COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 30(1), 129–148 (2002)

SUR LES ALGÈBRES D'HEISENBERG QUANTIQUES

L. Ben Yakoub,[1] L. El Kaoutit,[1] and M. P. Malliavin[2]

[1]Université Abdelmalek Essaadi, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tétouan, B.P. 2121, Tétouan, Morocco
[2]Université Pierre et Marie Curie, (Paris VI) 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex, 05-France

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on étudie l'algèbre H'_{q^2} analogue de l'algèbre H_{q^2}, ([1]). On montre que H'_{q^2} est caténaire, satisfait la condition de second niveau forte, et que toutes les cliques d'idéaux premiers sont localisables. De plus on calcule le groupe des automorphismes de H'_{q^2}. Enfin on détermine toute l'algèbre de Lie des dérivations de H_{q^2}.

INTRODUCTION

E.E. Kirkman et L.W. Small ont introduit dans [2] deux q-analogues H_q et $H'_{q'}$ de l'algèbre enveloppante de l'algèbre d'Heisenberg complexe. H_q et $H'_{q'}$ sont deux algèbres sur un corps $\Bbbk$, algébriquement clos de caractéristique nulle, engendrées par a, a^+ et L avec les relations:

$$\begin{cases} L &= aa^+ - qa^+a \\ La &= qaL \\ La^+ &= q^{-1}a^+L \end{cases} \quad \begin{cases} L &= aa^+ - q'a^+a \\ aL &= q'La \\ La^+ &= q'a^+L \end{cases}, \quad q, q' \in \Bbbk \setminus \{0\},$$

respectivement. H_q et $H'_{q'}$ sont des extensions de Ore itérées, et sont donc noethériennes intègres ([2], [1]). Bien qu'elle soient définies par des relations en apparence très voisines, H_{q^2} et H'_{q^2} (q' est remplacé par q^2) ne sont pas isomorphes. En particulier H_{q^2} n'est pas primitif ([2], Proposition 1.2). Mais si q est non racine de l'unité alors H'_{q^2} est primitive de centre $\Bbbk$ ([2], Proposition 2.3). Dans [1] on trouvera l'étude de H_{q^2}. Dans ce travail on étudie l'algèbre H'_{q^2} ainsi que le groupe de ses automorphismes. Les dérivations de H'_{q^2} ont été calculées dans [3], ici on calculera les dérivations de H_{q^2}.

Dans la suite, on remplace dans la définition de $H'_{q'}$, q' par q^2 et $a^+ = x_2$, $a = x_3$, $-q^{-1}L = x_1$; H'_{q^2} est donc l'algèbre engendrée sur $\Bbbk$ par x_1, x_2, x_3 avec les relations de commutation suivantes:

$$\begin{aligned} x_1 &= qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2, \\ x_3x_1 &= q^2x_1x_3, \\ x_2x_1 &= q^{-2}x_1x_2. \end{aligned}$$

H'_{q^2} est une extension de Ore itérée de la forme: $H'_{q^2} = R[x_3; \sigma_2, \delta_2]$ avec $R = \Bbbk[x_1][x_2; \sigma_1]$ où σ_1, σ_2 sont les automorphismes définis par:

$$\sigma_1(x_1) = q^{-2}x_1, \quad \sigma_2(x_1) = q^2x_1, \quad \sigma_2(x_2) = q^2x_2,$$

et δ_2 est la σ_2-dérivation définie par:

$$\delta_2(x_1) = 0, \quad \delta_2(x_2) = -qx_1.$$

On en déduit que $\sigma_2\delta_2 = \delta_2\sigma_2$. Si on suppose que la caractéristique de $\Bbbk$ est nulle alors, d'après ([4], théorème 2.3), tous les idéaux premiers de H'_{q^2} sont complètement premiers.

De même si on remplace $(-q^{-1}L, a^+, a)$ par (x_1, x_2, x_3) dans la définition de l'algèbre d'Heisenberg quantique H_{q^2}, alors H_{q^2} est la $\Bbbk$-algèbre engendrée par x_1, x_2, x_3, soumis aux relations de commutation:

$$\begin{aligned} x_1 &= qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2, \\ x_3x_1 &= q^{-2}x_1x_3, \\ x_2x_1 &= q^2x_1x_2, \end{aligned}$$

et on a $H_{q^2} = \Bbbk[x_1][x_2;\sigma_1][x_3;\sigma_2,\delta_2]$ avec:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1(x_1) = q^2x_1, & \sigma_2(x_1) = q^{-2}x_1, & \sigma_2(x_2) = q^2x_2 \\ \delta_2(x_1) = 0, & \delta_2(x_2) = -qx_1. & \end{array}$$

D'après [5], le centre de H_{q^2} (q non racine de l'unité) est $\Bbbk[\Omega]$, où $\Omega = x_1\overline{x}_1$, $\overline{x}_1 = q^{-1}x_2x_3 - qx_3x_2 = (q^{-1} - q^3)x_2x_3 + q^2x_1$.

Dans tout le reste, on fixe les notations suivantes:

$\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
$q \in \Bbbk^* = \Bbbk \setminus \{0\}$ non racine de l'unité.
$A := H'_{q^2}$, $B := H_{q^2}$, et $Z(B) = \Bbbk[\Omega]$, le centre de B.

1 L'ALGÈBRE H'_{q^2}

Dans cette partie on donnera une étude de H'_{q^2} analogue à celle donner dans [1], pour H_{q^2}. Pour la commodité du lecteur on a répété plusieurs preuves.

1.1 Les Idéaux Premiers De H'_{q^2}

Un anneau R est dit *caténaire* si entre deux idéaux premiers emboîtés toutes les chaînes maximales d'idéaux premiers ont la même longueur. Un idéal I de R satisfait la propriété d'Artin-Rees (AR-propriété) à gauche si pour tout idéal à gauche J de R, il existe $n \geq 1$ tel que $J \cap I^n \subseteq JI$.

Avant de montrer la caténarité de A on va calculer entièrement son spectre premier $\mathrm{Spec}(A)$. Delà on vérifiera la propriété de Artin-Rees.

Proposition 1.1.1. *Soit P un idéal premier de A dont l'intersection avec $R = \Bbbk[x_1][x_2;\sigma_1]$ est nul, alors P est nul.*

Démonstration. On suit la méthode de la Proposition 2.3 de [2], on remarque d'abord que $S = \{q^l x_2^i x_1^j \mid l \in \mathbb{Z}, i,j \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénominateur de R car R est intègre et x_1, x_2 sont normalisants dans R ([6], p. 128). D'autre part S est σ_2-stable. D'après ([7], Lemme 1.3 et Lemme 1.4) S est un ensemble de Ore de A et on a:

$$S^{-1}A = \Bbbk[x_1^{\pm 1}][x_2^{\pm 1};\sigma_1][x_3;\sigma_2,\delta_2],$$

Marcel Dekker, Inc.
270 Madison Avenue, New York, New York 10016

où σ_2 (resp, δ_2) est le prolongement de σ_2 (resp, de δ_2) à $S^{-1}R := T$. Remarquons que T est une algèbre de McConnell-Pettit, et puisque q n'est pas racine de l'unité, T est simple d'après ([8], Théorème 1.3).

