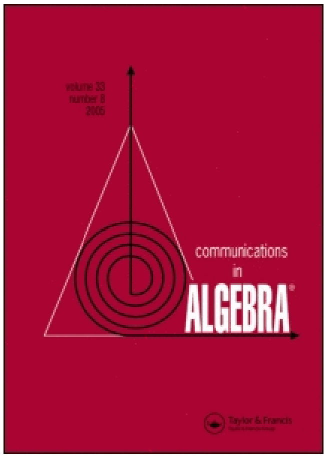

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713597239

Inégalité de Bernstein Pour Une Localisation Simple de L'espace Symplectique Quantique

J. L. Bueso [a]; L. El Kaoutit [a]; J. Gómez-Torrecillas [a]
[a] Department of Algebra, University of Granada, Granada, Spain

Online Publication Date: 01 October 2006
To cite this Article: Bueso, J. L., Kaoutit, L. El and Gómez-Torrecillas, J. (2006) 'Inégalité de Bernstein Pour Une Localisation Simple de L'espace Symplectique Quantique', Communications in Algebra, 34:10, 3615 - 3627
To link to this article: DOI: 10.1080/00927870600851048
URL: http://dx.doi.org/10.1080/00927870600851048

Communications in Algebra®, 34: 3615–3627, 2006

ISSN: 0092-7872 print/1532-4125 online
DOI: 10.1080/00927870600851048

INÉGALITÉ DE BERNSTEIN POUR UNE LOCALISATION SIMPLE DE L'ESPACE SYMPLECTIQUE QUANTIQUE

J. L. Bueso, L. El Kaoutit, and J. Gómez-Torrecillas
Department of Algebra, University of Granada, Granada, Spain

A Bernstein-type inequality is found for a simple localization of the coordinate ring of the quantized symplectic space $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\Bbbk^{2\times n})$, where q is not a root of unity. Some holonomic modules and an analog of the Bernstein polynomial are also computed.

On trouve une inégalité de type "inégalité de Bernstein" pour une localisation simple de l'anneaux des coordonnées de l'espace symplectique quantique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\Bbbk^{2\times n})$, où q est non racine de l'unité. Des modules holonomes et un analogue du polynôme de Bernstein sont aussi calculés.

Key Words: Bernstein inequality; Holonomic module; Quantized symplectic space.

Mathematics Subject Classification: Primary 16S36; Secondary 17B37, 16020.

INTRODUCTION

L. Rigal a démontré dans Rigal (1997) que la localisation simple $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\Bbbk)$, definie par Jordan (1995), de l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\Bbbk)$, comme dans le cas classique, satisfait une inégalité de type "inégalité de Bernstein" et aussi quelques équations fonctionnels pour des modules holonomes. Dans ce travail on démontre que l'anneau des coordonnées de l'espace symplectique quantique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\Bbbk^{2\times n})$ (Définition 1.3) qu'a une structure différente (Remarque 1.6) de celle de $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\Bbbk)$, admet une localisation simple $\mathcal{B}_n^q(\Bbbk)$ par rapport à certain ensemble multiplicatif engendré par des éléments normaux. C'est une algèbre Auslander-régulière, Cohen–Macaulay et de dimension de Gelfand–Kirillov finie (Théorème 1.11) et elle satisfait aussi une inégalité de type "inégalité de Bernstein" (Théorème 1.12). Bien que la preuve de cette inégalité peut être adaptée de celle de Rigal (1997), on peut aussi déduire Théorème 1.12 de Rigal (1997, Théorème 3.1.4) car $\mathcal{B}_n^q(\Bbbk)$ devienne isomorphe á une algèbre des fractions de $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\Bbbk)$ par rapport aux puissances de certain élément (voir Corollaire 1.7). Cepandant, ces algèbres ne sont pas isomorphes (Proposition 1.8). On obtient aussi des examples des modules holonomes analogues à ceux de Rigal (1997).

Received November 15, 2005; Revised December 22, 2005. Communicated by J. Alev.
Research financed for project MTM 2004-1406 by the Spanish Ministry of Education and Science and by FEDER.
Address correspondence to J. Gómez-Torrecillas, Department of Algebra, Faculty of Sciences, University of Granada, E18071 Granada, Spain; Fax: +34 958-248586; E-mail: gomezj@ugr.es

Nous travaillons sur un corp commutatif infini $\Bbbk$ de caractéristique quelconque. On utilise les notations suivantes. Le symbole $\mathbb{N}$ désigne le monoide des éléments entiers naturels, l'anneau de tous les entiers sera noté par $\mathbb{Z}$. Pour toute $\Bbbk$-algèbre A on note par $U(A)$ le groupe des unités de A (i.e., l'ensemble des éléments inversibles). Pour $\lambda \in \Bbbk$ et $r \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on note $(r)_\lambda = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{r-1}$ avec $(0)_\lambda = 1$ par convention. Soit $\Lambda = (\lambda_{ij})$ une matrice carrée d'ordre p à coefficients dans $\Bbbk^* = \Bbbk\setminus\{0\}$, tels que $\lambda_{ii} = 1$ et $\lambda_{ji} = \lambda_{ij}^{-1}$. Considérons la $\Bbbk$–algèbre $\Bbbk_\Lambda[T_1, \ldots, T_p]$ engendrée sur $\Bbbk$ par des éléments $T_1, \ldots, T_p$ soumis aux relations $T_iT_j = \lambda_{ij}T_jT_i, \forall j \leq i$. Cette algèbre est connue sous le nom de *l'algèbre des coordonnées de l'espace affine quantique de dimension p* associé à Λ, c'est une extension de Ore itérée de la forme

$$\Bbbk_\Lambda[T_1, \ldots, T_p] = \Bbbk[T_1][T_2; \sigma_2] \ldots [T_p; \sigma_p] \tag{1}$$

où $\sigma_i(T_j) = \lambda_{ij}T_j$ pour tout $1 \leq j < i \leq p$. C'est donc une algèbre intègre et noethérienne, son corps à gauche des fractions est noté par $\Bbbk_\Lambda(T_1, \ldots, T_p)$. Une algèbre intermédiaire et très utile est l'algèbre de McConnell–Pettit $\mathbf{P}(\Lambda) = \Bbbk_\Lambda[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_p^{\pm 1}]$ (voir McConnell and Pettit, 1988).

