Il est clair que c'est un ensemble de Ore de $(R/\langle T \rangle) \overline{\mathcal{Y}_T}^{-1}$, la localisation associé sera noté par R_T

$$R_T = \left((R/\langle T \rangle) \overline{\mathcal{Y}_T}^{-1} \right) \mathcal{X}_T^{-1}.$$

On a donc $R_T \cong \mathbf{P}(Q_T)$, l'algèbre de McConnell-Pettit associé à Q_T . Notons que

$$\Psi_T^{-1}(X_j) = \begin{cases} \overline{x_j}, & \text{si } j-1 \in \text{ind}(T) \\ c_j(c_j d - 1)^{-1} \overline{z_j} (\overline{y_j})^{-1}, & \text{si } j \notin \text{ind}(T). \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour $j = 1$, c'est à dire que si X_1 apparaisse dans B_T , alors

$$\begin{cases} x_1 \notin T, & \text{si } z_0 = 0 \\ 1 \notin \text{ind}(T), & \text{si } z_0 \neq 0. \end{cases}$$

d'où

$$\Psi_T^{-1}(X_1) = \begin{cases} \overline{x_1} \neq 0, & \text{si } z_0 = 0 \\ c_1(c_1 d - 1)^{-1} \overline{z_1} \overline{y_1}^{-1}, & \text{si } z_0 \neq 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Pour un idéal premier P de R avec $\langle T \rangle \subseteq P$, on note $\overline{P} = P/\langle T \rangle$; si \overline{P} peut être étendus à R_T , on note son extension par \overline{P}^e .

Remarque 3.2.4. Soit T un ensemble admissible de R , notons par $\{i_1, \dots, i_l\} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid X_i \in A_T\}$, et par $\{j_1, \dots, j_k\} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{J}_T$. Un élément $z \in R_T$ s'écrit donc sous forme

$$z = \overline{r} \left(\overline{y_{j_1}}^{-n_1} \dots \overline{y_{j_k}}^{-n_k} \right) \Psi_T(X_{i_1})^{-m_1} \dots \Psi_T(X_{i_l})^{-m_l},$$

pour certains $r \in R$, n_1, \dots, n_k ; $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$. Utilisons les equations (3.2) et (3.3), on peut réécrire cet élément sous la forme

$$z = \bar{r}\bar{s}^{-1} (\bar{y}_{j_1}^{-k_1} \dots \bar{y}_{j_m}^{-k_m}),$$

pour certains $r \in R$, y_{j_t} , $t = 1, \dots, m$ tel que $j_t, j_t - 1 \notin \text{ind}(T)$ et un élément normal de $R/\langle T \rangle$, \bar{s} produit des \bar{z}_k, \bar{y}_j (j ou $j - 1 \in \text{ind}(T)$) et des \bar{x}_i (i ou $i - 1 \in \text{ind}(T)$).

Proposition 3.2.5. [29, Proposition 2.3] *Considérons l'algèbre $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ tel que chacun des $c_i d$ n'est pas racine de l'unité. Alors $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ vérifie la séparation normale. En particulier $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ satisfait la condition de second niveau forte.*

Démonstration. Soient $P \subsetneq Q$ deux idéaux premiers emboîtés de $R = R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Supposons que $T = P \cap \wp_n \subsetneq Q \cap \wp_n = T'$; c'est à dire que P et Q appartiennent à différents strata dans la stratification (2.7). Alors, il est trivial qu'il existe un élément non-nul normal modulo P appartenant à Q/P . Supposons, maintenant, que $T = T'$; P et Q sont donc dans le même stratum. Considérons l'algèbre R_T de 3.2.3, d'après le corollaire 1.7.15, R_T est polycentral. Suivant les notations de 3.2.3, il existe donc $z \in \bar{Q}^e$ qu'est un élément non-nul et central modulo \bar{P}^e . Supposons que $z \equiv \bar{r}\bar{s}^{-1} [\text{mod } \bar{P}^e]$, pour un certain $r \in R$ (\bar{r} sera donc un élément de \bar{Q} non nul modulo \bar{P}) et un élément normal $\bar{s} \in R/\langle T \rangle$. Soit donc $a \in R \setminus P$, on a

$$\begin{aligned} z\bar{a} &\equiv \bar{a}z [\text{mod } \bar{P}^e], \\ \bar{r}\bar{a}'\bar{s}^{-1} &\equiv \bar{a}'\bar{r}(\bar{s})^{-1} [\text{mod } \bar{P}^e], \text{ pour un certain } a' \in R, \text{ car } \bar{s} \text{ est supposé normal,} \end{aligned}$$

cela implique que $(\bar{r}\bar{a}' - \bar{a}'\bar{r}) \in \bar{P}^e$ et en suite $(ra' - ar) \in P$. Comme a été pris arbitrairement, $r \in Q \setminus P$ est un élément normal modulo P . Afin d'achever la preuve de la première assertion, il suffit donc de montre que z peut être écrit sous la dite forme. Pour faire, notons d'abord comme dans la remarque 3.2.4, par $\{y_{j_1}, \dots, y_{j_m}\}$ l'ensemble de tous les y_j tel que $j, j - 1 \notin \text{ind}(T)$ qui apparaissent dans l'expression de z modulo \bar{P}^e . On procède par une récurrence sur m . Si $m = 1$, on peut donc écrire, d'après la remarque 3.2.4,

$$z \equiv \bar{r}.\bar{s}^{-1}\bar{y}_{j_1}^{-k_1} [\text{mod } \bar{P}^e], \text{ pour certains } r \in R, \text{ un élément normal } \bar{s} \in R/\langle T \rangle \text{ et } k_1 \in \mathbb{N}^*.$$

Le lemme 3.2.1(a), implique que

$$\bar{x}_{j_1}\bar{y}_{j_1}^{k_1} - c_{j_1}^{k_1}z\bar{y}_{j_1}^{k_1}\bar{x}_{j_1} \equiv \lambda(k_1)_{c_{j_1}d}\bar{z}_{j_1-1}z\bar{y}_{j_1}^{(k_1-1)} [\text{mod } \bar{P}^e],$$

et donc

$$z\bar{y}_{j_1}^{(k_1-1)} \equiv (\lambda(k_1)_{c_{j_1}d})^{-1}\bar{z}_{j_1-1}^{-1}(\bar{x}_{j_1}\bar{r} - c_{j_1}^{k_1}\gamma\bar{r}.\bar{x}_{j_1})\bar{s}^{-1} [\text{mod } \bar{P}^e],$$

où $\gamma \in \mathbb{k}^*$. Ce qui entraîne que z modulo \bar{P}^e peut être écrit sous la forme

$$z \equiv \bar{r}.\bar{s}^{-1}\bar{y}_{j_1}^{-(k_1-1)} [\text{mod } \bar{P}^e], \text{ pour certains } r \in R, \text{ et un élément normal } \bar{s} \in R/\langle T \rangle.$$

On répète le même calcul, mais cette fois avec z modulo \overline{P}^e écrit sous cette nouvelle forme, on aboutit au résultat. Supposons maintenant que $m > 1$, on a donc

$$z \equiv \overline{r} \cdot \overline{s}^{-1} \overline{y}_{j_1}^{-k_1} \cdots \overline{y}_{j_m}^{-k_m} \pmod{\overline{P}^e},$$

pour certains $r \in R$, un élément normal $\overline{s} \in R/\langle T \rangle$ et des entiers positives k_1, \dots, k_m . En appliquant le lemme 3.2.1(a), comme dans le cas $m = 1$, on aura

$$z \overline{y}_{j_m}^{k_m-1} \equiv (\lambda(k_m)_{c_{j_m}d})^{-1} \overline{z}_{j_m-1}^{-1} (\overline{x}_{j_m} \overline{r} - c_{j_m}^{k_m} \gamma \overline{r} \cdot \overline{x}_{j_m}) \overline{s}^{-1} \overline{y}_{j_1}^{-k_1} \cdots \overline{y}_{j_{m-1}}^{-k_{m-1}} \pmod{\overline{P}^e},$$

où $\gamma \in \mathbb{k}^*$. On continue d'éliminer les puissance de y_{j_m} , on arrive à

$$z \equiv \overline{r} \cdot \overline{s}^{-1} \overline{y}_{j_1}^{-k_1} \cdots \overline{y}_{j_{m-1}}^{-k_{m-1}} \pmod{\overline{P}^e},$$

pour un certain $r \in R$ et un élément normal $\overline{s} \in R/\langle T \rangle$. L'hypothèse de récurrence entraîne donc que

$$z \equiv \overline{r} \cdot \overline{s}^{-1} \pmod{\overline{P}^e},$$

pour $r \in R$ et un élément normal $\overline{s} \in R/\langle T \rangle$ adéquates. La seconde assertion de la proposition est une déduction directe du lemme 1.3.5. \square

3.2.1 L'opération du groupe G_T sur $\text{Spect}_T(R)$.

Maintenant on va définir une opération d'un groupe abélien sur chaque stratum $\text{Spect}_T(R)$, où T parcourt l'ensemble des ensembles admissibles de R . Cet groupe est construit d'une manière canonique à partir de la suite normalisante engendrant $\langle T \rangle$, comme dans [10]. Mais comme on va voir (l'exemple 3.2.8), cette opération ne vérifie pas l'hypothèse 3 de [10, p. 2469], par rapport à la stratification du spectre premier de R indiquer dans (2.7).

3.2.6. Notre prochain objectif est de construire simultanément une chaîne strictement croissante des sous-ensembles admissibles de T qui a pour longueur exactement $\text{long}(T)$, et une suite des éléments $\{t_1, \dots, t_{\text{long}(T)}\}$ de T qui forme une suite régulière normalisante et génératrice de l'idéal $\langle T \rangle$. Il est clair que cette chaîne donnera raison à une chaîne maximal des idéaux premiers qui permettra le calcul de $\text{haut}(\langle T \rangle)$. La méthode de construction est basée sur la décomposition en composantes connexes de chaque ensemble admissible et cette construction sera faite après plusieurs étapes :

Fixons un ensemble admissible T de R , $j = \max(\text{ind}(T))$ et $i = \min(\text{ind}(T))$. On considère différents cas.

(a) *Le cas connexe.* Si T est connexe. Considérons un sous-ensemble admissible $\mathcal{T} \subseteq T$, avec $k = \max(\text{ind}(\mathcal{T})) < j$. Supposons que si $k \in \text{Renv}(T)$, alors $k \in \mathcal{T}$. On définit l'ensemble admissible \mathcal{T}^T suivant

$$\mathcal{T}^T = \begin{cases} \mathcal{T} \cup \{x_k\} & \text{si } k \in \text{Renv}(T) \text{ et } x_k \notin \mathcal{T}. \\ \mathcal{T} \cup \{y_{k+1}, z_{k+1}\} & \text{autrement et si } y_{k+1} \in T. \\ \mathcal{T} \cup \{x_{k+1}, z_{k+1}\} & \text{autrement et si } y_{k+1} \notin T. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\text{long}(\mathcal{T}^T) = \text{long}(\mathcal{T}) + 1$ et que $\mathcal{T}^T \subseteq T$.

(b) *Le cas non connexe.* Si T n'est pas connexe, considérons sa décomposition en composantes connexes $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$. Considérons \mathcal{T} un sous-ensemble admissible tel que si $k \in \text{Renv}(T)$, alors $k \in \mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ et que

$$T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} \subseteq \mathcal{T} \subsetneq T_1 \cup \dots \cup T_s, \text{ avec } s > 1, \text{ et } \max(\text{ind}(\mathcal{T})) < \max(\text{ind}(T_s)),$$

on définit

$$\mathcal{T}^T = \begin{cases} (\mathcal{T} \setminus T_1 \cup \dots \cup T_{s-1})^{T_s} \cup T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} & \text{si } T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} \subsetneq \mathcal{T}. \\ T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} \cup \{z_{i_s}\} & \text{si } T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} = \mathcal{T}. \end{cases}$$

où $(\mathcal{T} \setminus T_1 \cup \dots \cup T_{s-1})^{T_s}$ est défini comme dans (a) et $i_s = \min(\text{ind}(T_s))$. On remarque aussi que $\text{long}(\mathcal{T}^T) = \text{long}(\mathcal{T}) + 1$ et que $\mathcal{T}^T \subseteq T$.

Les données d'entrée sont définies comme suit.

Cas où $j > i > 1$, on prend $t_1 = z_i$, $\mathcal{T}_1 = \{t_1\}$.

Cas où $j > i = 1$. Si $z_0 \neq 0$, cela implique que $t_1 = z_1$, $\mathcal{T}_1 = \{t_1\}$. Mais si $z_0 = 0$, on prend

$$t_1 = \begin{cases} y_1 & \text{si } y_1 \in T \\ x_1 & \text{si } y_1 \notin T \end{cases}$$

et $\mathcal{T}_1 = \{t_1, z_1\}$. Dans tous les cas, si $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$ est la décomposition en composantes connexes de T , on prend donc

$$\mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m^T, \text{ pour } m \geq 1 \text{ et } t_{m+1} = \begin{cases} x_{k_m} & \text{si } \mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m \cup \{x_{k_m}\} \\ y_{k_m+1} & \text{si } \mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m \cup \{y_{k_m+1}, z_{k_m+1}\} \\ x_{k_m+1} & \text{si } \mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m \cup \{x_{k_m+1}, z_{k_m+1}\} \\ & \text{où } k_m = \max(\text{ind}(\mathcal{T}_m)); \\ z_{i_s} & \text{si } \mathcal{T}_m = T_1 \cup \dots \cup T_{s-1}, r > s > 1; \end{cases}$$

avec les données d'entrée définies ci-dessus. Alors

$$\mathcal{T}_0 \subsetneq \mathcal{T}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{T}_{\text{long}(T)} = T$$

est une chaîne des ensembles admissibles vérifiant $\langle \mathcal{T}_m \rangle = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, pour tous $m = 1, \dots, l = \text{long}(T)$. En plus chacun des t_m est régulier normal modulo $\langle t_1, \dots, t_{m-1} \rangle$, pour tout $m = 2, \dots, l$, par convention on a pris $\mathcal{T}_0 = \emptyset$, $\langle \mathcal{T}_0 \rangle = 0$.

Une fois retenu les notations et les constructions ci-dessus, on peut observer facilement que les \mathcal{T}_m , $m = 1, \dots, l = \text{long}(T)$ sont effectivement des ensembles admissibles vérifiant $\langle \mathcal{T}_m \rangle = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, et que chacun des t_m est régulier, normal modulo $\langle t_1, \dots, t_{m-1} \rangle$, pour tout $m = 2, \dots, l$, par convention on a pris $\mathcal{T}_0 = \emptyset$, $\langle \mathcal{T}_0 \rangle = 0$.

Lemme 3.2.7. Soient T et $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_m, t_m, 1 \leq m \leq l = \text{long}(T)$ comme dans 3.2.6. Alors, chaque t_m est un élément régulier et h_m^T -normal modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$, pour un certain automorphisme d'algèbre de $R/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$, h_m^T bien déterminé.

Démonstration. Le calcul de h_1^T . Dans tous les cas $t_1 \in \{y_1, x_1, z_1, \dots, z_n\}$ est un élément normal régulier de R , h_1^T est donc calculé à partir des relations (2.1) et le lemme 2.1.2; par exemple si $t_1 = z_j, j = 1, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned} h_1^T : x_i &\longmapsto \begin{cases} dx_i, & i > j, \\ c_i^{-1}x_i, & i \leq j, \end{cases} \\ y_i &\longmapsto \begin{cases} d^{-1}y_i, & i > j \\ c_i y_i, & i \leq j, \end{cases} \end{aligned}$$

Le calcul des h_m^T , pour $m > 1$. On va examiner juste les cas où $t_m \in \{y_j, x_j\}, j \geq 2$. On commence donc par $t_m = y_j$, ici $z_{j-1} \in T$ et il est clair que cet un élément de $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$. On définit donc h_m^T , grâce aux relations (2.1), comme suit

$$\begin{aligned} h_m^T : \bar{x}_i &\longmapsto \begin{cases} \lambda_{ji}^{-1}d\bar{x}_i, & i < j, \\ \lambda_{ij}c_j^{-1}\bar{x}_i, & i > j, \\ c_i^{-1}\bar{x}_i, & i = j \end{cases} \\ \bar{y}_i &\longmapsto \begin{cases} \lambda_{ji}\bar{y}_i, & i < j \\ \lambda_{ij}^{-1}\bar{y}_i, & i > j, \end{cases} \end{aligned}$$

où les relations sont prises modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$, avec $h_m^T(\bar{y}_j) = \bar{y}_j$ et l'image de tout élément de $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$ est nulle. Dans le cas où $t_m = x_j, j \in \mathcal{I}_T, m \geq 2$, on a

$$t_{m-1} = \begin{cases} y_j, & \text{si } j \in \text{Renv}(T) \\ z_{j-1}, & \text{si } j \notin \text{Renv}(T), j-1 \notin \mathcal{J}_T \text{ et } j-1 \notin \mathcal{I}_T, \\ x_{j-1}, & \text{si } j \notin \text{Renv}(T), j-1 \in \mathcal{I}_T, \\ y_{j-1}, & \text{si } j \notin \text{Renv}(T), j-1 \notin \mathcal{I}_T \text{ et } j-1 \in \mathcal{J}_T; \end{cases} \quad (3.4)$$

Concernant la première possibilité dans (3.4) on utilise les relations (2.1), afin d'avoir modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$

$$\begin{aligned} h_m^T : \bar{x}_i &\longmapsto \begin{cases} \lambda_{ji}c_i^{-1}d^{-1}\bar{x}_i, & i < j, \\ \lambda_{ij}^{-1}c_j d\bar{x}_i, & i > j, \end{cases} \\ \bar{y}_i &\longmapsto \begin{cases} \lambda_{ji}^{-1}c_i\bar{y}_i, & i < j \\ \lambda_{ij}d^{-1}\bar{y}_i, & i > j, \end{cases} \end{aligned}$$

avec $h_m^T(\bar{x}_j) = \bar{x}_j$ et tous les éléments de $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$ ont l'image nulle. Dans les trois dernières possibilités de (3.4), h_m^T est défini comme dans la première en ajoutant l'image de \bar{y}_j qui est donnée par $h_m^T(\bar{y}_j) = c_j\bar{y}_j$. \square

D'après la preuve du lemme précédent, on a pour chaque $m = 1, \dots, l = \text{long}(T)$, $\langle T \rangle / \langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$ est h_m^T -stable dans $R / \langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$. On peut considérer $h_m^{T_e}$ l'extension de h_m^T à $R / \langle T \rangle$. On note par G_T le sous-groupe de $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(R / \langle T \rangle)$, engendré par $\{h_1^{T_e}, \dots, h_l^{T_e}\}$. Observons que c'est un groupe abélien et que les $v_i \in \{\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}\}$ (modulo $\langle T \rangle$) sont des g -vecteurs propres, pour tout $g \in G_T$ i.e. $g(v_i) = \gamma_i v_i$, $\gamma_i \in \mathbb{k}^*$.

