

Sur une classe d'extensions de Ore itérées

L. El Kaoutit¹, J. Gómez-Torrecillas^{*,2}

Departamento de Algebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain

Reçu le 15 juillet 2003 ; accepté le 30 juillet 2003

Résumé

Dans ce travail, on démontre que les cliques d'idéaux premiers d'une classe d'extensions de Ore itérées coïncident avec leurs orbites par rapport à une opération d'un groupe abélien bien déterminé. Cette classe est une sous-classe de celle étudiée dans (S.-Q. Oh, Comm. Algebra 25 (1) (1997) 37–49) et elle contient l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}, A)}(\mathbb{k})$, les anneaux des coordonnées des espaces symplectiques et euclidiens quantiques $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ et $\mathcal{O}_q(\mathfrak{ol}\mathbb{k}^{2 \times n})$. Les ensembles classiquement localisables sont aussi étudiés. Finalement, on analyse la résolution injective minimale et comme application on montre que la résolution injective minimale de $A_2^{(\mathbf{q}, A)}(\mathbb{k})$ se comporte comme celle de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble.

© 2003 Elsevier SAS. Tous droits réservés.

MSC : 16W35 ; 16E05

Mots-clés : Localisation non commutative ; Cliques d'idéaux premiers ; Résolution injective minimale ; Anneaux de coordonnées des espaces quantiques

Introduction

K.A. Brown et K.R. Goodearl ont étudié dans [3] le spectre premier (l'ensemble des idéaux premiers) de certaines algèbres satisfaisant sept hypothèses. Ils ont montré que l'anneau vérifiant ces hypothèses, satisfait la séparation normale, d'où la condition forte de second niveau, au sens de Jategaonkar. Les liens entre les idéaux premiers d'une algèbre R satisfaisant les sept hypothèses ont été aussi étudiés ; ils ont démontré que la clique de

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : torrecil@ugr.es (J. Gómez-Torrecillas).

¹ Este autor quiere agradecer el Ministerio de Educación Cultura y Deporte por la beca de Movilidad durante el curso 2001/2001 para el programa de doctorado FISYMAT.

² Financiado por la ayuda BFM2001-3141 del Ministerio de Ciencia y Tecnología y FEDER.

chaque idéal premier P de R coïncide avec la \mathcal{H} -orbite de P , où \mathcal{H} est un groupe abélien de rang fini engendré par des automorphismes d’algèbre de R .

Dans ce travail on étudie les liens entre les idéaux premiers de l’algèbre $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$, voir la définition 1.1. Signalons que $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ ne satisfait pas la troisième hypothèse de [3, 1.1], comme l’indique l’exemple 3.3. Pour procéder, on va utiliser d’une part la classification du spectre premier $\text{Spect}(R_n^{(C,A)}(\mathbb{k}))$ de $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ déterminé par des méthodes effectives dans [9], et d’autre part les versions modifiées des résultats de K.A. Brown et K.R. Goodearl [3], effectuées par M. Akhavadegan dans [1]. La description des cliques des idéaux premiers dans $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ nous permettra d’étudier les ensembles et les idéaux (classiquement) localisables, en utilisant des résultats classiques de [16,18,30]. Finalement, on calcule par des méthodes analogues à [23] la résolution injective minimale de $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$. Comme application on donne une réponse affirmative, pour l’algèbre $A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})$, à la question posée par M.P. Malliavin [24, Problem 4.5].

1. L’algèbre $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ et les ensembles admissibles

Fixons un corps commutatif \mathbb{k} . D.A. Jordan a introduit dans [19] une classe d’extension de Ore R , définie par $R = A[y; \alpha][x; \beta, \delta]$, où A est une \mathbb{k} -algèbre et un domaine noethérien et les variables y, x sont soumises aux relations suivantes : $ya = \alpha(a)y$, $xa = \beta(a)x$, pour tout $a \in A$ et $xy - \rho yx = v$, où $\rho \in \mathbb{k}^*$ et v est un élément normal de A . L’algèbre de Weyl quantique $A_n^{(q,A)}(\mathbb{k})$ apparue dans les travaux de Maltsiniotis [25], représente un exemple révélateur, construit à partir de la classe R . Ultérieurement, S.Q. Oh a étudié dans [28] une classe d’extensions de Ore itérées, résultant comme forme itérée de celle de Jordan. L’algèbre sous considération a été introduite et étudiée dans [9] ; comme on verra dans la définition suivante elle constitue une sous-classe de celle de Oh.

Définition 1.1. Soit n un entier strictement positif. Posons $C = (c_1, c_2, \dots, c_n, d, \lambda, u)$ un élément de $(\mathbb{k}^\times)^{n+2} \times \mathbb{k}$ avec $d = 1$ si $u \neq 0$. Considérons $\Lambda = (\lambda_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ une matrice à coefficients dans \mathbb{k}^\times tel que $\lambda_{ji} = \lambda_{ij}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. On définit $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ comme la \mathbb{k} -algèbre de type fini engendrée par $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$, satisfaisant les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 y_j y_i &= \lambda_{ji} y_i y_j, & y_j x_i &= \lambda_{ji}^{-1} d x_i y_j \quad (j > i), \\
 x_j x_i &= \lambda_{ji} c_i^{-1} d^{-1} x_i x_j, & x_j y_i &= \lambda_{ji}^{-1} c_i y_i x_j \quad (j > i), \\
 x_i y_i &= c_i y_i x_i + \lambda \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda d)^{i-1-l} (c_l d - 1) y_l x_l + (d \lambda)^{i-1} u \quad (i \geq 1).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

D’après [28, p. 39], $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ est une extension de Ore itérée

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq \dots \subseteq R_n^{(C,A)}(\mathbb{k}) = R_n,$$

où $R_0 = \mathbb{k}$ et $R_k = R_{k/2}[x_k; \beta_k, \delta_k]$, $R_{k/2} = R_{k-1}[y_k; \alpha_k]$ pour tout $k \geq 1$ et α_i, β_i sont des automorphismes des algèbres :

$$\begin{aligned} \alpha_j(y_i) &= \lambda_{ji} y_i, & \alpha_j(x_i) &= \lambda_{ji}^{-1} d x_i, & i < j, \\ \beta_j(y_i) &= \lambda_{ji}^{-1} c_i y_i, & \beta_j(x_i) &= \lambda_{ji} c_i^{-1} d^{-1} x_i, & i < j, \\ \beta_i(y_i) &= c_i y_i, \end{aligned} \tag{2}$$

et chaque δ_i est une β_i -dérivation définie par

$$\begin{aligned} \delta_i(y_i) &= \lambda \sum_{l=1}^{i-1} (\lambda d)^{i-1-l} (c_l d - 1) y_l x_l + (\lambda d)^{i-1} u, & i > 1, \\ \delta_i(R_{i-1}) &= 0, & i \geq 1, & \text{ et } \delta_1(y_1) = u. \end{aligned}$$

C'est donc un domaine noethérien. Cette classe d'algèbres contient l'algèbre de Weyl quantique $A_n^{(\mathbf{q}, A)}(\mathbb{k})$ ($C = (\mathbf{q}, 1, 1, 1)$) avec $\mathbf{q} = (c_i)_{i=1}^n$, l'anneau des coordonnées de l'espace quantique symplectique $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp}\mathbb{k}^{2 \times n})$ ($C = (q^2, \dots, q^2, 1, q, 0)$, $\lambda_{ji} = q$) et l'anneaux des coordonnées de l'espace quantique Euclidien $\mathcal{O}_q(\mathfrak{o}\mathbb{k}^{2 \times n})$ ($C = (1, \dots, 1, q^{-2}, q, 0)$, $\lambda_{ji} = q^{-1}$). Suivant [28, p. 39], on a

Lemme 1.2. *Posons $z_i = dx_i y_i - y_i x_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $z_0 = du$. Alors*

$$\begin{aligned} z_j y_i &= c_i y_i z_j, & z_j x_i &= c_i^{-1} x_i z_j & (i \leq j), \\ z_j y_i &= d^{-1} y_i z_j, & z_j x_i &= dx_i z_j & (i > j), \\ z_j z_i &= z_i z_j & (\text{pour tout } i, j), \\ x_i y_i &= c_i y_i x_i + \lambda z_{i-1} & (i = 2, \dots, n), & x_1 y_1 = c_1 y_1 x_1 + d^{-1} z_0, \\ z_i &= (c_i d - 1) y_i x_i + d \lambda z_{i-1} & (i = 2, \dots, n), & z_1 = (c_1 d - 1) y_1 x_1 + z_0. \end{aligned}$$

En particulier, $\delta_i(y_i) = \lambda z_{i-1}$, pour tout $i > 1$.

En utilisant les notations du lemme 1.2, on obtient

Lemme 1.3. *Considérons les variables $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ avec les relations (1). Alors*

(a) *Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $i = 2, \dots, n$, on a*

$$\begin{aligned} x_i^r y_i - c_i^r y_i x_i^r &= \lambda d^{-(r-1)} (r)_{c_i d} z_{i-1} x_i^{r-1}, \\ x_i y_i^r - c_i^r y_i^r x_i &= \lambda (r)_{c_i d} z_{i-1} y_i^{r-1}, \end{aligned}$$

où $(r)_k = 1 + k + \dots + k^{r-1}$ pour chaque $k \in \mathbb{k}$. Pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} x_1^r y_1 - c_1^r y_1 x_1^r &= d^{-r} (r)_{c_1 d} z_0 x_1^{r-1}, \\ x_1 y_1^r - c_1^r y_1^r x_1 &= d^{-1} (r)_{c_1 d} z_0 y_1^{r-1}. \end{aligned}$$

(b) Soit $X^v = y_1^{v_1} x_1^{\bar{v}_1} \cdots y_n^{v_n} x_n^{\bar{v}_n}$, $v = (v_1, \bar{v}_1, \dots, v_n, \bar{v}_n) \in \mathbb{N}^{2n}$, alors

$$\begin{aligned} y_i X^v &= \lambda_v X^v y_i + \lambda_{v'} X^{v'} z_{i-1}, \\ x_i X^v &= \lambda'_v X^v x_i + \lambda'_{v'} X^{v'} z_{i-1}, \end{aligned}$$

où $v' \in \mathbb{N}^{2n}$, $\lambda_v, \lambda_{v'}, \lambda'_v, \lambda'_{v'} \in \mathbb{k}^*$; $i = 1, \dots, n$.