1. INEGALITÉ DE BERNSTEIN POUR $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$

Suivant à Jordan (1995), soit A une $\Bbbk$-algèbre affine intègre et noethérienne et $u \in A$ un élément normale non nul; γ étant l'automorphisme d'algèbre induit par u (i.e., $ua = \gamma(a)u, \forall a \in A$). Soit α un automorphisme de A qui commute avec γ et posons $\beta = \gamma \circ \alpha^{-1}$. Considérons l'extension de Ore $S = A[y; \alpha]$ et notons par β le prolongement de β à S en prenant $\beta(y) = \mathfrak{q}y$, pour un certain $\mathfrak{q} \in \Bbbk^*$. On construit maintenant l'extension de Ore iterée

$$R = A[y; \alpha][x; \beta, \delta],$$

où $\delta(a) = 0, \forall a \in A$ et $\delta(y) = u - \mathfrak{q}\alpha(u)$. On a donc

$$xy - \mathfrak{q}yx = u - \mathfrak{q}\alpha(u).$$

Supposons que $\alpha(u) = u$ et posons $v = (1 - \mathfrak{q})u$. Alors on a $xv = vx$, $yv = vy$,

$$xy = \mathfrak{q}yx + v \qquad \text{et} \qquad z := xy - yx = (\mathfrak{q} - 1)yx + v.$$

Il est facile de voir que z, x, y satisfont les relations suivantes

$$zx = \mathfrak{q}^{-1}xz, \qquad zy = \mathfrak{q}yz, \qquad za = \gamma(a)z \quad \forall a \in A.$$

C'est à dire que $z \in R$ est un élément normale. Comme R est intègre et noethérienne, on peut donc répéter le processus de construction. Le Lemme 1.1 sera utilisé plus tard dans cette section.

Lemme 1.1. *Considérons l'extension de Ore $R = A[y; \alpha][x; \beta, \delta]$ avec $xy = \mathfrak{q}yx + v$, $\alpha(v) = v \neq 0$ (i.e., $\mathfrak{q} \neq 1$) et $z = (\mathfrak{q} - 1)yx + v$ l'élément normale correspondant. Si $T = R\mathscr{Z}^{-1}$ est l'algèbre des fractions par rapport aux puissances de z, alors*

$$U(T) = \{az^m \mid a \in U(A), m \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. Soit $X = f(y, x)z^{-k}$ un élément inversible de T, où $k \in \mathbb{N}$ et $0 \neq f(y, x) \in R$. Alors ils existent $0 \neq g(y, x) \in R$ et $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(y, x)z^{-k}g(y, x)z^{-l} = 1.$$

D'où, étant z normal, ils existent $0 \neq h(y, x) \in R$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(y, x)h(y, x) = z^r, \qquad f(y, x), h(y, x) \in R. \tag{2}$$

On va utiliser une récurrence sur r, pour montrer que l'Équation (2) implique que ils existent un élément inversible $a \in U(A)$ et un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ ($k_0 \leq r$) tel que $f(y, x) = az^{k_0}$. Si $r = 0$, alors l'Équation (2) prend la forme

$$f(y, x)h(y, x) = 1. \tag{3}$$

C'est à dire que $f(y, x) \in A$ et il est un élément inversible à droite, donc inversible, i.e., $a = f(y, x) \in U(A)$. Supposons que $r > 0$. Comme l'idéal engendré par z est complètement premier (Jordan, 1995, Proposition 2.7), l'Équation (2) implique donc que $f(y, x) \in \langle z \rangle$ ou $h(y, x) \in \langle z \rangle$. Si $f(y, x) = f'(y, x)z$, alors il existe $0 \neq h'(y, x) \in R$ tel que

$$f'(y, x)h'(y, x) = z^{r-1}. \tag{4}$$

L'hypothèse de recurrence implique donc qu'ils existent $a \in U(A)$ et un entier $k'_0 \leq r - 1$ tels que $f'(y, x) = az^{k'_0}$ et donc $f(y, x) = az^{k_0}$ avec $k_0 = k'_0 + 1$. Dans le cas où $h(y, x) \in \langle z \rangle$ on suive un raisonnement analogue.

En conclusion, on a $X = f(y, x)z^{-k} = az^{k_0-k}$, pour un certain $a \in U(A)$ et $k_0 - k \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre l'inclusion $U(T) \subseteq \{az^m \mid a \in U(A), m \in \mathbb{Z}\}$. L'autre inclusion est évidente. $\square$

Maintenant, on va rappeler la définition de l'algèbre de Weyl quantique de Maltsiniotis (1990), voir Jordan (1995, 2.8) ou Rigal (1997, Définition 1.2.1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbf{q}_n = (q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbb{k}^*)^n$ et $\Lambda_n = (\lambda_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n tel que $\lambda_{ii} = 1$, $\lambda_{ji} = \lambda_{ij}^{-1}$. L'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}_n, \Lambda_n)}(\mathbb{k})$ est une $\mathbb{k}$–algèbre engendrée par $\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n$ satisfaisant les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j\mathbf{x}_i &= \lambda_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j, \qquad \mathbf{y}_j\mathbf{y}_i = \lambda_{ij}^{-1}\mathbf{y}_i\mathbf{y}_j \quad (1 \leq i < j \leq n) \\ \mathbf{x}_j\mathbf{x}_i &= (\lambda_{ij}q_i)^{-1}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j, \qquad \mathbf{x}_j\mathbf{y}_i = \lambda_{ij}q_i\mathbf{y}_i\mathbf{x}_j \quad (1 \leq i < j \leq n) \\ \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i - q_i\mathbf{y}_i\mathbf{x}_i &= \sum_{l=1}^{i-1}(q_l - 1)\mathbf{y}_l\mathbf{x}_l + 1 \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \tag{5}$$

D'après Jordan (1995), l'algèbre $A_n^{(\mathbf{q}_n, \Lambda_n)}(\mathbb{k})$ décrite ci-dessus résulte comme construction itérative de celle de Jordan. En effet, on a

$$A_i^{(\mathbf{q}_i, \Lambda_i)}(\mathbb{k}) = A_{i-1}^{(\mathbf{q}_{i-1}, \Lambda_{i-1})}(\mathbb{k})[\mathbf{y}_i; \alpha_i][\mathbf{x}_i; \beta_i, \delta_i], \qquad \forall 2 \leq i \leq n,$$

où les applications α_i, β_i, et δ_i se déterminent à travers des Équations (5). Les éléments normaux sont $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i\mathbf{x}_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\mathbf{z}_0 = 1$, et satisfont les relations suivantes: $\mathbf{z}_1 = (q_1 - 1)\mathbf{y}_1\mathbf{x}_1 + 1$, $\mathbf{z}_i = (q_i - 1)\mathbf{y}_i\mathbf{x}_i + \mathbf{z}_{i-1}$, $i > 1$. Ils vérifient aussi

$$\begin{array}{lll} \mathbf{z}_i\mathbf{y}_j = q_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_i, & \mathbf{z}_i\mathbf{x}_j = q_j^{-1}\mathbf{x}_j\mathbf{z}_i, & i \geq j \\ \mathbf{z}_i\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j\mathbf{z}_i, & \mathbf{z}_i\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j\mathbf{z}_i, & i < j \\ \mathbf{z}_i\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j\mathbf{z}_i, & \text{pour tout } i, j. & \end{array} \tag{6}$$