En général, mais sous les conditions génériques, l'automorphisme $h_m^{T_e}$, pour un $1 \leq m \leq l = \text{long}(T)$, ne proviens pas d'un automorphisme sur l'algèbre R appartenant au tore \mathcal{H} défini dans 2.2.2. Cela est confirmé par l'exemple suivant :

Exemple 3.2.8. (a) Posons $n = 4$ et $z_0 \neq 0$, alors $d = 1$. Ici le tore algébrique est égale à $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^4$ et son action sur $R_4^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ est définie, d'après la remarque 2.2.3 et le lemme 2.1.2, par : Si $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathcal{H}$, on a

$$h(y_i) = h_i y_i, \quad h(x_i) = h_i^{-1} x_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Considérons l'ensemble admissible $T = \{z_1\} \cup \{z_3, x_4, z_4\}$; suivant les constructions de 3.2.6, on a $t_1 = z_1$, $\mathcal{T}_1 = \{z_1\}$, $t_2 = z_3$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \cup \{z_3\}$, $t_3 = x_4$, $\mathcal{T}_3 = T$. On sait donc, d'après la preuve du lemme 3.2.7, que h_3^T est défini par

$$\begin{aligned} h_3^T(\overline{x_i}) &= \lambda_{4i}^{-1} c_i^{-1} \overline{x_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3; \\ h_3^T(\overline{x_4}) &= \overline{x_4} \\ h_3^T(\overline{y_j}) &= \lambda_{4j}^{-1} c_j \overline{y_j}, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3; \\ h_3^T(\overline{y_4}) &= c_4 \overline{y_4}, \end{aligned}$$

modulo $\langle \mathcal{T}_2 \rangle$. Si on suppose donc qu'il existe un élément $h \in \mathcal{H}$ tel que \overline{h} , le prolongement de h à $R_4^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) / \langle \mathcal{T}_2 \rangle$, coïncide avec h_3^T , on aura alors

$$\overline{h}(\overline{z_4}) = h_3^T(\overline{z_4}) = \overline{z_4} = c_4 \overline{z_4}$$

relations modulo l'idéal $\langle \mathcal{T}_2 \rangle$. En suite $c_4 = 1$, ce qui contredit les hypothèse génériques (chacun des $c_i d$ est non racine de l'unité).

(b) Par contre, il est évident que si h_i^T est associé à un $t_i = z_{k_i}$, $k_i \in \text{ind}(T)$, il proviens d'un automorphisme sur R appartenant à \mathcal{H} .

Soit T un ensemble admissible, G_T le groupe abélien associé et $P \in \text{Spect}_T(R)$. Prenant $h \in G_T$ et considérant l'opération suivante :

$$h *_T P = Q, \quad \text{tel que } h \left(\frac{P}{\langle T \rangle} \right) = \frac{Q}{\langle T \rangle}.$$

Lemme 3.2.9. Soit T un ensemble admissible de R et G_T le groupe associé à T . Alors $*_T$ est une opération de G_T sur l'ensemble $\text{Spect}_T(R)$.

Démonstration. Il suffit de voir que $*_T$ est bien défini. Soit donc $P \in \text{Spect}_T(R)$ et $h \in G_T$, on a $\langle T \rangle \subseteq h *_T P = Q \in \text{Spect}(R)$. Posons $Q \cap \wp_n = T'$ et supposons qu'il existe $v_i \in T' \setminus T$, $v_i = x_i, y_i$ ou z_i . D'où $h^{-1}(v_i + \langle T \rangle) = \alpha v_i + \langle T \rangle$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{k}^*$, donc $v_i + \langle T \rangle \in P/\langle T \rangle$ et $v_i \in P \cap \wp_n = T$ ce qui est faux. Alors $T = T'$ et $Q \in \text{Spect}_T(R)$. \square

On note par $\text{Orb}_{G_T}(P)$ la G_T -orbite d'un élément $P \in \text{Spect}_T(R)$.

3.2.2 Cliques et localisabilité.

Proposition 3.2.10. *Soit T un ensemble admissible de R et R_T la localisation de $R/\langle T \rangle$ définie dans 3.2.3. Alors $\text{Spect}(R_T)$ n'a aucun lien non trivial.*

Démonstration. On sait d'après le lemme 3.2.3, que $R_T \cong \mathbf{P}(Q_T)$. Alors, d'après le corollaire 1.7.15, tout idéal de R_T est polycentral i.e engendré par une suite centralisante. La proposition découle donc de 1.3.7. \square

Proposition 3.2.11. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors $\text{Spect}_T(R)$ est lien-fermé. En particulier*

$$\text{clique}(P) \subseteq \text{Spect}_T(R), \text{ pour tout } P \in \text{Spect}_T(R).$$

Démonstration. Soit $P \in \text{Spect}_T(R)$, pour un ensemble admissible T et $Q \in \text{Spect}(R)$ tel que $P \rightsquigarrow Q$ ou $Q \rightsquigarrow P$. On va traiter juste le cas $P \rightsquigarrow Q$, car l'autre est similaire. Puisque, $\langle T \rangle$ vérifie la propriété AR (la proposition 3.2.2), on a d'après la proposition 1.3.6, $\langle T \rangle \subseteq Q$. Posons $Q \cap \wp_n = T'$, par les mêmes arguments on obtient $\langle T' \rangle \subseteq P$. On a donc $\langle T' \rangle \cap \wp_n = T' \subseteq P \cap \wp_n = T$, et que $\langle T \rangle \cap \wp_n = T \subseteq Q \cap \wp_n = T'$, c'est à dire $T = T'$. D'où $Q \in \text{Spect}_T(R)$. \square

Remarque 3.2.12. Soit T un ensemble admissible et $P \in \text{Spect}_T(R)$ tel que $\langle T \rangle \subseteq P$. Alors la clique de $P/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(R/\langle T \rangle)$ est un singleton. En effet, supposons qu'il existe un $Q/\langle T \rangle$ distinct de $P/\langle T \rangle$ tel que $P/\langle T \rangle \rightsquigarrow Q/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(R/\langle T \rangle)$. Comme dans R tout idéal premier est complètement premier, cela implique que $Q \rightsquigarrow P$ dans $\text{Spect}(R)$. D'après la proposition 3.2.11, $Q \in \text{Spect}_T(R)$. En appliquant maintenant, [77, Lemma 2.11], on trouve

$$((P/\langle T \rangle)\overline{\mathcal{Y}}_T^{-1})^e \rightsquigarrow ((Q/\langle T \rangle)\overline{\mathcal{Y}}_T^{-1})^e \text{ dans } \text{Spect}(R_T),$$

où \mathcal{P}^e , pour $\mathcal{P} \in \text{Spect}((R/\langle T \rangle)\overline{\mathcal{Y}}_T^{-1})$, désigne l'idéal premier qui étend \mathcal{P} à R_T . Et par suite, $((P/\langle T \rangle)\overline{\mathcal{Y}}_T^{-1})^e = ((Q/\langle T \rangle)\overline{\mathcal{Y}}_T^{-1})^e$, d'après la proposition 3.2.10 et donc $P = Q$.

Enfin, en appliquant la proposition 1.2.11 sur R_T avec cette fois $\langle T \rangle \subsetneq P$, on peut déduire que l'existence d'un lien vers ou de $P/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(R/\langle T \rangle)$ est garantis par l'existence d'un lien vers ou de $((P/\langle T \rangle)\overline{\mathcal{Y}}_T^{-1})^e$ dans $\text{Spect}(R_T)$.

Corollaire 3.2.13. Soit T un ensemble admissible de R et soient $T = \{t_1, \dots, t_l\}$, $l = \text{long}(T)$, \mathcal{T}_m, h_m^T comme dans 3.2.6. Si $P \rightsquigarrow Q$ dans $\text{Spect}_T(R)$ avec $P \neq Q$. Alors $P = h_{m'}^{T^e} *_T Q$, pour un certain $m' \in \{1, \dots, l\}$.

Démonstration. Posons $\mathcal{K} = \text{Spect}_T(R)$, montrons que les conditions du corollaire 1.2.13 sont satisfaites. La proposition 3.2.5 assure que R satisfait la condition forte de second niveau, le lemme 3.2.7 prouve que chaque t_m est h_m^T -normale modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle = \langle t_1, \dots, t_{m-1} \rangle$, pour $h_m^T \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(R/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$ cité dans la preuve de cet lemme. On sait que chaque $P \in \mathcal{K}$ contient $\langle T \rangle$, alors la proposition 3.2.11 et la remarque 3.2.12 montrent, respectivement, que \mathcal{K} est lien-fermé et que la clique de chaque $P/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(R/\langle T \rangle)$ est un singleton. Finalement, le lemme 3.2.9 nous dit que \mathcal{K} est invariant sous les h_m^T . Alors il existe $m' \in \{1, \dots, l\}$ tel que $P/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle = h_{m'}^T(Q/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle)$. Le résultat est donc clair, puisque $h_{m'}^{T^e}$ est le prolongement à $R/\langle T \rangle \cong (R/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle)/(\langle T \rangle/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle)$ de $h_{m'}^T$. \square

Corollaire 3.2.14. Soit T un ensemble admissible de R et $P \in \text{Spect}_T(R)$. Alors

$$\text{clique}(P) = \text{Orb}_{G_T}(P)$$

Démonstration. Analogue à celle de [1, Theorem 6.5.3]. Soit $P \in \text{Spect}_T(R)$ avec $\langle T \rangle = \langle t_1, \dots, t_l \rangle$, $l = \text{long}(T)$, comme dans 3.2.6. Choisissons un indice $1 \leq m \leq l$, on sait que $\langle T \rangle/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle \subseteq P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$. Alors, d'après le lemme 3.2.7, on peut appliquer [10, Lemma 3.7]. D'où, $h_m^T(P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$ et $h_m^{T^{-1}}(P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$ sont dans $\text{clique}(P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$. D'où $h_m^{T^e} *_T P$ et $h_m^{T^{e-1}} *_T P$ appartiennent à $\text{clique}(P)$. En suite, $\text{Orb}_{G_T}(P) \subseteq \text{clique}(P)$, puisque G_T est engendré par les $h_m^{T^e}$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de prouver que $\text{Orb}_{G_T}(P)$ est lien-fermé, puisque $P \in \text{Orb}_{G_T}(P)$. Soit donc $g \in G_T$ et supposons que $Q \rightsquigarrow g *_T P$ ou $g *_T P \rightsquigarrow Q$; d'après le corollaire 3.2.13 il existe $m = 1, \dots, l$ tel que $Q = h_m^{T^e} *_T (g *_T P)$ ou $g *_T P = h_m^{T^e} *_T Q$. Alors $Q = (h_m^{T^e} g) *_T P$ ou $Q = (h_m^{T^{e-1}} g) *_T P \in \text{Orb}_{G_T}(P)$. En fin $\text{clique}(P) = \text{Orb}_{G_T}(P)$. \square

Exemple 3.2.15. Dans cet exemple on va calculer les cliques des idéaux premiers de l'algèbre $R_2^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ où \mathbb{k} est algébriquement clos. Sous les hypothèses que nous travaillons (i.e. q n'est pas racine de l'unité), il y a 14 ensembles admissibles et $\text{clique}(\langle T \rangle) = \{\langle T \rangle\}$ pour chacun d'eux (corollaire 3.2.14), si T est l'un des ensembles admissibles suivants : $\{\emptyset\}$, $\{x_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{y_1, x_1, z_1\}$, ou $\{y_1, x_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$. Alors, d'après la figure.1, $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2})) = \{\langle T \rangle\}$. Soit, maintenant T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ qui n'est pas de la forme précédente et $\langle T \rangle \subsetneq P \in \text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2}))$. Alors $P = P_T(\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{k}^*$, qui est un idéal maximal dans $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times 2}))$, voir figure.1. Notons par $P_{m,T}(\alpha) := P_T(q^m \alpha)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Si $T \in \{\{x_1, z_1\}, \{y_1, z_1\}\}$, alors les cliques de $P_{0,T}(\alpha) = P_T(\alpha)$ sont désignées dans le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\dots \rightsquigarrow P_{-8,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-4,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{0,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{4,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{8,T}(\alpha) \rightsquigarrow \dots$$

et si $T = \{z_2\}$ on a

$$\dots \rightsquigarrow P_{4,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{2,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{0,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-2,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-4,T}(\alpha) \rightsquigarrow \dots .$$

Si T est l'un des ensembles suivants : $\{y_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$, $\{y_1, x_1, z_1, x_2, z_2\}$, ou $\{y_1, x_1, z_1, y_2, z_2\}$. Alors les cliques de $P_{0,T}(\alpha)$ sont inclus dans le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightsquigarrow & P_{-2,T}(\alpha) & \rightsquigarrow & P_{0,T}(\alpha) & \rightsquigarrow & P_{2,T}(\alpha) & \rightsquigarrow \dots \\ \dots & \nearrow \searrow & & \nearrow \searrow & & \nearrow \searrow & \dots \\ \dots P_{-3,T}(\alpha) & \rightsquigarrow & P_{-1,T}(\alpha) & \rightsquigarrow & P_{1,T}(\alpha) & \rightsquigarrow & P_{3,T}(\alpha) \dots \end{array}$$

Exemple 3.2.16. Ici on va donner les cliques des idéaux premiers de $R_2^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$ toujours avec \mathbb{k} algébriquement clos et q non racine de l'unité. Il y a donc 14 ensembles admissibles et clique($\langle T \rangle$) = $\{\langle T \rangle\}$ pour chacun des T . D'après la figure.2, les cliques triviaux correspondent aux ensembles suivants : $\{y_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, x_2, z_2\}$ et $\{y_1, x_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$.

On a aussi clique(P) = $\{P\}$, pour tout $P \in \text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2}))$ où T est l'un des ensembles suivants : $\{\emptyset\}$, $\{z_2\}$, $\{y_1, z_1\}$ ou $\{x_1, z_1\}$. Il reste donc 5 strata, qu'on va analyser dans la suite.

(1) $T = \{y_1, x_1, z_1\}$, d'après la même figure, on a

$$\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})) = \{\langle T \rangle\} \cup \{J \mid J \in \mathcal{J}\} \cup \{\langle T, y_2 - \gamma, x_2 - \alpha \rangle\}_{\gamma, \alpha \in \mathbb{k}^*},$$

où \mathcal{J} est l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2})$ contenant strictement $\langle y_1, x_1 \rangle$ et qui sont l'image inverse des idéaux premiers non-nuls mais non maximaux de $Z(\mathbf{P}(Q_T)) = \mathbb{k}[y_2^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$. On peut donc prouver, sans difficultés, que clique(J) = \mathcal{J} , pour tout $J \in \mathcal{J}$. Posons $P_T(\gamma, \alpha) = \langle T, y_2 - \gamma, x_2 - \alpha \rangle$ et $P_{l,m,T}(\gamma, \alpha) = P_T(q^l \gamma, q^m \alpha)$, $l, m \in \mathbb{Z}$. Alors clique($P_T(\gamma, \alpha)$) est le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\dots \rightsquigarrow P_{-2,2}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{-1,1,T}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{0,0,T}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{1,-1,T}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{2,-2}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow \dots .$$

(2) Soit T l'un des ensembles suivants : $\{y_1, x_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{y_1, x_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$ ou $\{y_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$; on note par $P_T(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{k}^*$ un idéal maximal dans $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{ok}^{2 \times 2}))$. Posons $P_{m,T}(\alpha) = P_T(q^m \alpha)$, $m \in \mathbb{Z}$, alors clique($P_T(\alpha)$) est inclus dans le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\dots \rightsquigarrow P_{-2,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-1,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{0,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{1,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{2,T}(\alpha) \rightsquigarrow \dots .$$

Corollaire 3.2.17. Soit T un ensemble admissible de R . Alors $\langle T \rangle$ est classiquement localisable.

Démonstration. D'après le corollaire 3.2.14, $\text{clique}(\langle T \rangle) = \{\langle T \rangle\}$. En utilisant la proposition 3.2.2, on peut donc appliquer la proposition 1.3.8, pour avoir le corollaire. \square

Proposition 3.2.18. *Soit T un ensemble admissible de R tel que $\text{long}(T) = 2n - 1$, et $P \in \text{Spect}_T(R)$. Alors $\text{clique}(P)$ est un ensemble classiquement localisable.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.2.18, il suffit de montrer que $\text{clique}(P)$ satisfait à la condition d'intersection (voir, [48, p. 190]). Soit donc $P \in \text{Spect}_T(R)$ avec $\text{long}(T) = 2n - 1$. On sait que tout idéal premier de R est complètement premier ; alors l'ensemble des éléments de R réguliers modulo l'idéal P est exactement $R \setminus P$. Soit J un idéal à droite ou à gauche de R tel que $J \subseteq \cup_{g \in G_T} (g *_T P)$, en vertu de corollaire 3.2.14, on a que $\text{clique}(P) = \text{Orb}_{G_T}(P)$; alors modulo $\langle T \rangle$ on a $\bar{J} \subseteq \cup_{g \in G_T} g(\bar{P})$. Mais \bar{R} est ou bien isomorphe à $\bar{R} \cong \mathbb{k}[v^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à une seule indéterminée ou bien à $\bar{R} \cong \mathbb{k}[v]$ l'anneau des polynômes commutatif ; dépendent de la valeur du paramètre $z_0 = 0$ ou $z_0 \neq 0$. On en déduit donc que \bar{J} est un idéal principal ; il existe donc nécessairement un élément $g_0 \in G_T$ tel que $\bar{J} \subseteq g_0(\bar{P})$. D'où $J \subseteq g_0 *_T P$. \square

Corollaire 3.2.19. *L'intersection des éléments de n'importe quelle clique dans $\text{Spect}(R)$ forme un idéal semi-premier classiquement localisable.*

Démonstration. Soit T un ensemble admissible de R et $P \in \text{Spect}_T(R)$, on note par $J_P = \cap_{Q \in \text{clique}(P)} Q$. D'après le corollaire 3.2.14, on a $J_P = \cap_{g \in G_T} (g *_T P)$. Alors $\langle T \rangle \subseteq J_P$. Soit Q_1, \dots, Q_m l'ensemble des idéaux premiers minimaux sur J_P , alors il existe un indice i tel que $J_P \subseteq Q_i \subseteq P$. D'où $Q_i \in \text{Spect}_T(R)$. Montrons que les Q_i appartiennent au même stratum $\text{Spect}_T(R)$ et qu'ils forme une seule orbite. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\langle T \rangle = 0$ et le groupe G_T devient un sous-groupe du groupe des automorphismes de R . En suite J_P est un idéal G_T -premier. D'après [10, 1.8] les idéaux premiers minimaux sur J_P forme une seule orbite, ce qui prouve l'assertion ci-dessus. Le corollaire se déduit, maintenant, du corollaire 3.2.14 et le théorème 1.2.20. \square

Chapitre 4

Les automorphismes de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et de H'_{q^2} , les dérivations de H_{q^2} .