Montrons que δ_2 n'est pas une σ_2-dérivation intérieure sur T. Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in T$ tel que $\delta_2(r) = ar - \sigma_2(r)a$, pour tout $r \in T$. Pour $r = x_1$, on déduit que: $0 = ax_1 - q^2x_1a$. Pour $r = x_2$, il vient: $-qx_1 = ax_2 - q^2x_2a$. Ecrivons $a = \sum_{i=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\lambda_{ij}x_1^ix_2^j$, $\lambda_{ij} \in \Bbbk$. On a:

$$\sum_{i,j=-n}^{n}(q^{-2j} - q^2)\lambda_{ij}x_1^{i+1}x_2^j = ax_1 - q^2x_1a = 0, \text{ donc } \lambda_{ij} = 0 \text{ pour } j \neq -1.$$

D'où: $a = \sum_{i=-n}^{n}\mu_ix_1^ix_2^{-1}$. L'identité $-qx_1 = ax_2 - q^2x_2a$, devient alors:

$$\begin{aligned} -qx_1 &= \sum_{i=-n}^{n}\mu_ix_1^i - q^2\left(\sum_{i=-n}^{n}\mu_ix_2x_1^ix_2^{-1}\right) \\ &= \sum_{i=-n}^{n}\mu_ix_1^i - q^2\sum_{i=-n}^{n}\mu_iq^{-2i}x_1^i = \sum_{i=-n}^{n}\mu_i(1 - q^{2(1-i)})x_1^i. \end{aligned}$$

Donc $\mu_i = 0$ si $i \neq 1$ et $-q = \mu_1(1-1) = 0$. On aboutit à une contradiction, ce qui prouve que δ_2 n'est pas intérieure. Ceci montre en vertu de ([2], proposition 2.2) et la fin de la démonstration de ([2], Proposition 2.3) que si P est un idéal premier dont l'intersection avec R est nulle, il est nul. $\square$

Rappelons ([1], proposition 2.1) que les idéaux premiers de R sont: $\langle 0\rangle$, $\langle x_1\rangle$, $\langle x_2\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_1, x_2 - \mu\rangle$, $\langle x_1 - \lambda, x_2\rangle$, $\mu, \lambda \in \Bbbk^*$, car $\Bbbk$ est algébriquement clos. Si P est un idéal premier non nul de A et si P contient x_2, il contient x_1 à cause de la relation $x_1 = qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2$. Donc $P \cap R \neq \langle x_2\rangle$ et $P \cap R \neq \langle x_2, x_1 - \mu\rangle$, avec $\mu \neq 0$. Par suite, d'après la Proposition 1.1.1, P contient nécessairement x_1. Comme x_1 est normalisant, P/Ax_1 est un idéal premier de A/Ax_1 et $A/Ax_1 = \Bbbk[\overline{x}_2][\overline{x}_3; \overline{\sigma}_2]$, où $\overline{x}_2, \overline{x}_3$ sont les images de x_2, x_3 à A/Ax_1 et $\overline{\sigma}_2$ est le prolongement de σ_2 à $R/Rx_1 \cong \Bbbk[\overline{x}_2]$. D'où P/Ax_1 est de la forme: $\langle\overline{0}\rangle$, $\langle\overline{x}_2\rangle$, $\langle\overline{x}_3\rangle$, $\langle\overline{x}_2 - \lambda, \overline{x}_3\rangle$, $\langle\overline{x}_2, \overline{x}_3\rangle$, $\langle\overline{x}_2, \overline{x}_3 - \theta\rangle$; avec $\lambda, \theta \in \Bbbk^*$. On a donc:

Proposition 1.1.2. *Le treillis des idéaux premiers de H'_{q^2} est:*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\langle x_1, x_2, x_3 - \theta\rangle & & \langle x_1, x_2, x_3\rangle & & \langle x_1, x_2 - \lambda, x_3\rangle \\
& \langle x_1, x_2\rangle \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & \langle x_1, x_2\rangle \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \\
& & \langle x_1\rangle \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & \\
& & \langle 0\rangle \arrow[u, dash] & &
\end{tikzcd}
$$

Avec $\lambda, \theta \in \Bbbk^*$.

Corollaire 1.1.3. *L'algèbre* H'_{q^2} *est caténaire et satisfait la condition de second niveau forte ([9], p.220).*

Démonstration. Comme dans ([1], proposition 3.2), il suffit d'appliquer le diagramme de la page 226 de [9] et la proposition 1.1.2. □

On démontre comme dans le lemme 3.1 de [1], le lemme suivant;

Lemme 1.1.4. *Les idéaux premiers* $\langle x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_1, x_3\rangle$, $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$, *vérifient la propriété* AR.

Démonstration. C'est évident pour $\langle x_1\rangle$ car x_1 est un élément normalisant de A ([9], Théorème 3.3.16). Les cas $\langle x_1, x_2\rangle$ et $\langle x_1, x_3\rangle$ sont symétriques. Il suffit d'appliquer le critère 4.2.7 de [10] à $\langle x_1, x_2\rangle$ et $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$.

Dans le cas où $P = Ax_1 + Ax_2 = x_1A + x_2A$, on a $Px_1 = x_1P$ car si $ax_1 \in Px_1$, $a \in A$, alors comme x_1 est normal $ax_1 = x_1b \in Ax_1^2 + Ax_2x_1 = x_1^2A + x_1Ax_2$ où $b \in A$ et comme A est intègre $b \in x_1A + x_2A = P$. Donc $P x_1 \subseteq x_1P$ et inversement. Montrons que $x_2P + x_1A = Px_2 + x_1A$ ([10], 4.2.7.i). Par symétrie il suffit de vérifier que $x_2P \subseteq Px_2 + x_1A$, c'est à dire $x_2Ax_2 \subseteq Px_2$, ce qui est clair.

Pour l'idéal $P = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$ on procède de la même façon que dans ([1], Lemme 3.1). □

En utilisant le critère de P.F. Smith cité en ([1], Théorème 3.1), on montre comme dans ([1], Proposition 3.1) que:

Proposition 1.1.5. *Si* $P = Ax_1,\ Ax_1 + Ax_2,\ Ax_1 + Ax_3,$ *ou* $Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$ *alors* $C(P) = A \backslash P$ *est un ensemble de Ore.*

1.2 Cliques et Localisabilité Dans H'_{q^2}

Soit R un anneau noethérien. Si P et Q sont deux idéaux premiers de R, on dit qu'il existe un *lien* de P vers Q, et on note $P\ Q$, s'il existe un idéal

I de R tel que $PQ \subseteq I \subsetneq P \cap Q$, avec $(P \cap Q)/I$ sans torsion comme R/P-module à gauche et comme R/Q-module à droite. Un lien de type $P \rightsquigarrow P$ est dit trivial. Ceci détermine un graphe dans $\mathrm{Spec}(R)$ (l'ensemble des idéaux premiers de R) et la *clique* d'un idéal premier Q est la composante connexe de ce graphe qui contient Q. On montre comme dans ([1], proposition 3.3) que:

Proposition 1.2.1. *Les cliques des idéaux premiers Ax_1, $Ax_1 + Ax_2$, $Ax_1 + Ax_3$, $Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$ sont triviales.*

Démonstration. (1) Cas de $P = Ax_1$. Comme A est intègre, $P = Ax_1 \neq P^2 = Ax_1^2$ et P/P^2 est un A/P-module sans torsion à droite et à gauche. Donc $Ax_1 \rightsquigarrow Ax_1$. Si $Q \rightsquigarrow Ax_1$ ou si $Ax_1 \rightsquigarrow Q$ on a $Ax_1 \subseteq Q$ d'après ([1], Lemme 3.3.2), et par ([1], Lemme 3.3.1) et la proposition 1.1.5: $A \backslash P \subseteq A \backslash Q$; donc $Q \subseteq P$ et $P = Ax_1 = Q$.