Notons par $\mathcal{Z}_i := \{\mathbf{z}_i^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble multiplicatif de $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ engendré par $\mathbf{z}_i$, $i = 1, \ldots, n$. $\mathcal{Z}_i$ est clairement un ensemble de Ore de $A_i^{(\mathbf{q}_i,\Lambda_i)}(\mathbb{k})$ qu'est stable par les automorphismes α_j, β_j, pour tout $j > i$. On en déduit donc que $\mathcal{Z}_i$ est aussi un ensemble de Ore de l'algèbre $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$. Comme les $\mathbf{z}_i$ sont normaux et commutent entre eux, l'ensemble multiplicatif $\mathsf{Z}_m = \mathcal{Z}_1 \ldots \mathcal{Z}_m$ engendré par $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ est un ensemble de Ore (à droite et à gauche) de la m^{ieme} sous-algèbre de Weyl quantique $A_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k})$. On note ainsi par

$$B_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k}) := A_i^{(\mathbf{q}_i,\Lambda_i)}(\mathbb{k})\mathsf{Z}_m^{-1}$$

la localisation correspondante, pour tout $1 \leq m \leq n$. On sait que chacune des $B_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k})$, $1 \leq m \leq n$ est une algèbre affine, intègre et noethérienne. D'après les équations (6), on peut prolonger les automorphismes α_{m+1}, β_{m+1} à l'algèbre des fractions $B_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k})$. L'élément $\mathbf{z}_m$ reste aussi normale dans cette algèbre et si on note par γ_m l'automorphisme de $B_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k})$ induit, alors les Équations (6) et (5) impliquent que $\alpha_{m+1} \circ \gamma_m = \gamma_m \circ \alpha_{m+1}$ et que $\beta_{m+1} = \gamma_m \circ \alpha_{m+1}^{-1}$. Par conséquence, on peut construire par la méthode de Jordan l'extension de Ore

$$B_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k})[\mathbf{y}_{m+1}; \alpha_{m+1}][\mathbf{x}_{m+1}; \beta_{m+1}, \delta_{m+1}], \qquad \forall 1 \leq m < n-1.$$

Cette extension est aussi donc une algèbre intègre, noethérienne et contient un élément normale $\mathbf{z}_{m+1}$. En localisant par rapport à l'ensemble $\mathcal{Z}_{m+1}$, on trouve un isomorphisme d'algèbres

$$B_{m+1}^{(\mathbf{q}_{m+1},\Lambda_{m+1})}(\mathbb{k}) \cong \left(B_m^{(\mathbf{q}_m,\Lambda_m)}(\mathbb{k})[\mathbf{y}_{m+1}; \alpha_{m+1}][\mathbf{x}_{m+1}; \beta_{m+1}, \delta_{m+1}]\right)\mathcal{Z}_{m+1}^{-1}, \tag{7}$$

pour tout $1 \leq m \leq n-1$. On sait, d'après Jordan (1995, Theorem 3.2), que si aucun des q_i est racine de l'unité, alors $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ est simple. La Proposition 1.2 suivante sera utilisée pour démontrer que $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ est différente de l'algèbre sujet de notre travail (voir la Proposition 1.8).

Proposition 1.2. *Soit $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_s n)}(\mathbb{k})$ la n^{ieme} algèbre de Weyl quantique associée aux paramètres $\mathbf{q}_n = (q^2, \ldots, q^2)$ et $\lambda_{ij} = q^{-1}$ et soit $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ sa localisation par rapport à l'ensemble multiplicatif engendré par les éléments normaux $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Si $q^2 \neq 1$, alors*

$$U(B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})) = \{a\mathbf{z}_1^{k_1} \ldots \mathbf{z}_{n-1}^{k_{n-1}}\mathbf{z}_n^{k_n} \mid a \in \mathbb{k}^* \text{ et } (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Démonstration. C'est une consequence des isomorphismes de l'Équation (7) et une application iterative du Lemme 1.1. $\square$

On va maintenant introduire les algèbres symplectiques.

Définition 1.3. Soient q un élément non nul de $\mathbb{k}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. I. M. Musson a prouvé dans Musson (1992, §1.1) que *l'anneau des coordonnés* $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}(\mathbb{k}^{2\times n}))$ *de l'espace symplectique quantique* (cf. Reshetikhin et al., 1990, Definition 14) est une $\mathbb{k}$-algèbre engendrée par $y_1, x_1, \ldots, y_n, x_n$ satisfaisant les relations suivantes

$$\begin{aligned} y_j x_i &= q^{-1} x_i y_j, \qquad y_j y_i = q y_i y_j \quad (1 \le i < j \le n) \\ x_j x_i &= q^{-1} x_i x_j, \qquad x_j y_i = q y_i x_j \quad (1 \le i < j \le n) \\ x_i y_i - q^2 y_i x_i &= (q^2 - 1) \sum_{l=1}^{i-1} q^{i-l} y_l x_l \quad (1 \le i \le n). \end{aligned} \tag{8}$$

D'après Oh (1997, Example 6), $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}(\mathbb{k}^{2\times n}))$ peut être décrite comme une extension de Ore itérée de la forme

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_n = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}(\mathbb{k}^{2\times n})),$$

où $R_0 = \mathbb{k}$ et $R_k = R_{k-1}[y_k; \alpha_k][x_k; \beta_k, \delta_k]$ pour $k \ge 1$ avec

$$\begin{aligned} \alpha_k(x_l) &= q^{-1} x_l = \beta_k(x_l) \quad (1 \le l < k \le n) \\ \alpha_k(y_l) &= q y_l = \beta_k(y_l) \quad (1 \le l < k \le n) \\ \beta_k(y_k) &= q^2 y_k \quad (1 \le k \le n) \\ \delta_k(R_{k-1}) &= 0, \qquad \delta_k(y_k) = (q^2 - 1) \sum_{l=1}^{k-1} q^{k-l} y_l x_l \quad (1 \le k \le n). \end{aligned}$$