Introduction

Dans ce chapitre on calcule les groupes des automorphismes de \mathbb{k} -algèbres des algèbres $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et H'_{q^2} , et d'autre part l'algèbre de Lie des dérivations de H_{q^2} . La méthode qu'on va utiliser pour calculer ces groupes, est inspirée de celle de L. Rigal [72], elle consiste d'analyser leurs action sur l'ensemble des idéaux premiers de hauteur un, qui sont en nombre fini dans notre cas. Plus précisément, on montre que cet ensemble est stable sous la dite action, ce qui nous permettra de prouver la stabilité par un automorphisme fixé de chaque \mathbb{k} -espace sous-jacent de chacun de ces éléments. Pour les dérivations de H_{q^2} , l'idée central se base sur la notion des dérivations $Z(H_{q^2})$ -linéaires, où $Z(H_{q^2})$ étant le centre de H_{q^2} cité dans [5].

4.1 Le groupe des automorphismes de H'_{q^2} .

On note par $\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2})$ le groupe des automorphismes de H'_{q^2} . Pour le déterminer on raisonnera comme dans [73]. D'abord on calculera l'image de l'unique idéal premier $\langle x_1 \rangle$ de hauteur 1, et on trouve qu'il est $\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2})$ -stable comme \mathbb{k} -espace vectoriel. Puis, en utilisant les relations de commutation des générateurs, on déduira la stabilité des \mathbb{k} -espaces $\mathbb{k}x_2$ et $\mathbb{k}x_3$. Fixons, dans cette section \mathbb{k} un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle.

Lemme 4.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned} x_2 x_1^n &= q^{-2n} x_1^n x_2, & x_2^n x_1 &= q^{-2n} x_1 x_2^n. \\ x_3 x_1^n &= q^{2n} x_1^n x_3, & x_3^n x_1 &= q^{2n} x_1 x_3^n. \\ x_3 x_2^n &= q^{2n} x_2^n x_3 - nq x_1 x_2^{n-1}, & x_3^n x_2 &= q^{2n} x_2 x_3^n - nq^{2n-1} x_1 x_3^{n-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Se déduit facilement des relations qui relient x_1, x_2 et x_3 . \square

Lemme 4.1.2. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2})$, alors $\sigma(x_1) = \alpha_1 x_1$, $\alpha_1 \in \mathbb{k}^*$.

Démonstration. $\langle x_1 \rangle$ est l'unique idéal premier de hauteur 1 et $\sigma(x_1)$ est un élément normal de H'_{q^2} . D'après le théorème de l'idéal principal, théorème 1.3.1, on a $\sigma(x_1) \in \langle x_1 \rangle$. En travaillant avec σ^{-1} , on a de même $\sigma^{-1}(x_1) \in \langle x_1 \rangle$; d'où $\sigma(x_1) = hx_1$, $h \in H'_{q^2}$, et $\sigma^{-1}(x_1) = gx_1$, $g \in A$. L'intégrité de H'_{q^2} implique que $hg = gh = 1$ et donc $h = \alpha_1 \in \mathbb{k}^*$. \square

Lemme 4.1.3. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2})$. Alors $\sigma(x_2) = \alpha_2 x_2$, $\sigma(x_3) = \alpha_3 x_3$, avec $\alpha_i \in \mathbb{k}^*$, $i = 2, 3$.

Démonstration. On note : $X^\nu = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3}$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{N}^3$, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, il est clair que $\{X^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^3\}$ est une base de H'_{q^2} . En développant $\sigma(x_i)$ dans cette base de Poincaré-Birkhoff-Witt, on peut écrire :

$$\sigma(x_i) = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k + f_i, \quad \text{où } f_i = \sum_{\substack{|\nu| \geq 2 \\ \nu \in \mathbb{N}^3}} \alpha_{i\nu} X^\nu.$$

Alors, d'après le lemme 4.1.2, $x_2 x_1 = q^{-2} x_1 x_2$ implique que ;

$$(\alpha_{20} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k} x_k + f_2) x_1 - q^{-2} x_1 (\alpha_{20} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k} x_k + f_2) = 0.$$

Et par suite,

$$\alpha_{20}(1 - q^{-2})x_1 + \alpha_{21}(1 - q^{-2})x_1^2 + \alpha_{23}(q^2 - q^{-2})x_1 x_3 + f_2 x_1 - q^{-2} x_1 f_2 = 0. \quad (4.1)$$

La différence $f_2 x_1 - q^{-2} x_1 f_2$ ne pouvant contenir des monômes en x_1, x_1^2 ou $x_1 x_3$, on en déduit, parce que q n'est pas racine de l'unité, que $\alpha_{20} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0$. L'égalité (4.1) devient donc : $f_2 x_1 = q^{-2} x_1 f_2$. En développant $f_2 = \sum_{i+j+m \geq 2} \gamma_{ijm} x_1^i x_2^j x_3^m$, il vient :

$$\sum_{i+j+m \geq 2} \gamma_{ijm} (q^{2m-2j} - q^{-2}) x_1^{i+1} x_2^j x_3^m = 0.$$

Donc les seuls γ_{ijm} non-nuls sont ceux pour lesquels $m - j + 1 = 0$; d'où $j \geq 1$ et donc $\sigma(x_2) \in x_2 H'_{q^2}$. Par symétrie et en utilisant la relation $x_3 x_1 = q^2 x_1 x_3$ on obtient de même que $\sigma(x_3) \in H'_{q^2} x_3$. En remplaçant σ par σ^{-1} dès le départ et en utilisant l'intégrité de H'_{q^2} , on déduit le résultat voulu. \square

Théorème 4.1.4. Soit H'_{q^2} , où $q \in \mathbb{k}^*$ n'est pas racine de l'unité et supposons que \mathbb{k} est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. . Alors

$$\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2}) \cong (\mathbb{k}^*)^2.$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2})$. On applique σ à la relation $x_1 = qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2$, et on utilise les lemmes 4.1.2 et 4.1.3. On obtient $\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 \in \mathbb{k}^*$, d'où le résultat. \square

Ce résultat est différent de celui obtenu pour H_{q^2} par J. Alev et F. Dumas, ([3], proposition 2.3). Ils ont montré que $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(H_{q^2})$, le groupe des \mathbb{C} -automorphismes de H_{q^2} , est le produit semi direct de $(\mathbb{C}^*)^2$ par $\langle \omega \rangle$ où ω est une involution.

Suivant [6], on dira qu'un automorphisme σ de H'_{q^2} vérifie (\wp_1) si σ se prolonge en un automorphisme de T pour toute algèbre T contenant H'_{q^2} comme sous-algèbre. On dira que σ vérifie (\wp_2) si σ vérifie (\wp_1) et induit de plus un automorphisme $\bar{\sigma}$ de A/I , pour tout idéal I de H'_{q^2} tel que $\bar{\sigma}(\bar{a}) = \sigma(a)$.

Corollaire 4.1.5. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(H'_{q^2})$; alors σ est intérieur si et seulement s'il vérifie (\wp_2) .

Démonstration. Elle résulte du théorème 4.1.4 et la remarque (3.5) de [6]. \square

4.2 Le groupe des automorphismes de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

On le calcule de la même manière que dans 4.1, l'unique différence ici et l'utilisation des calculs effectifs possibles dans les algèbres de type P.B.W.

Rappelons que l'algèbre $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$, q étant supposé non racine de l'unité, est une \mathbb{k} -algèbre avec générateurs $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ satisfaisant les relations suivantes

$$\begin{aligned} y_j x_i &= q^{-1} x_i y_j, & y_j y_i &= q y_i y_j & (1 \leq i < j \leq n) \\ x_j x_i &= q^{-1} x_i x_j, & x_j y_i &= q y_i x_j & (1 \leq i < j \leq n) \\ x_i y_i - q^2 y_i x_i &= (q^2 - 1) \sum_{l=1}^{i-1} q^{i-l} y_l x_l, & & & (1 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

et les éléments normaux sont $z_i = \sum_{l=1}^i q^{i-l} y_l x_l$, $i \geq 1$.

De ces equations, on observe que $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ est une \mathbb{k} -algebra de type P.B.W par rapport à l'ordre lexicographique \leq_{lex} sur \mathbb{N}^{2n} avec $(1, 0, \dots, 0) <_{lex} (0, 1, \dots, 0) <_{lex} \dots <_{lex} (0, \dots, 0, 1)$. Ce qui implique que chaque élément $f \in \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ peut être exprimer d'une manière unique :

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{2n}} c_{\alpha} X^{\alpha}$$

dans la \mathbb{k} -base

$$\mathcal{B} = \{ X^{\alpha} = y_1^{\nu_1} x_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\nu_n} x_n^{\mu_n} \mid \alpha = (\nu_1, \mu_1, \dots, \nu_n, \mu_n) \in \mathbb{N}^{2n} \}.$$

D'après les résultats cités dans la sous-section 2.3.2, l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ de hauteur un sont

$$\mathbf{P} = \{\langle y_1 \rangle, \langle x_1 \rangle, \langle z_2 \rangle, \dots, \langle z_n \rangle\}. \quad (4.2)$$

Afin de déterminer le groupe $\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$, on va montrer premièrement que chaque élément $v \in \{y_1, x_1, z_2, \dots, z_n\}$, est un vecteur propre de n'importe quel $h \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$. Cela nous facilitera le calcul des images des autres générateurs, pour un élément fixe de $\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$.

Soit V_n le \mathbb{k} -espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{z_1, \dots, z_n\}$. En utilisant les équations (2.11), on déduit que l'ensemble $\{y_i x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une \mathbb{k} -base de cet espace.

Lemme 4.2.1. *Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$. Alors pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$ il existe $j \in \{2, \dots, n\}$ tel que*

$$\sigma(z_i) = \lambda_{ij} z_j, \text{ et } \sigma(x_1) = \mu_1 x_1, \sigma(y_1) = \nu_1 y_1.$$

où $\lambda_{ij}, \nu_1, \mu_1 \in \mathbb{k}^*$.

Démonstration. D'après le théorème 1.3.1, l'ensemble \mathbf{P} de l'équation (4.2) est invariant par l'action du groupe $\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$. Fixons $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$, et soit $x \in \{y_1, x_1, z_2, \dots, z_n\}$, alors il existe $h, h' \in \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}) \setminus \{0\}$ et $y \in \{y_1, x_1, z_2, \dots, z_n\}$ tels que $\sigma(x) = hy$ et $\sigma^{-1}(y) = h'x$. En suite, $h\sigma(h') = \sigma(h')h = 1$, d'où h, h' sont des éléments inversibles et alors $h, h' \in \mathbb{k}^*$. Supposons, maintenant, qu'il existe $i \in \{2, \dots, n\}$ et $j \in \{2, \dots, n\}$ tels que $\sigma(z_i) = \alpha y_1$ et $\sigma(z_j) = \beta x_1$, pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{k}^*$. De l'équation (2.10), on déduit $z_i z_j = z_j z_i$. En appliquant σ à cette égalité, on trouve $\alpha\beta = 0$, puisque q n'est pas racine de l'unité. D'où pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$ il existe $j \in \{2, \dots, n\}$, tel que $\sigma(z_i) = \lambda_{ij} z_j$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{k}^*$. Par la même méthode on montre que x_1 (resp. y_1) ne peut pas être l'image de y_1 (resp. x_1) par σ . Enfin $\sigma(x_1) = \mu_1 x_1$, $\sigma(y_1) = \nu_1 y_1$, $\nu_1, \mu_1 \in \mathbb{k}^*$. \square

Remarque 4.2.2. D'après le lemme précédent, il existe un entier positive $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^k(z_i) = \lambda z_i$, $\lambda \in \mathbb{k}^*$, pour chaque $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}))$ et chaque $i \in \{2, \dots, n\}$.

Lemme 4.2.3. *Soit $a, b \in \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}) \setminus \mathbb{k}$ tel que $ab = \sum_{1 \leq k_i \leq n} k_i y_i x_i \in V_n$ avec $k_i \in \mathbb{k}$ et $k_n \neq 0$. Alors il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{k}^*$ tels que $a = \lambda y_n$ et $b = \lambda' x_n$ (ou $a = \lambda' x_n$ et $b = \lambda y_n$).*

Démonstration. Il est clair que $\exp(ab) = (0, 0, \dots, 0, 1, 1)$ (voir la section 1.8), on a donc

$$\begin{cases} \exp(a) = (0, \dots, 0, 1, 0), & \exp(b) = (0, \dots, 0, 0, 1) \\ \text{ou} \\ \exp(a) = (0, \dots, 0, 0, 1), & \exp(b) = (0, \dots, 0, 1, 0). \end{cases}$$

On obtient, par exemple, $a = \lambda y_n + a_0$, $b = \lambda' x_n + b_0$ où $\lambda, \lambda' \in \mathbb{k}^*$ et $a_0 \in R_{n-1}$, $b_0 \in R_{n/2} = R_{n-1}[y_n; \alpha_n]$; ceci dans la extension de Ore itérée $R_n = \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$. Alors $ab = \lambda\lambda' y_n x_n + \lambda' a_0 x_n + \lambda y_n b_0 + a_0 b_0$ et $u = \lambda' a_0 x_n + \lambda y_n b_0 + a_0 b_0 \in V_n$. Mais $\exp(\lambda' a_0 x_n) = \exp(u) = (\nu, 0, 1)$ avec $\nu \in \mathbb{N}^{2(n-1)}$; d'où $a_0 = b_0 = 0$. L'autre cas est symétrique. \square

Proposition 4.2.4. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n}))$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\sigma(z_i) = \lambda_i z_i$, $\sigma(x_i) = \mu_i x_i$, $\sigma(y_i) = \nu_i y_i$ où $\lambda_i, \nu_i, \mu_i \in \mathbb{k}^*$.

Démonstration. Pour $i = 1$ on sait, d'après le lemme 4.2.1, que $\sigma(x_1) = \mu_1 x_1$, $\sigma(y_1) = \nu_1 y_1$, $\nu_1, \mu_1 \in \mathbb{k}^*$ et alors $\sigma(z_1) = \lambda_1 z_1$, $\lambda_1 = \nu_1 \mu_1$. Supposons qu'il existe $i \neq j \in \{2, \dots, n\}$ tel que $\sigma(z_i) = \lambda z_j$, $\lambda \in \mathbb{k}^*$. Si $\sigma(z_n) = \lambda z_n$, alors il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k(z_i) = \lambda_0 z_n$ avec $\lambda_0 \in \mathbb{k}^*$. Soit m l'élément maximal de l'ensemble

$$\{j \mid \sigma(z_i) = \lambda z_j \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{k}^* \text{ et } l \neq j\}.$$

Soit $\sigma(z_i) = \lambda_0 z_m$, $\lambda_0 \in \mathbb{k}^*$. Notons que $1 < i < m \leq n$, $\sigma(z_{i-1}) = \lambda'_0 z_r$, $\sigma(z_{i+1}) = \lambda'' z_s$ pour certains $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{k}^*$ et $r, s < m$. En appliquant σ à $z_i = y_i x_i + q z_{i-1}$, on trouve $\sigma(y_i) \sigma(x_i) = \sum_{1 \leq l \leq m} k_l y_l x_l$ avec $k_m = \lambda_0$. D'après le lemme 4.2.3 (avec $m = n$) appliqué à $\sigma(y_i) \sigma(x_i)$, on a par exemple $\sigma(y_i) = \mu' x_m$, $\mu' \in \mathbb{k}^*$. Si on applique cette fois σ à $z_{i+1} = y_{i+1} x_{i+1} + q z_i$, on obtient donc $\sigma(y_{i+1}) = \mu'_0 x_m$, $\mu'_0 \in \mathbb{k}^*$ (ou $\sigma(x_{i+1}) = \mu'_0 x_m$), ce qui contredit le fait que σ est injective. En conclusion, on a $\sigma(z_i) = \lambda_i z_i$, $\lambda_i \in \mathbb{k}^*$. Maintenant, on applique σ à $z_i = y_i x_i + q z_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$, on trouve $\sigma(y_i) \sigma(x_i) \in V_n$. D'après le lemme 4.2.3 (avec $i = n$) appliqué à $\sigma(y_i) \sigma(x_i)$, on a $\sigma(y_i) = \nu_i y_i$, $\sigma(x_i) = \mu_i x_i$, $\nu_i, \mu_i \in \mathbb{k}^*$. Notons qu'on ne peut pas avoir $\sigma(x_i) = \nu_i y_i$, $\sigma(y_i) = \mu_i x_i$; car si c'est le cas, on aura $\mu_i \nu_i y_i x_i - q^2 \mu_i \nu_i x_i y_i = (q^2 - 1) q \lambda_{i-1} z_{i-1}$ et alors $\mu_i \nu_i = 0$. \square

Théorème 4.2.5. [28, Theorem 2.5] Considérons l'algèbre $\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n})$ avec q non racine de l'unité. Alors

$$\mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n})) \cong (\mathbb{k}^\times)^{n+1}.$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n}))$, d'après la proposition 4.2.4 on a, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\sigma(x_i) = \mu_i x_i$ et $\sigma(y_i) = \nu_i y_i$, $\mu_i, \nu_i \in \mathbb{k}^*$ et $\sigma(z_i) = \lambda_i z_i$, $\lambda_i \in \mathbb{k}^*$ avec $\lambda_1 = \mu_1 \nu_1$. En appliquant σ à $z_2 = y_2 x_2 + (q^2 - 1) q y_1 x_1$, on obtient $\lambda_2 = \lambda_1 = \mu_1 \nu_1 = \mu_2 \nu_2$. On continue d'appliquer σ aux autres égalités de (2.11), on trouve à la fin que : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 \nu_1 = \dots = \mu_n \nu_n$. Le théorème est maintenant clair. \square

4.3 Les dérivations de H_{q^2} .

Les dérivations de H'_{q^2} ont été calculées dans ([6], théorème 3.3). Dans cette partie on détermine l'algèbre de Lie des dérivations de H_{q^2} , qu'on note par B . On rappelle d'abord la définition de l'algèbre d'Heisenberg quantique B ; c'est la \mathbb{k} -algèbre engendrée par x_1, x_2, x_3 soumis aux relations :

$$\begin{aligned} x_2 x_1 &= q^2 x_1 x_2, \\ x_3 x_1 &= q^{-2} x_1 x_3, \\ x_1 &= q x_2 x_3 - q^{-1} x_3 x_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dans tous le rest de ce chapitre \mathbb{k} désigne un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle et $q \in \mathbb{k}^*$ est non racine de l'unité. Soit $\bar{x}_1 = (q^{-1} - q^3) x_2 x_3 + q^2 x_1$ et

$\Omega = x_1\bar{x}_1$, $Z(B) = \mathbb{k}[\Omega]$ le centre de B , voir [3]. On note par $\mathbf{Der}(B)$ (resp. $\mathbf{Derint}(B)$) l'algèbre des dérivations de B (resp. des dérivations intérieures de B).