Démonstration. Pour celle de (b) on utilise (a). Une récurrence sur r et lemme 1.2, nous prouve (a). \square

Remarque 1.4. D’après les relations (1), on a $\delta_i \beta_i = c_i d \beta_i \delta_i$ pour tout $i \geq 1$. Alors si $c_i d$ n’est pas racine de l’unité, pour $i = 1, \dots, n$, on a d’après [14, Theorem 2.3] tout idéal premier de $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ est complètement premier.

On suppose dans tout ce travail que chacun des $c_i d$, $i = 1, \dots, n$, n’est pas racine de l’unité.

On note par R l’algèbre $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$. Considérons l’ordre lexicographique $<_{lex}$ avec $y_1 <_{lex} x_1 <_{lex} \cdots <_{lex} y_n <_{lex} x_n$ sur l’ensemble des monômes de R ,

$$\{X^v = y_1^{v_1} x_1^{\bar{v}_1} \cdots y_n^{v_n} x_n^{\bar{v}_n} \mid v = (v_1, \bar{v}_1, \dots, v_n, \bar{v}_n) \in \mathbb{N}^{2n}\}.$$

C’est à dire que

$$y_1 <_{lex} x_1 <_{lex} z_1 <_{lex} \cdots <_{lex} z_{n-1} <_{lex} y_n <_{lex} x_n <_{lex} z_n. \tag{3}$$

1.5. Soit $Q = (q_{ij})$ une matrice carrée d’ordre m à coefficients dans \mathbb{k}^* tel que $q_{ji} = q_{ij}^{-1}$ et $q_{ii} = 1$, pour tout $i, j = 1, \dots, m$. L’algèbre $\mathbb{k}_Q[x_1, \dots, x_m]$ engendrée par x_1, \dots, x_m soumis aux relations $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$, est appelée l’anneau des coordonnées de l’espace quantique affine m -dimensionnel ou tout simplement l’espace quantique associé à la matrice Q . Il est clair que c’est une extension de Ore itérée de \mathbb{k} de la forme :

$$\mathbb{k}_Q[x_1, \dots, x_m] = \mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2] \cdots [x_m; \alpha_m]$$

où $\alpha_j(x_i) = q_{ij}^{-1} x_i$ pour tout $i < j$. Il est bien connu que l’ensemble multiplicatif engendré par $\{x_1, \dots, x_m\}$ est un ensemble de Ore ; la localisation correspondante est notée par $\mathbf{P}(Q) = \mathbb{k}_Q[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]$ et connue sous le nom de l’algèbre de McConnell–Pettit associée à Q . On définit maintenant l’espace quantique attaché à R , comme $\mathbb{k}_{Q_n}[Y_1, X_1, \dots, Y_n, X_n]$, où Q_n étant la matrice suivante :

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & \cdots & Y_n & X_n \\ Y_1 & 1 & c_1^{-1} & \lambda_{21}^{-1} & \lambda_{21} c_1^{-1} & \cdots & \lambda_{n1}^{-1} & \lambda_{n1} c_1^{-1} \\ X_1 & c_1 & 1 & \lambda_{21} d^{-1} & \lambda_{21}^{-1} c_1 d & \cdots & \lambda_{n1} d^{-1} & \lambda_{n1}^{-1} c_1 d \\ Y_2 & \lambda_{21} & \lambda_{21}^{-1} d & 1 & c_2^{-1} & \cdots & \lambda_{n2}^{-1} & \lambda_{n2} c_2^{-1} \\ X_2 & \lambda_{21}^{-1} c_1 & \lambda_{21} c_1^{-1} d^{-1} & c_2 & 1 & \cdots & \lambda_{n2} d^{-1} & \lambda_{n2}^{-1} c_2 d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_n & \lambda_{n1} & \lambda_{n1}^{-1} d & \lambda_{n2} & \lambda_{n2}^{-1} d & \cdots & 1 & c_n^{-1} \\ X_n & \lambda_{n1}^{-1} c_1 & \lambda_{n1} c_1^{-1} d^{-1} & \lambda_{n2}^{-1} c_2 & \lambda_{n2} c_2^{-1} d^{-1} & \cdots & c_n & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \tag{4} \end{matrix}$$

Observons que $Y_1u = duY_1$ et $X_1u = d^{-1}uX_1$.

Définitions 1.6. Notons par \mathfrak{p}_n le sous-ensemble de R suivant :

$$\mathfrak{p}_n = \begin{cases} \{z_1, y_1, x_1, \dots, z_n, y_n, x_n\}, & \text{si } z_0 = 0, \\ \{z_1, z_2, y_2, x_2, \dots, z_n, y_n, x_n\}, & \text{si } z_0 \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Dans le premier cas les éléments de \mathfrak{p}_n forment la suite des monômes finie strictement croissante citée dans l'équation (3). Mais, dans le cas $z_0 \neq 0$, ils forment la suite finie strictement croissante suivante

$$z_1 \prec_{lex} y_2 \prec_{lex} x_2 \prec_{lex} z_2 \prec_{lex} \dots \prec_{lex} z_{n-1} \prec_{lex} y_n \prec_{lex} x_n \prec_{lex} z_n.$$

Suivant [27] (voir aussi [9, Section 1]), un sous-ensemble T de \mathfrak{p}_n est dit *admissible* si c'est un ensemble vide ou s'il satisfait aux conditions suivantes :

- (1) y_i ou $x_i \in T \Leftrightarrow z_i$ et $z_{i-1} \in T$, pour tout $i \geq 2$,
- (2) x_1 ou $y_1 \in T \Leftrightarrow z_1 \in T$, si $z_0 = 0$.

Pour le moment si P est un idéal premier de R (i.e. complètement premier), alors $P \cap \mathfrak{p}_n$ est un ensemble admissible.

Rappelons, du [9, Theorem 1.8] que chaque ensemble admissible engendre un idéal polynormal qui est en outre complètement premier. Pour la définition de la propriété *AR* (Artin–Rees) on renvoie à [26, 4.2.3]

Proposition 1.7. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors l'idéal $\langle T \rangle$ vérifie la propriété *AR*.*

Démonstration. Écrivons $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ avec $t_i \prec_{lex} t_{i+1}, i = 1, \dots, r$, voir la définition 1.6. La suite $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ est clairement polynormale. En plus si $t_i \in \{y_k, x_k\}, i > 1$, alors $z_{k-1} \in \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle$. On en déduit, d'après le lemme 1.3(b), que pour tout $i, j > 1$ et $v \in \mathbb{N}^{2n}$, on a

$$t_i X^v t_j \equiv \lambda_i X^v t_j t_i [\text{mod} \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle], \quad \text{pour un certain } \lambda_i \in \mathbb{k}^\times$$

et aussi

$$t_i X^v t_j \equiv \lambda_j t_j t_i X^v [\text{mod} \langle t_1, \dots, t_{j-1} \rangle], \quad \text{pour un certain } \lambda_j \in \mathbb{k}^\times.$$

C'est à dire que

$$t_i \langle T \rangle + \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle = \langle T \rangle t_i + \langle t_1, \dots, t_{i-1} \rangle, \quad \forall i > 1.$$

Pour $i = 1$, on a $t_1 \in \{x_1, y_1, z_k\}, k > 1$ si $z_0 = 0$ ou $t_1 \in \{z_k\}, k \geq 1$ si $z_0 \neq 0$. Alors, d'après le lemme 1.2, on a $t_1 \langle T \rangle = \langle T \rangle t_1$. On conclut donc par l'application du critère [26, Theorem 4.2.7]. \square

1.8. Rappelons de [9, Section 3], que si T est un ensemble admissible de R , alors la *strate* associée à T , $\text{Spect}_T(R)$, est le sous-ensemble de $\text{Spect}(R)$ suivant

$$\text{Spect}_T(R) = \{P \in \text{Spect}(R) \mid P \cap \mathfrak{p}_n = T\}.$$

La stratification de $\text{Spect}(R)$ est donnée par

$$\text{Spect}(R) = \bigsqcup_{T \text{ est admissible}} \text{Spect}_T(R). \quad (6)$$

Notons par \mathcal{H} le tore (\mathbb{k}^\times) (si $z_0 \neq 0$) ou $(\mathbb{k}^\times)^{n+1}$ (si $z_0 = 0$), d'après [9, Définition 2.2], \mathcal{H} peut être identifié à un sous groupe abélien du groupe des automorphismes d'algèbre de R , $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(R)$. Suivant [3, 0.8], une suite des éléments $\{t_1, \dots, t_l\}$ de R est dite \mathcal{H} -polynormale s'il existe $h_1, \dots, h_l \in \mathcal{H}$, tels que $t_{jr} \equiv h_j(r)t_j \pmod{\langle t_1, \dots, t_{j-1} \rangle}$, pour tout $r \in R$.

On note \mathcal{W} l'ensemble de tous les idéaux \mathcal{H} -premiers (voir [15]), alors, d'après [9, Proposition 2.10], il existe une bijection entre \mathcal{W} et l'ensemble des ensembles admissibles de R donnée par $W \in \mathcal{W} \mapsto W \cap \mathfrak{p}_n$ avec inverse $T \mapsto \langle T \rangle$ où T est admissible. De cette manière, la stratification (6) n'est autre que la \mathcal{H} -stratification de [3, 1.1, Hypothèses 1,2] où $J_W = W = \langle W \cap \mathfrak{p}_n \rangle$, $W \in \mathcal{W}$, est l'unique élément minimal de $\text{Spect}_W(R) = \text{Spect}_{W \cap \mathfrak{p}_n}(R)$, par rapport auquel l'algèbre R ne satisfait pas [3, 1.1, Hypothèse 3]. Plus précisément, il existe des ensembles admissibles T , tels que $\langle T \rangle$ n'est pas un idéal \mathcal{H} -polynormal (i.e. engendré par une suite d'éléments \mathcal{H} -polynormale), voir l'exemple 3.3.

2. La séparation normale

Rappelons [18, p. 225] qu'un anneau noethérien vérifie la *séparation normale* (ou bien son spectre premier est normalement séparé) si dans chaque quotient premier, chaque idéal premier non nul contient un élément normal non nul. Afin de prouver la séparation normale de $R = R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$, on a besoin du matériel technique suivant.