Posons $z_i = (q^2 - 1) \sum_{1 \le l \le i} q^{i-l} y_l x_l$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors les éléments z_i vérifient les équations suivantes:

$$\begin{aligned} x_i y_i - q^2 y_i x_i &= q z_{i-1}, \\ x_i y_i - y_i x_i &= z_i, \end{aligned}$$

pour tout $i \ge 1$ et

$$\begin{aligned} z_i y_j &= q^2 y_j z_i, \qquad z_i x_j = q^{-2} x_j z_i, \qquad i \ge j \\ z_i y_j &= y_j z_i, \qquad z_i x_j = x_j z_i, \qquad i < j \\ z_i z_j &= z_j z_i, \qquad \text{pour tout } i, j. \end{aligned} \tag{9}$$

On en déduit donc que $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ est une forme itérative de la construction de Jordan et que c'est une algèbre intègre et noethérienne.

La localisation de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ par rapport à l'ensemble multiplicatif $\mathcal{Z}$ engendré par $z_1, \ldots, z_n$ (remarquons que c'est un ensemble de Ore à droite par (9)), sera notée par $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$. Si on pose $u_n = z_1 \ldots z_n$, alors on peut vérifier facilement, par la propriété universelle des anneaux des fractions, que $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est isomorphe au localisé de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ par rapport aux puissances de u_n.

Si on dénote par $\mathcal{Y}_1$ l'ensemble multiplicatif engendré par l'élément y_1, alors, d'après Goodearl (1992, Lemma 1.4) et (Krause and Lenagan, 1985, Lemma 4.1), $\mathcal{Y}_1$ est un ensemble de Ore à droite de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et d'après Gómez–Torrecillas et al.

(2001, Proposition 2.2) la dimension de Gelfand–Kirillov de la localisation associée est égale à $2n$. En plus la localisation associée $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\Bbbk^{2\times n})\mathcal{Y}_1^{-1}$ est clairement une sous-algèbre de $\mathcal{B}_n^q(\Bbbk)$, puisque le fait que l'élément $z_1 = (q^2-1)y_1x_1$ soit inversible implique que y_1 est inversible dans $\mathcal{B}_n^q(\Bbbk)$. Considérons donc les éléments de $\mathcal{B}_n^q(\Bbbk)$ suivants:

$$\begin{aligned} X_1 &= (q^2-1)^{-1}y_1^{-1}(x_1y_1-1), \\ X_i &= (q^2-1)^{-1}q^{3-i}x_i, \\ Y_i &= y_i, \quad (i=1,\ldots,n). \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Z_1 &= x_1y_1 \\ Z_i &= (q^2-1)^{-1}q^{3-i}z_i, \quad (i=2,\ldots,n), \end{aligned}$$

Lemme 1.4. *Les éléments X_i, Y_i et Z_i satisfassent les relations suivantes*:

$$\begin{array}{lll} Y_jX_i = q^{-1}X_iY_j, & Y_jY_i = qY_iY_j & (1\le i<j\le n) \\ X_jX_i = q^{-1}X_iX_j, & X_jY_i = qY_iX_j & (1\le i<j\le n) \\ X_iY_i - q^2Y_iX_i = \sum_{l=1}^{i-1}(q^2-1)Y_lX_l + 1, & Z_i = X_iY_i - Y_iX_i & (1\le i\le n). \end{array}$$

Démonstration. Les relations de semi-commutativité, c'est à dire les quatre premières équations, se dérivent directement des relations similaires de l'Équation (8). Pour les relations restantes, on a pour $i=1$

$$\begin{aligned} X_1Y_1 - q^2Y_1X_1 &= (q^2-1)^{-1}y_1^{-1}((x_1y_1-1)y_1 - q^2y_1(x_1y_1-1)) \\ &= (q^2-1)^{-1}y_1^{-1}(q^2y_1x_1y_1 - y_1 - q^2y_1x_1y_1 + q^2y_1) \\ &= (q^2-1)^{-1}y_1^{-1}y_1(q^2-1) = 1 \end{aligned}$$

le commutateur étant donc

$$\begin{aligned} X_1Y_1 - Y_1X_1 &= (q^2-1)^{-1}(y_1^{-1}(x_1y_1-1)y_1 - (x_1y_1-1)) \\ &= (q^2-1)^{-1}(y_1^{-1}x_1y_1^2 - x_1y_1) \\ &= (q^2-1)^{-1}(q^2x_1y_1 - x_1y_1) \\ &= (q^2-1)^{-1}(q^2-1)x_1y_1 = Z_1. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $i>1$, on a

$$\begin{aligned} X_iY_i - q^2Y_iX_i &= (q^2-1)^{-1}q^{3-i}(x_iy_i - q^2y_ix_i) \\ &= (q^2-1)^{-1}q^{3-i}\left((q^2-1)\sum_{l=1}^{i-1}q^{i-l}y_lx_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{i-1}q^{3-l}y_lx_l = \sum_{l=2}^{i-1}(q^2-1)Y_lX_l + q^2y_1x_1 \\ &= \sum_{l=2}^{i-1}(q^2-1)Y_lX_l + (q^2-1)Y_1X_1 + 1 \\ &= \sum_{l=1}^{i-1}(q^2-1)Y_lX_l + 1. \end{aligned}$$

En fin,

$$X_iY_i - Y_iX_i = (q^2-1)^{-1}q^{3-i}(x_iy_i - y_ix_i) = (q^2-1)^{-1}q^{3-i}z_i = Z_i. \qquad \square$$

Proposition 1.5. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ et considérons l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ associée aux paramètres $\mathbf{q}_n = (q^2, \ldots, q^2)$ et $\Lambda_n = (\lambda_{ij})$ où $\lambda_{ij} = q^{-1}$, pour tout $1 \leq i < j \leq n$. Alors l'application définie par*

$$\begin{aligned} \psi : A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k}) &\longrightarrow \mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}) \\ \boldsymbol{x}_i &\longrightarrow X_i \\ \boldsymbol{y}_i &\longrightarrow Y_i \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres. En plus chaque $\psi(\mathbf{z}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, est un élément inversible de $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$, et donc ψ se prolonge à un morphisme d'algèbres Ψ: $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k}) \to \mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ qui est injectif si on suppose que q n'est pas racine de l'unité.