Une \mathbb{k} -dérivation de B est dite $Z(B)$ -dérivation, si elle est $Z(B)$ -linéaire. Un exemple de $Z(B)$ -dérivation est l'application linéaire δ_1 définie par : $\delta_1(x_1) = 0$, $\delta_1(x_2) = -x_2$ et $\delta_1(x_3) = x_3$.

Les deux lemmes suivants découlent facilement des relations (4.3).

Lemme 4.3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned} x_2x_1^n &= q^{2n}x_1^n x_2, & x_2^n x_1 &= q^{2n}x_1x_2^n. \\ x_3x_1^n &= q^{-2n}x_1^n x_3, & x_3^n x_1 &= q^{-2n}x_1x_3^n. \\ x_3x_2^n &= q^{2n}x_2^n x_3 - qq_n x_1x_2^{n-1}. \\ x_3^n x_2 &= q^{2n}x_2x_3^n - q^{-2(n-1)+1}q_n x_1x_3^{n-1}, \end{aligned}$$

où $q_n = \left(\frac{1-q^{4n}}{1-q^4} \right)$.

Lemme 4.3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned} x_3x_2^n &= q^{-2n}x_2^n x_3 - q^{-1}s_{n-1}\bar{x}_1x_2^{n-1}, \\ x_3^n x_2 &= q^{-2n}x_2x_3^n - q^{2(n-1)-1}s_{n-1}\bar{x}_1x_3^{n-1}, \end{aligned}$$

où $s_n = 1 + q^{-4} + \dots + q^{-4n}$.

Pour $p \in B$, on note par ad_p la dérivation intérieure définie par p ; c'est à dire que $ad_p(b) = pb - bp$, pour tout $b \in B$.

Lemme 4.3.3. *Considérons x_1, x_2, x_3 les générateurs de B , soumis aux relations (4.3).*

(1) *Soit $P_{i,j,k} = x_1^i x_2^j x_3^k$, $i, j, k \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$ad_{P_{i,j,k}}(x_1) = (q^{2(j-k)} - 1)x_1^{i+1}x_2^jx_3^k.$$

(2) *Soit $P_i = x_1^i x_2^i x_3^i$, $i \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\begin{aligned} ad_{P_i}(x_1) &= 0, \\ ad_{P_i}(x_2) &= -x_2 \left[(1 - q^{-4i})x_1^i x_2^i x_3^i + q^{-2i-1}s_{i-1}\Omega x_1^{i-1}x_2^{i-1}x_3^{i-1} \right], \\ ad_{P_i}(x_3) &= \left[(1 - q^{-4i})x_1^i x_2^i x_3^i + q^{-2i-1}s_{i-1}\Omega x_1^{i-1}x_2^{i-1}x_3^{i-1} \right] x_3. \end{aligned}$$

(3) *Soit $P_{j,i} = x_1^j x_2^i x_3^i$, $i, j \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\begin{aligned} ad_{P_{j,i}}(x_1) &= 0, \\ ad_{P_{j,i}}(x_2) &= -x_2 \left[(1 - q^{2(i-j)})x_1^j x_2^i x_3^i + q^{-2j+1}q_i x_1^{j+1}x_2^{i-1}x_3^{i-1} \right], \\ ad_{P_{j,i}}(x_3) &= \left[(1 - q^{2(i-j)})x_1^j x_2^i x_3^i + q^{-2j+1}q_i x_1^{j+1}x_2^{i-1}x_3^{i-1} \right] x_3. \end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 4.3.1 et 4.3.2. □

Dans le reste on note par C le centralisateur de x_1 dans B . C'est à dire que $C = \{b \in B \mid bx_1 = x_1b\}$.

Lemme 4.3.4. *Soit D une \mathbb{k} -dérivation de B , telle que $D(x_1) \in C$. Alors :*

$$D(x_1) = \sum_{i \geq 1} b_i x_1^i + \sum_{i,j \geq 1} t_{i,j} x_1^i x_2^j x_3^j,$$

$$D(x_2) = Qx_2 + \sum_{i=1}^n T_i x_2^{i+1} x_3^i,$$

$$D(x_3) = Q'x_3 + \sum_{i=1}^n T'_i x_2^i x_3^{i+1},$$

où $b_i, t_{i,j} \in \mathbb{k}$ et $Q_i, Q'_i, T_i, T'_i \in \mathbb{k}[x_1]$. En particulier $D(x_2) \in x_2 C$ et $D(x_3) \in C x_3$.

Démonstration. Comme $D(x_1) \in C$, on peut écrire :

$$D(x_1) = b + \sum_{i \geq 1} r_i x_2^i x_3^i + \sum_{i,j \geq 1} t_{i,j} x_1^i x_2^j x_3^j,$$

où $r_i, t_{i,j} \in \mathbb{k}$ et $b = \sum_{i \geq 0} b_i x_1^i \in \mathbb{k}[x_1]$. D'autre part si on développe $D(x_2)$ et $D(x_3)$, on a

$$D(x_2) = P + \sum_{i \geq 1} Q_i x_2^i + \sum_{i \geq 1} R_i x_3^i + \sum_{i,j \geq 1} T_{i,j} x_2^i x_3^j,$$

$$D(x_3) = P' + \sum_{i \geq 1} Q'_i x_2^i + \sum_{i \geq 1} R'_i x_3^i + \sum_{i,j \geq 1} T'_{i,j} x_2^i x_3^j,$$

avec $P, P', Q_i, Q'_i, R_i, R'_i, T_{i,j}, T'_{i,j} \in \mathbb{k}[x_1]$ pour tout i, j . On applique D à l'égalité $x_2 x_1 = q^2 x_1 x_2$, en tenant compte des identités du lemme 4.3.1, on aura :

$$\begin{aligned} q^{-2} D(x_2 x_1) &= q^{-2} x_1 P + \sum_{i \geq 1} q^{2(i-1)} Q_i x_1 x_2^i + \sum_{i \geq 1} q^{-2(i+1)} R_i x_1 x_3^i + \\ &\quad \sum_{i,j \geq 1} q^{2(i-j)-2} T_{i,j} x_1 x_2^i x_3^j + q^{-2} x_2 b + \sum_{i \geq 1} r_i q^{-2} x_2^{i+1} x_3^i + \\ &\quad \sum_{i,j \geq 1} t_{i,j} q^{2(i-1)} x_1 x_2^{j+1} x_3^j, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} D(x_1 x_2) &= b x_2 + \sum_{i \geq 1} r_i q^{2i} x_2^{i+1} x_3^i - \sum_{i \geq 1} r_i q^{-2(i-1)+1+2i} q_i x_1 x_2^i x_3^{i-1} + \\ &\quad \sum_{i,j \geq 1} t_{i,j} q^{2j} x_1^i x_2^{j+1} x_3^j - \sum_{i,j \geq 1} t_{i,j} q^{-2(j-1)+1+2j} q_j x_1^{i+1} x_2^j x_3^{j-1} + \\ &\quad x_1 P + \sum_{i \geq 1} Q_i x_1 x_2^i + \sum_{i \geq 1} R_i x_1 x_3^i + \sum_{i,j \geq 1} T_{i,j} x_1 x_2^i x_3^j. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si on compare les coefficients de (4.4) et (4.5) on en déduit que : $b_0 = P = Q_i = 0$, pour tout $i > 1$; $R_i = r_i = 0$, pour tout $i \geq 1$ et $T_{i,j} = 0$, pour tout $i \neq j + 1$. D'où

$$D(x_1) = \sum_{i \geq 1} b_i x_1^i + \sum_{i,j \geq 1} t_{i,j} x_1^i x_2^j x_3^j \text{ et } D(x_2) = Q x_2 + \sum_{i \geq 1} T_i x_2^{i+1} x_3^i,$$

avec $T_i = T_{i+1,i}$, pour tout i et $Q = Q_1$. Par symétrie et en utilisant la relation $x_3 x_1 = q^{-2} x_1 x_3$, on trouve le résultat. \square

Lemme 4.3.5. Soit δ une application linéaire de B telle que

$$\delta(x_1) = 0, \quad \delta(x_2) = -x_2 P, \quad \delta(x_3) = P x_3,$$

où $P \in C$. Alors il existe $c(\Omega) \in \mathbb{k}[\Omega]$ et $\Delta \in \mathbf{Derint}(B)$, tels que $\delta = c(\Omega)\delta_1 + \Delta$. En particulier δ est une $Z(B)$ -dérivation.

Démonstration. Comme $P \in C$ on a $P = a + \sum_{i \geq 1, j \geq 0} \alpha_{i,j} x_1^j x_2^i x_3^i$ avec $a \in \mathbb{k}[x_1]$ et $\alpha_{i,j} \in \mathbb{k}$, pour tout i, j . Alors, d'après le lemme 4.3.3(3), modulo les dérivations intérieures de la forme $\left(\frac{\alpha_{i,j}}{1-q^{2(i-j)}}\right) ad_{P_{j,i}}$, $j \neq i$ et $P_{j,i} = x_1^j x_2^i x_3^i$; on a

$$\delta(x_1) = 0, \quad \delta(x_2) = -x_2(a' + \sum_{i \geq 1} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i), \quad \delta(x_3) = (a' + \sum_{i \geq 1} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i) x_3,$$

avec $a' \in \mathbb{k}[x_1]$ et $\alpha_i \in \mathbb{k}$, pour tout i . Modulo cette fois les dérivations intérieures de la forme $ad_{x_1^i}$, on peut encore écrire

$$\delta(x_1) = 0, \quad \delta(x_2) = -x_2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i \right), \quad \delta(x_3) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i \right) x_3.$$

D'après le lemme 4.3.3(2) on a :

$$\begin{aligned} -x_2[\alpha_n x_1^n x_2^n x_3^n] &= \left(\frac{\alpha_n}{1-q^{-4n}} \right) ad_{x_1^n x_2^n x_3^n}(x_2) + x_2 \left[\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}} \Omega x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1} \right], \\ [\alpha_n x_1^n x_2^n x_3^n] x_3 &= \left(\frac{\alpha_n}{1-q^{-4n}} \right) ad_{x_1^n x_2^n x_3^n}(x_3) - \left[\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}} \Omega x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1} \right] x_3. \end{aligned}$$

Donc, modulo $\left(\frac{\alpha_n}{1-q^{-4n}}\right) ad_{x_1^n x_2^n x_3^n}$ on a :

$$\begin{aligned} \delta(x_1) &= 0, \\ \delta(x_2) &= -x_2 \left[\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i + \left(\alpha_{n-1} - \left(\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}} \right) \Omega \right) x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1} \right], \\ \delta(x_3) &= \left[\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i + \left(\alpha_{n-1} - \left(\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}} \right) \Omega \right) x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1} \right] x_3. \end{aligned}$$

De proche en proche on aura : $\delta(x_1) = 0$, $\delta(x_2) = -c(\Omega)x_2$, $\delta(x_3) = c(\Omega)x_3$, où $c(\Omega) \in \mathbb{k}[\Omega]$. \square

Proposition 4.3.6. *Soit D une $Z(B)$ -dérivation de B telle que $D(x_1)$ appartienne à C . Alors D est la somme d'une dérivation intérieure et d'une $Z(B)$ -dérivation de la forme $c(\Omega)\delta_1$ pour un élément central $c(\Omega) \in Z(B)$.*

Démonstration. D'après le lemme 4.3.4 on a $D(x_1) = x_1a$, $D(x_2) = x_2b$, $D(x_3) = cx_3$ avec $a, b, c \in C$. Alors si on applique D aux deux premières égalités de (4.3) on trouvera que $a \in Z(B) = \mathbb{k}[\Omega]$. D'autre part $D(\Omega) = 0$ implique que $D(\bar{x}_1) = -\bar{x}_1a = -a\bar{x}_1$, et par suite $D(x_2x_3) = -(q^{-1} - q^3)^{-1}(\bar{x}_1 + q^2x_1)a$. D'où

$$x_2(b + c)x_3 = -x_2x_3a - 2(q^{-1} - q^3)^{-1}q^2x_1a. \quad (4.6)$$

Alors si $a = 0$, on a $b = -c$. La proposition découle donc du lemme 4.3.5. Par l'absurde, supposons que $a \neq 0$. Alors $a = \alpha_0 + \alpha_1\Omega + \dots + \alpha_n\Omega^n$, $\alpha_i \in \mathbb{k}$, avec au moins un des α_i est non nul. On développe a dans la base, on obtient

$$a = \sum_{i \geq 0} \alpha_i q^{2i} x_1^{2i} + \sum_{i,j,h \geq 1} \beta_{i,j,h} x_1^i x_2^j x_3^h, \text{ où } \beta_{i,j,h} \in \mathbb{k}.$$

On compare les coefficients dans (4.6), on trouve que

$$-2q^2(q^{-1} - q^3)^{-1} \sum_{i \geq 0} \alpha_i q^{2i} x_1^{2i+1} = 0,$$

c'est à dire que $\alpha_i = 0$, pour tout i . Ce qui est faux. □

Théorème 4.3.7. *Toute $Z(B)$ -dérivation de B est la somme d'une dérivation intérieure et d'une $Z(B)$ -dérivation de la forme $c(\Omega)\delta_1$ pour un élément central $c(\Omega) \in Z(B)$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que $D(\Omega) = 0$ implique que $D(x_1) \in Bx_1 = x_1B$, car Bx_1 est idéal complètement premier ([57], théorème 2.4). En développant sous la forme :

$$D(x_1) = \sum_{i,j,h \geq 0} \alpha_{i,j,h} x_1^{i+1} x_2^j x_3^h \text{ où } \alpha_{i,j,h} \in \mathbb{k},$$

on peut intégrer suivant une dérivation intérieure (grâce au lemme 4.3.3(1)) les monômes pour lesquels $j \neq h$, ce qui permet d'écrire $D = D_0 + ad_P$ pour un certain $P \in B$, avec $D_0(x_1) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j,j} x_1^{i+1} x_2^j x_3^j$ qui appartient donc au centralisateur C de x_1 . Le théorème est donc une conséquence de la proposition 4.3.6 appliquée à D_0 . □

Soit δ_2 une application linéaire de B définie par ;

$$\delta_2(x_1) = x_1, \delta_2(x_2) = x_2, \delta_2(x_3) = 0.$$

On vérifie facilement que $\delta_2 \in \mathbf{Der}(B)$ et que $\delta_2(\Omega) = 2\Omega$.

Lemme 4.3.8. *Toute dérivation de B est de façon unique la somme d'une $Z(B)$ -dérivation et d'une dérivation de la forme $r(\Omega)\delta_2$, avec $r(\Omega) \in Z(B)$.*

Démonstration. Soit $D \in \mathbf{Der}(B)$. Le centre $Z(B)$ étant stable par D , on a $D(\Omega) = \alpha_0 + \alpha_1\Omega + \dots + \alpha_n\Omega^n$ avec $\alpha_i \in \mathbb{k}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Mais comme $\Omega = (q^{-1} - q^3)x_1x_2x_3 + q^2x_1^2$ est sans terme constant, il en est de même de $D(\Omega)$. Donc $\alpha_0 = 0$. On peut alors considérer dans $\mathbb{k}[\Omega]$ le polynôme $r(\Omega) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2\Omega + \dots + \alpha_n\Omega^{n-1})$. Il vérifie $D(\Omega) = r(\Omega)2\Omega$. La dérivation $D - r(\Omega)\delta_2$ est donc une $Z(B)$ -dérivation. Il suffit d'appliquer à Ω les dérivations considérées pour obtenir l'unicité. \square

Théorème 4.3.9. *[5, Théorème 2.9] Considérons H_{q^2} avec $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité et supposons que \mathbb{k} est algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit D une \mathbb{k} -dérivation de H_{q^2} . Alors il existe une unique dérivation intérieure Δ , et des éléments centraux $c(\Omega)$ et $r(\Omega)$, tels que $D = c(\Omega)\delta_1 + r(\Omega)\delta_2 + \Delta$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.3.8 et du théorème 4.3.7. \square

Chapitre 5

La résolution injective minimale.

Introduction

Ce chapitre contient quelques observations sur la résolution injective des algèbres $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ et H'_q . Les méthodes et les techniques utilisées, sont celles de [56], [57], [58] en combinaison avec [31] et [16]. Finalement on donne une réponse affirmative de la question de M. P. Malliavin [58, Problem 4.5], pour l'algèbre de Weyl quantique $A_2^{(\mathbf{q},\Lambda)}(\mathbb{k})$.