(2) Cas de $P = Ax_1 + Ax_2$ ou $Ax_1 + Ax_3$. Il suffit d'examiner le cas $P = Ax_1 + Ax_2$. On a $Ax_1 + Ax_2 \neq (Ax_1 + Ax_2)^2$ car sinon $x_1 \in Ax_1^2 + Ax_1 x_2 + Ax_2^2$ et on aurait $x_1 = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, où $a, b, c, \in A$. D'où $cx_2^2 \in A x_1$ et $c \in Ax_1$. Donc $1 \in Ax_1 + Ax_2$ ce que n'est pas vrai. On peut vérifier facilement, comme dans la preuve de ([1], Proposition 3.3(ii)) que $Ax_1 + Ax_2 /(Ax_1 + Ax_2)^2$ est sans torsion à droite et à gauche comme $A/(Ax_1 + Ax_2)$-module. Supposons par exemple que $r(ux_1 + vx_2) = u_0x_1^2 + v_0x_1x_2 + w_0x_2^2$, avec $u, v, u_0, v_0, w_0 \in A$ et $r \notin P$. Alors

$$(ru + u_0x_1)x_1 = (v_0x_1 + w_0x_2 - rv)x_2.$$

Donc, $rv \in P$ et $v \in P$. Par suite $rux_1 \in Px_1 + Px_2$, c'est à dire que $rux_1 = px_1 + p'x_2$, $p, p' \in P$. Donc $p' \in Ax_1$ et $ru \in P$, d'où $u \in P$ et $ux_1 + vx_2 \in P^2$. Par suite $P \rightsquigarrow P$. Si Q est un idéal premier, tel que $P \rightsquigarrow Q$, on a par ([1], Lemme 3.3.2) puisque P vérifie la propriété AR, $P \subseteq Q$. D'autre part $A \setminus P \subseteq A \setminus Q$ par ([1], Lemme 3.3.1) et la Proposition 1.1.5. D'où $Q \subseteq P$ et par suite $P = Q$.

(3) Le cas $P = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3$. Il suffit de montre en appliquant les mêmes résultats qu'en Eq. (1) et Eq. (2) que $P \rightsquigarrow P$. On verra que tel est le cas en appliquant la proposition 1.2.5 et le théorème 1.2.6 avec $\mu = \lambda = 0$ que nous démontrerons plus loin (Remarque 1.2.7). □

Corollaire 1.2.2. *Les idéaux premiers de la proposition précédente sont classiquement localisables.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 1.2.1, du fait que A satisfait la condition du second niveau forte, et de ([9], Théorème 7.3.1). □

Dans la suite en va déterminer les liens entre les idéaux maximaux de la forme: $x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ où λ est un paramètre de $\Bbbk$.

Considérons dans $A = R[x_3; \sigma_3, \delta_3]$, $M = x_1R + x_2R$, et les idéaux premiers suivants: $P = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ et $Q = x_1A + x_2A + (x_3 - \mu)A$, où $\lambda, \mu \in \Bbbk$. Avec ces notations on a:

Lemme 1.2.3. *i) $P \cap Q = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)(x_3 - \mu)A$ si $\lambda \neq \mu$.*
ii) $PQ = M^2A + (x_3 - \lambda)MA + M(x_3 - \mu)A + (x_3 - \lambda)(x_3 - \mu)A$.

Démonstration. Analogue à celle du lemme 3.4 de [1]. □

Remarque 1.2.4. ([1], Remarque 3.4). On déduit du lemme précédent que si $f(x_3)$ est un polynôme de $R[x_3; \sigma_2, \delta_2]$ tel que $Mf(x_3) \subseteq PQ$, alors $(P \cap Q)f(x_3) \subseteq PQ$ si $\lambda \neq \mu$, ceci car $MA = AM$. Si de plus P est lié à Q et si $Mf(x_3) \subseteq PQ$, alors $f(x_3)$ appartient à l'annulateur à droite de $(P \cap Q)/PQ$ qui est égal à Q. En effet puisque $P \rightsquigarrow Q$, on a $Q \subseteq Ann_d((P \cap Q)/PQ)$ et $PQ \neq P \cap Q$. Comme Q est maximal on a $Q = Ann_d((P \cap Q)/PQ)$.

Notation ([1], 3): On notera $x \to \overline{x}$ la surjection canonique de R sur R/M^2. En particulier $\overline{M} = M/M^2$ et $\overline{MA} = MA/M^2A$; $\overline{M}$ s'identifie à un sous espace vectoriel de $\overline{MA}$. On notera $\overline{\delta}, \overline{\sigma}$ les applications de $\overline{M}$ dans $\overline{M}$ définies par:

$$\overline{\delta}(m + M^2) = \delta_2(m) + M^2 \text{ et } \overline{\sigma}(m + M^2) = \sigma_2(m) + M^2,$$

pour tout $m \in M$. Il est clair que $\overline{M}$ est un $\widehat{R}(:= R/M = \Bbbk)$-espace vectoriel, et si $\widehat{r} \in \widehat{R}$ et $\overline{m} \in \overline{M}$, on a: $\overline{\delta}(\widehat{r}\,\overline{m}) = \widehat{r}\delta_2(m) + M^2 = \widehat{r}\overline{\delta}(\overline{m})$. Donc $\overline{\delta}$ est une application $\Bbbk$-linéaire. Il en est de même pour $\overline{\sigma}$ car:

$$\overline{\sigma}(\widehat{r}\,\overline{m}) = \widehat{r}\sigma_2(m) + M^2 = \widehat{r}\,\overline{\sigma}(\overline{m}).$$

On considèrera la base de $\overline{M}$ sur $\widehat{R}$ donnée par: $\overline{m}_1 = \overline{x}_1$, $\overline{m}_2 = \overline{x}_2$. Comme dans [1], la matrice U de $\overline{\delta}$ relativement à cette base est:

$$\begin{pmatrix} 0 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais la matrice V de $\overline{\sigma}$ est:

$$\begin{pmatrix} q^{-2} & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.5. *Si $\lambda, \mu \in \Bbbk$ avec $\lambda \neq \mu$ et $P \rightsquigarrow Q$, alors $\mu = q^{-2}\lambda$ ou bien $\mu = q^2\lambda$.*

Démonstration. On pose $\widehat{\overline{m}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Alors $(x_3 - \lambda)\widehat{\overline{m}} + \widehat{\overline{m}}(x_3 - \mu)$ est une ligne à deux éléments dont les coordonnées appartiennent à PQ/M^2A et qui est égale à $\widehat{\overline{m}}(Vx_3 + U - \lambda I_2 + (x_3 - \mu)I_2)$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet, de l'égalité $x_3 m_j = \sigma_2(m_j)x_3 + \delta_2(m_j)$ où $m_j = x_1, x_2$, on déduit que $x_3\overline{m}_j = \overline{\sigma}(\overline{m}_j)x_3 + \overline{\delta}(\overline{m}_j)$. Donc $x_3(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)Vx_3 + (\overline{x}_1, \overline{x}_2)U$, d'où si $f(x_3) \in A$, alors

$$\overline{f}(x_3)\widehat{\overline{m}} = \widehat{\overline{m}}\overline{f}(Vx_3 + U).$$