Démonstration. C'est une conséquence directe du Lemme 1.4 et Jordan (1995, Theorem 3.2). $\square$

Remarque 1.6. Les algèbres $\mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ de la Proposition 1.5, ne peuvent pas être isomorphes comme $\mathbb{k}$-algèbres, si on suppose que q n'est pas racine de l'unité. En effet, d'après Gómez-Torrecillas and El Kaoutit (2001, Theorem 1.8, Proposition 2.6), les ensembles suivants $\{\langle y_1\rangle, \langle x_1\rangle, \langle z_2\rangle, \ldots, \langle z_n\rangle\}$ et $\{\langle \mathbf{z}_1\rangle, \langle \mathbf{z}_2\rangle, \ldots, \langle \mathbf{z}_n\rangle\}$, respectivement, de $\mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et de $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$, forment l'ensemble de tous les idéaux premiers de hauteur 1, puisque $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ et $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ sont des algèbres simples (voir Proposition 1.9 pour $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$). On obtient donc que les ensembles des idéaux premiers de hauteur 1 de $\mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ ont des cardinaux différents, ce qui confirme que $\mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ ne sont pas isomorphes.

Rappelons de Jordan (1995, 3.1) que l'ensemble multiplicatif $\mathscr{Y}_1$ engendré par l'élément $\mathbf{y}_1$ est un ensemble de Ore à droite de l'algèbre $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ qu'est aussi un ensemble de Ore à droite dans la localisation $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$. Comme conséquence de la Proposition 1.5 on a le corollaire suivant.

Corollaire 1.7. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ et considérons l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ associée aux paramètres $\mathbf{q}_n = (q^2, \ldots, q^2)$ et $\Lambda_n = (\lambda_{ij})$, où $\lambda_{ij} = q^{-1}$, pour tout $1 \leq i < j \leq n$. Si on suppose que q n'est pas racine de l'unité. Alors le morphisme injectif d'algèbres Ψ: $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k}) \to \mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ défini dans la Proposition* 1.5 *se prolonge à un isomorphisme d'algèbres*

$$\Psi : B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})\boldsymbol{\mathscr{Y}}_1^{-1} \xrightarrow{\cong} \mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}).$$

Proposition 1.8. *Si q est non racine de l'unité, alors les algèbres $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ et $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ du Corollaire* 1.7 *ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Si on suppose le contraire, alors en composant avec l'isomorphisme du Corollaire 1.7, il existera un endomorphisme d'algèbres ϕ : $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k}) \to B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$ tel que $\phi(\mathbf{y}_1)$ soit un élément inversible de $B_n^{(\mathbf{q}_n,\Lambda_n)}(\mathbb{k})$. D'après le Corollaire 1.2, ils existent $a \in \mathbb{k}^*$ et $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\phi(\mathbf{y}_1) = a\mathbf{z}_1^{k_1} \ldots \mathbf{z}_n^{k_n}$. De même ils existent $b \in \mathbb{k}^*$ et $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\phi(\mathbf{z}_1) = b\mathbf{z}_1^{l_1} \ldots \mathbf{z}_n^{l_n}$. Applicant ϕ sur l'équation $\mathbf{z}_1\mathbf{y}_1 = q^2\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$ et utilisant le fait que les $\mathbf{z}_i$, $i = 1, \ldots, n$ commutes entre eux, on trouve que $q^2 = 1$ ce qu'est contradictoire. □

La proposition suivante a été prouvée dans Oh (1997, Proposition 9(1)). Ici on donne une preuve courte en utilisant le Corollaire 1.7.

Proposition 1.9. *Considérons $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ et sa localisation $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ par rapport à l'ensemble multiplicatif $\mathcal{Z}$. Alors si q n'est pas racine de l'unité, $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est une $\mathbb{k}$-algèbre simple.*

Démonstration. Elle résulte directement du Corollaire 1.7 et Jordan (1995, Theorem 3.2). □

Considérons l'extension de Ore de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ suivante

$$\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})[v_n; \sigma_n],$$

où σ_n est défini par

$$\begin{aligned} \sigma_n(y_i) &= q^{-2(n-i+1)}y_i \\ \sigma_n(x_i) &= q^{2(n-i+1)}x_i, \qquad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Le lemme suivant est la version "symplectique" de Rigal (1997, Proposition 1.2.9).

Lemme 1.10. *Soit $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité. Alors $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \cong \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$, où $\mathcal{I}_n$ est l'idéal engendré par l'élément central $u_nv_n - 1$ ($u_n = z_1 \ldots z_n$).*

Démonstration. Il est clair que l'application

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n}) &\longrightarrow \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n \\ x_i &\longmapsto x_i + \mathcal{I}_n, \qquad i = 1, \ldots, n \\ y_i &\longmapsto y_i + \mathcal{I}_n, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

est un morphisme des $\mathbb{k}$-algèbres et que $\phi_n(u_n) = u_n + \mathcal{I}_n$ est un élément inversible dans $\mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$. D'où ϕ_n peut être prolonger à un morphisme surjectif $\overline{\phi_n} : \mathcal{B}_n^q(\mathbb{k}) \to \mathcal{H}_n^q(\mathbb{k})/\mathcal{I}_n$, ce qui donne un isomorphisme, puisque $\mathcal{B}_n^q(\mathbb{k})$ est simple, par la Proposition 1.9. □

Rappelons qu'une $\mathbb{k}$-algèbre noethérienne R est dite *Auslander–Gorenstein* si (a) la dimension injective de R comme R-module à gauche (ou à droite) est finie et si (b) pour tous entiers $0 \le i < j$ et pour tout R-module à gauche (ou à droite) de type fini M, on a $\mathbf{Ext}_R^i(N, R) = 0$ pour tout R-submodule N de $\mathbf{Ext}_R^j(M, R)$. Si de plus, la dimension globale de R, qu'on dénote par $\mathrm{gldim}(R)$, est finie, alors R est dite it Auslander-régulière. Le *grade* d'un R-module de type finie est défini par

$$j_R(M) = \inf\{j \geq 0 \mid \mathbf{Ext}_R^j(M, R) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

D'où si R est Auslander–Gorenstein alors $j_R(N) \geq j$, pour tout R-submodule N de $\mathbf{Ext}_R^j(M, R)$. La $\Bbbk$-algèbre R est dite de *Cohen–Macaulay* (Levasseur, 1992) si

$$\mathrm{GKdim}(R) = j_R(M) + \mathrm{GKdim}(M),$$

pour tout R-module non nul de type fini M, où $\mathrm{GKdim}(-)$ designe la dimension de Gelfand–Kirillov.