Fixons \mathbb{k} un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle.

5.1 Préliminaires et notions de base.

Soit R un anneau et M un R -module à gauche ; une résolution injective de M est une suite exacte, de la forme

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow \cdots E_n \rightarrow \cdots ,$$

dont les E_i , $i \geq 0$ sont des R -modules à gauche injectifs. La *dimension injective* de M , noté $\text{Injdim}_R M$, est le plus petit entier naturel $\text{Injdim}_R M = n$ tel que

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow \cdots E_n \rightarrow 0;$$

la résolution correspondante, est dite donc la *résolution injective minimale*. Si un tel n n'existe pas, on dit que M a une dimension injective infinie : $\text{Injdim}_R M = \infty$. La dimension injective des R -module à droite est définie par analogie. Si R est noethérien, il est bien connu, par [80], que la dimension injective du module ${}_R R$ est égale à la dimension injective de R_R si les deux sont finies et dans ce cas on note par $\text{Injdim} R$ cette dimension commune. Soit R un anneau noethérien et M un R -module à gauche. On appelle le *grade* de M , noté par $j_R(M)$, le nombre naturel ou $+\infty$

$$j_R(M) = \inf\{j \geq 0 \mid \mathbf{Ext}_R^j(M, R) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Bien sûr $j(0) = +\infty$ (s'il n'y a pas d'ambiguïté, on note par $j_R(M) := j(M)$). Un R -module à gauche (ou à droite) de type fini M est dit satisfait la *condition de Auslander* si pour tout $q \geq 0$, on a $j(N) \geq q$, pour tout R -sous-module de type fini N de $\mathbf{Ext}_R^q(M, R)$.

Soit R , cette fois, une \mathbb{k} -algèbre noethérienne, on dit que R est *Auslander-Gorenstein* si

(a) La dimension injective de R comme R -module à gauche (ou à droite) est finie i.e $\text{Injdim}R < \infty$.

(b) Tous R -module à gauche (resp. à droite) de type fini satisfait la condition de Auslander.

D'après un résultat de M. Auslander la condition (b) pour les modules à droite est équivalent à la condition (b) pour les modules à gauche, voir par exemple [47].

Si de plus, la dimension global de R (voir [62, Chapter 7.]) est finie on dit que R est *Auslander-régulière*. L'algèbre R , avec $\text{GKdim}(R) \in \mathbb{N}$, est dite *Cohen-Macaulay* si

$$\text{GKdim}(M) + j(M) = \text{GKdim}(R),$$

pour tout R -module non nul de type fini M .

Exemple 5.1.1. Toute extension de Ore itérées de la forme $\mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_n; \alpha_n, \delta_n]$ où les α_i sont des automorphismes, est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-régulière ([8], [21] et [78]).

5.1.2. [37]. Si $P < Q$ sont deux idéaux premiers d'une \mathbb{k} -algèbre noethérienne R avec $\text{haut}(Q/P) = 1$, alors il est bien connue de [54, Corollary 3.16], que $\text{GKdim}(R/P) \geq \text{GKdim}(R/Q) + 1$. Cette inégalité peut être stricte, le théorème suivant due a Goodearl-Lenagan, donne des conditions suffisantes pour assurer l'égalité.

Théorème. Soit R une \mathbb{k} -algèbre Auslander-Gorenstein et Cohen-Macaulay avec $\text{GKdim}(R)$ finie, et soient $P < Q$ deux idéaux premiers de R tel que $\text{haut}(Q/P) = 1$. S'il existe un élément $x \in Q \setminus P$ qu'est normal modulo P , alors $\text{GKdim}(R/P) = \text{GKdim}(R/Q) + 1$.

Démonstration. voir [37, Theorem 1.4]. □

On dit qu'une \mathbb{k} -algèbre noethérienne satisfait la *formule des hauteurs de Tauvel*, si

$$\text{haut}(P) + \text{GKdim}(R/P) = \text{GKdim}(R),$$

pour tous idéal premier P de R . Si de plus R est caténaire, alors la formule des hauteurs de Tauvel se passe aux quotients premiers, puisque

$$\text{haut}(Q/P) = \text{haut}(Q) - \text{haut}(P) = \text{GKdim}(R/P) - \text{GKdim}(R/Q),$$

pour tout paire des premiers $P < Q$ de R .

On a vue que la séparation normale implique à travers de la AR-séparation, la condition forte de second niveau. K. R. Goodearl et T. Lenagan ont montré que cette séparation plus les conditions de Auslander-Gorenstein et Cohen-Macaulay et la finitude de la GK-dimension, impliquent la catéarité :

Théorème 5.1.3. [37] Soit R une \mathbb{k} -algèbre affine, noethérienne, Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay, avec la GK-dimension finie. Si $\text{Spect}(R)$ satisfait la séparation normal, alors R est caténaire. Si de plus R est un anneau premier, alors il satisfait la formule des hauteurs de Tauvel.

Démonstration. Supposons que $P = P_0 < P_1 < \dots < P_n = Q$ une suite saturée des idéaux premiers de R . D'après le théorème 5.1.2,

$$\text{GKdim}(R/P_{i-1}) - \text{GKdim}(R/P_i) = 1,$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. La somme de tous ces termes donne $\text{GKdim}(R/P) - \text{GKdim}(R/Q) = n$. Ce qui signifie que toutes les chaînes saturées des idéaux premiers entre P et Q ont la même longueur, naturellement, $\text{GKdim}(R/P) - \text{GKdim}(R/Q)$. Finalement, si 0 est idéal premier, on obtient la formule des hauteurs de Tauvel. \square

Si P est un idéal complètement premier d'un anneau noethérien R , on note $\mu_i(P, R)$ et on appelle $i^{\text{ème}}$ invariante de Bass de R , la dimension sur le corps gauche, $\text{frac}(R/P)$ de l'espace vectoriel $\text{frac}(R/P) \otimes_{R/P} \mathbf{Ext}_R^i(R/P, R)$.

Remarque 5.1.4. ([58, Remark 4]) $\mu_i(P, R) \neq 0$ si et seulement si $E(R/P)$ apparaît dans le $i^{\text{ème}}$ R -module de la résolution injective minimale de ${}_R R$.

L'un des plus part des problèmes qu'on présente lors d'étude de la résolution minimale d'une algèbre noethérienne R , est le calcul des invariants de Bass, voir pour le moment [58]. Ce calcul dépend naturellement des groupes $\mathbf{Ext}_R^i(R/P, R)$, pour chaque idéal complètement premier P . Le cas où P est engendré par une suite régulière normalisante, K. A. Brown et T. Levasseur [11, Corollary 2.5] on donné une réponse à ce problème :

5.1.5. Soit R un \mathbb{k} -algèbre et I un idéal de R avec une suite génératrice $\{f_1, \dots, f_m\}$ régulière normalisante. Supposons que chaque automorphisme $\bar{\sigma}_i$ de $R_i := R/\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$, associé à f_i , proviens d'un automorphisme σ_i de R ; dans ce cas on a

$$\sigma_i(r)f_i \equiv f_i r [\text{mod} \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle],$$

pour tout $r \in R$. Soit M un R -module à gauche, on note par ${}^\sigma M$, où σ est un endomorphisme d'anneau de R , le module induit; c'est à dire que le groupe abélien ${}^\sigma M = M$ et que chaque $r \in R$ agit sur $x \in {}^\sigma M$ par $r.x = \sigma(r)x$.

Corollaire. [11, Corollary 2.5] Soient R, I et $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ comme ci-dessus, $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m$. Alors, comme $(R_m - R)$ -bimodule,

$$\mathbf{Ext}_R^i(R/I, R) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq m \\ \frac{{}^\sigma R}{\sum_{1 \leq j \leq m} f_j {}^\sigma R}, & \text{si } i = m. \end{cases}$$

En particulier, comme R -modules, $\mathbf{Ext}_R^m(R/I, R) \cong R/\sigma(I)$.

Remarque 5.1.6. Dans les plus part des cas, R est un anneau noethérien et $I = P$ est un idéal complètement premier de R dont les automorphismes du corollaire 5.1.5 sont linéaires sur la suite $\{f_1, \dots, f_m\}$; dans ce cas on a $\sigma(I) \subseteq I$ et donc $\sigma(I) = I^1$. Cela implique clairement que $\mu_i(I, R) = 0$ quand $i \neq m$ et que $\mu_m(I, R) = 1$.

Une autre approximation au calcul des invariants de Bass est l'algorithme de calcul des $\text{Ext}_R^i(M, N)$, pour n'importe quelle algèbre de type P.B.W, où M est un module de type fini et N un R -bimodule central; qui a été dernièrement effectué par J.L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas et F.J. Lobillo dans [15, Proposition 3.1, Theorem 3.4].

5.2 La résolution injective minimale de H'_{q^2} .

Cette partie est l'analogie de la 4^{ième} partie de [57], sauf en ce qui concerne la preuve du théorème 5.2.3, (4.2 de [57]). D'après le lemme de [78] H'_{q^2} est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-régulière, Cohen-Macaulay, et en utilisant le théorème 5.1.3, H'_{q^2} satisfait la formule des hauteurs de Tauvel. On peut vérifier sans aucune difficulté que $\text{GKdim}(H'_{q^2}) = 3$.

On note par A l'algèbre H'_{q^2} et on suppose que q n'est pas racine de l'unité.

Proposition 5.2.1. *Pour tout idéal premier P de A avec $d = j_A(A/P)$ on a : $\mu_d(P, A) = 1$ et $\mu_i(P, A) = 0$ si $i \neq d$.*

Démonstration. D'après la section 2.4, tout idéal premier de A est engendré par une suite régulière normalisante et que les automorphismes des algèbres quotient associées proviennent des automorphismes de A , on ait donc sous les conditions du corollaire 5.1.5, ce qui achève la preuve. □

Si M est A -module à gauche non nul de type fini, on dit que M est *critique* si $\text{GKdim}M/N \not\leq \text{GKdim}M$, pour chaque sous-module non nul N de M . Comme dans ([57], proposition 2 de 4.1) on a :

Proposition 5.2.2. *La résolution injective minimale du A -module à gauche A est de la forme :*

$$0 \rightarrow A \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$$

où $E_0 = \text{frac}(A)$ et pour $i \geq 1$, $E_i = E_i^I \oplus E_i^{II}$ où $E_i^I = \bigoplus_{\substack{P \in \text{Spect}(A) \\ \text{haut}(P)=i}} E(A/P)$, et où E_i^{II}

est l'enveloppe injective d'une somme des modules critiques chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur.

On montre maintenant que $E_3^{II} = 0$. Mais on va procéder d'une manière différente de celle de [57], on appliquant le corollaire (3.8) de [31].

¹Cette égalité vient de la chaîne ascendante $I \subseteq \sigma^{-1}(I) \subseteq \dots \subseteq \sigma^{-k}(I) \subseteq \dots$.

Rappelons quelques résultats de [31]. Soit R une \mathbb{k} -algèbre, on note σ_{cof} le radical symétrique déterminé par \mathcal{L} , le filtre de Gabriel constitué par tous les idéaux à gauche de codimension finie ([31], 1). Suivant la même référence, on note par $\mathcal{Z}_{(\sigma_{cof})}$ l'ensemble de tous les idéaux premiers de codimension finie. On dit que R est *ponctuée* si tout $P \in \mathcal{Z}_{(\sigma_{cof})}$ a une codimension égale à un. D'après le corollaire (3.8) de [31], si R est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-Gorenstein et Cohen-Macaulay ponctuée, alors $E_{\text{Injdim}R} \cong \bigoplus_{P \in \mathcal{Z}_{(\sigma_{cof})}} E(R/P)$ si et seulement si $\text{Injdim}R = \text{GKdim}R$, où $\text{Injdim}R$ désigne la dimension injective de R et $E_{\text{Injdim}R}$ est le dernier terme de la résolution injective minimale du R -module à gauche ${}_R R$.

Théorème 5.2.3. *On a : $E_3 \cong \bigoplus_{\substack{P \in \text{Spect}(A) \\ \text{haut}(P)=3}} E(A/P)$ et donc $E_3^{II} = 0$.*

Démonstration. Comme A est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-Gorenstein et Cohen-Macaulay de Gelfand-Kirillov dimension égale à 3, il suffit, pour appliquer le corollaire (3.8) de [31] rappelé ci-dessus, de vérifier que A est ponctuée. Mais cela vient du fait que les idéaux premiers localement finis sont les maximaux qui ont la codimension égale à un (proposition 2.4.2). Il est clair qu'ils sont de hauteur 3, d'où $E_3^{II} = 0$. \square

5.3 La résolution injective minimale de $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$.

On note par R l'algèbre $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Le corollaire suivant est une variante de [66, Theorems 8,11] (voir aussi [66, Theorem 10]). Mais, comme la classe des \mathbb{k} -algèbres considérés dans [66] (sous la condition que tous les u_i ont pour degré total 2, notation de la même référence) forme partie de celles étudiées dans [26] et [34], une preuve alternative de [66, Theorem 8] peut être donnée comme conséquence de [26, Teorema 14] ou de [34, Theorem 3].

Corollaire 5.3.1. *L'algèbre R est Auslander-régulière, Cohen-Macaulay, caténaire et satisfait la formule des hauteurs de Tauvel.*

Démonstration. D'après, [66, Theorem 8], R est Auslander-régulière, Cohen-Macaulay. En appliquant le théorème 5.1.3, en vertu la proposition 3.2.5, on obtient le reste des assertions. \square

Remarque 5.3.2. Soit A une \mathbb{k} -algèbre Auslander-Gorenstien et Cohen-Macaulay, alors d'après [31, Theorem 3.5], on a $\text{GKdim}(A) = \text{Injdim}A$ si et seulement s'il existe des A -modules à gauche fini (i.e. de dimension finie comme \mathbb{k} -espace). Pour notre cas, il est clair que si $z_0 = 0$, alors R admet des modules fini; et si $z_0 \neq 0$ alors, d'après [50], R admet aussi des modules fini. En conclusion le corollaire 5.3.1, implique que

$$\text{Injdim}R = \text{GKdim}(R) = 2n,$$

et que $j(R/P) = \text{haut}(P)$ pour tout idéal premier P de R .

Maintenant, on peut appliquer [56, Théorème 3.5] pour avoir :

Proposition 5.3.3. *Si chacun des $c_i d$, $i = 1, \dots, n$, est non racine de l'unité. Alors la résolution injective minimale de ${}_R R$ est de la forme suivante :*

$$0 \rightarrow R \rightarrow E_0 \rightarrow \dots \rightarrow E_{2n} \rightarrow 0,$$

où $E_0 = \text{frac}(R)$ et pour chaque $i \geq 1$, $E_i = E_i^I \oplus E_i^{II}$ où

$$E_i^I = \bigoplus_{\substack{P \in \text{Spect}(R) \\ \text{haut}(P)=i}} \mu_i(P, R) E(R/P)$$

et E_i^{II} est l'enveloppe injective d'une somme des modules critiques chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur.

Comme d'habitude, on va examiner le dernier terme qui apparaît dans la résolution injective précédente. Plus précisément, on montre que ce terme est isomorphe à R^o , le sous espace vectoriel de $R^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(R, \mathbb{k})$ des formes linéaires f tels que $I \subseteq \text{Ker}(f)$ pour un certain idéal à gauche co-fini (i.e. $\dim_{\mathbb{k}}(R/I) < \infty$).

Notant que les conditions faites sur le corps de base \mathbb{k} , impliquent que tout idéal premier de R de co-dimension finie a pour cette dimension un. On déduit donc, d'après [31, Corollary 3.8, Theorem 3.9], que

Corollaire 5.3.4. *Soit E_{2n} le dernier terme dans la résolution injective minimale du $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$ -module à gauche $R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})$. Alors*

$$E_{2n} \cong R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})^o \cong \bigoplus_{\text{haut}(P)=2n} E(R_n^{(C,\Lambda)}(\mathbb{k})/P).$$

Remarque 5.3.5. Considérons $R = A_2^{(q,\Lambda)}(\mathbb{k})$ et supposons que Γ_2 est un groupe libre de rang 3. Alors $T = \{z_1, y_2, z_2\}$ est un ensemble admissible de R qui engendre un idéal complètement premier de hauteur égale à 2. On se propose de calculer les invariants de Bass $\mu_i(\langle T \rangle, R)$ de R . D'après [58, Theorem 4.3], on sait que $\mu_2(\langle T \rangle, R) \neq 0$ et que $\mu_i(\langle T \rangle, R) = 0$ si $i \neq 2$, puisque $j(R/\langle T \rangle) = \text{haut}(\langle T \rangle) = 2$. D'autre part, même que $\{z_1, y_2\}$ est une suite régulière normalisante et génératrice de $\langle T \rangle$, les conditions du critère 5.1.5 ne sont pas satisfaites, sous les hypothèse faites sur le groupe Γ_2 . Par contre si on applique sur R avec l'ordre lexicographique \prec_{lex} de la section 3.2.2, l'algorithme [15, Theorem 3.4], on trouve que

$$\mathbf{Ext}_R^2(R/\langle T \rangle, R) \cong R/\langle T \rangle,$$

comme R -module. On en déduit que $\mu_2(\langle T \rangle, R) = 1$. Par symétrie, le même résultat s'applique si on prend comme ensemble admissible $T = \{z_1, x_2, z_2\}$.

Le corollaire suivant donne une réponse affirmative de la question de M.P. Malliavin [58, Problem 4.5] pour l'algèbre de Weyl quantique $A_2^{(q,\Lambda)}(\mathbb{k})$.

D'après [27, Corollary 4.2], la remarque 5.3.5, la proposition 5.3.3 et le corollaire 5.3.4 on a

Corollaire 5.3.6. *Si Γ_2 est un groupe libre de rang 3, alors la résolution injective minimale du $A_2^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ -module à gauche $A_2^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ est de la forme*

$$0 \rightarrow A_2^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k}) \rightarrow E_0 \rightarrow \cdots \rightarrow E_4 \rightarrow 0,$$

où $E_0 = \text{frac}(A_2^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k}))$ et pour tout $i \geq 1$, $E_i = E_i^I \oplus E_i^{II}$ où

$$E_i^I = \bigoplus_{\substack{P \in \text{Spect}(A_2^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})) \\ \text{haut}(P)=i}} E(A_2^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})/P)$$

et E_i^{II} est l'enveloppe injective d'une somme des modules critiques chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur, avec $E_4^{II} = 0$.