En particulier, pour $f(x_3) = x_3 - \lambda$, on a

$$(x_3 - \lambda)\widehat{\overline{m}} + \widehat{\overline{m}}(x_3 - \mu) = \widehat{\overline{m}}(Vx_3 + U - \lambda I_2 + (x_3 - \mu)I_2).$$

On pose $D = Vx_3 + U - \lambda I_2 + (x_3 - \mu)I_2$:

$$D = \begin{pmatrix} q^{-2}x_3 - \lambda + x_3 - \mu & -q \\ 0 & q^2 x_3 - \lambda + x_3 - \mu \end{pmatrix}.$$

Alors $\widehat{\overline{m}}DD^* = \widehat{\overline{m}}\det(D)$, où D^* est la matrice adjointe de D. Pour $i = 1, 2$ on a $\overline{m}_i \det(D) \in PQ/M^2A$ et donc $\overline{M}\det(D) \subseteq PQ/M^2A$. D'après la remarque 1.2.4, on a $\det(D) \in \overline{Q} = (x_3 - \mu)\Bbbk[x_3]$, donc $(q^2x_3 - \lambda)(q^{-2}x_3 - \lambda) \in (x_3 - \mu)\Bbbk[x_3]$. D'où le résultat. $\square$

On démontre comme pour le théorème 3.4.1 de [1] que:

Théorème 1.2.6. *Soient λ, μ quelconques dans $\Bbbk$. Soient $P = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ et $Q = x_1A + x_2A + (x_3 - \mu)A$. Si $\mu = q^{-2}\lambda$, alors $P \rightsquigarrow Q$.*

Démonstration. On adapte la démonstration du théorème 3.4.1 de [1], mais en prenant $I = M^2A + x_1A + x_2(x_3 - q^{-2}\lambda)A + (x_3 - \lambda)A$. Remarquons que $x_2 \notin I$ car si on avait $x_2 \in M^2A + x_1A + x_2(x_3 - q^{-2}\lambda)A + (x_3 - \lambda)A$, on aurait modulo $M^2A + x_1A$:

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_2(x_3 - q^{-2}\lambda)\overline{a} + (x_3 - \lambda)\overline{a}', \quad a, a' \in A$$
$$\overline{x}_2 = q^{-2}(x_3 - \lambda)\overline{x}_2\overline{a} + (x_3 - \lambda)\overline{a}'$$
$$= (x_3 - \lambda)(q^{-2}\overline{x}_2\overline{a} + \overline{a}').$$

Comme dans [1], l'idéal de $\overline{A} = A/(M^2A + x_1A)$ engendré par $\overline{x}_2$ est complètement premier, il existerait donc $\overline{b} \in \overline{A}$ tel que: $q^{-2}\overline{x}_2\overline{a} + \overline{a}' = \overline{b}\overline{x}_2$, d'où $(1-(x_3-\lambda)\overline{b})\overline{x}_2 = \overline{0}$ dans $\overline{A}$, c'est à dire $(1-(x_3-\lambda)b)x_2 \in M^2A + x_1A$. Donc modulo M^2A, on aurait $1-(x_3-\lambda)b \in x_1A$ et $1 \in x_1A + (x_3-\lambda)A \subseteq P$, d'où la contradiction. On définit une application $\psi : A \longrightarrow A/I$ telle que $\psi(a) = x_2a + I$, pour tout $a \in A$. Puisque $M^2A \subseteq I$, il est clair que $MA \subseteq Ker(\psi)$. D'autre part:

$$\psi(x_3 - q^{-2}\lambda) = x_2(x_3 - q^{-2}\lambda) + I = 0 + I.$$

Donc $MA + (x_3 - q^{-2}\lambda)A = Q \subseteq Ker(\psi)$. Montrons que $Ker(\psi) = Q$; en effet puisque Q est un idéal maximal à droite, il suffit de montrer que $Ker(\psi) \neq A$. Or, $Ker(\psi) = A$ implique que $\psi(1) = x_2 + I$ est nul, ce qui entraine que $x_2 \in I$, ce qui est faux. Remarquons que $\psi(A) = x_2A + I = P$. Donc ψ induit un monomorphisme $\Psi : A/Q \longrightarrow A/I$ d'image P/I. On a alors la suite exacte de A-modules à droite:

$$0 \to A/Q \xrightarrow{\Psi} A/I \xrightarrow{\pi} A/P \to 0,$$

où π est la surjection naturelle. Puisque M annule A/P et A/Q, ($MA \subseteq Q$ et $MA \subseteq P$) mais n'annule pas A/I (car MA n'est pas inclus dans I), cette suite exacte n'est pas scindée. En appliquant ([1], sous-Lemme 3.4) on voit que $P \rightsquigarrow Q$. $\square$

Remarque 1.2.7. La Proposition 1.2.5 et le théorème 1.2.6 montrent que la clique de $P = x_1A + x_2A + (x_3 - \lambda)A$ est triviale si $\lambda = 0$ ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.2.1 (3). Mais si $\lambda \neq 0$ on a, en posant $P_n = x_1A + x_2A + (x_3 - q^{2n}\lambda)A$, où $n \in \mathbb{Z}$; la clique de $P = P_0$ est $\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. On peut donner une description parallèle de la clique de $x_1A + (x_2 - \lambda)A + x_3A$ où $\lambda \in \Bbbk$. Le Lemme 3.3.1 de [1] montre que pour $\lambda \neq 0$ aucun des P_n n'est localisable.

Théorème 1.2.8. *Toutes les cliques de A sont classiquement localisables au sens de Jategaonkar.*

Démonstration. Comme A satisfait la condition de second niveau (Corollaire 1.1.3) et que les cliques (qui ont été complètement décrites, d'après la Proposition 1.2.1 et la Remarque 1.2.7) vérifient la condition d'incomparabilité il suffit de vérifier la condition d'évitemment ([11], Théorème 5.3 ou 5.4). Supposons que J soit un idéal à droite contenu dans la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P_n$ avec les notations de la remarque 1.2.7. Comme chaque

P_n contient MA on a $J + MA \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P_n$ et alors modulo MA on a $\overline{J} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \overline{P}_n$. Mais $\overline{A}$ est un anneau de polynôme en une indéterminée donc $\overline{J}$ est principal et il existe nécessairement $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{J} \subseteq \overline{P}_n$. Donc $J \subseteq P_n$. $\square$

1.3 Le Groupe Des Automorphismes De H'_{q^2}

On note $\mathbf{Aut}_{\Bbbk}(A)$ le groupe des automorphismes de A. Pour le déterminer on raisonnera comme dans [12]. D'abord on calculera l'image de l'unique idéal premier $\langle x_1 \rangle$ de hauteur **1**, et on trouve qu'il est $\mathbf{Aut}_{\Bbbk}(A)$-stable comme $\Bbbk$-espace vectoriel. Puis, en utilisant les relations de commutation des générateurs, on déduira la stabilité des $\Bbbk$-espaces $\Bbbk x_2$ et $\Bbbk x_3$.