2.1. [9,27] Soit T un ensemble admissible de R , définition 1.6. On note par $\text{ind}(T)$ l'ensemble des indices $\text{ind}(T) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid z_i \in T\}$, on note aussi $\mathcal{I}_T = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid y_i \in T\}$ et $\mathcal{J}_T = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid x_j \in T\}$. Un indice $i \in \text{ind}(T)$ est dit *renouvelable* si T contient x_i et y_i ; l'ensemble de tout les indices renouvelables sera noté par $\text{Renv}(T)$. Avec ces notations on a donc $\text{Renv}(T) = \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{I}_T \cap \mathcal{J}_T = \emptyset$. On dit que T est *connexe* si pour tout $i, j \in \text{ind}(T)$ tel que $i < k < j$, on a $k \in \text{ind}(T)$. Une *composante connexe* de T est un sous-ensemble connexe U de T tel que pour tout sous-ensemble connexe V de T avec $U \subseteq V$ on a $U = V$. Tout ensemble admissible est d'une forme unique réunion disjointe de ces composantes connexes, c'est à dire que pour tout admissible T , on a $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$, $r \in \mathbb{N}$, où chacun des T_s , $s = 1, \dots, r$ est une composante connexe. On appelle cette réunion la *décomposition en composantes connexes* de T . Posons $i_k = \min(\text{ind}(T_k))$, $j_k = \max(\text{ind}(T_k))$, on suppose toujours que $j_{k-1} < i_k - 1$, pour $k = 2, \dots, r$.

Avec les notations ci-dessus, considérons \mathcal{Y}_T l'ensemble multiplicatif de R engendré par les y_j , où $j \notin \mathcal{J}_T$. D'après [9, Proposition 2.5], \mathcal{Y}_T est un ensemble de Ore (i.e. à gauche et à droite) de R . Soit Q_T la sous-matrice de Q_n (voir 1.5) définie en annulant les lignes et les colonnes correspondantes aux variables x_i , $y_i \in T$ et x_{i_k} , $k = 1, \dots, r$. Si $z_0 = 0$ et $x_1 \notin T$ on n'annulera pas la ligne et la colonne correspondante à la variable x_1 . Considérons A_T l'espace quantique associé à la matrice Q_T , c'est donc une sous-algèbre

de l'espace quantique $A_\emptyset = \mathbb{k}_{Q_n}[Y_1, X_1, \dots, Y_n, X_n]$ attaché à R . L'ensemble multiplicatif \mathbb{Y}_T de A_T engendré par tous les Y_k est un ensemble de Ore à droite, considérons donc $B_T = A_T \mathbb{Y}_T^{-1}$. On note par \bar{a} l'image de $a \in R$ dans $R/\langle T \rangle$. Considérons le morphisme d'algèbre, $\Psi_T : (R/\langle T \rangle) \overline{\mathbb{Y}_T}^{-1} \rightarrow B_T$ défini par

$$\Psi_T(\bar{x}_i) = \Psi(\bar{y}_j) = 0, \quad \text{pour } i \in \mathcal{I}_T, \text{ et } j \in \mathcal{J}_T,$$

$$\Psi_T(\bar{y}_k) = Y_k, \quad \text{pour tout } k \notin \mathcal{J}_T,$$

et tel que si $k \notin \mathcal{I}_T$

$$\Psi_T(\bar{x}_1) = X_1 + (1 - c_1 d)^{-1} Z_0 Y_1^{-1} \quad (\text{si } k = 1 \notin \text{int}(T)),$$

$$\Psi_T(\bar{x}_1) = (1 - c_1 d)^{-1} Z_0 Y_1^{-1} \quad (\text{si } k = 1 \in \text{int}(T) \text{ et } z_0 \neq 0),$$

$$\Psi_T(\bar{x}_1) = X_1 \quad (\text{si } k = 1 \in \text{int}(T) \text{ et } z_0 = 0),$$

$$\Psi_T(\bar{x}_k) = X_k \quad (\text{si } k = 1 \in \text{int}(T), k \geq 2),$$

$$\Psi_T(\bar{x}_k) = X_k + (1 - c_k d)^{-1} \lambda Z_{k-1} Y_k^{-1} \quad (\text{si } 2 \leq k \text{ et } k, k - 1 \notin \text{int}(T)),$$

$$\Psi_T(\bar{x}_k) = (1 - c_k d)^{-1} \lambda Z_{k-1} Y_k^{-1} \quad (\text{si } 2 \leq k \text{ et } k \in \text{int}(T) \text{ et } k - 1 \notin \text{ind}(T)),$$

où $Z_0 = d^{-1} z_0 = u$, $Z_k = (c_k d - 1) Y_k X_k$. Comme $\langle T \rangle$ est un idéal complètement premier, il est clair que $\mathcal{Y}_T \cap \langle T \rangle = \emptyset$ alors, d'après [6, Proposition 3.6.15], $R \mathcal{Y}_T^{-1} / \langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1} \cong (R/\langle T \rangle) \overline{\mathbb{Y}_T}^{-1}$. Composant Ψ_T avec ce dernier isomorphisme on arrive à une nouvelle application qu'on note aussi par Ψ_T . Ce morphisme est inspiré de [29, Section 3.2] pour le cas de $A_n^{(q, \lambda)}(\mathbb{k})$ (voir [10] pour le cas de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sp} \mathbb{k}^{2 \times n})$). D'après [9, Proposition 2.7], l'application

$$\Psi_T : \frac{R \mathcal{Y}_T^{-1}}{\langle T \rangle \mathcal{Y}_T^{-1}} \rightarrow B_T \tag{7}$$

est un isomorphisme des \mathbb{k} -algèbres.

2.2. Soit T un ensemble admissible de R , on note par \mathcal{X}_T l'image inverse, par Ψ_T (l'isomorphisme de (7)), de l'ensemble multiplicatif \mathbb{X}_T engendré par toutes les variables X_j qui apparaissent dans l'espace quantique A_T associé à la matrice Q_T . Il est clair que c'est un ensemble de Ore de $(R/\langle T \rangle) \overline{\mathbb{Y}_T}^{-1}$, la localisation associée sera notée par R_T

$$R_T = ((R/\langle T \rangle) \overline{\mathbb{Y}_T}^{-1}) \mathcal{X}_T^{-1}.$$

On a donc $R_T \cong \mathbf{P}(Q_T)$, l'algèbre de McConnell–Pettit associée à Q_T . Notons que

$$\Psi_T^{-1}(X_j) = \begin{cases} \bar{x}_j, & \text{si } j - 1 \in \text{ind}(T), \\ c_j(c_j d - 1)^{-1} \bar{z}_j (\bar{y}_j)^{-1}, & \text{si } j \notin \text{ind}(T). \end{cases} \tag{8}$$

Pour $j = 1$, c'est à dire que si X_1 apparait dans B_T , alors

$$\begin{cases} x_1 \notin T, & \text{si } z_0 = 0, \\ 1 \notin \text{ind}(T), & \text{si } z_0 \neq 0 \end{cases}$$

d'où

$$\Psi_T^{-1}(X_1) = \begin{cases} \bar{x}_1 \neq 0, & \text{si } z_0 = 0, \\ c_1(c_1 d - 1)^{-1} \bar{z}_1 \bar{y}_1^{-1}, & \text{si } z_0 \neq 0. \end{cases} \tag{9}$$

Pour un idéal premier P de R avec $\langle T \rangle \subseteq P$, on note $\bar{P} = P/\langle T \rangle$. Si \bar{P} peut être étendu à R_T , on note son extension par \bar{P}^e .

Remarque 2.3. Soit T un ensemble admissible de R , écrivons

$$\{i_1, \dots, i_l\} = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid X_i \in A_T\},$$

et

$$\{j_1, \dots, j_k\} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{J}_T.$$

Un élément $z \in R_T$ s'écrit donc sous la forme

$$z = \bar{r}(\bar{y}_{j_1}^{-n_1} \dots \bar{y}_{j_k}^{-n_k})\Psi_T(X_{i_1})^{-m_1} \dots \Psi_T(X_{i_l})^{-m_l},$$

pour certains $r \in R$, $n_1, \dots, n_k; m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$. En utilisant les équations (8) et (9), on peut écrire cet élément sous la forme

$$z = \bar{r}\bar{s}^{-1}(\bar{y}_{j_1}^{-k_1} \dots \bar{y}_{j_m}^{-k_m}),$$

pour certains $r \in R$, y_{j_t} , $t = 1, \dots, m$ tel que $j_t, j_t - 1 \notin \text{ind}(T)$ où \bar{s} est un élément normal de $R/\langle T \rangle$ qui est le produit des \bar{z}_k, \bar{y}_j (j ou $j - 1 \in \text{ind}(T)$) et des \bar{x}_i ou $i - 1 \in \text{ind}(T)$.