Théorème 1.11. *Soit $q \in \Bbbk^*$ non racine de l'unité. Alors $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$ est une $\Bbbk$-algèbre Auslander-régulière, Cohen–Macaulay et de dimension de Gelfand–Kirillov égale à $2n$.*

Démonstration. D'après le Lemme 1.10, $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk) \cong \mathscr{H}_n^q(\Bbbk)/\mathscr{I}_n$ où $\mathscr{I}_n = \langle u_n v_n - 1 \rangle$ est engendré par un élément central. Maintenant, il est clair que $\mathrm{GKdim}(\mathscr{H}_n^q(\Bbbk)) = 2n + 1$ et que $\mathscr{H}_n^q(\Bbbk)$ est une $\Bbbk$-algèbre de type P.B.W. au sense de Bueso et al. (1998) par rapport à l'ordre lexicographique gradué. On obtient, d'après Bueso et al. (1998, Corollary 4.14), que

$$\mathrm{GKdim}\,(\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)) = \mathrm{GKdim}\left(\frac{\mathscr{H}_n^q(\Bbbk)}{\mathscr{I}_n}\right) = \mathrm{GKdim}(\mathscr{H}_n^q(\Bbbk)) - 1 = (2n+1) - 1 = 2n.$$

Tout algèbre de type P.B.W. est Auslander-regulière et Cohen–Macaulay (voir Bueso et al., 2001, Theorem 4.1), d'où Levasseur and Stafford (1993, Lemma) implique que $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$ est Auslander–Gorenstein et Cohen–Macaulay. On sait d'après Rigal (1997, Proposition 1.2.14) (voir aussi Akhavizadegan and Jordan, 1996, 1.7) que $\mathrm{gldim}(B_n^{(\mathbf{q}_n, \Lambda_n)}(\Bbbk)) = n$. D'où, d'après le Corollaire 1.7 et McConnell and Robson (1987, 7.4.3), si q n'est pas racine de l'unité, alors $\mathrm{gldim}(\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)) \leq n$. Par suite $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$ est une algèbre Auslander-régulière. $\square$

Pour établir la inégalité de Bernstein pour l'algèbre $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$, on va utiliser Rigal (1997, Théorème 3.1.4) qui reste aussi vrais même si la caractéristique de $\Bbbk$ n'est pas nulle.

Théorème 1.12. *Soit $q \in \Bbbk^*$ non racine de l'unité et M un $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$-module à gauche non nul de type fini. Alors $\mathrm{GKdim}(M) \geq n$.*

Démonstration. Soit M un $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$-module à gauche non nul et de type fini et identifions $B_n^{(\mathbf{q}_n, \Lambda_n)}(\Bbbk)$ avec son image dans $\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)$ en utilisant l'isomorphisme du Corollaire 1.7. On a donc, d'après Krause and Lenagan (1985, p. 52) et Rigal (1997, Théorème 3.1.4), l'inégalité suivante

$$\mathrm{GKdim}({}_{\mathscr{B}_n^q(\Bbbk)}M) \geq \mathrm{GKdim}({}_{B_n^{(\mathbf{q}_n, \Lambda_n)}(\Bbbk)}N) \geq n$$

pour tous sous $B_n^{(\mathbf{q}_n, \Lambda_n)}(\Bbbk)$-module à gauche non-nul de type fini N de M. $\square$

2. LES MODULES HOLONOMES ET LE POLYNÔME DE BERNSTEIN

On va donner, par des méthodes similaires á celles de Rigal (1997, Section 4), des examples de modules holonomes. Soit $\mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}[Y_1, \ldots, Y_n] := \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}[Y]$ l'espace quantique n-dimensionnelle où q_n est la matrice déduite des relations de semi-commutativité: $Y_jY_i = qY_iY_j$, pour tout $1 \leq i < j \leq n$. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on considère l'automorphisme $\mathscr{Z}_i$ de $\mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y_1, \ldots, Y_n) := \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y)$ défini par prolongement et sur les Y_i par $\mathscr{Z}_i(Y_j) = q^2Y_j$ si $1 \leq j \leq i \leq n$ et $\mathscr{Z}_i(Y_j) = Y_j$ si $n \geq j > i \geq 1$. Soient, maintenant, les applications k-linéaires suivants de $\mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}_i : \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y) &\longrightarrow \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y)\\
fg^{-1} &\longmapsto (q^2-1)^{-1}Y_i^{-1}(\mathscr{Z}_i(fg^{-1}) - q\mathscr{Z}_{i-1}(fg^{-1})), \qquad i > 1,\\
\mathscr{X}_1(fg^{-1}) &= (q^2-1)^{-1}Y_1^{-1}\mathscr{Z}_1(fg^{-1}) \text{ et}\\
\mathscr{Y}_i : \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y) &\longmapsto \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y)\\
fg^{-1} &\longmapsto Y_ifg^{-1},
\end{aligned}$$

où $0 \neq g, f \in \mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}[Y]$. Les application $\mathscr{Y}_i$ sont des bijections linéaires, car Y_i est un élément inversible, $\forall 1 \leq i \leq n$. Soient $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. On note

$$\theta_{i,q}(k) = q^{2\sum_1^i k_j}, \qquad \text{avec } \theta_{0,q}(k) = 1. \tag{10}$$

Lemme 2.1. *Soit $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Alors*

1) $$\mathscr{Z}_j(Y_1^{k_1} \ldots Y_n^{k_n}) = \theta_{j,q}(k)Y_1^{k_1} \ldots Y_n^{k_n}, \qquad \textit{pour tout } j \in \{1, \ldots, n\};$$

2) $$\begin{aligned}
\mathscr{X}_i(Y_1^{k_1} \ldots Y_n^{k_n}) &= (q^2-1)^{-1}\theta_{i-1,q}(k)^{-1/2}\\
&\quad \times \big(\theta_{i,q}(k) - q\theta_{i-1,q}(k)\big)Y_1^{k_1} \ldots Y_i^{k_i-1} \ldots Y_n^{k_n}, \qquad i > 1\\
\mathscr{X}_1(Y_1^{k_1} \ldots Y_n^{k_n}) &= (q^2-1)^{-1}\theta_{1,q}(k)Y_1^{k_1-1} \ldots Y_n^{k_n};
\end{aligned}$$