Lemme 1.3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a:*

$$\begin{array}{ll} x_2 x_1^n = q^{-2n} x_1^n x_2, & x_2^n x_1 = q^{-2n} x_1 x_2^n. \\ x_3 x_1^n = q^{2n} x_1^n x_3, & x_3^n x_1 = q^{2n} x_1\, x_3^n. \\ x_3 x_2^n = q^{2n} x_2^n x_3 - nq x_1 x_2^{n-1}, & x_3^n x_2 = q^{2n} x_2 x_3^n - nq^{2n-1} x_1 x_3^{n-1}. \end{array}$$

Démonstration. Se déduit facilement des relations qui relient x_1, x_2 et x_3. $\square$

Lemme 1.3.2. *Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\Bbbk}(A)$, alors $\sigma(x_1) = \alpha_1 x_1,\ \ \alpha_1 \in \Bbbk^*$.*

Démonstration. $\langle x_1 \rangle$ est l'unique idéal premier de hauteur 1 et $\sigma(x_1)$ est un élément normal de A. D'après le théorème de l'idéal principal ([10], Théorème 4.1.11) on a $\sigma(x_1) \in \langle x_1 \rangle$. En travaillant avec σ^{-1} on a de même $\sigma^{-1}(x_1) \in \langle x_1 \rangle$, d'où $\sigma(x_1) = hx_1, h \in A$, et $\sigma^{-1}(x_1) = gx_1, g \in A$. L'intégrité de A implique que $hg = gh = 1$ et donc $h = \alpha_1 \in \Bbbk^*$. $\square$

Lemme 1.3.3. *Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\Bbbk}(A)$. Alors $\sigma(x_2) = \alpha_2 x_2$, $\sigma(x_3) = \alpha_3 x_3$, avec $\alpha_i \in \Bbbk^*$, $i = 2, 3$.*

Démonstration. On note: $X^v = x_1^{v_1} x_2^{v_2} x_3^{v_3}$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{N}^3$, $|v| = v_1 + v_2 + v_3$, il est clair que $\{X^v \mid v \in \mathbb{N}^3\}$ est une base de A. En développant $\sigma(x_i)$ dans cette base de Poincaré-Birkhoff-Witt, on peut écrire:

$$\sigma(x_i) = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k + f_i, \ \text{ o } f_i = \sum_{\substack{|v|\geq 2 \\ v\in\mathbb{N}^3}} \alpha_{iv} X^v.$$

Alors, d'après le lemme 1.3.2, $x_2x_1 = q^{-2}x_1x_2$ implique que;

$$\left(\alpha_{20} + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k}x_k + f_2\right)x_1 - q^{-2}x_1\left(\alpha_{20} + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k}x_k + f_2\right) = 0.$$

Et par suite,

$$\begin{aligned}&\alpha_{20}(1-q^{-2})x_1 + \alpha_{21}(1-q^{-2})x_1^2 + \alpha_{23}(q^2 - q^{-2})x_1x_3\\ &\quad + f_2x_1 - q^{-2}x_1f_2 = 0. \qquad (1)\end{aligned}$$

La différence $f_2x_1 - q^{-2}x_1f_2$ ne pouvant contenir des monômes en x_1, x_1^2 ou x_1x_3, on en déduit, parce que q n'est pas racine de l'unité, que $\alpha_{20} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0$. L'égalité (1) devient donc: $f_2x_1 = q^{-2}x_1f_2$. En développant $f_2 = \sum_{i+j+m\geq 2} \gamma_{ijm}x_1^ix_2^jx_3^m$, il vient:

$$\sum_{i+j+m\geq 2} \gamma_{ijm}\left(q^{2m-2j} - q^{-2}\right)x_1^{i+1}x_2^jx_3^m = 0.$$

Donc les seuls γ_{ijm} non-nuls sont ceux pour lesquels $m - j + 1 = 0$; d'où $j \geq 1$ et donc $\sigma(x_2) \in x_2A$. Par symétrie et en utilisant la relation $x_3x_1 = q^2x_1x_3$ on obtient de même que $\sigma(x_3) \in Ax_3$. En remplaçant σ par σ^{-1} dés le départ et en utilisant l'intégrité de A, on déduit le résultat voulu. □

Théorème 1.3.4. *Soit H'_{q^2}, où $q \in \Bbbk^*$ n'est pas racine de l'unité. Alors*

$$\mathbf{Aut}_{\Bbbk}(H'_{q^2}) \cong (\Bbbk^*)^2.$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\Bbbk}(A)$. On applique σ à la relation $x_1 = qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2$, et on utilise les lemmes 1.3.2 et 1.3.3. On obtient $\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 \in \Bbbk^*$, d'où le résultat. □

Ce résultat est différent de celui obtenu pour H_{q^2} par J. Alev et F. Dumas, ([5], proposition 2.3). Ils ont montré que $\mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(H_{q^2})$, le groupe des $\mathbb{C}$-automorphismes de H_{q^2}, est le produit semi direct de $(\mathbb{C}^*)^2$ par $\langle\omega\rangle$ où ω est une involution.

Suivant [3], on dira qu'un automorphisme σ de A vérifie $(\wp_1)$ si σ se prolonge en un automorphisme de T pour toute algèbre T contenant A comme sous-algèbre. On dira que σ vérifie $(\wp_2)$ si σ vérifie $(\wp_1)$ et induit de plus un automorphisme $\overline{\sigma}$ de A/I, pour tout idéal I de A tel que $\overline{\sigma}(\overline{a}) = \overline{\sigma(a)}$.

Corollaire 1.3.5. *Soit $\sigma \in \mathbf{Aut}_{\Bbbk}(H'_{q^2})$; alors σ est intérieur si et seulement s'il vérifie $(\wp_2)$.*

Démonstration. Elle résulte du théorème 1.3.4 et la remarque (3.5) de [3]. □

1.4 La Résolution Injective Minimale de H'_{q^2}

Cette partie est l'analogue de la $4^{ième}$ partie de [1], sauf en ce qui concerne la preuve du théorème 1.4.3, (4.2 de [1]). D'après le lemme de [13] A est une $\Bbbk$-algèbre Auslander-régulière, Cohen-Macaulay, et en utilisant le théorème (1.6) de [14], A satisfait la formule des hauteurs de Tauvel. On note par GKdim$M$ la dimension de Gelfand-Kirillov d'un A-module à gauche M. Comme dans [1], on peut vérifier que GKdim$A = 3$.

Pour tout A-module à gauche M, on appelle *grade* de M et on note $j_A(M)$ le nombre entier naturel ou $+\infty$ défini par:

$$j_A(M) = \inf\{i,\ \mathbf{Ext}^i_A(M,\ A) \neq 0\}.$$

Si P est un idéal premier de A, on note $\mu_i(P, A)$ et on appelle $\mathrm{i}^{ième}$ invariant de Bass de A, la dimension sur le corps gauche, $\mathbf{Frac}(A/P)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{Frac}(A/P) \otimes_{A/P} \mathbf{Ext}^i_A(A/P, A)$.

Proposition 1.4.1. *Pour tout idéal premier P de A avec $d = j_A(A/P)$ on a $\mu_d(P, A) = 1$ et $\mu_i(P, A) = 0$ si $i \neq d$.*

Démonstration. D'après la partie 1.2, tout idéal premier de A est engendré par une suite régulière normalisante, donc la preuve se déroule comme dans la proposition 1 de ([1], 4.1). □

Si M est A-module à gauche non nul de type fini, on dit que M est *critique* si GKdim$M/N \lneqq$ GKdim$M$ pour chaque sous-module non nul N de M. Comme dans ([1], proposition 2 de 4.1) on a:

Proposition 1.4.2. *La résolution injective minimale du A-module à gauche A est de la forme:*

$$0 \to A \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$$

$$o\ E_0 = \mathbf{Frac}(A)\ \ et\ pour\ i \geq 1,\ \ E_i = E_i^I \oplus E_i^{II}\ \ o\ E_i^I = \oplus_{ht(P)=i}^{P\in \mathrm{spec}A} E(A/P),$$

Marcel Dekker, Inc.
270 Madison Avenue, New York, New York 10016

et où E_i^{II} est l'enveloppe injective d'une somme de modules critiques chacun d'eux étant de torsion modulo son annulateur.