Proposition 2.4. *Considérons l'algèbre $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ tel que chacun des $c_i d$ n'est pas racine de l'unité. Alors $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ vérifie la séparation normale. En particulier $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$ satisfait la condition forte de second niveau.*

Démonstration. Soient $P \subsetneq Q$ deux idéaux premiers emboîtés de $R = R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$. Supposons que $T = P \cap \mathfrak{p}_n \subsetneq Q \cap \mathfrak{p}_n = T'$; c'est à dire que P et Q appartiennent à différents strates dans la stratification (6). Alors, il est trivial qu'il existe un élément non-nul normal modulo P appartenant à Q/P . Supposons, maintenant, que $T = T'$; P et Q sont donc dans le même strate. Considérons l'algèbre R_t de 2.2; d'après [13, Proposition 2.2], R_T est polycentral. Suivant les notations de 2.2, il existe donc $z \in \bar{Q}^e$ qui est un élément non-nul et central modulo \bar{P}^e . Supposons que $z \equiv \bar{r}\bar{s}^{-1}[\text{mod } \bar{P}^e]$, pour un certain $r \in R$ (\bar{r} sera donc un élément de \bar{Q} non nul modulo \bar{P}) et un élément normal $\bar{s} \in R/\langle T \rangle$. Soit donc $a \in R \setminus P$, on a

$$z\bar{a} \equiv \bar{a}z [\text{mod } \bar{P}^e],$$

$$\bar{r}\bar{a}'\bar{s}^{-1} \equiv \bar{a}'\bar{r}(\bar{s})^{-1} [\text{mod } \bar{P}^e], \quad \text{pour un certain } a' \in R, \text{ car } \bar{s} \text{ est supposé normal,}$$

cela implique que $(\bar{r}\bar{a}' - \bar{a}'\bar{r}) \in \bar{P}^e$ et en suite $(ra' - ar) \in P$. Comme a a été pris arbitrairement, $r \in Q \setminus P$ est un élément normal modulo P . Afin d'achever la preuve de la première assertion, il suffit donc de montrer que z peut être écrit sous la dite forme. Pour cela, notons d'abord comme dans la remarque 2.3, par $\{y_{j_1}, \dots, y_{j_m}\}$ l'ensemble de tous les y_j tel que $j, j - 1 \notin \text{ind}(T)$ qui apparaissent dans l'expression de z modulo \bar{P}^e . On procède par une récurrence sur m . Si $m = 1$, on peut donc écrire, d'après la remarque 2.3, $z \equiv \bar{r}\bar{s}^{-1}\bar{y}_{j_1}^{-k_1} [\text{mod } \bar{P}^e]$, pour certains $r \in R$, un élément normal $\bar{s} \in R/\langle T \rangle$ et $k_1 \in \mathbb{N}^*$. Le lemme 1.3(a), implique que

$$z\bar{x}_{j_1}\bar{y}_{j_1}^{k_1} - c_{j_1}^{k_1}z\bar{y}_{j_1}^{k_1}\bar{x}_{j_1} \equiv \lambda(k_1)c_{j_1}d\bar{z}_{j_1-1}z\bar{y}_{j_1}^{(k_1-1)} [\text{mod } \bar{P}^e],$$

et donc

$$z \bar{y}_{j_1}^{(k_1-1)} \equiv (\lambda(k_1)_{c_{j_1} d})^{-1} \bar{z}_{j_1-1}^{-1} (\bar{x}_{j_1} \bar{r} - c_{j_1}^{k_1} \gamma \bar{r} \bar{x}_{j_1}) \bar{s}^{-1} \pmod{\bar{P}^e},$$

où $\gamma \in \mathbb{k}^\times$. Ce qui entraîne que z modulo \bar{P}^e peut être écrit sous la forme

$$z \equiv \bar{r} \bar{s}^{-1} \bar{y}_{j_1}^{-(k_1-1)} \pmod{\bar{P}^e}, \quad \text{pour certains } r \in R, \\ \text{et un élément normal } \bar{s} \in R/\langle T \rangle.$$

On répète le même calcul, mais cette fois avec z module \bar{P}^e écrit sous cette nouvelle forme, on aboutit au résultat. Supposons maintenant que $m > 1$, on a donc

$$z \equiv \bar{r} \bar{s}^{-1} \bar{y}_{j_1}^{-k_1} \dots \bar{y}_{j_m}^{-k_m} \pmod{\bar{P}^e},$$

pour certains $r \in R$, un élément normal $\bar{s} \in R/\langle T \rangle$ et des entiers positifs k_1, \dots, k_m . En appliquant le lemme 1.3(a), comme dans le cas $m = 1$, on aura

$$z \bar{y}_{j_m}^{k_m-1} \equiv (\lambda(k_m)_{c_{j_m} d})^{-1} \bar{z}_{j_m-1}^{-1} (\bar{x}_{j_m} \bar{r} - c_{j_m}^{k_m} \gamma \bar{r} \bar{x}_{j_m}) \bar{s}^{-1} \bar{y}_{j_1}^{-k_1} \dots \bar{y}_{j_{m-1}}^{-k_{m-1}} \pmod{\bar{P}^e},$$

où $\gamma \in \mathbb{k}^\times$. On continue d'éliminer les puissances de y_{j_m} , on arrive à

$$z \equiv \bar{r} \bar{s}^{-1} \bar{y}_{j_1}^{-k_1} \dots \bar{y}_{j_{m-1}}^{-k_{m-1}} \pmod{\bar{P}^e},$$

pour un certain $r \in R$ et un élément normal $\bar{s} \in R/\langle T \rangle$. L'hypothèse de récurrence entraîne donc que

$$z \equiv \bar{r} \bar{s}^{-1} \pmod{\bar{P}^e},$$

pour $r \in R$ et un élément normal $\bar{s} \in R/\langle T \rangle$ adéquats. La seconde assertion de la proposition est une déduction directe de [16, Lemma 11.14]. \square

3. L'opération du groupe G_T sur $\text{Spect}_T(R)$

Maintenant on va définir une opération d'un groupe abélien sur chaque strate $\text{Spect}_T(R)$, où T parcourt l'ensemble des ensembles admissibles de R . Ce groupe est construit d'une manière canonique à partir de la suite normalisante engendrant T , comme dans [3]. Mais comme on va le voir (exemple 3.3), cette opération ne vérifie pas l'hypothèse 3 de [3, p. 2469], par rapport à la stratification du spectre premier de R indiquée dans (6).

Si T est un ensemble admissible connexe on définit la *longueur* de T , notée par $\text{long}(T)$, par

$$\text{long}(T) = \text{card}(\text{ind}(T)) + \text{card}(\text{Renv}(T)),$$

où $\text{card}(\text{ind}(T))$ (resp. $\text{card}(\text{Renv}(T))$) est le cardinal de $\text{ind}(T)$ (resp. le cardinal de $\text{Renv}(T)$). La longueur d'un ensemble admissible non nécessairement connexe T est définie par

$$\text{long}(T) = \sum_{k=1}^r \text{long}(T_k),$$

où $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$ est la décomposition de T en composantes connexes. Rappelons [9, Proposition 2.6] que la hauteur de l'idéal premier $\langle T \rangle$ est égale à la longueur de T , i.e. $\text{haut}(\langle T \rangle) = \text{long}(T)$.

Notre prochain objectif est de construire simultanément une chaîne strictement croissante de sous-ensembles admissibles de T qui a pour longueur exactement $\text{long}(T)$, et une suite d'éléments $\{t_1, \dots, t_{\text{long}(T)}\}$ de T qui forme une suite régulière normalisante et génératrice de l'idéal $\langle T \rangle$. Il est clair donc que cette chaîne impliquera une chaîne maximale d'idéaux premiers qui permettra le calcul de $\text{haut}(\langle T \rangle)$. La méthode de construction est basée sur la décomposition en composantes connexes de chaque ensemble admissible.

3.1. Fixons un ensemble admissible T de R , $j = \max(\text{ind}(T))$ et $i = \min(\text{ind}(T))$. On considère différents cas.

(a) *Le cas connexe.* Si T est connexe, considérons un sous-ensemble admissible $\mathcal{T} \subseteq T$, avec $k = \max(\text{ind}(\mathcal{T})) < j$. Supposons que \mathcal{T} est tel que si $k \in \text{Renv}(\mathcal{T})$, alors $k \in \mathcal{J}_{\mathcal{T}}$. On définit l'ensemble admissible \mathcal{T}^T suivant

$$\mathcal{T}^T = \begin{cases} \mathcal{T} \cup \{x_k\} & \text{si } k \in \text{Renv}(T) \text{ et } x_k \notin \mathcal{T}, \\ \mathcal{T} \cup \{y_{k+1}, z_{k+1}\} & \text{sinon} \begin{cases} \text{et si } y_{k+1} \in T, \\ \text{et si } y_{k+1} \notin T. \end{cases} \\ \mathcal{T} \cup \{x_{k+1}, z_{k+1}\} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\text{long}(\mathcal{T}^T) = \text{long}(\mathcal{T}) + 1$ et que $\mathcal{T}^T \subseteq T$.

(b) *Le cas non connexe.* Si T n'est pas connexe, considérons sa décomposition en composantes connexes $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$. Considérons \mathcal{T} un sous-ensemble admissible tel que si $k \in \text{Renv}(\mathcal{T})$, alors $k \in \mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ et que

$$T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} \subseteq \mathcal{T} \subsetneq T_1 \cup \dots \cup T_s, \\ \text{avec } s > 1, \text{ et } \max(\text{ind}(\mathcal{T})) < \max(\text{ind}(T_s)),$$

on définit

$$\mathcal{T}^T = \begin{cases} (\mathcal{T} \setminus T_1 \cup \dots \cup T_{s-1})^{T_s} \cup T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} & \text{si } T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} \subsetneq \mathcal{T}, \\ T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} \cup \{z_{i_s}\} & \text{si } T_1 \cup \dots \cup T_{s-1} = \mathcal{T} \end{cases}$$

où $(\mathcal{T} \setminus T_1 \cup \dots \cup T_{s-1})^{T_s}$ est défini comme dans (a) et $i_s = \min(\text{ind}(T_s))$. On remarque aussi que $\text{long}(\mathcal{T}^T) = \text{long}(\mathcal{T}) + 1$ et que $\mathcal{T}^T \subseteq T$.

On va définir les suites des \mathcal{T}_m et des t_m récursivement. Par convention on prend $\mathcal{T}_0 = 0, \langle \mathcal{T}_0 \rangle = 0$. Pour définir \mathcal{T}^1 , on a deux cas :

Cas où $j > i > 1$, on prend $t_1 = z_i, \mathcal{T}_1 = \{t_1\}$.

Cas où $j > i = 1$. Si $z_0 \neq 0$, cela implique que $t_1 = z_1, \mathcal{T}_1 = \{t_1\}$. Mais si $z_0 = 0$, on prend

$$t_1 = \begin{cases} y_1 & \text{si } y_1 \in T, \\ x_1 & \text{si } y_1 \notin T, \end{cases}$$

et $\mathcal{T}_1 = \{t_1, z_1\}$. Finalement, si $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$ est la décomposition en composantes connexes de T , on prend donc

$$\mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m^T, \text{ pour } m \geq 1 \text{ et}$$

$$t_{m+1} = \begin{cases} x_{k_m} & \text{si } \mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m \cup \{x_{k_m}\}, \\ y_{k_m+1} & \text{si } \mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m \cup \{y_{k_m+1}, z_{k_m+1}\}, \\ x_{k_m+1} & \text{si } \mathcal{T}_{m+1} = \mathcal{T}_m \cup \{x_{k_m+1}, z_{k_m+1}\}, \text{ où } k_m = \max(\text{ind}(\mathcal{T}_m)), \\ z_{i_s} & \text{si } \mathcal{T}_m = \mathcal{T}_1 \cup \dots \cup \mathcal{T}_{s-1}, r > s > 1. \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{T}_0 \subsetneq \mathcal{T}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{T}_{\text{long}(T)} = T$$

est une chaîne d'ensembles admissibles vérifiant $\langle \mathcal{T}_m \rangle = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, pour tout $m = 1, \dots, l = \text{long}(T)$. En plus chacun des t_m est régulier et normal modulo $\langle t_1, \dots, t_{m-1} \rangle$, pour tout $m = 2, \dots, l$.