3) $$\mathscr{Y}_i(Y_1^{k_1} \ldots Y_n^{k_n}) = \theta_{i-1,q}(k)^{-1/2}Y_1^{k_1} \ldots Y_i^{k_i+1} \ldots Y_n^{k_n};$$

4) *Les applications $\mathscr{X}_i, \mathscr{Y}_i, \mathscr{Z}_i$ satisfont les relations suivantes*

$$\begin{aligned}
\mathscr{X}_i\mathscr{Y}_i - \mathscr{Y}_i\mathscr{X}_i &= \mathscr{Z}_i, \qquad \forall i \geq 1,\\
\mathscr{X}_i\mathscr{Y}_i - q^2\mathscr{Y}_i\mathscr{X}_i &= q\mathscr{Z}_{i-1}, \qquad i > 1,\\
\mathscr{X}_1\mathscr{Y}_1 &= q^2\mathscr{Y}_1\mathscr{X}_1.
\end{aligned}$$

Démonstration. C'est un calcul routinier. □

Proposition 2.2. *Considérons $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ où $q \in \mathbb{k}^*$ est non racine de l'unité. Alors il existe un morphisme d'algèbres injectif*

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_n : \mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}) &\longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}(Y))\\
x_i &\longmapsto \mathscr{X}_i
\end{aligned}$$

$$y_i \longmapsto \mathscr{Y}_i$$
$$z_i^{-1} \longmapsto \mathscr{Z}_i^{-1},$$

$i \in \{1, \ldots, n\}$. *En particulier* $\mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n})$ (*resp.* $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$) *est isomorphe à une sous-algèbre de la* $\mathbb{k}$*-algèbre* $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{q_n}(Y))$, *engendrée par* $\mathscr{X}_i, \mathscr{Y}_i$ (*resp. par* $\mathscr{X}_i, \mathscr{Y}_i, \mathscr{Z}_i$).

Démonstration. Premièrement on a un morphisme $\Phi_n : \mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2\times n}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{q_n}(Y))$, défini par $\Phi_n(x_i) = \mathscr{X}_i$, $\Phi_n(y_i) = \mathscr{Y}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ qu' est bien défini, d'après le Lemme 2.1 et les Équations (8). Comme $\mathscr{X}_i\mathscr{Y}_i - \mathscr{Y}_i\mathscr{X}_i = \mathscr{Z}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\Phi_n(z_i) = \mathscr{Z}_i$. Mais $\mathscr{Z}_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, sont des éléments inversibles dans $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}_{q_n}(Y))$, d'où Φ_n se prolonge à $\overline{\Phi}_n$. Cette dernière application est injective, parce que $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ est simple. □

Le morphisme de la Proposition 2.2 donne une structure de $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$-module à gauche sur $\mathbb{k}_{q_n}(Y)$. On a, d'après le Lemme 2.1, que $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ est un $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$-sous-module de $\mathbb{k}_{q_n}(Y)$.

Proposition 2.3. *Considérons* $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ *où* $q \in \mathbb{k}^*$ *est non racine de l'unité. L'algèbre* $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ *est un* $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$*–module à gauche holonome et cyclique engendré par l'élément* 1.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, on peut donc écrire $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$ avec $\alpha^\pm \in \mathbb{N}^n$. Par suite, d'après le Lemme 2.1 et la Proposition 2.2, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{k}^*$ tel que on a

$$Y^\alpha = (\lambda y_1^{\alpha_1^+} \ldots y_n^{\alpha_n^+} x_1^{\alpha_1^-} \ldots x_n^{\alpha_n^-}) \cdot 1$$

L'élément 1 engendre donc le $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$-module $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$, puisque $\{Y^\alpha | \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$ est une base du $\mathbb{k}$-espace vectoriel. On denote par W le $\mathbb{k}$-sous-espace de $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ engendré par 1. Soit V le $\mathbb{k}$-sous-espace de $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ engendré par les x_i, y_i, z_i^{-1}. Il clair que V engendre $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ comme $\mathbb{k}$-algèbre. En plus, V^sW est le $\mathbb{k}$-sous-espace de $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ engendré par l'ensemble $\{Y^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n, |\alpha| \le s\}$, dont $|\alpha| = \sum_i |\alpha_i|$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $|\alpha_i|$ la valeur absolue de $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. On a donc $\{V_s(\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}])\}_{s\in\mathbb{N}}$ est une filtration du $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$-module à gauche $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ avec

$$\dim_{\mathbb{k}}(V_s(\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}])) \le 2^n \binom{s+n}{n}.$$

Alors, d'après le Théorème 1.12, la dimension de Gelfand–Kirillov du $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$-module à gauche $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ doit être n. □

Remarque 2.4. Le $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$-module à gauche $\mathbb{k}_{q_n}[Y^{\pm 1}]$ n'est pas simple. Pour $n = 2$, il suffit de prendre le polynôme $f = 1 - Y_2 \in \mathbb{k}_{q_2}[Y^{\pm 1}]$ et de voir que $\mathscr{B}_2^q(\mathbb{k}) \cdot f$ est un sous-module propre de ${}_{\mathscr{B}_2^q(\mathbb{k})}\mathbb{k}_{q_2}[Y^{\pm 1}]$. En effet, si on suppose qu'il existe $r \in \mathscr{B}_2^q(\mathbb{k})$ tel que $rf = 1$, alors en comparant les coefficients dans la base $\{Y^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^2\}$ et en utilisant le fait que q est non racine de l'unité, on trouve que $r = 0$, ce qui faux. On a donc $0 \neq \mathscr{B}_2^q(\mathbb{k}) \cdot f \subsetneq {}_{\mathscr{B}_2^q(\mathbb{k})}\mathbb{k}_{q_2}[Y^{\pm 1}]$.

L'existence des modules holonomes donne la valeur de la dimension global de $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$.

Corollaire 2.5. *Si q n'est pas racine de l'unité, alors* $\mathrm{gldim}(\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})) = n$.