On montre maintenant que $E_3^{II} = 0$. Mais on va procéder de manière différente de celle de [1], on appliquant le corollaire (3.8) de [15].

Rappelons quelques résultats de [15]. Soit R une $\Bbbk$-algèbre, on note σ_{cof} le radical symétrique déterminé par $\mathcal{L}$, le filtre de Gabriel constitué par tous les idéaux à gauche de codimension finie ([15], 1). Suivant la même référence, on note par $\mathcal{Z}_{(\sigma_{cof})}$ l'ensemble de tous les idéaux premiers de codimension finie. On dit que R est *ponctuée* si tout $P \in \mathcal{Z}_{(\sigma_{cof})}$ a une codimension égale à un. D'après le corollaire (3.8) de [15], si R est une $\Bbbk$-algèbre Auslander-Gorenstein et Cohen-Macaulay ponctuée, alors $E_{\mathrm{Injdim}R} \cong \oplus_{P \in \mathcal{Z}(\sigma_{cof})} E(R/P)$ si et seulement si $\mathrm{Injdim}R = \mathrm{GKdim}R$, où $\mathrm{Injdim}R$ désigne la dimension injective de R et $E_{\mathrm{Injdim}R}$ est le dernier terme de la résolution injective minimale du R-module à gauche ${}_RR$.

Théorème 1.4.3. *On a* $E_3 \cong \oplus_{\substack{P \in \mathrm{spec}(A) \\ ht(P)=3}} E(A/P)$ *et donc* $E_3^{II} = 0$.

Démonstration. Comme A est une $\Bbbk$-algèbre Auslander-Gorenstein et Cohen-Macaulay de Gelfand-Kirillov dimension égale à 3, il suffit pour appliquer le corollaire (3.8) de [15] rappelé ci-dessus, de vérifier que A est ponctuée. Mais cela vient du fait que les idéaux premiers localement finis sont les maximaux qui ont la codimension égale à un (proposition 1.1.2). Il est clair qu'ils sont de hauteur 3, d'où $E_3^{II} = 0$. □

2 DÉRIVATIONS De H_{q^2}

Les dérivations de A ont été calculées dans ([3], théorème 3.3). Dans cette partie on détermine l'algèbre de Lie des dérivations de B. On rappelle la définition de l'algèbre d'Heisenberg quantique B; c'est la $\Bbbk$-algèbre engendrée par x_1, x_2, x_3 soumis aux relations:

$$\begin{aligned} x_2x_1 &= q^2x_1x_2, \\ x_3x_1 &= q^{-2}x_1x_3, \\ x_1 &= qx_2x_3 - q^{-1}x_3x_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Soit $\overline{x}_1 = (q^{-1} - q^3)x_2x_3 + q^2x_1$ et $\Omega = x_1\overline{x}_1$, $Z(B) = \Bbbk[\Omega]$ le centre de B. On note $\mathbf{Der}(B)$ (resp, $\mathbf{Derint}(B)$) l'algèbre des dérivations de B (resp, des dérivations intérieures de B).

MARCEL DEKKER, INC.
270 Madison Avenue, New York, New York 10016

Une $\mathbb{k}$-dérivation de B est dite $Z(B)$-dérivation, si elle est $Z(B)$-linéaire. Un exemple de $Z(B)$-dérivation est l'application linéaire δ_1 définie par: $\delta_1(x_1) = 0$, $\delta_1(x_2) = -x_2$ et $\delta_1(x_3) = x_3$.

Les deux lemmes suivants découlent facilement des relations (2).

Lemme 2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a:*

$$
\begin{aligned}
x_2 x_1^n &= q^{2n} x_1^n x_2, & x_2^n x_1 &= q^{2n} x_1 x_2^n. \\
x_3 x_1^n &= q^{-2n} x_1^n x_3, & x_3^n x_1 &= q^{-2n} x_1 x_3^n. \\
x_3 x_2^n &= q^{2n} x_2^n x_3 - q q_n x_1 x_2^{n-1}. \\
x_3^n x_2 &= q^{2n} x_2 x_3^n - q^{-2(n-1)+1} q_n x_1 x_3^{n-1},
\end{aligned}
$$

où $q_n = \left(\frac{1-q^{4n}}{1-q^4}\right)$.

Lemme 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a:*

$$
\begin{aligned}
x_3 x_2^n &= q^{-2n} x_2^n x_3 - q^{-1} s_{n-1} \overline{x}_1 x_2^{n-1}, \\
x_3^n x_2 &= q^{-2n} x_2 x_3^n - q^{2(n-1)-1} s_{n-1} \overline{x}_1 x_3^{n-1},
\end{aligned}
$$

où $s_n = 1 + q^{-4} + \cdots + q^{-4n}$.

Pour $p \in B$, on note ad_p la dérivation intérieure définie par p (*i.e.* $ad_p(b) = pb - bp$, pour tout $b \in B$).

Lemme 2.3. *(1) Soit $P_{i,j,k} = x_1^i x_2^j x_3^k, \quad i, j, k \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$
ad_{P_{i,j,k}}(x_1) = (q^{2(j-k)} - 1) x_1^{i+1} x_2^j x_3^k.
$$

(2) Soit $P_i = x_1^i x_2^i x_3^i$, $i \in \mathbb{N}^*$, alors

$$
\begin{aligned}
ad_{P_i}(x_1) &= 0, \\
ad_{P_i}(x_2) &= -x_2[(1 - q^{-4i}) x_1^i x_2^i x_3^i + q^{-2i-1} s_{i-1} \Omega x_1^{i-1} x_2^{i-1} x_3^{i-1}], \\
ad_{P_i}(x_3) &= [(1 - q^{-4i}) x_1^i x_2^i x_3^i + q^{-2i-1} s_{i-1} \Omega x_1^{i-1} x_2^{i-1} x_3^{i-1}] x_3.
\end{aligned}
$$

(3) Soit $P_{j,i} = x_1^j x_2^i x_3^i$, $i, j \in \mathbb{N}^*$, *alors*

$$\begin{aligned}
ad_{P_{j,i}}(x_1) &= 0,\\
ad_{P_{j,i}}(x_2) &= -x_2[(1-q^{2(i-j)})x_1^j x_2^i x_3^i + q^{-2j+1}q_i x_1^{j+1}x_2^{i-1}x_3^{i-1}],\\
ad_{P_{j,i}}(x_3) &= [(1-q^{2(i-j)})x_1^j x_2^i x_3^i + q^{-2j+1}q_i x_1^{j+1}x_2^{i-1}x_3^{i-1}]x_3.
\end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 2.1 et 2.2. □

Dans le reste on note par C le centralisateur de x_1 dans B.