Chapitre 6

Inégalité de Bernstein pour une localisation simple de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$.

Introduction.

Dans ce chapitre on démontre l'inégalité de type "inégalité de Bernstein" pour une localisation simple de l'algèbre $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$. Les résultats obtenus ici se ressemblent beaucoup à ceux obtenus par L. Rigal dans [74] pour l'algèbre $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$; mais ils sont démontrés par des méthodes légèrement différentes.

6.1 L'algèbre $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$.

La localisation de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ par rapport à l'ensemble multiplicatif \mathcal{Z} engendré par z_1, \dots, z_n (remarquons que c'est un ensemble de Ore à droite par (2.10)), sera noté par $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$. Si on pose $u_n = z_1 \cdots z_n$, alors on peut vérifier facilement, par la propriété universelle, que $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est isomorphe au localisé de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ par rapport aux puissances de u_n . D'après [66, Proposition 9(1)], si q n'est pas racine de l'unité, $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre simple. Ici on donne une preuve très courte de cette proposition, en utilisant nos résultats de la section 2.3.2 :

Proposition 6.1.1. *Considérons $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et sa localisation $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ par rapport à l'ensemble multiplicatif \mathcal{Z} . Alors si q n'est pas racine de l'unité, $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre simple.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ n'est pas une algèbre simple et soit \mathcal{P} un idéal maximal non nul de $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$. Alors $\mathcal{P}^c = \mathcal{P} \cap \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ tel que $\mathcal{P}^c \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Cela entraîne que $\mathcal{P}^c \in \text{Spect}_\emptyset \mathcal{O}_q(\mathbf{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}) = \{\langle 0 \rangle\}$, ce qui est faux, d'après le théorème 2.3.15. \square

Fixons les notations suivantes, pour $\lambda \in \mathbb{k}^*$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$, on note $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_\lambda = \mathbf{a}\mathbf{b} - \lambda\mathbf{b}\mathbf{a}$ et pour $r \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{k}$, on note $(r)_k = 1 + k + \dots + k^{r-1}$, $(0)_k = 1$ par convention. Le lemme suivant sera utiliser dans la suite, c'est un cas particulier du lemme 3.2.1.

Lemme 6.1.2. *Considérons $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et ses générateurs avec les relations (2.9). Alors*

(a) $[x_n^r, y_n]_{q^{2r}} = q(r)_{q^2} z_{n-1} x_n^{r-1}$, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

(b) $[x_n, y_n^r]_{q^{2r}} = q(r)_{q^2} z_{n-1} y_n^{r-1}$, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

(c) Soit $W_n = z_{n-1}^{-1} z_n \in \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ et $P = \sum_{0 \leq i \leq r} k_i W_n^i$, $k_i \in \mathbb{k}$, on a
 $[x_n, [x_n, \dots, [x_n, [x_n, P]]_{q^2}, \dots]_{q^{2(r-2)}}]_{q^{2(r-1)}} = k_r (q^{2r} - 1)(q^{2r} - q^2) \dots (q^{2r} - q^{2(r-1)}) W_n^r x_n^r$.

Considérons l'extension de Ore de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ suivante

$$\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})[v_n; \sigma_n],$$

où σ_n est défini par

$$\begin{aligned} \sigma_n(y_i) &= q^{-2(n-i+1)} y_i \\ \sigma_n(x_i) &= q^{2(n-i+1)} x_i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Le lemme suivant est la version "symplectique" de [74, Proposition 1.2.9] donnée pour l'algèbre de Weyl quantique.

Lemme 6.1.3. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité. Alors $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \cong \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$, où \mathcal{I}_n est l'idéal engendré par l'élément central $u_n v_n - 1$.*

Démonstration. Il est clair que l'application

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n}) &\longrightarrow \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n \\ x_i &\longmapsto x_i + \mathcal{I}_n, \quad i = 1, \dots, n, \\ y_i &\longmapsto y_i + \mathcal{I}_n, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

est un morphisme de \mathbb{k} -algèbre surjectif et que $\phi_n(u_n) = u_n + \mathcal{I}_n$ est inversible dans $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$. D'où ϕ_n peut être prolonger à $\overline{\phi}_n : \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$, ce qui donne un isomorphisme, puisque $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est simple, par la proposition 6.1.1. \square

Proposition 6.1.4. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité. Alors $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-régulière, Cohen-Macaulay de dimension de Gelfand-Kirillov égale à $2n$.*

Démonstration. On sait d'après [14, Theorem 2.14] que $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ peut être filtrée par une filtration finie dont la \mathbb{k} -algèbre graduée associée, est un espace quantique $(2n+1)$ -dimensionnelle. Ensuite, d'après [78, Lemma] et [23, Lemma 3.8], $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ est Auslander-régulière, Cohen-Macaulay, voir aussi le corollaire 5.3.1. Maintenant, d'après le lemme 6.1.3, $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \cong \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$ où $\mathcal{I}_n = \langle u_n v_n - 1 \rangle$ est engendré par un élément central, d'où [78, Lemma(iii)] implique que $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est Auslander-Gorenstein, Cohen-Macaulay; comme $\text{gldim} R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ est finie, par [62, 7.4.3] et [33, Corollary 2.8(2)], on a donc la propriété Auslander-régulière.

Pour le calcul de la dimension de Gelfand-Kirillov, il est clair que $\text{GKdim}(\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})) = 2n + 1$ et que $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ est une \mathbb{k} -algèbre de type P.B.W par rapport à l'ordre lexicographique gradué. Comme \mathcal{I}_n est un idéal principal engendré par un élément central non inversible, on utilise la proposition citée dans l'exemple 1.9.8, on obtient :

$$\text{GKdim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) = \text{GKdim}\left(\frac{\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})}{\mathcal{I}_n}\right) = (2n + 1) - 1 = 2n.$$

□

Remarque 6.1.5. (1) Tout $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche M est un $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche tel que $\mathcal{I}_n.M = 0$.

(2) Soit $\Psi_n : \mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ l'application définie par $\Psi_n(v_{n-1}) = z_n v_n$ et l'identité sur $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times (n-1)})$, il est clair qu'elle est injective. On en déduit donc que $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ peut être identifié avec $\Psi_n(\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k}))$ et \mathcal{I}_{n-1} avec $\Psi_n(\mathcal{I}_{n-1})$.

6.2 Inégalité de Bernstein.

Avant d'établir l'inégalité de Bernstein, on montre que chaque $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche induit, sur lui-même, une structure de $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -module à gauche, par l'injection de la remarque 6.1.5(2), et tout $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche qui est de longueur finie est nul comme $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -module.

Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche aussi un $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche avec $\mathcal{I}_n.M = 0$. La structure de $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche induit, par Ψ_n (remarque 6.1.5(2)), une structure de $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -module à gauche avec $\mathcal{I}_{n-1}.M = 0$, comme suit

$$\begin{aligned} v_{n-1}.m &= \Psi_n(v_{n-1}).m = z_n v_n.m \\ &= (z_n + \mathcal{I}_n)(v_n + \mathcal{I}_n)m \\ &= z_n u_n^{-1}m, \text{ pour tout } m \in M. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Lemme 6.2.1. Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche et $W_n = z_{n-1}^{-1}z_n \in \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$. Alors

$$\begin{aligned} \rho_{W_n} : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto W_n.m, \end{aligned}$$

est une application $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -linéaire.

Démonstration. D'après les équations (2.10), il est clair que $\rho_{W_n}(x_i m) = x_i \rho_{W_n}(m)$ et que $\rho_{W_n}(y_i m) = y_i \rho_{W_n}(m)$ pour chaque $m \in M$ et tout $i = 1, \dots, n-1$. Maintenant, $\rho_{W_n}(v_{n-1}.m) = W_n(z_n u_n^{-1}m)$, pour tout $m \in M$, par (6.1). Mais les équations (2.10) impliquent que

$$\begin{aligned} W_n(z_n u_n^{-1}) &= z_{n-1}^{-1}z_n(z_n z_n^{-1} \cdots z_1^{-1}) \\ &= z_n(z_n^{-1} \cdots z_1^{-1})z_{n-1}^{-1}z_n \\ &= z_n u_n^{-1}W_n. \end{aligned}$$

Alors $\rho_{W_n}(v_{n-1}.m) = (W_n(z_n u_n^{-1}))m = z_n u_n^{-1}(W_n m) = v_{n-1}.\rho_{W_n}(m)$. \square

Proposition 6.2.2. *Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche, qui est de longueur finie, comme $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -module à gauche. Alors $M = 0$.*

Démonstration. D'après [18, Propositions 2 et 5], $\text{End}_{\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})}(M)$ est algébrique sur le corps de base \mathbb{k} . Alors il existe $P(t) = \sum_{0 \leq i \leq r} k_i t^i \in \mathbb{k}[t]$ tel que $P(\rho_{W_n}) = 0$, où ρ_{W_n} étant l'application du lemme 6.2.1, d'où $\sum_{0 \leq i \leq r} k_i W_n^i M = 0$. En utilisant le lemme 3.2.1(c), on obtient $W_n^r x_n^r M = 0$, c'est à dire $x_n^r M = 0$. D'après le lemme 3.2.1(a), on a $z_{n-1} x_n^{r-1} M = 0$, ce qui entraîne que $x_n^{r-1} M = 0$. On continue d'appliquer le lemme 3.2.1(a), on arrive ainsi à $M = 0$. \square

Théorème 6.2.3. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité et M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche non nul de type fini. Alors $\text{GKdim}(M) \geq n$.*

Démonstration. Analogue à [74, Théorème 3.1.4]. On utilise une récurrence sur n . Pour $n = 1$, supposons que $\text{GKdim}(M) < 1$, cela signifie que M est de dimension finie comme \mathbb{k} -espace vectoriel et aussi $\text{End}_{\mathbb{k}}(M)$. Mais $\mathcal{B}_1^q(\mathbb{k})$ est une algèbre simple, alors elle s'injecte dans $\text{End}_{\mathbb{k}}(M)$, ce qui est impossible car $\mathcal{B}_1^q(\mathbb{k})$ est dimension infinie. Supposons que le théorème est vrai pour $n - 1$. On suppose, comme dans le cas précédent, que $\text{GKdim}(M) \leq n - 1$. Soit $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une bonne filtration de M ¹, d'après [14, Theorem 2.3] (ou la preuve de la proposition 6.1.4), $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ a une filtration finie dont le gradué associé est un espace quantique $(2n + 1)$ -dimensionnelle. On utilise [61, Theorem 5.2] ou [32, Proposition 1.8 et 1.9], il existe alors $\pi_{M, \mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[t]$ de degré d et de coefficient dominant a_d tel que

$$\pi_{M, \mathcal{F}}(s) = \dim_{\mathbb{k}} \left(M_0 \oplus \frac{M_1}{M_0} \cdots \oplus \frac{M_s}{M_{s-1}} \right) = \dim_{\mathbb{k}}(M_s), \text{ pour tout } s \gg 0,$$

$d!a_d \in \mathbb{N}^*$ et $\text{GKdim}(M) = d$. En plus $e(M) = d!a_d$ est indépendant du choix de \mathcal{F} . Alors il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim_{\mathbb{k}}(M_i) \leq c(i + 1)^{n-1}$. Posons $M'_i = M_{3i}$ et considérons N un $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -submodule of M de type fini. D'où $\{N \cap M'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une filtration de N . En effet, notons par $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})(s)$ l'espace engendré par les monômes de degré total $\leq s$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise l'injection Ψ_n de la remarque 6.1.5(2), on obtient $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})(s) \subseteq \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})(3s)$, d'où $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})(s)(N \cap M'_i) \subseteq N \cap M_{3(i+s)}$ ce qui confirme l'assertion. Maintenant, considérons $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une bonne filtration de N , il existe donc $a \in \mathbb{N}$ tel que $N_i \subseteq N \cap M'_{i+a}$, d'où

$$\dim_{\mathbb{k}}(N_i) \leq c(3i + 3a + 1)^{n-1}.$$

Ensuite $\text{GKdim}(N) = n - 1$, par hypothèse de récurrence, et $e(N) \leq c(n - 1)!3^{n-1}$. Si $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_r$ est une suite des $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -submodules de type fini of M , on a par hypothèse

¹Une *bonne filtration* d'un module ${}_R M$, où R est filtré, est une filtration dont le gradué associé $\text{gr}(M)$ est un $\text{gr}(R)$ -module de type fini. On rappelle de [62, Lemma 7.6.11], que dans ce cas M doit être de type fini et que les modules de type fini ont toujours une bonne filtration.

de récurrence, $\text{GKdim}(N_i) = \text{GKdim}(N_i/N_{i-1})$ et donc $e(N_i) = e(N_{i-1}) + e(N_i/N_{i-1})$, d'où $e(N_i) - e(N_{i-1}) \in \mathbb{N}^*$. De la suite $e(N_0) < \dots < e(N_r) \leq c(n-1)!3^{n-1}$, on peut déduire que $r \leq c(n-1)!3^{n-1}$ et que M est de longueur finie comme $\mathcal{H}_{n-1}^q(\mathbb{k})$ -module, d'où $M = 0$ par la proposition 6.2.2; on aboutit donc à une contradiction. \square

Remarque 6.2.4. Suivant [4, Theorem 1.2] et la proposition 6.1.1, on a

$$\text{GKdim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \leq \text{GKdim}(M)(\text{fil.dim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) + \max\{\text{fil.dim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})), 1\}), \quad (6.2)$$

pour tout $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche non nul et de type fini M ; où le nombre $\text{fil.dim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}))$ est la dimension filtrée (voir aussi [4] pour la définition). Le résultat du théorème 6.2.3 peut être donc déduit de l'inégalité de Bavula (6.2), si on prouve que $\text{fil.dim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) = 1$ (rappelons que $\text{GKdim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) = 2n$ proposition 6.1.4). Le chemin que nous voyons plus claire pour vérifier cette égalité, est le même qui a été utilisé dans [4, Theorem 1.10] pour la algèbre de Weyl classique; c'est à dire prouve la double inégalité en appliquant [4, Corollary 1.7, Lemma 1.8]. Pour appliquer [4, Lemma 1.8], on peut s'appuyer sur le lemme 6.1.2 et sa nouvelle version dans $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$. Pour appliquer [4, Corollary 1.7], on a besoin de rencontre des modules de type fini non nuls tels que $0 < \text{GKdim}(M) \leq \text{GKdim}(\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}))/2$ (appelés module "weak holonomic"); ce qui n'est pas du tout claire. Dans la section suivante on démontre l'existence des tels modules.

Soit M un $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de type fini, l'entier positive $e(M)$ qui apparaît dans la démonstration du théorème précédent s'appelle *la multiplicité* de M .

Comme application du théorème 6.2.3, on donne un analogue du dualité de Bernstein et on calcule aussi la dimension homologique de $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$.

Définition 6.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche non nul M est dit *holonome*, si il est de type fini avec $\text{GKdim}(M) = n$.

Du théorème 6.2.3, on déduit que tout sous-module non nul et factor non nul d'un module holonome est aussi un module holonome. Pour un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de longueur finie M , on note par $lg(M)$ sa longueur.

Théorème 6.2.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche holonome. Alors M est de longueur finie et $lg(M) \leq e(M)$. En particulier M is cyclique.

Démonstration. Soit $N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \dots \subsetneq N_r \subseteq M$, une suite de sous-modules non nul de M . D'après le théorème 6.2.3 on a $\text{GKdim}(N_i) = n$ pour tout $i = 0, \dots, r$ et $\text{GKdim}(N_i) = \text{GKdim}(N_{i+1}) = \text{GKdim}(N_{i+1}/N_i)$. Alors $e(N_{i+1}) - e(N_i) \in \mathbb{N}^*$ et $e(M) - e(N_r) \in \mathbb{N}$ d'où $r \leq e(M)$. Ce qui entraîne que M est de longueur fini. On sait que $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est un domain noethérien qui n'est pas un corps, alors il est de longueur infinie. Comme $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est simple, [7, Theorem 1.8.18] implique que tout $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de longueur finie est cyclique. \square

Proposition 6.2.7. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité. Alors $\text{gldim} \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) = n$.*

Démonstration. Analogue à [74, remarque 6.2.4]. D'après [33, Corollary 2.8(2)], on a

$$\text{gldim} \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp} \mathbb{k}^{2 \times n}) \leq 2n,$$

appliquons [62, 7.4.3], on obtient que $\text{gldim} \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est finie. Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de type fini et $j > n$, alors $\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) = 0$. En effet, les conditions de Auslander-Gorenstien, Cohen-Macaulay (proposition 6.1.4) implique que

$$\text{GKdim}(\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}))) \leq 2n - j < n,$$

alors de l'inégalité de Bernstein (théorème 6.2.3) on a $\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) = 0$. Maintenant, d'après [75, Lemma B.2.1(a)] on a $\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, N) = 0$, pour tout $j > n$ et tout $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche N . En appliquant [9, §8 N° 3 Proposition 4] on trouve $\text{gldim} \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \leq n$. L'existence des modules holonomes (voir la section suivante) et la condition de Cohen-Macaulay, assure l'existence d'un module de type fini M tel que $j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}(M) = n$, i.e. $\text{gldim} \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \geq n$. En conclusion $\text{gldim} \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) = n$. \square

Lemme 6.2.8. *Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de type fini. Si q est non racine de l'unité, alors*

(i) *M est un module holonome si et seulement si il satisfait l'équivalence*

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \neq 0 \iff j = n.$$

(ii) *Si M est holonome, alors $\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}))$ l'est aussi.*

Démonstration. (i) Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de type fini. D'après la condition Cohen-Macaulay, M est holonome si et seulement si $j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}(M) = n$. Maintenant, on suppose $\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \neq 0$, pour certain j , alors $n \leq j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}(M) \leq j \leq n$, d'après la proposition 6.2.7. Et par suite $j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}(M) = n = j$ si et seulement si $\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^j(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \neq 0$. (ii) On applique [8, Proposition 1.6] pour avoir :

$$j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})} \left(\mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^{j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}(M)}(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \right) = j_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}(M);$$

on conclue par la condition de Cohen-Macaulay. \square

Pour un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche holonome M , on note $M^* = \mathbf{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^n(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}))$ et on appelle le *dual* de M , c'est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à droite.