Démonstration. Comme dans la preuve du Théorème 1.11 nous avons $\mathrm{gldim}(\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})) \leq n$. Comme $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})$ est Cohen–Macaulay, on a $j_{\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})}(\mathbb{k}_{\mathsf{q}_n}[Y^{\pm 1}]) = n$, d'oú gldim $(\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k})) \geq n$. $\square$

Afin de donner un analogue du polynôme de Bernstein, on va travailler sur le corps $\mathbb{k}(t)$ des fractions de $\mathbb{k}[t]$ l'anneau des polynômes à une seule indéterminé. Soit $q \in \mathbb{k}^*$ non racine de l'unité, on note par $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$ la localisation de la $\mathbb{k}(t)$-algèbre $\mathscr{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}(t)^{2\times n})$ relative à l'ensemble multiplicatif engendré par les éléments normaux $z_1, \ldots, z_n$. La structure de $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$-module à gauche sur $\mathbb{k}(t)_{\mathsf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$ est donnée comme dans la Proposition 2.2, en prenant pour les applications $\mathscr{X}_i$ les applications $\mathscr{X}_i^t$ suivantes:

$$\mathscr{X}_i^t(F) = (q^2-1)^{-1} Y_i^{-1}(\lambda_i(t)\mathscr{Z}_i(F) - q\lambda_{i-1}(t)\mathscr{Z}_{i-1}(F)), \qquad i > 1$$
$$\mathscr{X}_1^t(F) = (q^2-1)^{-1} Y_1^{-1}\lambda_1(t)\mathscr{Z}_1(F), \qquad \text{pour tout } F \in \mathbb{k}(t)_{\mathsf{q}_n}(Y),$$

où $\{\lambda_i(t)\}_{1\leq i\leq n} \subsetneq \mathbb{k}(t)\backslash\{0\}$ est une famille finie des polynômes non nuls.

Corollaire 2.6. *Soit $F = Y_1^{k_1}\ldots Y_n^{k_n}$ avec $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ un monôme dans le $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$-module à gauche holonome $\mathbb{k}(t)_{\mathsf{q}_n}[Y^{\pm 1}]$. Alors, on a l'égalité suivante:*

$$f_1(t)\ldots f_n(t)\cdot 1 = (x_n^{k_n}\ldots x_1^{k_1})\cdot F,$$

où les $f_i(t)$ sont des polynômes définis par

$$f_1(t) = (q^2-1)^{-k_1}\lambda_1(t)^{k_1} q^{k_1(k_1+1)},$$
$$f_i(t) = (q^2-1)^{-k_i}\prod_{j=0}^{k_i-1}\left(\lambda_i(t)q^{2(k_i-j)} - q\lambda_{i-1}(t)\right), \qquad (i > 1).$$

Démonstration. Par définition de la $\mathscr{B}_n^q(\mathbb{k}(t))$-action à gauche, on a

$$\begin{aligned} x_1\cdot F &= \mathscr{X}_1^t(F) = (q^2-1)^{-1}\lambda_1(t)q^{2k_1}Y_1^{k_1-1}\ldots Y_n^{k_n},\\ x_i\cdot(Y_i^{k_i}\ldots Y_n^{k_n}) &= \mathscr{X}_i^t(Y_i^{k_i}\ldots Y_n^{k_n})\\ &= (q^2-1)^{-1}\left(\lambda_i(t)q^{2k_i} - q\lambda_{i-1}(t)\right)Y_i^{k_i-1}\ldots Y_n^{k_n}, \qquad (i > 1). \end{aligned}$$

Si on continue à multiplier à gauche de F successivement les puissances $x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}$, on aboutit à l'équation du corollaire. $\square$

ACKNOWLEDGMENTS

Nous remercions le referee pour tout ses suggestions et commentaires. Spécialement d'avoir tiré notre attention sur l'énoncé du Corollaire 1.7. Research financed for project MTM 2004-1406 by the Spanish Ministry of Education and Science and by FEDER.

REFERENCES

Akhavizadegan, M., Jordan, D. A. (1996). Prime ideals of quantized Weyl algebras. *Glasgow Math. J.* 38:283–297.

Bueso, J. L., Castro, F. J., Gómez-Torrecillas, J., Lobillo, F. J. (1998). An introduction to effective calculus in quantum groups. In: Caenepeel, S., Verschoren, A., eds. *Rings, Hopf Algebras, and Brauer Groups* Lect. Notes Pure Appl. Math. Marcel Dekker, pp. 55–83.

Bueso, J. L., Gómez-Torrecillas, J., Lobillo, F. J. (2001). Computing the Gelfand-Kirillov dimension II. In: Granja, A., Hermida, J. A., Verschoren, A., eds. *Ring Theory and Algebraic Geometry*. Marcel Dekker, pp. 33–57.

Gómez-Torrecillas, J., El Kaoutit, L. (2001). Prime and primitive ideals of a class of iterated skew polynomial ring. *J. Algebra* 244:186–216.

Gómez-Torrecillas, J., El Kaoutit, L., Benyakoub, L. (2001). Prime ideals of the coordinate ring of quantum symplectic space. *Comm. Algebra* 29:3179–3197.

Goodearl, K. R. (1992). Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras. *J. Algebra* 150:324–377.

Jordan, D. A. (1995). A simple localization of the quantized Weyl algebra. *J. Algebra* 174:267–281.

Krause, G. R., Lenagan, T. H. (1985). *Growth of Algebras and Gelfand–Kirillov Dimension*. Research Notes in Mathematics, Vol. 116. London: Pitman Pub. Inc.

Levasseur, T. (1992). Some properties of noncommutative regular graded rings. *Glasgow Math. J.* 34:277–300.

Levasseur, T., Stafford, J. T. (1993). The quantum coordinate ring of special linear group. *J. Pure Appl. Algebra* 86:181–186.

Maltsiniotis, G. (1990). Groupes quantiques et structures différentielles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* 311:831–834.

McConnell, J. C., Robson, J. C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings*. Chichester-New York: J. Wiley and Sons.

McConnell, J. C., Pettit, J. J. (1988). Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras. *J. London Math. Soc.* 38:47–55.

Musson, I. M. (1993). Ring Theoretic Properties of the Coordinate Rings of Quantum Symplectic and Euclidean Space. In: Jain, S. K., Rizvi, S. T., eds. Ring Theory, Proc. Biennial Ohio State-Denison Conf. World Scientific, Singapore, pp. 248–258.

Oh, S. Q. (1997). Catenarity in a class of iterated skew polynomial rings. *Comm. Algebra* 25:37–49.

Reshetikhin, N. Y., Takhtadzhyan, N. Y., Faddeev, L. D. (1990). Quantization of Lie groups and Lie algebras. *Leningrad Math. J.* 1:193–225.

Rigal, L. (1997). Inégalité de Bernstein et équations fonctionelles pour certaines algèbres de Weyl quantiques. *Bull. Sci. Math.* 121:477–505.