Lemme 2.4. *Soit D une $\Bbbk$-dérivation de B, telle que $D(x_1) \in C$. Alors:*

$$D(x_1) = \sum_{i\geq 1} b_i x_1^i + \sum_{i,j\geq 1} t_{i,j} x_1^i x_2^j x_3^j,$$

$$D(x_2) = Qx_2 + \sum_{i=1}^{n} T_i x_2^{i+1} x_3^i,$$

$$D(x_3) = Q' x_3 + \sum_{i=1}^{n} T'_i x_2^i x_3^{i+1},$$

où $b_i, t_{i,j} \in \Bbbk$ *et* $Q_i, Q'_i, T_i, T'_i \in \Bbbk[x_1]$. *En particulier* $D(x_2) \in x_2 C$ *et* $D(x_3) \in C x_3$.

Démonstration. Comme $D(x_1) \in C$, on peut écrire:

$$D(x_1) = b + \sum_{i\geq 1} r_i x_2^i x_3^i + \sum_{i,j\geq 1} t_{i,j} x_1^i x_2^j x_3^j,$$

où $r_i, t_{i,j} \in \Bbbk$ et $b = \sum_{i\geq 0} b_i x_1^i \in \Bbbk[x_1]$. D'autre part si on développe $D(x_2)$ et $D(x_3)$, on a

$$D(x_2) = P + \sum_{i\geq 1} Q_i x_2^i + \sum_{i\geq 1} R_i x_3^i + \sum_{i,j\geq 1} T_{i,j} x_2^i x_3^j,$$

$$D(x_3) = P' + \sum_{i\geq 1} Q'_i x_2^i + \sum_{i\geq 1} R'_i x_3^i + \sum_{i,j\geq 1} T' i,j x_2^i x_3^j,$$

avec $P, P', Q_i, Q'_i, R_i, R'_i, T_{i,j}, T'_{i,j} \in \Bbbk[x_1]$ pour tout i, j. On applique D à l'égalité $x_2x_1 = q^2x_1x_2$, en tenant compte des identités du lemme 2.1, on aura:

$$\begin{aligned} q^{-2}D(x_2x_1) = q^{-2}x_1P &+ \sum_{i\geq 1} q^{2(i-1)}Q_ix_1x_2^i + \sum_{i\geq 1} q^{-2(i+1)}R_ix_1x_3^i \\ &+ \sum_{i,j\geq 1} q^{2(i-j)-2}T_{i,j}x_1x_2^ix_3^j + q^{-2}x_2b + \sum_{i\geq 1} r_iq^{-2}x_2^{i+1}x_3^i \\ &+ \sum_{i,j\geq 1} t_{i,j}q^{2(i-1)}x_1^ix_2^{j+1}x_3^j, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} D(x_1x_2) = bx_2 &+ \sum_{i\geq 1} r_iq^{2i}x_2^{i+1}x_3^i - \sum_{i\geq 1} r_iq^{-2(i-1)+1+2i}q_ix_1x_2^ix_3^{i-1} \\ &+ \sum_{i,j\geq 1} t_{i,j}q^{2j}x_1^ix_2^{j+1}x_3^j - \sum_{i,j\geq 1} t_{i,j}q^{-2(j-1)+1+2j}q_jx_1^{i+1}x_2^jx_3^{j-1} \\ &+ x_1P + \sum_{i\geq 1} Q_ix_1x_2^i + \sum_{i\geq 1} R_ix_1x_3^i + \sum_{i,j\geq 1} T_{i,j}x_1x_2^ix_3^j. \end{aligned} \tag{4}$$

Si on compare les coefficients de (3) et (4) on en déduit que: $b_0 = P = Q_i = 0$, pour tout $i > 1$; $R_i = r_i = 0$, pour tout $i \geq 1$ et $T_{i,j} = 0$, pour tout $i \neq j+1$. D'où

$$D(x_1) = \sum_{i\geq 1} b_ix_1^i + \sum_{i,j\geq 1} t_{i,j}x_1^ix_2^jx_3^j \text{ et } D(x_2) = Qx_2 + \sum_{i\geq 1} T_ix_2^{i+1}x_3^i,$$

avec $T_i = T_{i+1,i}$, pour tout i et $Q = Q_1$. Par symétrie et en utilisant la relation $x_3x_1 = q^{-2}x_1x_3$, on trouve le résultat. □

Lemme 2.5. *Soit δ une application linéaire de B telle que*

$$\delta(x_1) = 0, \quad \delta(x_2) = -x_2P, \quad \delta(x_3) = Px_3,$$

*où $P \in C$. Alors il existe $c(\Omega) \in \Bbbk[\Omega]$ et $\Delta \in$ **Derint**(B), tels que $\delta = c(\Omega)\delta_1 + \Delta$. En particulier δ est une $Z(B)$-dérivation.*

Démonstration. Comme $P \in C$ on a $P = a + \sum_{i\geq 1, j\geq 0} \alpha_{i,j} x_1^j x_2^i x_3^i$ avec $a \in \Bbbk[x_1]$ et $\alpha_{i,j} \in \Bbbk$, pour tout i, j. Alors, d'aprèes le lemme 2.3(3), modulo les dérivations intérieures de la forme $\left(\frac{\alpha_{i,j}}{1-q^{2(i-j)}}\right) ad_{P_{j,i}}, j \neq i$ et $P_{j,i} = x_1^j x_2^i x_3^i$; on a

$$\delta(x_1) = 0, \quad \delta(x_2) = -x_2\left(a' + \sum_{i\geq 1} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i\right),$$
$$\delta(x_3) = \left(a' + \sum_{i\geq 1} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i\right) x_3,$$

avec $a' \in \Bbbk[x_1]$ et $\alpha_i \in \Bbbk$, pour tout i. Modulo cette fois les dérivations intérieures de la forme $ad_{x_1^i}$, on peut encore écrire

$$\delta(x_1) = 0, \quad \delta(x_2) = -x_2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i\right),$$
$$\delta(x_3) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i\right) x_3.$$

D'aprèes le lemme 2.3(2) on a:

$$-x_2[\alpha_n x_1^n x_2^n x_3^n] = \left(\frac{\alpha_n}{1-q^{-4n}}\right) ad_{x_1^n x_2^n x_3^n}(x_2) + x_2\left[\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}} \Omega x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1}\right],$$

$$[\alpha_n x_1^n x_2^n x_3^n] x_3 = \left(\frac{\alpha_n}{1-q^{-4n}}\right) ad_{x_1^n x_2^n x_3^n}(x_3) - \left[\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}} \Omega x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1}\right] x_3.$$

Donc, modulo $\left(\frac{\alpha_n}{1-q^{-4n}}\right) ad_{x_1^n x_2^n x_3^n}$ on a:

$$\delta(x_1) = 0,$$
$$\delta(x_2) = -x_2\left[\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i + \left(\alpha_{n-1} - \left(\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}}\right)\Omega\right) x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1}\right],$$
$$\delta(x_3) = \left[\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i x_1^i x_2^i x_3^i + \left(\alpha_{n-1} - \left(\frac{\alpha_n q^{-2n-1}}{1-q^{-4}}\right)\Omega\right) x_1^{n-1} x_2^{n-1} x_3^{n-1}\right] x_3.$$

De proche en proche on aura: $\delta(x_1) = 0$, $\delta(x_2) = -c(\Omega)x_2$, $\delta(x_3) = c(\Omega)x_3$, où $c(\Omega) \in \Bbbk[\Omega]$. □