Lemme 3.2. Soient T et les $\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_0, t_m, 1 \leq m \leq l = \text{long}(T)$ comme dans 3.1. Alors, chaque t_m est un élément régulier et h_m^T -normal modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$, pour un certain automorphisme d'algèbre de $R/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$, h_m^T bien déterminé.

Démonstration. Calcul de h_1^T . Dans tous les cas $t_1 \in \{y_1, x_1, z_1, \dots, z_n\}$ est un élément normal régulier de R , h_1^T est donc calculé à partir des relations (1) et le lemme 1.2; par exemple si $t_1 = z_j, j = 1, \dots, n$ on a

$$h_1^T : x_i \mapsto \begin{cases} dx_i, & i > j, \\ c_i^{-1}x_i, & i \leq j, \end{cases}$$

$$y_i \mapsto \begin{cases} d^{-1}y_i, & i > j, \\ c_i y_i, & i \leq j. \end{cases}$$

Calcul des $h_m^T, m > 1$. On va examiner juste les cas où $t_m \in \{y_j, x_j\}, j \geq 2$. On commence donc par $t_m = y_j$, ici $z_{j-1} \in T$ et il est clair que c 'est un élément de $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$. On définit donc h_m^T , grâce aux relations (1), comme suit

$$h_m^T : \bar{x}_i \mapsto \begin{cases} \lambda_{ji}^{-1}d\bar{x}_i, & i < j, \\ \lambda_{ij}c_j^{-1}\bar{x}_i, & i > j, \\ c_i^{-1}\bar{x}_i, & i = j, \end{cases}$$

$$\bar{y}_i \mapsto \begin{cases} \lambda_{ji}\bar{y}_i, & i < j, \\ \lambda_{ij}^{-1}\bar{y}_i, & i > j, \end{cases}$$

où les relations sont prises modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$, avec $h_m^T(\bar{y}_j) = \bar{y}_j$ et l'image de tout élément de $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$ est zéro. Dans le cas où $t_m = x_j, j \in \mathcal{I}_T, m \geq 2$, on a

$$t_{m-1} = \begin{cases} y_j, & \text{si } j \in \text{Renv}(T), \\ z_{j-1}, & \text{si } j \notin \text{Renv}(T), j-1 \notin \mathcal{J}_T \text{ et } j-1 \notin \mathcal{I}_T, \\ x_{j-1}, & \text{si } j \notin \text{Renv}(T), j-1 \in \mathcal{I}_T, \\ y_{j-1}, & \text{si } j \notin \text{Renv}(T), j-1 \notin \mathcal{I}_T \text{ et } j-1 \in \mathcal{J}_T. \end{cases} \tag{10}$$

Concernant la première possibilité dans (10) on utilise les relations (1), afin d’avoir modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$

$$h_m^T : \bar{x}_i \mapsto \begin{cases} \lambda_{ji} c_i^{-1} d^{-1} \bar{x}_i, & i < j, \\ \lambda_{ij}^{-1} c_j d \bar{x}_i, & i > j, \end{cases}$$

$$\bar{y}_i \mapsto \begin{cases} \lambda_{ji}^{-1} c_i \bar{y}_i, & i < j, \\ \lambda_{ij} d^{-1} \bar{y}_i, & i > j, \end{cases}$$

avec $h_m^T(\bar{x}_j) = \bar{x}_j$ et tous les éléments de $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$ ont pour image zero. Dans les trois dernières possibilités de (10), h_m^T est défini comme dans la première sauf que l’on doit ajouter l’image de \bar{y}_j qui est donnée par $h_m^T(\bar{y}_j) = c_j \bar{y}_j$. \square

D’après la preuve du lemme précédent, on a pour chaque $m = 1, \dots, l = \text{long}(T)$, que $\langle T \rangle / \langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$ est h_m^T -stable dans $R / \langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$. On peut donc considérer $h_m^{T^c}$ l’extension de h_m^T à $R / \langle T \rangle$. On note par G_T le sous-groupe de $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(R / \langle T \rangle)$, engendré par $\{h_1^T, \dots, h_l^T\}$. Observons que c est un groupe abélien et que les $v_i \in \{\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i\}$ (modulo $\langle T \rangle$) sont des g -vecteurs propres, pour tout $g \in G_T$ i.e. $g(v_i) = \gamma_i v_i, \gamma_i \in \mathbb{k}^\times$.

En général l’automorphisme $h_m^{T^c}$, pour un $m = 1, \dots, l = \text{long}(T)$, ne provient pas d’un automorphisme sur l’algèbre R appartenant au tore \mathcal{H} défini dans 1.8. Cela est confirmé par l’exemple suivant :

Exemple 3.3. (a) Posons $n = 4$ et $z_0 \neq 0$, alors $d = 1$. Ici le tore algébrique est égal à $\mathcal{H} = (\mathbb{k}^\times)^4$ et son action sur $R_4^{(C,A)}(\mathbb{k})$ est définie, d’après [9, Remark 2.3], par : Si $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathcal{H}$, on a

$$h(y_i) = h_i y_i, \quad h(x_i) = h_i^{-1} x_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

Considérons l’ensemble admissible $T = \{z_1\} \cup \{z_3, x_4, z_4\}$; suivant les constructions de 3.1, on a $t_1 = z_1, \mathcal{T}_1 = \{z_1\}, t_2 = z_3, \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \cup \{z_3\}, t_3 = x_4, \mathcal{T}_3 = T$. On sait donc, d’après la preuve du lemme 3.2, que h_3^T est défini par

$$h_3^T(\bar{x}_i) = \lambda_{4i}^{-1} c_i^{-1} \bar{x}_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3,$$

$$h_3^T(\bar{x}_4) = \bar{x}_4,$$

$$h_3^T(\bar{y}_j) = \lambda_{4j}^{-1} c_j \bar{y}_j, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3,$$

$$h_3^T(\bar{y}_4) = c_4 \bar{y}_4$$

modulo $\langle \mathcal{T}_2 \rangle$. Si on suppose donc qu’il existe un élément $h \in \mathcal{H}$ tel que \bar{h} , le prolongement de h à $R_4^{(C,A)}(\mathbb{k}) / \langle \mathcal{T}_2 \rangle$, coïncide avec h_3^T , on aura alors

$$\bar{h}(\bar{z}_4) = h_3^T(\bar{z}_4) = \bar{z}_4 = c_4 \bar{z}_4$$

relations modulo l’idéal $\langle \mathcal{T}_2 \rangle$. Ensuite $c_4 = 1$, ce qui contredit les hypothèse génériques (chacun des $c_i d$ n’est pas racine de l’unité).

(b) Par contre, il est évident que si h_i^T est associé à un $t_i = z_{k_i}, k_i \in \text{ind}(T)$, il provient d’un automorphisme sur R appartenant à \mathcal{H} .

Soit T un ensemble admissible, G_T le groupe abélien associé et $P \in \text{Spect}_T(R)$. Prenons $h \in G_T$ et considérons l'opération suivante :

$$h *_T P = Q, \quad \text{tel que } h\left(\frac{P}{\langle T \rangle}\right) = \frac{Q}{\langle T \rangle}.$$

Lemme 3.4. *Soit T un ensemble admissible de R et G_T le groupe associé à T . Alors $*_T$ est une opération de G_T sur l'ensemble $\text{Spect}_T(R)$.*

Démonstration. Il suffit de voir que $*_T$ est bien définie. Soit donc $P \in \text{Spect}_T(R)$ et $h \in G_T$, on a $\langle T \rangle \subseteq h *_T P = Q \in \text{Spect}(R)$. Posons $Q \cap \mathfrak{p}_n = T'$ et supposons qu'il existe $v_i \in T' \setminus T$, $v_i = x_i, y_i$ ou z_i . D'où $h^{-1}(v_i + \langle T \rangle) = \alpha v_i + \langle T \rangle$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{k}^\times$, donc $v_i + \langle T \rangle \in P/\langle T \rangle$ et $v_i \in P \cap \mathfrak{p}_n = T$ ce qui est faux. Alors $T = T'$ et $Q \in \text{Spect}_T(R)$. \square

On note par $\text{Orbc}_{G_T}(P)$ la G_T -orbite d'un élément $P \in \text{Spect}_T(R)$.

4. Cliques et localisabilité

Soit A un anneau noethérien et P, Q deux idéaux premiers de A . Suivant [18], on dit qu'il existe un *lien* de P vers Q , ou que P est lié à Q , et on écrit $P \rightsquigarrow Q$, s'il existe un idéal I de A tel que $PQ \subseteq I \subsetneq P \cap Q$, avec $(P \cap Q)/I$ libre de torsion comme (A/P) -module à gauche et comme (A/Q) -module à droite. Un lien de type $P \rightsquigarrow P$ est dit trivial. Un ensemble X de $\text{Spect}(A)$ est dit de *lien-fermé à gauche* si pour tout $P \in X$ et $Q \rightsquigarrow P$, on a $Q \in X$; la notion du lien-fermé à droite est définie de la même manière. Un ensemble est dit lien-fermé s'il est lien-fermé à gauche et à droite.

Ceci détermine un graphe dans $\text{Spect}(A)$ et la *clique* d'un idéal premier P est la composante connexe de ce graphe qui contient P , on la note par $\text{Clique}(P)$. C'est donc le plus petit sous ensemble de lien-fermé dans $\text{Spect}(A)$ contenant P .