Théorème 6.2.9. *L'application $M \mapsto M^*$ définit un foncteur contravariant de la catégorie des $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche holonomes dans la catégorie des $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -modules à droite holonomes.*

Démonstration. On peut déduire du lemme 6.2.8(ii) que, si M est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche holonome, alors M^* est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à droite holonome. Considérons la suite exacte suivante $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow 0$, des $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -modules à gauche holonomes. En utilisant le lemme 6.2.8(i), la suite homologique exacte longue correspondante (voir [62, 7.1.12(iii)] pour les définitions) devient

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^n(K, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^n(M, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})}^n(L, \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})) \rightarrow 0,$$

ce qui achève la preuve. \square

6.3 Les modules holonomes et le polynôme de Bernstein.

On commence cette section par la donnée d'un critère sur les $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -modules à gauche de type fini, pour quels soient holonomes. On utilise les mêmes techniques que dans [74], les exemples de tels modules sont construites à travers le corps gauche des fractions d'une sous-algèbre de l'espace quantique attaché à $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$. Avec eux on peut prouver l'existence du polynôme de Bernstein.

Théorème 6.3.1. *Soit M un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche non nul. On suppose que, comme $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module, M est filtré par la filtration $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et qu'il existent $c_1 \in \mathbb{N}^*$, $c_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$*

$$\dim_{\mathbb{k}}(M_i) \leq c_1 i^n + c_2 (i + 1)^{n-1}.$$

Alors M est de type fini avec $\text{GKdim}(M) = n$ et $e(M) \leq c_1 n!$.

Démonstration. Soit N un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -sous-module non nul de type fini de M et soit $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une bonne filtration de N comme $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche. Alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $N_i \subseteq M_{i+a} \cap N$, d'où $\dim_{\mathbb{k}}(N_i) \leq c_1 (i + a)^n + c_2 (i + a + 1)^{n-1}$ et donc $\dim_{\mathbb{k}}(N_i) \leq c_1 i^n + c_3 (i + 1)^{n-1}$ pour certain $c_3 \in \mathbb{N}$. Alors comme N est un $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module de type fini, on a $\text{GKdim}(N) \leq n$ et $e(N) \leq c_1 n!$. D'autre part N est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module de type fini, alors le théorème 6.2.3 impose $\text{GKdim}(N) = n$. Maintenant, soit $N_0 \subsetneq \cdots \subsetneq N_r$ une chaîne strictement ascendante des $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -sous-modules de type fini de M . Alors comme ci-dessus $r \leq e(N_r) \leq c_1 n!$. Et par suite, M est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module de longueur finie et donc de type fini; bien sûr $\text{GKdim}(M) = n$ et $e(M) \leq c_1 n!$. \square

Dans ce qui suit, on donne des exemples de modules qui satisfont les conditions du théorème précédent. Soit $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y_1, \dots, Y_n] := \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$ la sous-algèbre de l'espace quantique $2n$ -dimensionnelle $\mathbb{k}_{\mathcal{Q}_n}[Y_1, X_1, \dots, Y_n, X_n]$ attaché à $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$, où \mathbf{q}_n est une matrice déduit des relations de semi-commutativité entre les Y_i . On note par $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ l'algèbre

de McConnell-Pettit associée à la matrice \mathbf{q}_n . Soit $i \in \{1, \dots, n\} := \mathbb{N}_n$, on considère l'automorphisme suivant de $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_i : \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y] &\longrightarrow \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y] \\ Y_j &\longmapsto \begin{cases} q^2 Y_j, & j \leq i \\ Y_j, & j > i, \end{cases} \end{aligned}$$

et son prolongement à $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y_1, \dots, Y_n) := \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y)$, qu'on note aussi par \mathcal{Z}_i . Soit, maintenant, l'endomorphisme suivant de $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y)$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i : \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y) &\longrightarrow \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y) \\ g^{-1}f &\longmapsto (q^2 - 1)^{-1} Y_i^{-1} (\mathcal{Z}_i(g^{-1}f) - q\mathcal{Z}_{i-1}(g^{-1}f)), \quad i > 1, \end{aligned}$$

$\mathcal{X}_1(g^{-1}f) = (q^2 - 1)^{-1} Y_1^{-1} \mathcal{Z}_1(g^{-1}f)$ et l'application \mathbb{k} -linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_i : \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y) &\longrightarrow \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y) \\ g^{-1}f &\longmapsto Y_i(g^{-1}f), \end{aligned}$$

où $0 \neq g, f \in \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$. Il est facile de voir que \mathcal{Y}_i est bijective. Soit $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $i \in \mathbb{N}_n$, on note

$$\theta_{i,q}(k) = q^{2 \sum_1^i k_j} \text{ avec } \theta_{0,q}(k) = 1, \text{ et } |k| = \sum_1^n |k_i|,$$

où $|l|$ est la valeur absolue de $l \in \mathbb{Z}$.

Lemme 6.3.2. *Soit $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Alors*

- 1) $\mathcal{Z}_j(Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}) = \theta_{j,q}(k) Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}$, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$;
- 2) $\mathcal{X}_i(Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}) = (q^2 - 1)^{-1} \theta_{i-1,q}(k)^{-1/2} (\theta_{i,q}(k) - q\theta_{i-1,q}(k)) Y_1^{k_1} \dots Y_i^{k_i-1} \dots Y_n^{k_n}$, $i > 1$
et $\mathcal{X}_1(Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}) = (q^2 - 1)^{-1} \theta_{1,q}(k) Y_1^{k_1-1} \dots Y_n^{k_n}$
- 3) $\mathcal{Y}_i(Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}) = \theta_{i-1,q}(k)^{-1/2} Y_1^{k_1} \dots Y_i^{k_i+1} \dots Y_n^{k_n}$;
- 4) Les applications $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i\}$ satisfont

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i \mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_i \mathcal{X}_i &= \mathcal{Z}_i, & \forall i \geq 1, \\ \mathcal{X}_i \mathcal{Y}_i - q^2 \mathcal{Y}_i \mathcal{X}_i &= \mathcal{Z}_{i-1}, \quad i > 1, \text{ et } \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1 = q^2 \mathcal{Y}_1 \mathcal{X}_1. \end{aligned}$$

Démonstration. C'est un calcul évident. □

Proposition 6.3.3. *Considérons $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ où q est non racine de l'unité. Alors il existe un morphisme d'algèbre injectif*

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_n : \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y)) \\ x_i &\longmapsto \mathcal{X}_i \\ y_i &\longmapsto \mathcal{Y}_i \\ z_i &\longmapsto \mathcal{Z}_i, \end{aligned}$$

$i \in \mathbb{N}_n$. En particulier $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ (resp. $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$) est isomorphe à une sous-algèbre de la \mathbb{k} -algèbre $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y))$, engendrée par $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i$ (resp. par $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i$).

Démonstration. Premièrement on a un morphisme $\Phi_n : \mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y))$, défini par $\Phi_n(x_i) = \mathcal{X}_i, \Phi_n(y_i) = \mathcal{Y}_i, i \in \mathbb{N}_n$, Φ est bien défini, d'après le lemme 6.3.2 et les équations (2.9). Comme $\mathcal{X}_i \mathcal{Y}_i - \mathcal{Y}_i \mathcal{X}_i = \mathcal{Z}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on a $\Phi_n(z_i) = \mathcal{Z}_i$. Mais $\mathcal{Z}_i, i \in \mathbb{N}_n$ sont des éléments inversibles dans $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y))$, d'où Φ_n se prolonge à $\overline{\Phi}_n$. Cette dernière application est injective, parce que $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est simple. \square

Remarque 6.3.4. (1) D'après la proposition 6.3.3, $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}(Y)$ est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche et aussi un $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ -module à gauche par restriction des scalaires. En plus, $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche, par le lemme 6.3.2.

(2) Si on note par I_n l'idéal à gauche engendré par x_1, \dots, x_n dans $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$, on a $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})/I_n \cong \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$ comme $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ -module à gauche, d'où $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$ est un $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ -module à gauche et bien sûr un $(\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n}) - \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y])$ -bimodule; ce qui entraîne que $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ est un $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ -module à gauche. Avec cette structure de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{spk}^{2 \times n})$ -module à gauche $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ n'admet pas une structure non trivial de $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche, car $z \cdot \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y] = 0$ quelques soit $z \in \mathcal{Z}$ l'ensemble multiplicatif engendré par z_1, \dots, z_n , puisque chacun des z_i congrue à zero modulo I_n . C'est à dire que $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ est \mathcal{Z} -torsion module.

(3) Par contre dans le cas de l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$, le quotient par l'idéal à gauche I_n engendré par les x_i permet d'étendre la $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$ -action à gauche natural sur l'algèbre de McConnell-Pettit de l'espace quantique E_n^Λ à une $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -action à gauche. Cela vient du fait que les z_i (les éléments normaux de $A_n^{(\mathbf{q}, \Lambda)}(\mathbb{k})$) modulo I_n congrues tous à 1; c'est à dire que cette algèbre de McConnell-Pettit est \mathcal{Z} -torsion libre dans ce cas, voir [74, remarque 4.1.4].

Lemme 6.3.5. *Considérons $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ comme $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche avec la structure de la remarque 6.3.4(1). Alors $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ est un module holonome.*

Démonstration. La structure de $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ est donnée par

$$\begin{aligned} x_i \cdot Y^\alpha &= \mathcal{X}_i(Y^\alpha), \quad i \in \mathbb{N}_n \\ y_i \cdot Y^\alpha &= \mathcal{Y}_i(Y^\alpha), \quad i \in \mathbb{N}_n \\ v_n \cdot Y^\alpha &= \mathcal{Z}_n^{-1} \dots \mathcal{Z}_1^{-1}(Y^\alpha), \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On note $V_s(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}])$, $s \in \mathbb{N}$, le \mathbb{k} -sous-espace de $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ engendré par l'ensemble $\{Y^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| \leq s\}$. En utilisant le lemme 6.3.2, on trouve

$$\mathcal{X}_i(V_s(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}])) \subseteq V_{s+1}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]),$$

$$\mathcal{Y}_i(V_s(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}])) \subseteq V_{s+1}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]),$$

$$\mathcal{Z}_n^{-1} \dots \mathcal{Z}_1^{-1}(V_s(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}])) \subseteq V_{s+1}(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]),$$

pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $s \in \mathbb{N}$. Cela signifie que $\{V_s(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}])\}_{s \in \mathbb{N}}$ est aussi une filtration du $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})$ -module $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$. D'autre part

$$\dim_{\mathbb{k}}(V_s(\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}])) \leq c_0 \binom{s+n}{n},$$

où $c_0 \in \mathbb{N}^*$. Le lemme, maintenant, est une conséquence du théorème 6.3.1. \square

Soit $P = Y_1^{k_1} \cdots Y_n^{k_n}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ un monôme de $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$. L'ensemble multiplicatif engendré par les puissances de P est un ensemble de Ore, on note par $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$ la localisation associée. Il est clair que $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$. La structure de $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche de $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ induit une structure de $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche sur $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$. Le corollaire suivant devient clair d'après le lemme 6.3.5.

Corollaire 6.3.6. $\mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$ est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ -module à gauche holonome.

Soit $\mathbb{k}(t)$ le corps des fraction de $\mathbb{k}[t]$ l'anneau des polynômes à une seule variable. On note par $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ la localisation de la $\mathbb{k}(t)$ -algèbre $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}(t)^{2 \times n})$ relative à l'ensemble multiplicatif engendré par les éléments normaux z_1, \dots, z_n . Soit $P = Y_1^{k_1} \cdots Y_n^{k_n}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ un monôme de $\mathbb{k}(t)_{\mathbf{q}_n}[Y]$ et $\mathcal{M} = \mathbb{k}(t)_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}] \cdot \mathcal{P}^t$ le $\mathbb{k}(t)_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$ -module à gauche libre de rang un et de base l'élément \mathcal{P}^t . Alors \mathcal{M} admet une structure de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}(t)^{2 \times n})$ -module à gauche (comme dans la proposition 6.3.3), définie par : Soit $r \in \mathbb{k}(t)_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$, on a

$$\begin{aligned} y_i \cdot (r\mathcal{P}^t) &= \mathcal{Y}_i(r)\mathcal{P}^t = (Y_i r)\mathcal{P}^t, & i = 1, \dots, n \\ x_i \cdot (r\mathcal{P}^t) &= \mathcal{X}_i^t(r)\mathcal{P}^t, & i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

où les applications \mathcal{X}_i^t sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i^t(r) &= (q^2 - 1)^{-1} Y_i^{-1} (\lambda_i(t) \mathcal{Z}_i(r) - q \lambda_{i-1}(t) \mathcal{Z}_{i-1}(r)), & i > 1 \\ \mathcal{X}_1^t(r) &= (q^2 - 1)^{-1} Y_1^{-1} \lambda_1(t) \mathcal{Z}_1(r), \end{aligned}$$

où $\lambda_i(t) \in \mathbb{k}(t) \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n$. On en déduit donc que $z_i(r\mathcal{P}^t) = \lambda_i(t) \mathcal{Z}_i(r)\mathcal{P}^t$ pour $i = 1, \dots, n$; comme les \mathcal{Z}_i induisent des automorphismes sur $\mathbb{k}(t)_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$, la structure ci-dessus peut être prolonger à une structure de $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -module à gauche.

Remarque 6.3.7. Supposons que q est non racine de l'unité.

(1) Si on prend $\lambda_1(t) = t\theta_{1,q}(k)$ et

$$\lambda_i(t) = t \left(\theta_{i,q}(k) + (q-1) \sum_{j=1}^{i-1} q^{i-1-j} \theta_{j,q}(k) \right), \quad i > 1.$$

alors $\mathcal{X}_i^t(1) = t\Delta_i(P)P^{-1}$, pour tout $i = 1, \dots, n$, où $\Delta_i : \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}] \longrightarrow \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y, P^{-1}]$ est défini par

$$\begin{aligned} \Delta_i(P^{-m}f) &= (q^2 - 1)^{-1} Y_i^{-1} (\mathcal{Z}_i(P^{-m}f) - \mathcal{Z}_{i-1}(P^{-m}f)), & i > 1 \\ \Delta_1(P^{-m}f) &= (q^2 - 1)^{-1} Y_1^{-1} \mathcal{Z}_1(P^{-m}f), \end{aligned}$$

où $m \geq 0$, $f \in \mathbb{k}_{\mathbf{q}_n}[Y]$.

- (2) Si on remplace t par $t + 1$, on aura pas nécessairement $P\mathcal{P}^t = \mathcal{P}^{t+1}$. En effet, il suffit de prendre les $\lambda_i(t)$ de la même forme qu'en (1), et de voir que si cela peut se réaliser, on aura alors, pour un $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} z_i(P\mathcal{P}^t) &= z_i\mathcal{P}^{t+1} \\ &= \lambda_i(t+1)P\mathcal{P}^t \\ &= \lambda_i(t)\mathcal{Z}_i(P)\mathcal{P}^t, \end{aligned}$$

d'où $\lambda_i(t+1) = \theta_{i,q}(k)\lambda_i(t)$ et donc $\theta_{i,q}(k) = 1$. On aboutit donc à une contradiction, car q est supposé non racine de l'unité.

Proposition 6.3.8. *Le $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -module à gauche $\mathcal{M} = \mathbb{k}(t)_{\mathfrak{q}_n}[Y, P^{-1}]\mathcal{P}^t$ est holonome.*

Démonstration. La structure du $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -module est donnée par

$$\begin{aligned} x_i(r\mathcal{P}^t) &= \mathcal{X}_i^t(r)\mathcal{P}^t, \quad i = 1, \dots, n \\ y_i(r\mathcal{P}^t) &= (Y_i r)\mathcal{P}^t, \quad i = 1, \dots, n \\ v_n(r\mathcal{P}^t) &= (\lambda_1(t) \cdots \lambda_n(t))^{-1} \mathcal{Z}_n^{-1} \cdots \mathcal{Z}_1^{-1}(r)\mathcal{P}^t, \end{aligned}$$

pour tout $r \in \mathbb{k}(t)_{\mathfrak{q}_n}[Y, P^{-1}]$. Considérons le $\mathbb{k}(t)$ -sous-espace $V_l(\mathbb{k}(t)_{\mathfrak{q}_n}[Y, P^{-1}])$ de $\mathbb{k}(t)_{\mathfrak{q}_n}[Y, P^{-1}]$ engendré par l'ensemble $\{P^{-l}f \mid \deg(f) \leq (|k| + 1)l\}$, où $\deg(f)$ étant le degré total. Posons $W_l(\mathcal{M}) = V_l(\mathbb{k}(t)_{\mathfrak{q}_n}[Y, P^{-1}])\mathcal{P}^t$, on utilise le lemme 6.3.2 (avec \mathcal{X}_i est remplacé par \mathcal{X}_i^t) pour montrer que $\{W_l(\mathcal{M})\}_{l \in \mathbb{N}}$ est une filtration du $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -module à gauche \mathcal{M} et que

$$\dim_{\mathbb{k}(t)}(W_l(\mathcal{M})) \leq \binom{(|k| + 1)l + n}{n}, \text{ pour tout } l \in \mathbb{N}.$$

Le terme de la partie à droite est un polynôme en l avec degré n , alors on conclut par le théorème 6.3.1. □

Corollaire 6.3.9. *[13] Soit \mathcal{M} le $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -module à gauche de la proposition 6.3.8. Alors il existent $m, l \in \mathbb{N}$, $b(t) \neq 0, \in \mathbb{k}[t]$ et T_0, \dots, T_m des éléments de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ tels que*

$$b(t)(P^l\mathcal{P}^t) = \left(\sum_{j=0}^m t^j T_j \right) (P^{l+1}\mathcal{P}^t).$$