Proposition 2.6. *Soit D une $Z(B)$-dérivation de B telle que $D(x_1)$ appartienne àa C. Alors D est la somme d'une dérivation intérieure et d'une $Z(B)$-dérivation de la forme $c(\Omega)\delta_1$ pour un élément central $c(\Omega) \in Z(B)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.4 on a $D(x_1) = x_1 a, D(x_2) = x_2 b$, $D(x_3) = cx_3$ avec $a, b, c \in C$. Alors si on applique D au deux premières égalités de Eq. (2) on trouvera que $a \in Z(B) = \Bbbk[\Omega]$. D'autre part $D(\Omega) = 0$ implique que $D(\overline{x}_1) = -\overline{x}_1 a = -a\overline{x}_1$, et par suite $D(x_2x_3) = -(q^{-1} - q^3)^{-1}$ $(\overline{x}_1 + q^2 x_1)a$. D'où

$$x_2(b + c)x_3 = -x_2x_3a - 2\big(q^{-1} - q^3\big)^{-1} q^2 x_1 a. \tag{5}$$

Alors si $a = 0$ on a $b = -c$. La proposition découle donc du lemme 2.5. Par l'absurde, supposons que $a \neq 0$. Alors $a = \alpha_0 + \alpha_1\Omega + \cdots + \alpha_n\Omega^n$, $\alpha_i \in \Bbbk$, avec au moins un des α_i est non nul. On développe a dans la base, on obtient

$$a = \sum_{i\geq 0} \alpha_i q^{2i} x_1^{2i} + \sum_{i,j,h\geq 1} \beta_{i,j,h} x_1^i x_2^j x_3^h, \text{ où } \beta_{i,j,h} \in \Bbbk.$$

On compare les coefficients dans (5), on trouve que

$$-2q^2(q^{-1} - q^3)^{-1} \sum_{i\geq 0} \alpha_i q^{2i} x_1^{2i+1} = 0,$$

c'est à dire que $\alpha_i = 0$, pour tout i. Ce qui est faux. □

Théorème 2.7. *Toute $Z(B)$-dérivation de B est la somme d'une dérivation intérieure et d'une $Z(B)$-dérivation de la forme $c(\Omega)\delta_1$ pour un élément central $c(\Omega) \in Z(B)$.*

Démonstration. Il est facile de vérifier que $D(\Omega) = 0$ implique que $D(x_1) \in Bx_1 = x_1B$, car Bx_1 est idéal complètement premier ([1], théorème 2.4). En développant sous la forme:

$$D(x_1) = \sum_{i,j,h\geq 0} \alpha_{i,j,h} x_1^{i+1} x_2^j x_3^h \ \text{ où } \alpha_{i,j,h} \in \Bbbk,$$

on peut intégrer suivant une dérivation intérieure (grâce au lemme 2.3(1)) les monômes pour lesquels $j \neq h$, ce qui permet d'écrire $D = D_0 + ad_P$ pour un certain $P \in B$, avec $D_0(x_1) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j,j} x_1^{i+1} x_2^j x_3^j$ qui appartient donc au centralisateur C de x_1. Le théorème est donc une conséquence de la proposition 2.6 appliquée à D_0. □

Soit δ_2 une application linéaire de B définie par;

$$\delta_2(x_1) = x_1, \quad \delta_2(x_2) = x_2, \quad \delta_2(x_3) = 0.$$

On vérifie facilement que $\delta_2 \in \mathbf{Der}(B)$ et que $\delta_2(\Omega) = 2\Omega$.

Lemme 2.8. *Toute dérivation de B est de façon unique la somme d'une $Z(B)$-dérivation et d'une dérivation de la forme $r(\Omega)\delta_2$, avec $r(\Omega) \in Z(B)$.*

Démonstration. Soit $D \in \mathbf{Der}(B)$. Le centre $Z(B)$ étant stable par D, on a $D(\Omega) = \alpha_0 + \alpha_1\Omega + \cdots + \alpha_n\Omega^n$ avec $\alpha_i \in \mathbb{k}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Mais comme $\Omega = (q^{-1} - q^3)x_1x_2x_3 + q^2x_1^2$ est sans terme constant, il en est de même de $D(\Omega)$. Donc $\alpha_0 = 0$. On peut alors considérer dans $\mathbb{k}[\Omega]$ le polynôme $r(\Omega) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2\Omega + \cdots + \alpha_n\Omega^{n-1})$. Il vérifie $D(\Omega) = r(\Omega)2\Omega$. La dérivation $D - r(\Omega)\delta_2$ est donc une $Z(B)$-dérivation. Il suffit d'appliquer à Ω les dérivations considérées pour obtenir l'unicité. □

Théorème 2.9. *Soit D une $\mathbb{k}$-dérivation de B. Il existe une unique dérivation intérieure Δ, et des éléments centraux $c(\Omega)$ et $r(\Omega)$, tels que $D = c(\Omega)\delta_1 + r(\Omega)\delta_2 + \Delta$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 2.8 et du théorème 2.7. □

REMERCIEMENT

Nous remercions le référée pour toutes ses suggestions et surtout pour sa contribution à la démonstration du théorème 2.9.

RÉFÉRENCES

1. Malliavin, M.P. Algèbre d'Heisenberg Quantique. Bull. Soc. Math. **1995**, *118*, 511–537.
2. Kirkman, E.E.; Small, L.W. Q-analogue of Harmonic Oscilation and Related Ring. Israel. J. Math. **1993**, *81* (1–2), 111–127.

3. Ben Yakoub, L.; Malliavin, M.P. Caractérisation des Dérivations Intérieures de l'Algèbre de Weyl et De l'Algèbre d'Heisenberg Quantique. Commun. Algebra. **1996**, *10* (24), 3131–3148.
4. Goodearl, K.R.; Letzter, E.S. Prime Factor Algebras of the Coordinate Ring of Quantum Matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **1994**, *121*, 1017–1025.
5. Alev, J.; Dumas, F. Rigidité des Plongements des Quotients Primitifs Minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'Algèbre Quantique de Weyl-Hayashi. Nagoya Math. J. **1996**, *143*, 119–146.
6. Goodearl, K.R.; Warfield Jr, R.B. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*; London Mathematical Society Student Texts, 16, Cambridge University Press, 1989.
7. Goodearl, K.R. Prime Ideals in Skew Polynomial Rings and Quantized Weyl Algebras. J. Algebra. **1992**, *150*, 324–377.
8. McConnell, J.C.; Pettit, J.J. Crossed Products and Multiplicative Analogues of Weyl Algebras. J. London Math. Soc. **1988**, *38* (2), 47–55.
9. Jategaonkar, A.V. *Localization in Noetherian Rings*; London Mathematical Society Lecture Note Series 98, Cambridge University Press, 1986.
10. McConnell, J.C.; Robson, J.C. *Noncommutative Noetherian Rings*; J. Wiley and Sons: Chichester-New York, 1987.
11. Bell, A.D. *Note on Localizations in Noncommutative Noetherian Rings*; Cuadernos de Álgebra, Universidad de Granada: Spain, 1988, (9).
12. Rigal, L. Analogue Quantique de l'Algèbre de Weyl et Ordres Maximaux Quantiques. Ph.D. Thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1997.
13. Levasseur, T.; Stafford, J.T. The Quantum Coordinate Ring of Special Linear Group. J. Pure Appl. Algebra. **1993**, *86*, 181–186.
14. Goodearl, K.R.; Lenagan, T.H. Catenarity in Quantum Algebras. J. Pure Appl. Algebra. **1996**, *111*, 123–142.
15. Gómez Torrecillas, J.; Jara, P.; Merino, L. Locally Finite Representations of Algebras. Commun. Algebra. **1996**, *24* (14), 4581–4601.

Received March 2000