Proposition 4.1. *Soit T un ensemble admissible de R et R_T la localisation de $R/\langle T \rangle$ définit dans 2.2. Alors $\text{Spect}(R_T)$ n'a aucun lien non trivial.*

Démonstration. On sait d'après 2.2, que $R_T \cong \mathbf{P}(Q_T)$. Alors, d'après [13, Proposition 3.10], tout idéal de R_T est polycentral i.e. engendré par une suite centralisante. La proposition découle donc de [18, Corollary 5.3.11]. \square

Proposition 4.2. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors $\text{Spect}_T(R)$ est lien-fermé. En particulier*

$$\text{Clique}(P) \subseteq \text{Spect}_T(R), \quad \text{pour tout } P \in \text{Spect}_T(R).$$

Démonstration. Soit $P \in \text{Spect}_T(R)$ et $Q \in \text{Spect}(R)$ tel que $P \rightsquigarrow Q$ ou $Q \rightsquigarrow P$. On va traiter juste le cas $P \rightsquigarrow Q$, car l'autre est similaire. Puisque $\langle T \rangle$ vérifie la propriété AR (proposition 1.7), on a d'après [16, Proposition 11.16] que $\langle T \rangle \subseteq Q$. Posons $Q \cap \mathfrak{p}_n = T'$,

par les mêmes arguments on obtient $\langle T' \rangle \subseteq P$. On a donc $\langle T' \rangle \cap \mathfrak{p}_n = T' \subseteq P \cap \mathfrak{p}_n = T$ et $\langle T \rangle \cap \mathfrak{p}_n = T \subseteq Q \cap \mathfrak{p}_n = T'$, c'est à dire $T = T'$. D'ici, $Q \in \text{Spect}_T(R)$. \square

Remarque 4.3. Soit T un ensemble admissible et $P \in \text{Spect}_T(R)$ tel que $\langle T \rangle \subseteq P$. Alors la clique de $P/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(R/\langle T \rangle)$ est un singleton. En effet, supposons qu'il existe un $\bar{Q} = Q/\langle T \rangle$ distinct de $\bar{P} = P/\langle T \rangle$ tel que $\bar{P} \rightsquigarrow \bar{Q}$ dans $\text{Spect}(P/\langle T \rangle)$. Comme dans R tout idéal premier est complètement premier, cela implique que $Q \rightsquigarrow P$ dans $\text{Spect}(R)$. D'après la proposition 4.2, $Q \in \text{Spect}_T(R)$. En appliquant maintenant, [30, Lemma 2.11], on trouve

$$\bar{P}^e \rightsquigarrow \bar{Q}^e \quad \text{dans } \text{Spect}(R_T),$$

où on a utilisé les notation du paragraphe 2.2. Et par suite, $\bar{P}^e = \bar{Q}^e$, d'après la proposition 4.1 et donc $P = Q$.

Enfin, en appliquant [3, Proposition 2.5] à R_T avec cette fois $\langle T \rangle \subsetneq P$, on peut déduire que l'existence d'un lien arrivant à ou partant de $P/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(R/\langle T \rangle)$ est garanti par l'existence d'un lien arrivant à ou partant de \bar{P}^e dans $\text{Spect}(R_T)$.

Corollaire 4.4. Soit T un ensemble admissible de R et soient $T = \{t_1, \dots, t_l\}$, $l = \text{long}(T)$, \mathcal{T}_m, h_m^T comme dans 3.1 et lemme 3.2. Si $P \rightsquigarrow Q$ dans $\text{Spect}_T(R)$ avec $P \neq Q$. Alors $P = h_m^{T^e} *_T Q$, pour un certain $m' \in \{1, \dots, l\}$.

Démonstration. Posons $\mathcal{K} = \text{Spect}_T(R)$, montrons que les conditions de [1, Corollary 6.2.17] sont satisfaites. La proposition 2.4 assure que R satisfait la condition forte de second niveaux, le lemme 3.2 prouve que chaque t_m est h_m^T -normale modulo $\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle = \langle t_1, \dots, t_{m-1} \rangle$, pour $h_m^T \in \text{Aut}_{\mathbb{k}}(R/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$ cité dans la preuve de ce lemme. On sait que chaque $P \in \mathcal{K}$ contient $\langle T \rangle$, alors la proposition 4.2 et la remarque 4.3 montrent, respectivement, que \mathcal{K} est lien-fermé et que la clique de chaque $P/\langle T \rangle$ dans $\text{Spect}(P/\langle T \rangle)$ est un singleton. Finalement, le lemme 3.4 nous dit que \mathcal{K} est invariant sous les h_m^T . Alors il existe $m' \in \{1, \dots, l\}$ tel que $P/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle = h_{m'}^T(Q/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle)$. Le résultat est donc clair, puisque $h_{m'}^{T^e}$ est le prolongement à $R/\langle T \rangle \cong (R/\langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle)/\langle \langle T \rangle / \langle \mathcal{T}_{m'-1} \rangle \rangle$ de $h_{m'}^T$. \square

Corollaire 4.5. Soit T un ensemble admissible de R et $P \in \text{Spect}_T(R)$. Alors

$$\text{Clique}(P) = \text{Orb}_{G_T}(P).$$

Démonstration. Analogue à celle de [1, Theorem 6.5.3]. Soit $P \in \text{Spect}_T(R)$ avec $\langle T \rangle = \langle t_1, \dots, t_l \rangle$, $l = \text{long}(T)$, comme dans 3.1. Choisissons un indice $1 \leq m \leq l$, on sait que $\langle T \rangle / \langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle \subseteq P / \langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle$. Alors, d'après le lemme 3.2, on peut appliquer [3, Lemma 3.7]. D'où, $h_m^T(P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$ et $h_m^{T^{-1}}(P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$ sont dans $\text{Clique}(P/\langle \mathcal{T}_{m-1} \rangle)$. D'où $h_m^{T^e} *_T P$ et $h_m^{T^{e-1}} *_T P$ appartiennent à $\text{Clique}(P)$. Ensuite, $\text{Orb}_{G_T}(P) \subseteq \text{Clique}(P)$, puisque G_T est engendré par les $h_m^{T^e}$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de prouver que $\text{Orb}_{G_T}(P)$ est lien-fermé, puisque $P \in \text{Orb}_{G_T}(P)$. Soit donc $g \in G_T$ et supposons que $Q \rightsquigarrow g *_T P$ ou $g *_T P \rightsquigarrow Q$; d'après le corollaire 4.4 il existe $m \in \{1, \dots, l\}$ tel que $Q = h_m^{T^e} *_T (g *_T P)$ ou $g *_T P = h_m^{T^e} *_T Q$. Alors $Q = (h_m^{T^e} g) *_T P$ ou $Q = (h_m^{T^{e-1}} g) *_T P \in \text{Orb}_{G_T}(P)$. Enfin $\text{Clique}(P) = \text{Orb}_{G_T}(P)$. \square

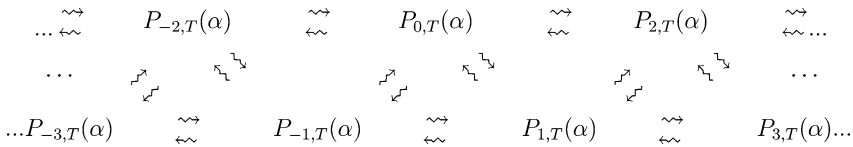
Exemple 4.6. Dans cet exemple on va calculer les cliques des idéaux premiers de l’algèbre $R_2^{(C,A)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ avec \mathbb{k} algébriquement clos. Sous les hypothèses où nous travaillons (i.e. q n’est pas racine de l’unité), il y a 14 ensembles admissibles [10, Corollary 2.6] et $\text{Clique}(\langle T \rangle) = \{\langle T \rangle\}$ pour chacun d’eux (corollaire 4.5), si T est l’un des ensembles admissibles suivants : $\{\emptyset\}$, $\{x_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{y_1, x_1, z_1\}$, ou $\{y_1, x_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$. Alors, d’après [10, Fig. 1], $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2})) = \{\langle T \rangle\}$. Soit, maintenant T un ensemble admissible de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ qui n’est pas de la forme précédente et $\langle T \rangle \subsetneq P \in \text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2}))$. Alors $P = P_T(\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{k}^\times$, qui est un idéal maximal dans $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2}))$, voir [10, Fig. 1]. Notons par $P_{m,T}(\alpha) := P_T(q^m \alpha)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Si $T \in \{\{x_1, z_1\}, \{y_1, z_1\}\}$, alors les cliques de $P_{0,T}(\alpha) = P_T(\alpha)$ sont dessinées dans le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\dots \rightsquigarrow P_{-8,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-4,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{0,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{4,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{8,T}(\alpha) \rightsquigarrow \dots$$

et si $T = \{z_2\}$ on a

$$\dots \rightsquigarrow P_{4,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{2,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{0,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-2,T}(\alpha) \rightsquigarrow P_{-4,T}(\alpha) \rightsquigarrow \dots$$

Si T est l’un des ensembles suivants : $\{y_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$, $\{y_1, x_1, z_1, x_2, z_2\}$, ou $\{y_1, x_1, z_1, y_2, z_2\}$. Alors les cliques de $P_{0,T}(\alpha)$ sont inclus dans le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)



Exemple 4.7. Ici nous donnerons les cliques des idéaux premiers de $R_2^{(C,A)}(\mathbb{k}) = \mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ toujours avec \mathbb{k} algébriquement clos et q non racine de l’unité. Il y a donc 14 ensembles admissibles [9, Corollary 2.11] et $\text{Clique}(\langle T \rangle) = \{\langle T \rangle\}$ pour chacun des T . D’après [9, Fig. 1], les cliques triviales correspondent aux ensembles suivants : $\{y_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{x_1, z_1, x_2, z_2\}$ et $\{y_1, x_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$. On a aussi $\text{Clique}(P) = \{P\}$, pour tout $P \in \text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2}))$ où T est l’un des ensembles suivants : $\{\emptyset\}$, $\{z_2\}$, $\{y_1, z_1\}$ ou $\{x_1, z_1\}$. Il reste donc 5 strates, qu’on va analyser dans la suite.