Démonstration. D'après la proposition 6.3.8 et le théorème 6.2.6, \mathcal{M} est un $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -module à gauche de longueur finie. Soit $\mathcal{M}_i, i \in \mathbb{N}$ le $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ -sous-module de \mathcal{M} engendré par $P^i\mathcal{P}^t$. Alors la chaîne $\mathcal{M}_0 \supseteq \mathcal{M}_1 \supseteq \dots$ est stationnaire, c'est à dire qu'il existent $l \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ tel que

$$P^l\mathcal{P}^t = T(P^{l+1}\mathcal{P}^t).$$

Mais $T = u_n^{-s}T'$, $s \in \mathbb{N}$, $T' \in \mathcal{O}_q(\mathbf{spk}(t)^{2 \times n})$ et donc

$$\begin{aligned} u_n^s(P^l \mathcal{P}^t) &= (\lambda_1(t) \cdots \lambda_n(t))^s Z_1^s \cdots Z_n^s (P^l) \mathcal{P}^t \\ &= c(t)(P^l \mathcal{P}^t) \\ &= T'(P^{l+1} \mathcal{P}^t), \end{aligned}$$

où $c(t) \in \mathbb{k}[t] \setminus \{0\}$. D'autre part $T' = \sum_{\nu, \mu} h_{\nu, \mu} y_1^{\nu_1} x_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\nu_n} x_n^{\mu_n}$, où $h_{\nu, \mu} \in \mathbb{k}(t)$ et $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$. Soit $0 \neq b_0(t)$ le dénominateur commun de tous les $h_{\nu, \mu}$ non nuls. Alors $T' = b_0(t)^{-1} \sum_{0 \leq j \leq m} t^j T_j$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $T_j \in \mathcal{O}_q(\mathbf{spk}^{2 \times n})$, d'où

$$b_0(t)c(t)(P^l \mathcal{P}^t) = \left(\sum_{j=0}^m t_j T_j \right) (P^{l+1} \mathcal{P}^t).$$

On prend donc $b(t) = b_0(t)c(t)$. □

Bibliographie

- [1] M. Akhavizadegan, *Prime ideals of quantum Weyl algebras*, Ph.D. thesis, University of Sheffield, 1997.
- [2] M. Akhazavidegan and D. A. Jordan, *Prime ideals of quantum Weyl algebras*, *Galsgow Math. J.* **38** (1996), 283–297.
- [3] J. Alev and F. Dumas, *Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l’algèbre quantique de Weyl-Hayashi.*, *Nagoya Math. J* **143** (1996), 119–146.
- [4] V. Bavula, *Filtre dimension of algebras and modules, a simplicity criterion of generalized Weyl algebras*, *Comm. in Algebra* **24** (1996), no. 6, 1971–1992.
- [5] L. Ben Yakoub, L. El Kaoutit, and M. P. Malliavin, *Sur les algèbres d’Heisenberg quantiques*, *Comm. in Algebra* **30** (2002), no. 1, 129–148.
- [6] L. Ben Yakoub and M. P. Malliavin, *Caractérisation des dérivations intérieures de l’algèbre de Weyl et de l’algèbre d’Heisenberg quantique*, *Comm. in Algebra* **24** (1996), no. 10, 3131–3148.
- [7] J. E Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1979.
- [8] J.-E. Björk, *The Auslander condition on noetherian rings*, *Sém. d’Algèbre P. Dubreil et M.-P. Malliavin 1987–1988* (M.-P. Malliavin, ed.), *Lecture Notes in Mathematics*, no. 1404, Springer-Verlag, 1989, pp. 137–173.
- [9] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Algèbre chap. 10*, Masson, 1980.
- [10] K. A. Brown and K. R. Goodearl, *Prime spectra of quantum semisimple groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), no. 6, 2465–2502.
- [11] K. A. Brown and T. Levasseur, *Cohomology of bimodules over enveloping algebras*, *Math. Z.* **189** (1985), 393–413.
- [12] J. L. Bueso, F. J. Castro, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo, *An introduction to effective calculus in quantum groups*, *Rings, Hopf algebras and Brauer groups*. (S. Caenepeel and A. Verschoren, eds.), Marcel Dekker, 1998, pp. 55–83.
- [13] J. L. Bueso, L. EL Kaoutit, and J. Gómez-Torrecillas, *Inégalité de Bernstein pour une localisation simple de l’anneau des coordonnées de l’espace quantique symplectique*, Prépublication, 2003.

- [14] J. L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Computing the Gelfand-Kirillov dimension II*, Ring Theory and Algebraic Geometry (Granja/ Hermida / Verschoren, ed.), Marcel Dekker, Inc, 2001, pp. 33–57.
- [15] J. L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Homological computations in PBW modules*, Algebra and Representation theory **4** (2001), 201–218.
- [16] J. L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Re-filtering and exactness of the Gelfand-Kirillov dimension.*, Bull. Sci. Math. **128** (2001), no. 8, 689–715.
- [17] J. L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas, and A. Verchoren, *Algorithm Methods in Non-Commutative Algebra : Applications to Quantum Groups*, Mathematics-Monograph, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht London, 2003.
- [18] G. Cauchon, *Commutants des modules de type fini sur les algèbres noethériennes*, Sémin. d’alg. P. Dubriel et M.P. Malliavin (M.P. Malliavin, ed.), Lecture Notes in Mathematics, 1220, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 109–117.
- [19] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.
- [20] ———, *Enveloping algebras.*, Graduate Studies in Mathematics, no. 11, American Mathematical Society, 1996, The 1996 Printing of the 1977 English Translation.
- [21] E.K. Ekström, *The Auslander condition on graded and filtered Noetherian rings*, Sémin. d’Algèbre P. Dubreil et M.-P. Malliavin 1987–1988 (M.-P. Malliavin, ed.), Lecture Notes in Mathematics, no. 1404, Springer-Verlag, 1989, pp. 220–245.
- [22] I. M. Gelfand and A. A Kirillov, *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*, Publ. Math. IHES **31** (1966), 5–19.
- [23] A. Giaquinto and J. J Zhang, *Quantum Weyl algebra*, J. of Algebra **176** (1995), 861–881.
- [24] A.W. Goldie and G.O Michler, *Ore extension and polycyclic group rings*, J. London Math. Soc. **9** (1974), no. 2, 337–345.
- [25] J. Gómez Torrecillas, *Gelfand–Kirillov dimension of multi-filtered algebras.*, Proc. Edinburgh Math. Soc (1999), 155–168.
- [26] J. Gómez-Torrecillas, *Regularidad de las álgebras envolventes cuanticas*, Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces, ISBN 8447206394, Sevilla, 2001, <http://thales.cica.es/congresos/ema/actas/comunicaciones/comm61.ps>, pp. 493–500.
- [27] J. Gómez-Torrecillas and L. EL Kaoutit, *Prime and primitive ideals of a class of iterated skew polynomial ring*, J. of Algebra **244** (2001), 186–216.
- [28] ———, *The group of automorphisms of the coordinate ring of quantum symplectic space*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **43** (2002), no. 2, 597–601.
- [29] ———, *Sur une classe des extensions de Ore itérés*, Prépublication, 2003.
- [30] J. Gómez-Torrecillas, L. EL Kaoutit, and L. Ben Yakoub, *Prime ideals of the coordinate ring of quantum symplectic space*, Comm. in Algebra **29** (2001), no. 7, 3179–3197.
- [31] J. Gómez Torrecillas, P. Jara, and L. Merino, *Locally finite representations of algebras*, Comm. in Algebra **24** (1996), no. 14, 4581–4601.

- [32] J. Gómez Torrecillas and T. H. Lenagan, *Poincaré series of multi-filtered algebras and partitivity*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 370–380.
- [33] J. Gómez Torrecillas and F. J. Lobillo, *Global homological dimension of multifiltered rings and quantized enveloping algebras*, J. of Algebra **225** (2000), 522–533.
- [34] J. Gómez-Torrecillas and F.J. Lobillo, *Auslander Regular and Cohen-Maccaulay quantum groups*, Algebras and Representation Theory, to appear.
- [35] K. R. Goodearl, *Classical localisability in solvable enveloping algebras and Poincaré-Birkhoff-Witt extensions*, J. of Algebra (1990), no. 132, 243–262.
- [36] ———, *Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras*, J. of Algebra **150** (1992), 324–377.
- [37] K. R. Goodearl and T. H. Lenagan, *Catenarity in quantum algebras*, J. Pure Appl. Algebra **111** (1996), 123–142.
- [38] K. R. Goodearl and E. S. Letzter, *Prime factor algebras of the coordinate ring of quantum matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 1017–1025.
- [39] ———, *Prime ideals in skew and q -skew polynomial rings*, Mem. Amer. Math. Soc. **109** (1994).
- [40] ———, *Prime and primitive spectra of multiparameter quantum affine spaces.*, Trends in ring theory (V. et alt. Dlab, ed.), CMS Conf. Proc. 22, 1998, pp. 39–58.
- [41] ———, *The Dixmier-Moeglin Equivalence in Quantum Coordinate Rings and Quantized Weyl Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1381–1403.
- [42] K. R. Goodearl and R. B. Warfield Jr., *An introduction to noncommutative noetherian rings*, London Mathematical Society Student Texts, 16, Cambridge University Press, 1989.
- [43] K.R. Goodearl, *Prime spectra of quantized coordinate rings.*, Proceeding of Euroconference on interactions between ring theory and representation algebras (F. Van Oystaeyen and M. Saorin, eds.), Dekker, New York (2000), Murcia 1998, pp. 205–237.
- [44] T. J. Hodges and T. Levasseur, *Primitive ideals of $\mathbf{C}_q[sl(3)]$* , Comm. Math. Phys. **156** (1993), 581–605.
- [45] ———, *Primitive ideals of $\mathbf{C}_q[sl(n)]$* , J. of Algebra **168** (1994), 455–168.
- [46] T. J. Hodges, T. Levasseur, and M. Toro, *Algebraic structure of multi-parameter quantum groups*, Advances in Math. **126** (1997), 52–92.
- [47] Y. Iwanaga, *Duality over Auslander-Gorenstein rings*, Math. Scand **81** (1997), 184–190.
- [48] A. V. Jategaonkar, *Localization in noetherian rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 98, Cambridge University Press, 1986.
- [49] D. A. Jordan, *Krull and global dimension of certain iterated skew polynomial rings*, "Abelian Groups and Noncommutative Rings, Contemporary Mathematics, Vol. 130, A.M.S. Providence, RI, 1992, a Collection of Papers in Memory of Robert B. Warfield, Jr., pp. 201–313.

- [50] D. A. Jordan, *Finite-dimensional simple modules over certain iterated skew polynomial rings*, J. Pure Appl. Algebra **98** (1995), 45–55.
- [51] A. Joseph, *On the prime and primitive spectra of the algebra of functions on a quantum group*, J. of Algebra **169** (1994), 441–511.
- [52] A. Kandri-Rody and V. Weispfenning, *Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type*, J. Symb. Comput. **9/1** (1990), 1–26.
- [53] E. E. Kirkman and L. W. Small, *q-analogue of harmonic oscilation and related ring*, Israel. J. Math **81** (1993), no. 1-2, 111–127.
- [54] G.R. Krause and T.H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand–Kirillov dimension*, Research Notes in Mathematics, vol. 116, Pitman Pub. Inc. London, 1985.
- [55] F. J. Lobillo, *Métodos algebraicos y efectivos en grupos cuánticos.*, Ph.D. thesis, Universidad de Granada, 1998.
- [56] M. P. Malliavin, *Cohomologie locale de certains anneaux Auslander-Gorenstein*, Publication Mathématiques **36** (1992), 725–742.
- [57] M. P. Malliavin, *Algèbre d’Heisenberg quantique*, Bull. Sci. Math. **118** (1995), 511–537.
- [58] M.-P. Malliavin, *Minimal injective resolutions : old and new*, Rings theory and algebraic geometry (A. Verchoren A. Granja, J.A. Hermida, ed.), Lect. Note in pure and Appl. Math. Vol. 221, Marcel-Dekker, 2001, pp. 251–256.
- [59] G. Maltsiniotis, *Groupes quantiques et structures différentielles*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math **311** (1990), 831–834.
- [60] J. G. McConnell, *Quantum groups, filtered rings and Gelfand-Kirillov dimension*, Non-commutative Ring Theory, Lecture Note in Math, 1220, Springer, 1991, pp. 139–149.
- [61] J.C. McConnell and J.J. Pettit, *Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras*, J. London Math. Soc. **38** (1988), no. 2, 47–55.
- [62] J.C. McConnell and J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, J. Wiley and Sons, Chichester-New York, 1987.
- [63] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, J. Diff. Geom **2** (1968), 1–7.
- [64] C. Moeglin and R. Rentschler, *Orbits d’un groupe algébrique dans l’espace des idéaux rationnels*, Bull. Math. Soc. France **109** (1981), 403–426.
- [65] Sei-Qwon. Oh, *Primitive ideals of the coordinate ring of quantum symplectic space*, J. of Algebra **174** (1995), 531–552.
- [66] ———, *Catenarity in a class of iterated skew polynomial rings*, Comm. in Algebra **25** (1997), no. 1, 37–49.
- [67] ———, *Poisson enveloping algebras*, Comm. in Algebra **27** (1999), no. 5, 2181–2186.
- [68] ———, *Symplectic ideals of poisson algebras and the poisson structure associated to quantum matrices*, Comm. in Algebra **27** (1999), no. 5, 2163–2180.
- [69] Sei-Qwon. Oh and C. G. Park, *Primitive ideals in the coordinate ring of quantum euclidean space*, Bull. Austral. Math. Soc. **58** (1998), 57–73.

- [70] O. Ore, *Linear equations in non commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.
- [71] Z. Reichstein and N. Vonessen, *Torus actions on rings*, J. of Algebra **170** (1994), 781–804.
- [72] L. Rigal, *Spectre de l'algèbre de Weyl quantique*, Beiträge zur Algebra and Geometrie **37** (1996), no. 1, 119–148.
- [73] L. Rigal, *Analogie quantique de l'Algèbre de Weyl et Ordres Maximaux quantiques.*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1997.
- [74] L. Rigal, *Inégalité de Bernstein et équations fonctionnelles pour certaines algèbres de Weyl quantiques*, Bull. Sci. Math. **121** (1997), 477–505.
- [75] P. Schapira, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der Math. Wissenschaften Springer-Verlag, 1985.
- [76] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, cambridge univ. press, cambridge ed., vol. 19, London Math. Soc., Student Texts, 1990.
- [77] G. Sigurdsson, *Links between prime ideals in differential operator rings*, J. of Algebra **102** (1986), 260–283.
- [78] Levasseur T. and J. T. Stafford, *The quantum coordinate ring of special linear group*, J. Pure Appl. Algebra **86** (1993), 181–186.
- [79] N. Vonessen, *Action of algebiac groups on the spectrum of rationel ideals, II*, J. of Algebra **208** (1998), 216–261.
- [80] A. Zaks, *Injective dimension of semiprimary rings*, J. of Algebra **13** (1969), 73–89.

Index

- α -dérivation q -tordue, 21
- α -dérivation intérieure, 16
- α -dérivation, 14
- \mathcal{H} -premier, 12
- \mathcal{H} -simple, 22
- \mathcal{H} -stratification, 13
- \mathcal{H} -stratum, 13
- élément homogène, 12
- élément normal, 9
- élément régulier, 3
- équivalence de Dixmier -Moeglin, 13

- action rationnelle, 12
- affilié, 5
- algèbre de McConnell-Pettit, 17
- Algorithme de division à gauche, 26
- algèbre de type P.B.W, 26
- algèbre ponctuée, 103
- anneau \mathbb{N}^p -gradué, 32
- anneau caténaire, 9
- anneau de Jacobson, 13
- anneau des fraction, 2
- anneau multi-filtré, 32
- anneau semi-local, 9
- annulateur premier, 5
- AR-anneau, 11
- AR-idéal, 10
- Auslander-Gorenstein, 100
- Auslander-régulière, 100

- base de Gröbner, 27
- bimodule de liaison, 4

- clique, 4
- codimension, 103
- coefficient dominant, 25

- Cohen-Macaulay, 100
- composante connexe, 37
- condition d'incomparabilité, 8
- condition d'intersection, 8
- condition de Auslander, 100
- croissance polynomial, 30

- décomposition en composantes connexes,
37
- dimension d'un monoideal, 29
- dimension de Gelfand-Kirillov, 31
- dimension filtrée, 110
- dimension injective, 99
- dualité de Bernstein, 110

- ensemble admissible, 37
- ensemble classiquement localisable, 8
- ensemble dénominateur, 2
- ensemble de Ore, 2
- ensemble localisable, 7
- ensemble réversible, 2
- espace quantique, 17
- espace quantique attaché, 36, 53, 58
- exposant, 25
- extension de Ore, 14
- extension de Ore itéré, 15
- extensions de Ore q -tordues, 21

- fidèle, 5
- fidèlement fidèle, 5
- fonction de Hilbert, 31
- formule des hauteurs de Tauvel, 100

- grade, 99
- graduation, 12

- ideal contraction, 3

- ideal extension, 3
- ideal localement fermé, 13
- ideal localisable, 3
- ideal polycentral, 10
- ideal polynormal, 10
- ideal premier localisable, 8
- ideal rationnel, 13
- ideal semi-premier classiquement localisable, 9
- indice renouvelable, 37
- invariante de Bass, 101

- la condition de seconde niveau, 6
- la condition de seconde niveau forte, 6
- la hauteur, 9
- la multiplicité, 110
- lemme de Jategaonkar, 5
- lien, 4
- lien-fermé, 4
- longueur, 37

- module critique, 102
- module holonome, 110
- module multi-filtré, 32
- monôme dominant, 25
- monoidéal, 24
- multi-filtration finie, 33
- Multiplicatif, 2

- Nullstellensatz, 13

- opérateurs différentielles, 14
- ordre admissible, 24
- ordre gradué, 24
- ordre lexicographique, 24
- ordre localement fini, 33

- polynômes de Laurent tordue, 15
- premier associé, 5
- propriété de Artin-Rees, 10

- résolution injective, 99
- résolution injective minimale, 99

- S-polynôme, 27

- séparation de Artin-Rees, 10
- séparation normale, 10
- semi-commutative, 34
- socle série, 8
- sous-espace générateur, 30
- stable, 11
- suite affiliée des idéaux premiers, 5
- suite affilié, 5
- suite centralisante, 10
- suite normalisante, 6, 10
- support, 29
- système quantique, 53, 58

- théorème de l'idéal principal, 9

- vecteur poids, 33