(1) $T = \{y_1, x_1, z_1\}$, d’après [9, Fig. 1], on a

$$\text{Spec}_T(\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2})) = \{\langle T \rangle\} \cup \{J \mid J \in \mathcal{J}\} \cup \{\langle T, y_2 - \gamma, x_2 - \alpha \rangle\}_{\gamma, \alpha \in \mathbb{k}^*},$$

où \mathcal{J} est l’ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(\mathfrak{sl}\mathbb{k}^{2 \times 2})$ contenant strictement $\langle y_1, x_1 \rangle$ et qui sont l’image inverse des idéaux premiers non-nuls mais non maximaux de $Z(\mathbf{P}(\mathcal{Q}_T)) = \mathbb{k}[y_2^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$. On peut donc prouver, sans difficultés, que $\text{Clique}(J) = \mathcal{J}$, pour tout $J \in \mathcal{J}$. Posons $P_T(\gamma, \alpha) = \langle T, y_2 - \gamma, x_2 - \alpha \rangle$ et $P_{l,m,T}(\gamma, \alpha) = P_T(q^l \gamma, q^m \alpha)$, $l, m \in \mathbb{Z}$. Alors $\text{Clique}(P_T(\gamma, \alpha))$ est le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\begin{aligned} \dots \rightsquigarrow P_{-2,2}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{-1,1,T}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{0,0,T}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow P_{1,-1,T}(\gamma, \alpha) \\ \rightsquigarrow P_{2,-2}(\gamma, \alpha) \rightsquigarrow \dots \end{aligned}$$

(2) Soit T l'un des ensembles suivants : $\{y_1, x_1, z_1, x_2, z_2\}$, $\{y_1, x_1, z_1, y_2, z_2\}$, $\{y_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$ ou $\{y_1, z_1, y_2, x_2, z_2\}$; on note par $P_T(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{k}^\times$ un idéal maximal dans $\text{Spect}_T(\mathcal{O}_q(\mathbb{k}^{2 \times 2}))$. Posons $P_{m,T}(\alpha) = P_T(q^m \alpha)$, $m \in \mathbb{Z}$, alors $\text{Clique}(P_T(\alpha))$ est inclus dans le diagramme suivant (les liens triviaux sont négligés)

$$\cdots \overset{\sim}{\rightsquigarrow} P_{-2,T}(\alpha) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} P_{-1,T}(\alpha) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} P_{0,T}(\alpha) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} P_{1,T}(\alpha) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} P_{2,T}(\alpha) \overset{\sim}{\rightsquigarrow} \cdots$$

Corollaire 4.8. *Soit T un ensemble admissible de R . Alors $\langle T \rangle$ est classiquement localisable.*

Démonstration. D'après le corollaire 4.5, $\text{Clique}(\langle T \rangle) = \{\langle T \rangle\}$. En utilisant la proposition 1.7, on peut donc appliquer [18, Proposition 7.3.13] pour avoir le corollaire. \square

Proposition 4.9. *Soit T un ensemble admissible de R tel que $\text{long}(T) = 2n - 1$, et $P \in \text{Spect}_T(R)$. Alors $\text{Clique}(P)$ est un ensemble classiquement localisable.*

Démonstration. D'après [18, Theorem 7.3.7], il suffit de montrer que $\text{Clique}(P)$ satisfait la condition d'intersection (voir [18, p. 190]). Soit donc $P \in \text{Spect}_T(P)$ avec $\text{long}(T) = 2n - 1$. On sait que tout idéal premier de R est complètement premier ; alors l'ensemble des éléments de R réguliers module l'idéal P est exactement $R \setminus P$. Soit J un idéal à droite ou à gauche de R tel que $J \subseteq \bigcup_{g \in G_T} (g *_T P)$ (rappelons du corollaire 4.5 que $\text{Clique}(P) = \text{Orb}_{G_T}(P)$) ; alors modulo $\langle T \rangle$ on a $\bar{J} \subseteq \bigcup_{g \in G_T} g(\bar{P})$. Mais \bar{R} est isomorphe ou bien à $\bar{R} \cong \mathbb{k}[v^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à une seule indéterminé ou bien à $\bar{R} \cong \mathbb{k}[v]$ l'anneau des polynômes commutatifs ; selon la valeur du paramètre $z_0 = 0$ ou $z_0 \neq 0$. On en déduit donc que \bar{J} est un idéal principal ; il existe donc nécessairement un élément $g_0 \in G_T$ tel que $\bar{J} \subseteq g_0(\bar{P})$. D'où $J \subseteq g_0 *_T P$. \square

Corollaire 4.10. *L'intersection des éléments de n'importe quelle clique dans $\text{Spect}(R)$ forme un idéal semi-premier classiquement localisable.*

Démonstration. Soit T un ensemble admissible de R et $P \in \text{Spect}_T(R)$, on note par $J_P = \bigcap_{Q \in \text{Clique}(P)} Q$. D'après le corollaire 4.5, on a $J_P = \bigcap_{g \in G_T} (g *_T P)$. Alors $\langle T \rangle \subseteq J_P$. Soit Q_1, \dots, Q_m l'ensemble des idéaux premiers minimaux sur J_P , alors il existe un indice i tel que $J_P \subseteq Q_i \subseteq P$. On a donc $Q_i \in \text{Spect}_T(R)$. Montrons que les Q_i appartiennent au même strate $\text{Spect}_T(R)$ et qu'ils forment une partie de la même orbite. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\langle T \rangle = 0$ et le groupe G_T devient un sous-groupe du groupe des automorphismes de R . En suite J_P est un idéal G_T -premier (voir [15]). D'après [3, 1.8] les idéaux premiers minimaux sur J_P forment une partie de la même orbite, ce qui prouve l'assertion ci-dessus. Le corollaire se déduit, maintenant, du corollaire 4.5 et [16, Theorem 12.21]. \square

5. La résolution injective minimale

Cette section contient quelques observations sur la résolution injective minimale de l'algèbre $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$. Les méthodes et les techniques utilisés, sont celles de [22–24] en combinaison avec [11] et [5].

Soit A un anneau et M un A -module à gauche ; on note par $\text{Injdim}(A M)$ la *dimension injective* de M (e.g. [26]). Si A est noethérien (i.e. à gauche et à droite), il est bien connu par [33], que la dimension injective de ${}_A A$ est égale à la dimension injective de A_A si les deux sont finies ; dans ce cas on note par $\text{Injdim } A$ cette dimension commune.

Soit A une \mathbb{k} -algèbre noethérienne, on rappelle que le *grade* d'un A -module (à gauche ou à droite) de type fini M , est définie par

$$j_A(M) = \inf\{j \geq 0 \mid \mathbf{Ext}_A^j(M, A) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Bien sûr $j(0) = +\infty$ (s'il n'y a pas d'ambiguïté, on note par $j_A(M) := j(M)$). Pour la notion des \mathbb{k} -algèbres Auslander–Gorenstein, Auslander-régulière, il y a plusieurs travaux où le lecteur pourra s'informer, nous citons ici [2,7,17,31] et leurs références.

Exemple 5.1. Toute extension de Ore itérée de la forme $\mathbb{k}[x_1][x_2; \alpha_2, \delta_2] \cdots [x_n; \alpha_n, \delta_n]$ où les α_i sont des automorphismes, est une \mathbb{k} -algèbre Auslander-régulière [2,7,32].

La dimension de Gelfand–Kirillov d'un A -module M est noté par $\text{GKdim}(M)$, voir [21] pour une étude détaillée de cette dimension. Une \mathbb{k} -algèbre A , avec $\text{GKdim}(A) \in \mathbb{N}$, est dite *Cohen–Macaulay* si

$$\text{GKdim}(M) + j(M) = \text{GKdim}(A),$$

pour tout A -module non nul de type fini M .

Un anneau A est dit *caténaire* si entre deux idéaux premiers emboîtés toutes les chaînes maximales des idéaux premiers ont la même longueur.

On dit qu'une \mathbb{k} -algèbre noethérienne A satisfait la *formule des hauteurs de Tauvel*, si

$$\text{haut}(P) + \text{GKdim}(A/P) = \text{GKdim}(A),$$

pour tout idéal premier P de A , où $\text{haut}(P)$ désigne la hauteur de P .

On note par R l'algèbre $R_n^{(C, \Lambda)}(\mathbb{k})$. Le corollaire suivant est une variante de [28, Théorems 8,11] (voir aussi [28, Theorem 10]). Mais, comme la classe des \mathbb{k} -algèbres de [28] forme partie de celles étudiées dans [8] et [12], une preuve alternative de [28, Theorem 8], sous la restriction de supposer que tous les u_i sont de degré total égal à deux, peut être donnée comme conséquence de [8, Teorema 14] ou de [12, Theorem 3].

Corollaire 5.2. *L'algèbre R est Auslander-régulière, Cohen–Macaulay, caténaire et elle satisfait la formule des hauteurs de Tauvel.*

Démonstration. D'après, [28, Theorem 8], R est Auslander-régulière, Cohen–Macaulay. En appliquant, [13, Theorem 1.6] et en utilisant la proposition 2.4, on obtient le reste de l'énoncé. \square

Dans tout le reste on suppose que \mathbb{k} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Soit A une \mathbb{k} -algèbre Auslander–Gorenstien et Cohen–Macaulay, alors d’après [11, Theorem 3.5], on a $\text{GKdim}(A) = \text{Injdim } A$ si et seulement s’il existe des A -modules à gauche non nuls de dimension finie comme \mathbb{k} -espace vectoriel.

Pour notre cas, il est clair que si $z_0 = 0$, alors R admet des modules non nuls de dimension finie comme \mathbb{k} -espace vectoriel ; et si $z_0 \neq 0$ alors, d’après [20], R admet aussi des modules de ce type. En conclusion le corollaire 5.2, implique que

$$\text{Injdim } R = \text{GKdim}(R) = 2n,$$

et que $j(R/P) = \text{haut}(P)$ pour tout idéal premier P de R .

Si P est un idéal complètement premier d’un anneau noethérien A , on note par $\mu_i(P, A)$ et on appelle *i ème invariant de Bass* de A , la dimension sur le corps gauche, $\text{Frac}(A/P)$ de l’espace vectoriel $\text{Frac}(A/P) \otimes_{A/P} \text{Ext}_A^i(A/P, A)$. D’après [24, Remark 4.2], on sait que $\mu_i(P, A) \neq 0$ si et seulement si $E(A/P)$ apparaît dans le *i ème* A -module de la résolution injective minimale de ${}_A A$.

Si M est un A -module à gauche non nul de type fini sur une \mathbb{k} -algèbre A , on dit que M est *critique* si $\text{GKdim}(M/A) \not\geq \text{GKdim}(M)$, pour chaque sous-module non nul N de M . Maintenant, on peut appliquer [22, Théorème 3.5] pour avoir.

Proposition 5.3. *Si tous les $c_i d$ ne sont pas racines de l’unité, la résolution injective minimale de ${}_R R$ est de la forme suivante :*

$$Q \rightarrow R \rightarrow E_0 \rightarrow \dots \rightarrow E_{2n} \rightarrow 0,$$

où $E_0 = \text{Frac}(R)$ et pour chaque $i \geq 1$, $E_i = E_i^I \oplus E_i^{II}$ où

$$E_i^I = \bigoplus_{\substack{P \in \text{Spect}(R) \\ \text{haut}(P)=i}} \mu_i(P, R) E(R/P)$$

et E_i^{II} est l’enveloppe injective d’une somme des modules critiques, chacun d’eux étant de torsion modulo son annulateur.

On va examiner le dernier terme qui apparaît dans la résolution injective minimale. Plus précisément, on montre que ce terme est isomorphe à R^o , le sous espace vectoriel de $R^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(R, \mathbb{k})$ consistant des formes linéaires f tel que $I \subseteq \text{Ker}(f)$ pour un certain idéal co-fini (i.e. $\dim_{\mathbb{k}}(R/I) < \infty$).

Sous les condition faites sur le corps de base, les idéaux premiers co-finis sont tous de co-dimension un. On en déduit donc, d’après [11, Corollary 3.8, Theorem 3.9], que :

Corollaire 5.4. *Soit E_{2n} le dernier terme dans la résolution injective minimale du $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$ -module à gauche $R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})$. Alors*

$$E_{2n} \cong R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})^o = \bigoplus_{\text{haut}(P)=2n} (R_n^{(C,A)}(\mathbb{k})/P).$$

Remarque 5.5. Considérons $R = A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})$, notons par Γ_2 le sous-groupe de \mathbb{k}^\times engendré par les paramètres $\lambda_{ij}, q_i, i, j = 1, 2$. Supposons que Γ_2 est un groupe libre de rang 3. Soit

$T = \{z_1, y_2, z_2\}$ un ensemble admissible de R qui engendre un idéal complètement premier de hauteur égale à 2. On se propose de calculer les invariants de Bass $\mu_i(\langle T \rangle, R)$ de R . D’après [24, Theorem 4.3], on sait que $\mu_2(\langle T \rangle, R) \neq 0$ et que $\mu_i(\langle T \rangle, R) = 0$ si $i \neq 2$, puisque $j(R/\langle T \rangle) = \text{haut}(\langle T \rangle) = 2$. D’autre part, bien que $\{z_1, y_2\}$ soit une suite régulière normalisante et génératrice de $\langle T \rangle$, les conditions du critère [4, Corollary 2.5] ne sont pas satisfaites, sous les hypothèses faites sur le groupe Γ_2 . Par contre si on applique à R , avec l’ordre $<_{lex}$ de la section 1, l’algorithme [5, Theorem 3.4], on trouve que

$$\text{Ext}_R^2(R/\langle T \rangle, R) \cong R/\langle T \rangle,$$

comme R -module. On en déduit donc que $\mu_2(\langle T \rangle, R) = 1$. Par symétrie, le même résultat s’applique si on prend comme ensemble admissible $T = \{z_1, x_2, z_2\}$.

Le corollaire suivant donne une réponse affirmative a la question de M.P. Malliavin [24, Problem 4.5] pour l’algèbre de Weyl quantique $A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})$. D’après [9, Corollary 4.2] et le corollaire 5.4 on a

Corollaire 5.6. *Si Γ_2 est un groupe libre de rang 3, alors la résolution injective minimale du $A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})$ -module à gauche $A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})$ est de la forme*

$$0 \rightarrow A_2^{(q,A)}(\mathbb{k}) \rightarrow E_0 \rightarrow \dots \rightarrow E_4 \rightarrow 0,$$

où $E_0 = \text{Frac}(A_2^{(q,A)}(\mathbb{k}))$ et pour tout $i \geq 1$, $E_i = E_i^I \oplus E_i^{II}$ où

$$E_i^I = \bigoplus_{\substack{P \in \text{Spect}(A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})) \\ \text{haut}(P)=i}} E(A_2^{(q,A)}(\mathbb{k})/P)$$

et E_i^{II} est l’enveloppe injective d’une somme des modules critiques chacun d’eux étant de torsion modulo son annulateur, avec $E_4^{II} = 0$.

Remerciement

Nous remercions aux Professeurs K.A. Brown et D.A. Jordan pour nous indiquer certaines références. On veut aussi remercier le referee pour toutes ses suggestions.

Références

[1] M. Akhavadegan, Prime ideals of quantum Weyl algebras, Ph.D. Thesis, University of Sheffield, 1997.
 [2] J.-E. Björk, The Auslander condition on Noetherian rings, in: M.-P. Malliavin (Ed.), Sémin. d’Algèbre P. Dubreil et M.-P. Malliavin 1987–1988, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1404, Springer-Verlag, 1989, pp. 137–173.
 [3] K.A. Brown, K.R. Goodearl, Prime spectra of quantum semisimple groups, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (6) (1996) 2465–2502.
 [4] K.A. Brown, T. Levasseur, Cohomology of bimodules over enveloping algebras, Math. Z. 189 (1985) 393–413.
 [5] J.L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas, F.J. Lobillo, Homological computations in PBW modules, Algebras and Representation Theory 4 (2001) 201–218.

- [6] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.
- [7] E.K. Ekström, The Auslander condition on graded and filtered Noetherian rings, in: M.-P. Malliavin (Ed.), Sémin. d'Algèbre P. Dubreil et M.-P. Malliavin 1987–1988, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1404, Springer-Verlag, 1989, pp. 220–245.
- [8] J. Gómez-Torrecillas, Regularidad de las álgebras envolventes cuánticas, in: Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, 2001, pp. 493–500, ISBN 8447206394, <http://thales.cica.es/congresos/ema/actas/comunicaciones/comm61.ps>.
- [9] J. Gómez-Torrecillas, L. El Kaoutit, Prime and primitive ideals of a class of iterated skew polynomial rings, *J. Algebra* 244 (2001) 186–216.
- [10] J. Gómez-Torrecillas, L. El Kaoutit, L. Ben Yakoub, Prime ideals of the coordinate ring of the quantum symplectic space, *Comm. Algebra* 29 (7) (2001) 3179–3197.
- [11] J. Gómez-Torrecillas, P. Jara, L. Merino, Locally finite representations of algebras, *Comm. Algebra* 24 (14) (1996) 4581–4601.
- [12] J. Gómez-Torrecillas, F.J. Lobillo, Auslander regular and Cohen–MacCaulay quantum groups, *Algebras and Representation Theory* (2004) (in press).
- [13] K.R. Goodearl, T.H. Lenagan, Catenarity in quantum algebras, *J. Pure Appl. Algebra* 111 (1996) 123–142.
- [14] K.R. Goodearl, E.S. Letzter, Prime factor algebras of the coordinate ring of quantum matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* 121 (1994) 1017–1025.
- [15] K.R. Goodearl, E.S. Letzter, The Dixmier–Moenglin equivalence in quantum coordinate rings and quantized Weyl algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000) 1381–1403.
- [16] K.R. Goodearl, R.B. Warfield Jr., An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, in: London Mathematical Society Student Texts, vol. 16, Cambridge University Press, 1989.
- [17] Y. Iwanaga, Duality over Auslander–Gorenstein rings, *Math. Scand.* 81 (1997) 184–190.
- [18] A.V. Jategaonkar, Localization in Noetherian Rings, in: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 98, Cambridge University Press, 1986.
- [19] D.A. Jordan, Krull and global dimension of certain iterated skew polynomial rings, in: Abelian Groups and Noncommutative Rings, in: Contemporary Mathematics, vol. 130, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, pp. 201–313, a Collection of Papers in Memory of Robert B. Warfield, Jr.
- [20] D.A. Jordan, Finite-dimensional simple modules over certain iterated skew polynomial rings, *J. Pure Appl. Algebra* 98 (1995) 45–55.
- [21] G.R. Krause, T.H. Lenagan, Growth of Algebra and Gelfand–Kirillov Dimension, in: Graduate Studies in Mathematics, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [22] M.P. Malliavin, Cohomologie locale de certains anneaux Auslander–Gorenstein, *Publ. Math.* 36 (1992) 725–742.
- [23] M.P. Malliavin, Algèbre d'Heisenberg quantique, *Bull. Soc. Math.* 118 (1995) 511–537.
- [24] M.P. Malliavin, Minimal injective resolutions: old and new, in: A. Verchoren, A. Granja, J.A. Hermida (Eds.), Rings Theory and Algebraic Geometry, in: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 221, Marcel-Dekker, 2001, pp. 251–256.
- [25] G. Maltsiniotis, Groupes quantiques et structures différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* 311 (1990) 831–834.
- [26] J.C. McConnell, J.C. Robson, Noncommutative Noetherian Rings, Wiley, Chichester, 1987.
- [27] S.-Q. Oh, Primitive ideals of the coordinate ring of quantum symplectic space, *J. Algebra* 174 (1995) 531–552.
- [28] S.-Q. Oh, Catenarity in a class of iterated skew polynomial rings, *Comm. Algebra* 25 (1) (1997) 37–49.
- [29] L. Rigal, Spectre de l'algèbre de Weyl quantique, *Beiträge Algebra Geom.* 37 (1) (1996) 119–148.
- [30] G. Sigurdsson, Links between prime ideals in differential operator rings, *J. Algebra* 102 (1986) 260–283.
- [31] T. Levasseur, Some properties of non-commutative regular graded rings, *Glasgow Math. J.* 34 (1992) 277–300.
- [32] T. Levasseur, J.T. Stafford, The quantum coordinate ring of special linear group, *J. Pure Appl. Algebra* 86 (1993) 181–186.
- [33] A. Zaks, Injective dimension of semiprimary rings, *J. Algebra* 13 (1969) 73–89.